Matematika 1 za kemičare
Kako prevoditi s jezika kemije na jezik matematike i obrnuto?

Franka Miriam Brückler
Igor Pažanin

Zagreb, 2012.

Sadržaj

1 Uvod **7**
1.1 Varijable i konstante 7
1.2 Brojevi i jedinice 8
1.3 Kartezijev i opći pravokutni koordinatni sustav u ravnini 12

2 Realne funkcije jedne varijable **15**
2.1 Pojam funkcije i grafa funkcije 15
2.2 Svojstva funkcija i njihovih grafova 19
2.3 Transformacije grafova 20
2.4 Algebarske funkcije 23
2.4.1 Afine funkcije 23
2.4.2 Kvadratne funkcije 26
2.4.3 Polinomi 27
2.4.4 Racionalne funkcije 29
2.4.5 Korijeni 34
2.5 Kompozicija funkcija i inverne funkcije 36
2.6 Transcendentne funkcije 38
2.6.1 Eksponencijalne funkcije 38
2.6.2 Logaritamske funkcije 40
2.6.3 Opća potencija 43
2.6.4 Hiperbolne funkcije 44
2.6.5 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije 46
2.7 Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih 52
2.8 Neelementarne funkcije 54
2.9 Zadaci za vježbu 57

3 Deriviranje **69**
3.1 Deriviranje funkcija 69
3.2 Kad ne postoji derivacija? 73
3.3 Višestruke derivacije 74
3.4 Osnovna svojstva derivacija 74
3.5 Određivanje ekstrema funkcije 79
3.6 Ispitivanje toka funkcije 86
3.7 Uvod u diferencijalne jednadžbe 88
3.8 Primjene derivacija u kemiji 90

3.9 Deriviranje implicitno zadanih funkcija . . . 96
3.10 Parametarski zadane funkcije . . . 99
3.11 Polarne koordinate u ravnini . . . 100
3.12 Zadaci za vježbu . . . 104

4 Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija 113
4.1 Limesi funkcija . . . 113
4.2 Jednostrani limesi . . . 115
4.3 Vertikalne asimptote i beskonačni limesi . . . 117
4.4 Horizontalne asimptote i limesi u beskonačnosti . . . 122
4.5 Kose asimptote . . . 124
4.6 Svojstva limesâ i neki važni limesi . . . 126
4.7 L'Hôpitalovo pravilo . . . 129
4.8 Neprekidnost funkcija . . . 131
4.9 Derivacija kao limes . . . 134
4.10 Zadaci za vježbu . . . 136

5 Integriranje 145
5.1 Neodređeni integral . . . 145
5.2 Određeni integrali . . . 148
5.3 Newton-Leibnizova formula . . . 154
5.4 Metoda parcijalne integracije . . . 156
5.5 Metoda supstitucije . . . 158
5.6 Integriranje racionalnih funkcija . . . 160
5.7 Nepravi integrali . . . 163
5.8 Primjene integrala . . . 167
5.9 Zadaci za vježbu . . . 176

6 Kompleksni brojevi 183
6.1 Kompleksna ravnina . . . 184
6.2 Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva . . . 185
6.3 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i kompleksno konjugiranje . . . 185
6.4 Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva . . . 189
6.5 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja . . . 190
6.6 Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva . . . 192
6.7 Eulerova formula . . . 195
6.8 Zadaci za vježbu . . . 198

7 Osnove linearne algebre 201
7.1 Klasična algebra vektora . . . 201
7.1.1 Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom . . . 202
7.1.2 Baza prostora i koordinatizacija . . . 204
7.1.3 Skalarni produkt vektora . . . 207
7.1.4 Vektorski i mješoviti produkt vektora . . . 210
7.2 Analitička geometrija prostora $\mathbb{R}^3$ . . . 214
7.2.1 Ravnine u prostoru . . . 215

7.2.2 Pravci u prostoru 219
7.3 Primjene u kristalografiji 224
7.3.1 Kristalne rešetke 224
7.3.2 Weissovi parametri i Millerovi indeksi 227
7.4 Recipročni prostor i recipročna rešetka 231
7.5 Zadaci za vježbu 234

Bibliografija **257**

Predgovor

Zašto bi kemičar trebao znati jezik matematike? To je pitanje koje si sigurno, možda ne u baš toj formulaciji, postavlja mnogo studenata kemije - a vjerojatno i dosta „gotovih" kemičara. Odgovor na to pitanje nije i ne može biti kratak.

