MATEMATIČKA ANALIZA 2

Drugi kolokvij – 25. lipnja 2025.

Zadatak 1. (12 bodova)

(a) Za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln(x^2+1)$, odredite primitivnu funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvu da je $F(0) = 0$.

(b) Izračunajte

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Rješenje.

(a) Odredimo nepravi integral:

$$\begin{aligned}
\int x\ln\big(x^2+1\big)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} u = \ln(x^2+1) & \mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x & v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln\big(x^2+1\big) - \int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln\big(x^2+1\big) - \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x^2\ln\big(x^2+1\big) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln\big(x^2+1\big) + C \\
&= \frac{1}{2}\big((x^2+1)\ln\big(x^2+1\big) - x^2\big) + C
\end{aligned}$$

Slijedi da je $F(x) = \frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2) + C$. Kako je $F(0) = C$, zaključujemo da je $C = 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x+1}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = e^x & 0 \mapsto 1 \\ \mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}x & 1 \mapsto e \end{bmatrix} = \int_1^e \frac{t^2+t+1}{t(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= (\ln|t| + \operatorname{arctg} t)\Big|_1^e = 1 + \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Zadatak 2. (12 bodova)

(a) Izračunajte limes

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n-2)^2+n^2}+\frac{n}{(n-4)^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{(n-2n)^2+n^2}\right).$$

(b) Ispitajte konvergenciju reda:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^2(\ln n)}.$$

Rješenje.

(a) Primjećujemo da se radi o limesu integralnih suma neprekidne funkcije $x\mapsto \operatorname{arctg} x$ na intervalu $[-1,1]$ u točkama $-1+\frac{2i}{n}$ za $i=1,2,\ldots,n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n-2)^2+n^2}+\frac{n}{(n-4)^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{(n-2n)^2+n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n-2i)^2+n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(-1+\frac{2i}{n}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{4}$$

(b) Prirodna domena funkcije $f(x)=\frac{1}{x\ln x\ln^2(\ln x)}$ je $\langle 1,e\rangle\cup\langle e,+\infty\rangle$, na kojoj je neprekidna. Vidimo da je f padajuća na $\langle e,+\infty\rangle$ kao produkt pozitivnih rastućih funkcija u nazivniku ($x\mapsto x$, $x\mapsto \ln x$, $x\mapsto\ln^2(\ln x)$), gdje je $x\mapsto\ln^2(\ln x)$ rastuća kao kompozicija rastućih funkcija $\langle e,+\infty\rangle\ni x\mapsto \ln x\in\langle 1,+\infty\rangle$, $\langle 1,+\infty\rangle\ni x\mapsto\ln x\in\langle 0,+\infty\rangle$, $\langle 0,+\infty\rangle\ni x\mapsto x^2\in\langle 0,+\infty\rangle$.

$$\int_3^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln^2(\ln x)}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_3^{\xi}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln^2(\ln x)}=\begin{bmatrix}t=\ln x & 3\mapsto\ln 3\\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x} & \xi\mapsto\ln\xi\end{bmatrix}$$
$$=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\ln 3}^{\ln\xi}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}=\begin{bmatrix}s=\ln t & \ln 3\mapsto\ln\ln 3\\ \mathrm{d}s=\frac{\mathrm{d}t}{t} & \ln\xi\mapsto\ln\ln\xi\end{bmatrix}=\lim_{\xi\to+\infty}\int_{\ln\ln 3}^{\ln\ln\xi}\frac{\mathrm{d}s}{s^2}=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{-1}{s}\Big|_{\ln\ln 3}^{\ln\ln\xi}$$
$$=\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln\ln 3}-\frac{1}{\ln\ln\xi}\right)=\frac{1}{\ln\ln 3}$$

Prema Cauchyevom integralnom kriteriju, red $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^2(\ln n)}$ konvergira, čime i $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln^2(\ln n)}$ konvergira.

Zadatak 3. (13 bodova)

(a) Odredite sve $\alpha > 0$ za koje sljedeći nepravi integral konvergira

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Postoji li neprekidna funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ takva da niz $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ raste u $+\infty$, a za koju nepravi integral $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira?

Rješenje.