Sasvim sigurno nije nužno za dobrog kemičara da bude dobar, pa čak ni da bude slab matematičar. Načelno, nužna je samo sigurnost u aritmetici racionalnih brojeva i korištenju pojma funkcije i njenog grafa. No, ne samo da su neka područja kemije matematički zahtjevnija, primjerice fizikalna kemija, nego se i u mnogim drugim područjima može uz (razumno!) korištenje matematičkog jezika efikasnije uočiti zakonitosti. Ipak, osobno je mišljenje prvog od autora da je najvažniji razlog zašto student kemije mora učiti matematiku bitno jednostavniji: znati matematiku znači znati jasno i precizno formulirati svoje tvrdnje te uočavati bitne sličnosti i razlike među pojmovima, konceptima i stvarnim objektima. A ta sposobnost može olakšati život svakom prirodoznanstveniku, dakle i kemičaru.

Nažalost, da bi se savladao matematički jezik potrebno je ponešto strpljenja. To je jezik koji se uči prije svega navikavanjem, ali kad se jednom nauči omogućava stvaranje novih svjetova i olakšava razumijevanje postojećih.

U tom smislu, preporučam svakom kemičaru u nastajanju (a i svakom drugom koji uzme ovaj tekst u ruke) da se koncentrira na pamćenje isključivo definicija, a zatim dopusti da njegov ili njezin mozak prati – bez opterećenja memoriranjem – kako se iz malog broja zapamćenih stvari može zaključiti neusporedivo puno više nego što je zapamćeno. A za onoga tko je naučio pravilno zaključivati, možemo reći da je i savladao osnove matematike.

U Zagrebu 2009.

F.M.B.

P.S. Matematika nisu formule. Formule u ovoj knjizi služe isključivo uvježbavanju standardne notacije i kao vrsta stenografije. Stoga svakom tko sprema ispit iz matematike preporučam da razmisli o smislu formula i pokuša ih izraziti riječima te za svaku definiciju ili formulu proba naći i poneki vlastiti primjer.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Varijable i konstante

U primijenjenoj, a i u teorijskoj, matematici često formule koje povezuju promatrane veličine sadrže više oznaka nepreciziranog ili neistaknutog iznosa. Tako jednadžba stanja idealnog plina glasi

$$pV = nRT,$$

gdje je n množina, R je opća plinska konstanta, T je temperatura, a V volumen. Svakom fizičaru i kemičaru bit će jasno da je R konstanta tj. da uvijek ima istu vrijednost (i znat će njezinu vrijednost napamet ili naći ju u tablicama). No, ostale oznake (p, V, n, T) načelno ne predstavljaju konstantne veličine.

Pojmovi konstante (nepromjenjive veličine) i varijable (veličine promjenjivog iznosa) u pravilu imaju smisla tek u konkretnom kontekstu. Tako se recimo u jednoj situaciji mogu kao konstante uzeti n i T, dok će se ovisno o tlaku volumen mijenjati pa su p i V u tom kontekstu varijable. U nekom drugom slučaju ne mijenjaju se tlak i temperatura pa su p i T tada konstante, dok su onda n i V varijable.

Možemo reći da je u zadanom matematičkom modelu **konstanta** svaka veličina koja se u toku razmatranja tog modela neće mijenjati, dok je **varijabla** svaka veličina koju tokom razmatranja modela smatramo promjenjivom (to ne znači da se ona nužno i mijenja — bitna je načelna mogućnost njene promjene). Pritom razlikujemo **nezavisne i zavisne varijable**: nezavisnim varijablama smatramo one koje su temeljne, čiji iznos ne ovisi o iznosu ikoje druge varijable odnosno koje načelno proizvoljno biramo unutar nekog raspona, a zavisnima one čiji iznos se mijenja uslijed promjene neke od nezavisnih varijabli — zavisne varijable ovise o nezavisnim.

Primjer 1. *U jednažbi idealnog plina možemo primjerice n, T i V smatrati nezavisnim varijablama (mijenjat ćemo ih po želji), a p o njima ovisećom zavisnom varijablom (za svaki iznos n, T i V, pripadni iznos p je jednoznačno određen.*

Varijable se dijele i po jednom drugom principu na **diskretne i kontinuirane varijable**: ako varijabla, bar načelno, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar nekog raspona, zovemo ju kontinuiranom, a ako pak može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti ili pak samo vrijednosti koje možemo numerirati cijelim brojevima[1]. Diskretne se varijable obično pojavljuju kad se radi o nabrajanju nekih vrijednosti, dok su rezultati mjerenja obično kontinuirane varijable.

Primjer 2. *Tlak idealnog plina je kontinuirana varijabla — njegove vrijednosti načelno mogu biti svi pozitivni realni brojevi.*

Kvantni energijski nivoi pak čine diskretnu varijablu jer se mogu numerirati prirodnim brojevima.

☼ **Ponovimo bitno**... Matematičke i fizikalne veličine se u konkretnom kontekstu dijele na nepromjenjive (konstante) i promjenjive (varijable). Varijable mogu biti nezavisne i (o njima) zavisne. Varijable se također obzirom na raspon mogućih vrijednosti dijele na diskretne i kontinuirane. ☺

1.2 Brojevi i jedinice

Kemičari i drugi prirodoznanstvenici brojeve koriste ponajviše za izražavanje rezultata mjerenjâ. Stoga je uobičajeno da se iznos bilježi kao par[2] broja i mjerne jedinice, jer tek ta kombinacija jednoznačno određuje rezultat mjerenja neke kemijske (ili općenitije, fizikalne) veličine. Primjerice, nije dovoljno reći da je koncentracija nečega 1,01; to je beznačajan broj ako se ne navede radi li se o, recimo, 1,01 mol L^{-1} ili pak 1,01 mmol L^{-1}. Ponekad se pojavljuju i „čisti" brojevi, poput logaritama kvocijenata nekih veličina (primjerice $\ln \frac{c}{c^{\ominus}}$), no ako se dogovorimo da je njima jedinica jednaka 1 (što god to značilo), onda i njih možemo shvatiti kao par broja i jedinice.

Važno je zapamtiti: dva iznosa ne mogu biti jednaka ako se ne podudaraju u jedinici. Drugim riječima, jednakost $a = b$ povlači da veličine a i b imaju istu fizikalnu dimenziju, tj. mogu se izraziti u istoj jedinici. Varijable i konstante koje nemaju istu fizikalnu dimenziju ne mogu se zbrajati ni oduzimati.

Primjer 3. *Za čestice molarne mase M idealnog plina pri temperaturi T definira se srednja kvadratna brzina*

$$v_{\mathrm{srk}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Primijetimo da se stvarno radi o brzini: jedinica od R je J K^{-1} mol^{-1} pa je jedinica od 3RT J/mol. Slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka J/kg. Kako je 1 J isto što i 1 kg m^2/s^2, slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka m^2/s^2, dakle je jedinica od v_{srk} m/s.

Brojevi su matematički organizirani u skupove. **Skup** je jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike. Pojam skupa se ne definira. Skup prepoznajemo po njegovim elementima, točnije: dva skupa su jednaka točno ako imaju iste elemente. Uobičajene oznake za skupove su velika slova engleske abecede, a za njihove elemente

[1] Možda nematematičaru nevjerojatno, ali istinito: ako varijabla može poprimiti bilo koju racionalnu vrijednost unutar nekog raspona, ona je diskretna jer racionalnih brojeva ima jednako mnogo kao cijelih.

[2] Bolje bi bilo reći: umnožak. Pritom jedinicu možemo smatrati konstantom.

mala slova. Za neke česte izjave vezane za skupove postoje kratki simbolički zapisi. Tako se za „objekt x je element skupa S" kratko piše

$$x \in S,$$

a za „objekt x nije element skupa S"

$$x \notin S.$$

Želimo li pak reći da se skup S sastoji od svih objekata x koji imaju neko svojstvo $\heartsuit$ pišemo

$$S = \{x : \heartsuit\}.$$

Najčešće spominjani skupovi brojeva u matematici i njenim primjenama imaju istaknute oznake. To su redom:

1. **Skup prirodnih brojeva** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

2. **Skup prirodnih brojeva s nulom** $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

3. **Skup cijelih brojeva** je skup svih rezultata oduzimanja prirodnih brojeva: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

4. **Skup racionalnih brojeva** je skup svih rezultata dijeljenja cijelih brojeva, tj. skup svih brojeva koji se mogu zapisati kao razlomci: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;

5. **Skup realnih brojeva** $\mathbb{R}$ uz racionalne brojeve sadrži sve iracionalne brojeve i možemo ga shvatiti kao skup svih mogućih duljina dužina (ukoliko je zadana jedinična duljina);

6. **Skup kompleksnih brojeva** $\mathbb{C}$, o kojem će biti riječi u poglavlju 6.

Osnovne računske operacije s brojevima su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i korjenovanje. U svakom od gore navedenih skupova možemo zbrajati i množiti (zbrojimo li odnosno pomnožimo dva elementa skupa, rezultat je element *istog* skupa). Pritom nije bitan redoslijed (kaže se: zbrajanje i množenje su komutativne operacije) i, dok se držimo samo zbrajanja ili samo množenja, zagrade nemaju utjecaja (kaže se: zbrajanje i množenje su asocijativne operacije). Formalno: operacija $\spadesuit$ na skupu S je **komutativna** ako je $x \spadesuit y = y \spadesuit x$ za sve $x, y \in S$, a **asocijativna** je ako $(x \spadesuit y) \spadesuit z = x \spadesuit (y \spadesuit z)$ za sve $x, y, z \in S$.