(a) Koristeći $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, zaključujemo da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi:

$$1 - x \le (1-x^2) \le 2(1-x).$$

Odatle slijedi

$$\int_0^1 \frac{1}{2^\alpha(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Dakle, po usporednom kriteriju traženi integral konvergira ako i samo ako konvergira integral

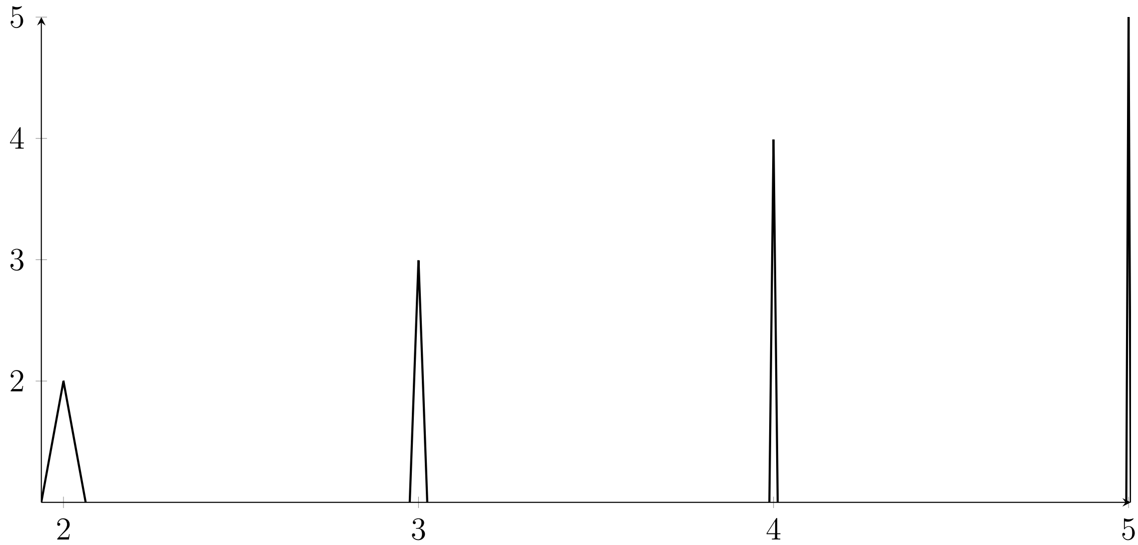
$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Supstitucijom $y = 1 - x$ integral postaje:

$$\int_0^1 y^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left.\frac{y^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_0^1 & \alpha \neq 1 \\ \left.\ln y\right|_0^1 = +\infty, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Dakle, gornji izraz je konačan ako i samo ako je $-\alpha + 1 > 0$, tj. ako i samo ako je $\alpha < 1$.

(b) Postoji. Skica rješenja:



Navedena funkcija može se zapisati formulom kao:

$$f(x) = \begin{cases} n - |n^4(x-n)|, & x \in [n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}],\ n \in \mathbb{N}, n \ge 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Očito je $f(n) = n$, dok je integral jednak sumi površina trokuta sa bazom veličine $2/n^3$ i visine n, što je jednako $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$.

Zadatak 4. (13 bodova)

(a) Izračunajte $f^{(2025)}(1)$ za $f(x) = x\sin x$.

(b) Odredite sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot n!}.$$

Rješenje.

(a) Koristeći supstituciju $y = x - 1$ imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sin x = (y+1)\sin(y+1) = (y+1)(\sin y\cos 1 + \cos y \sin 1)\\
&= (y+1)\left(\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1} + \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}\right)\\
&= \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1} + \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n} + \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+2} + \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n+1}
\end{aligned}$$

Dakle, jer $2025 = 1012\cdot 2 + 1$,

$$f^{(2025)}(1) = 2025!(-1)^{1012}\left(\cos 1\cdot\frac{1}{2025!} + \sin 1\cdot\frac{1}{2024!}\right) = \cos 1 + 2025\sin 1.$$

(b)

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}\\
xe^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\int_0^x te^t\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} u = t & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t\\ \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t & v = e^t\end{bmatrix} = te^t\Big|_0^x - \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = xe^x - e^t\Big|_0^x = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1$$

$$(x-1)e^x + 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)\cdot n!}, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot n!} = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$