Zbrajanje i množenje u svim gore navedenim skupovima (osim zbrajanja u $\mathbb{N}$ jer on ne sadrži nulu) imaju još jedno lijepo svojstvo — imaju **neutralni element**: $x + 0 = 0 + x = x$ i $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ za sve brojeve x. Općenito, neutralni element $\natural$ obzirom na neku operaciju $\spadesuit$ je onaj za koji, kad tu operaciju primijenimo na njega i neki element promatranog skupa S, ne mijenja taj element: $x \spadesuit \natural = \natural \spadesuit x = x$ za sve $x \in S$.

Oduzimanje možemo shvatiti kao suprotnu operaciju od zbrajanja, a dijeljenje od množenja. Oduzimanje dva broja daje element istog skupa u svim gornjim slučajevima osim prva dva skupa ($5 - 7 = -2$ je rezultat oduzimanja dva prirodna broja, ali nije prirodan broj). Dijeljenje dva broja daje rezultat istog skupa samo u skupovima $\mathbb{Q}$ bez nule i $\mathbb{R}$ bez nule. Dijeljenje s nulom nije dozvoljeno (znate li zašto?).

Potenciranje se konstruira iz množenja i dijeljenja: za prirodan broj n i bilo koji broj x je

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n}$$

(x pomnožen sam sa sobom n puta), a za $x \neq 0$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Ako je $x^n = y$, kažemo da je x n-ti korijen iz y i pišemo $x = \sqrt[n]{y}$ ili

$$x = y^{\frac{1}{n}}.$$

Korjenovanje se dakle može shvatiti kao proširenje potenciranja na racionalne eksponente:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ne može se vaditi paran korijen iz negativnog broja (zašto?).

Svaki realan broj može se zapisati u **decimalnom zapisu**, tj. zapisu u kojem su pojedine znamenke broja svojom pozicijom vezane za toj poziciji odgovarajuću potenciju broja 10.

Primjer 4. *Kad govorimo o broju* 725 *mislimo na to da je on jednak* $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$ *odnosno*

$$725 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Kad pišemo 2,14 *mislimo na*

$$2{,}14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Vidimo: Decimalni zapis broja x kao

$$x = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

znači da je

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + \cdots$$

Neki realni brojevi, poput $\frac{1}{16}$, imaju konačan[3] decimalni zapis (0,0625) te je on potpuno egzaktan. Drugi brojevi, poput $\frac{1}{3}$ ili $\sqrt{2}$, nemaju konačan decimalan zapis te svaki njihov zapis s konačno mnogo znamenki nužno sadrži i grešku: $\frac{1}{3} \neq 0{,}3333$, $\sqrt{2} \neq 1{,}41$. Greška u takvom zapisu je reda veličine 10^{-m-1} (odgovarajuće mjerne jedinice) gdje je m broj znamenki iza decimalnog zareza u odabranoj aproksimaciji. Tako je greška zapisa $\frac{1}{3}$ mm kao 0,3333 mm reda veličine 10^{-5} mm, a greška zapisa $\sqrt{2}$

[3] Zapravo se i konačan decimalni zapis može shvatiti kao beskonačan, s beskonačno mnogo nula iza zadnje nenul znamenke: $0{,}5 = 0{,}500000\ldots$.

m s^{-1} kao 1,41 m s^{-1} je reda veličine 10^{-3} m s^{-1}. Ipak, svaki se realan broj x može proizvoljno točno aproksimirati racionalnim: za svaku zadanu maksimalnu grešku ε postoji racionalan broj r takav da je $|x - r| < \varepsilon$.[4]

Ovdje svakako treba istaknuti da bi pod decimalnim zapisom broja trebalo podrazumijevati zapis sa *svim* znamenkama; tako shvaćen decimalni zapis uvijek je egzaktno jednak zapisanom broju. Čim na kraju skinemo jednu ili više znamenaka, dobili smo aproksimaciju promatranog broja — broj koji nije jednak tom broju, ali mu je više ili manje blizu. Jednostavnosti radi ćemo pod konačnim decimalnim zapisom podrazumijevati svaki s konačno mnogo znamenki iza decimalnog zareza, bez obzira radi li se o egzaktnom broju (npr. $0{,}5 = 1/2$) ili aproksimaciji ($0{,}67 \approx 2/3$).

Kako rezultati mjerenja fizičkih veličina gotovo uvijek u sebi sadrže grešku (i u pravilu nije moguće dobiti egzaktan iznos), razumno je koristiti konačan decimalni zapis za brojevni dio njihove vrijednosti. Recimo, ako ste izmjerili duljinu nekog predmeta kao 387,8 mm i znate da je greška uređaja za mjerenje najviše 0,5 mm, možete pisati da je duljina tog predmeta 387,8 mm $\pm$ 0,5 mm. No, greška mjerenja nije isto što i greška uzimanja kraćeg decimalnog zapisa!

U nekim slučajevima ne može se istaknuti precizna greška mjerenja te ju je potrebno razumno procijeniti kako bi se izbjeglo navođenje znamenki koje su vjerojatno krive. Recimo, ako je pri nekom mjerenju duljine vjerojatno da rezultat 388,1 mm ne sadrži grešku veću od 1 mm, obzirom na izmjereni iznos, vjerojatnije je da je rezultat 388 mm, nego 389 mm. Možemo reći da je izmjerena duljina 388 mm i to na tri **značajne znamenke**. Da smo ju usprkos nesigurnosti u iznosu od 1 mm ipak zapisali kao 388,1 mm, rekli bismo da je u tom zapisu zadnja znamenka neznačajna. Neznačajne, tj. vjerojatno krive, znamenke se ne navode u rezultatima mjerenja i ne računa se s njima.

Kad vidimo zapisani rezultat mjerenja, kao značajne znamenke se broje sve nenul znamenke, nule između nenul znamenki te nule iza decimalnog zareza. Nule na početku nikad nisu značajne. Nule koje služe samo za specifikaciju mjesta decimalnog zareza ne broje se u značajne znamenke. Npr. broj 0,0000345 ima tri značajne znamenke, broj 0,003045 ih ima četiri, a 0,000034500 ih ima pet (kako zadnje dvije nule nisu nužne za položaj decimalnog zareza, one moraju biti značajne). Ako se radi o egzaktnom broju, smatramo da ima beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Kako bi se izbjegle nedoumice, uobičajeno je koristiti **znanstvenu notaciju**: to je zapis realnog broja x u obliku

$$x = m \cdot 10^n$$

gdje je broj $m \in [1, 10\rangle$ tzv. mantisa (zapisana sa svim značajnim znamenkama), a $n \in \mathbb{Z}$ je eksponent. Broj značajnih znamenki broja x jednak je broju značajnih znamenki mantise. Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini takav zapis jedinstvenim.

Primjer 5. *Avogadrova konstanta iznosi* 602214000000000000000000 mol^{-1}*, što je na šest značajnih znamenki jednako*

$$N_\mathrm{A} = 6,02214 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}.$$

[4] Primijetimo da je za realne — a isto tako i kompleksne — brojeve apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovoj udaljenosti (razmaku). Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost do nule.

Naboj elektrona iznosi 0,000000000000000000160217 C, *što je*

$$e = 1{,}60217 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

Red veličine označava eksponent broja 10 u znanostvenom zapisu kvocijenta dva različita iznosa. Primjerice, broj $2{,}1 \cdot 10^{-5}$ je za 8 redova veličine manji od broja $5{,}345 \cdot 10^3$.

Kod računanja vrijede sljedeća pravila: rezultat zbrajanja i oduzimanja treba imati isti broj znamenki iza decimalnog zareza kao najmanje točan početni podatak. Recimo, $12{,}11 + 18{,}0 + 1{,}013 = 31{,}123$ se u rezultatu navodi kao 31,1. Kod množenja i dijeljenja ne broje se mjesta iza decimalnog zareza, nego broj značajnih znamenaka: broj značajnih znamenaka rezultata treba biti jednak broju značajnih znamenaka najmanje preciznog početnog podatka. Primjerice, $4{,}56 \cdot 1{,}4 = 6{,}38$ se u rezultatu navodi kao 6,4. Pritom se, kako bi se izbjeglo pojavljivanje greške zbog samog računa, račun treba provoditi s više znamenki i konačni rezultat zaokružiti na onaj koji odgovara gornjim pravilima.

Zaokruživanje brojeva se može provoditi na više načina. Standardni način je sljedeći: ako želimo odbaciti nekoliko zadnjih znamenki i one počinju s 5,6,7,8 ili 9, zaokružujemo na gore (zadnja znamenka ispred njih se pri odbacivanju poveća za 1: 3,7898 na tri decimale zaokruženo je 3,790), a ako počinju s drugim znamenkama nadolje. Ako pak odbacujemo niz znamenaka $500\ldots0$, ponekad se koristi sljedeće pravilo: parna znamenka ispred se ne mijenja, neparna ide nagore (7,85 na 7,8, a 7,15 na 7,2).

☼ **Ponovimo bitno...** Fizička veličina X ima neki stvarni iznos x jed. (gdje je jed. odabrana jedinica). Taj iznos u pravilu nije točno mjerljiv. Zato umjesto točnog (ali nepoznatog) broja x zapisujemo broj $\tilde{x}$ koji je konačan decimalan broj koji sadrži samo značajne znamenke broja x u decimalnom zapisu. Broj $\tilde{x}$ je aproksimacija broja x. Primjerice, dijagonala kvadrata stranice 1 cm ima točnu duljinu

$$d = \sqrt{2}\ \mathrm{cm} =$$

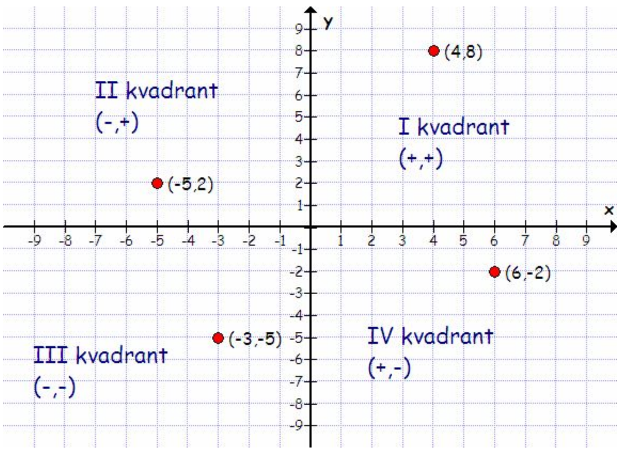
$$= 1{,}41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\,37694\,80731\ \ldots\ \mathrm{cm}$$

(tj. $x = \sqrt{2} = 1{,}41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\,37694\,80731\ldots$ i tu se radi o egzaktnim jednakostima). Ravnalom možemo mjeriti točno do na 0,1 cm pa je $\tilde{x} = 1,4$ odnosno[5] $d = 1{,}4$ cm (s dvije značajne znamenke). ☺

1.3 Kartezijev i opći pravokutni koordinatni sustav u ravnini

Često je potrebno imati način prikazivanja uređenih parova brojeva, npr. parova podataka. **Uređeni par** dva (ne nužno različita) broja čine ta dva broja uz specifikaciju koji je prvi, a koji je drugi. Npr. $(1, 2)$ je uređeni par različit od $(2, 1)$. Najlakši i najpregledniji način je prikazivanje u pravokutnom koordinatnom sustavu koji se sastoji od dva brojevna, međusobno okomita, pravca koje zovemo **koordinatnim osima**.

[5] Ovdje bi korektnije bilo pisati $d \approx 1,4$ cm, no to nije uobičajeno.



Slika 1.1: Koordinatni sustav i kvadranti.

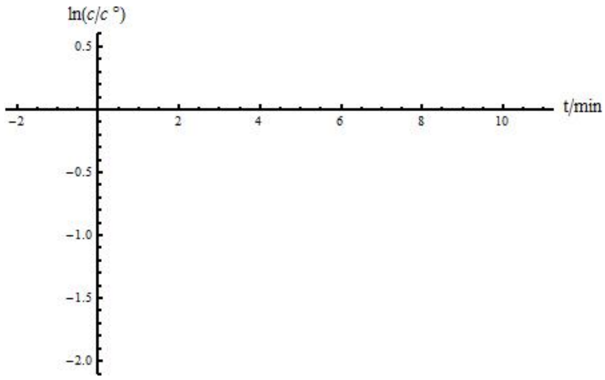
Brojevni pravci (osi) imaju označene pozicije za brojeve 0 i 1 (čime je određeno mjerilo unutar svake od osi), a osi se sijeku u zajedničkoj nuli (**ishodištu** koordinatnog sustava). Udaljenost između oznaka za 0 i 1 ćemo zvati jediničnom dužinom za os (kako bi se izbjeglo miješanje s pojmom jedinice, pod čime podrazumijevamo mjernu jedinicu fizičke veličine). Pritom jedinične dužine na osima ne moraju biti jednako duge, a ako jesu, sustav zovemo Kartezijevim.

Svaka os se označava oznakom vrste podataka („podijeljenom" s jedinicom u kojoj se mjeri, npr. ako na os apscisa nanosimo vrijeme u sekundama, njena oznaka bila bi t/s). U pravokutni sustav unose se isključivo parovi brojeva; dakle, ako u pravokutnom koordinantom sustavu prikazujemo parove rezultata nekih mjerenja, na osima su iznosi tih mjerenja u odabranoj jedinici koja mora biti naznačena u oznaci osi.

Kad unosimo par brojeva (x, y) u pravokutni koordinatni sustav, jedan broj (prvi broj x u paru) nanosi se na horizontalnu os koju zovemo os apscisa, a drugi (y) na vertikalnu os koju zovemo os ordinata. Par (x, y) je onda prikazan točkom koja je sjecište okomica povučenih na osi u točkama koje odgovaraju nanesenim podacima. Brojevi x i y zovu se **koordinatama** točke (x, y) (apsisa i ordinata). Ishodište koordinatnog sustava po definiciji ima obje koordinate jednake 0. Točke na osi apscisa imaju ordinatu 0, a točke na osi ordinata imaju apscisu 0. Koordinatni sustav dijeli ravninu na četiri **kvadranta**; u prvom su točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom one s negativnom apscisom i pozitivnom ordinatom, u trećem one kojima su obje koordinate negativne, a u četvrtom one s pozitivnom apscisom i negativnom ordinatom (vidi sliku 1.1).

U praksi često nacrtano sjecište osi nije točka kojoj su obje koordinate 0, tj. nije ishodište koordinatnog sustava (obično su koordinate nacrtanog sjecišta malo manje od, za konkretnu situaciju, najmanje potrebne apscise odnosno ordinate). Stoga pazite: ishodište je zajednička nula i stvarno sjecište osi, dok nacrtano sjecište osi ne mora biti ishodište.

Napomena 1. *Želite li dobro planirati prostor papira za skiciranje podataka, potrebno je prvo odrediti raspon* $[a, b]$ *iznosa podataka koje nanosimo na apscisu i raspon* $[c, d]$



Slika 1.2: Odabir raspona na koordinatnim osima.

iznosa podataka koje nanosimo na ordinatu. Sjecište osi obično se, ali ne nužno, crta dolje lijevo. Za njega se uzme točka s koordinatama (a, c), a najdesnija točka ima apscisu b i najgornja ordinatu d (te se tome prilagode jedinične dužine osi). Ukoliko je $a < 0 < b$, često se sjecište koordinatnih osi stavlja u 0 na apscisi, odnosno ako je $c < 0 < d$ u 0 na ordinati, umjesto da se crta u donjem lijevom kutu papira.

Primjer 6. *Ako želimo prikazivati vremena iz raspona $2\,\mathrm{min} \leq t \leq 10\,\mathrm{min}$ i prirodne logaritme izmjerenih koncentracija reaktanta (podijeljenih sa standardnom koncentracijom $c^{\ominus} = 1\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$) koji se nalaze u rasponu $-2 \leq \ln\frac{c}{c^{\ominus}} \leq 0{,}5$, pogodan odabir sjecišta osi je točka $(2, 0)$, raspon apscisa bio bi od 2 do 10, a raspon ordinata od -1 do 2. Odgovarajuća oznaka osi apscisa je t/s, a osi ordinata $\ln(c/c^{\ominus})$. Takav koordinatni sustav prikazan je slikom 1.2.*

Zadatak 1. *Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:*

$t/°\mathrm{C}$	p/torr
25	55,900
30	70,000
35	93,800
40	117,50
45	154,10
50	190,70
55	241,90
60	304,15
65	377,90

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature u kelvinima, a na ordinati tlak u torrima.

☼ **Ponovimo bitno**... Pravokutni koordinatni sustav se sastoji od dvije međusobno okomite koordinatne osi (osi apscisa i osi ordinata) i služi za prikazivanje uređenih parova brojeva. U fizikalnom kontekstu brojevi na osima su iznosi fizikalnih veličina, te broj z na osi označenoj sa $Z/\mathrm{jed.}$ označava vrijednost z jed. fizikalne veličine Z. ☺

Poglavlje 2

Realne funkcije jedne varijable

2.1 Pojam funkcije i grafa funkcije

Pod funkcijom se obično — krivo — podrazumijeva pravilo kojim se nekim objektima pridružuju neki drugi objekti, tj. formula kojom se iz x izračuna $f(x)$. Što je krivo u tom shvaćanju? Svakako je pravilo pridruživanja bitan dio pojma funkcije, no nedostatak ovakve „definicije" je neisticanje skupa u kojem se nalaze elementi kojima pravilo nešto pridružuje i skupa u kojem se nalaze rezultati pridruživanja. Naime, isto pravilo se može odnositi na različite skupove objekata: tako se npr. masa može pridruživati u jednom kontekstu ljudima, a u drugom brašnu. Također, u „definiciji" da je funkcija samo pravilo pridruživanja nije istaknuto da ne smije biti višestrukog pridruživanja (pridruživanje više objekata jednom objektu). Stoga svaka **funkcija** ima tri bitne komponente:

1. **Domenu**: skup u kojem se nalaze objekti kojima se nešto pridružuje.
2. **Kodomenu**: skup u kojem se nalaze rezultati pridruživanja.
3. **Pravilo** kojim se *svakom* elementu domene pridružuje *točno po jedan* element kodomene.

Uobičajene oznake su D za domenu, K za kodomenu i f za samo pravilo, a funkciju tada označavamo

$$f : D \to K$$

i kažemo „f sa D u K".

Napomena 2. *Oznaka f predstavlja „čitavu" funkciju, dok je $f(x)$ vrijednost funkcije za jedan element domene x, dakle $f(x)$ je jedan element kodomene funkcije f. Također, $f(x)$ u većini slučajeva možemo poistovjetiti s formulom, tj. pravilom djelovanja funkcije.*

Primjer 7. *Funkcija **identiteta** je funkcija $f : A \to A$ (gdje je A bilo kakav skup) koja „ništa ne radi", tj. svakom elementu pridružuje njega samog: $f(x) = x$ za sve $x \in A$.*

U primjenama je kodomena najčešće podskup skupa $\mathbb{R}$; takve funkcije zovemo **realne funkcije**. Do dvanaeastog poglavlja bavit ćemo se isključivo **realnim funkcijama jedne varijable**, tj. funkcijama kojima su i domena i kodomena podskupovi od $\mathbb{R}$. Možemo reći da su to funkcije koje (realnim) brojevima pridružuju (realne) brojeve.

Često se koristi i pojam **prirodne domene** neke funkcije. To je najveći skup koji može biti domena za zadano pravilo, tj. skup *svih* objekata na koje se pravilo može smisleno primijeniti. Tako je za pravilo $f(x) = \frac{1}{x-5}$ prirodna domena skup $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ jer se jedino za $x = 5$ ne može izračunati $\frac{1}{x-5}$. Domena funkcije je uvijek podskup[1] prirodne domene koja odgovara pravilu kojim je opisano djelovanje funkcije. Ukoliko se funkcija zadaje samo formulom $f(x)$ podrazumijeva se da joj je domena prirodna domena.

Realne funkcije jedne varijable možemo vizualizirati pomoću prikaza funkcijske ovisnosti u koordinatnom sustavu. **Graf funkcije** f čija varijabla je označena s x, a pridružena vrijednost s $f(x)$, je skup *svih*[2] uređenih parova

$$(x, f(x))$$

kad x prolazi domenom funkcije. Kako uređene parove realnih brojeva možemo identificirati s točkama u koordinatnom sustavu, graf realne funkcije jedne varijable možemo prikazati ucrtavanjem točaka s koordinatama $(x, f(x))$ u Kartezijev koordinatni sustav. Pritom vidimo: domena se vizualizira kao skup svih apscisa točaka grafa (dakle kao podskup x-osi), a rezultati, tj. elementi kodomene, nanose se na y-os. Obzirom na standardnost takvog prikaza grafa funkcije, uobičajeno je i njega nazivati grafom funkcije.

Slika funkcije je podskup kodomene koji se sastoji od onih rezultata koji stvarno imaju original. Recimo, slika funkcije $f(x) = x^2$ je skup $[0, +\infty\rangle$ jer x^2 ne može postići negativnu vrijednost, ali može postići bilo koju nenegativnu. Ako nam je dan crtež grafa, lako je očitati domenu i sliku funkcije: jednostavno projiciramo graf na os apscisa, odnosno ordinata.

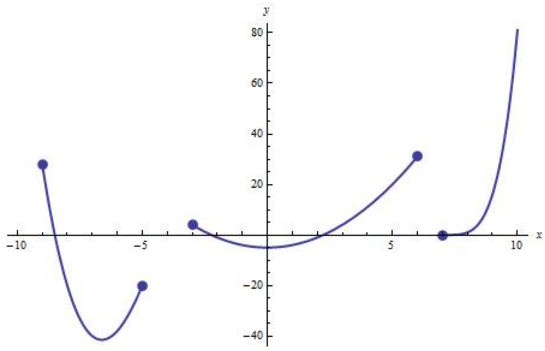
Neke bitne posljedice definicije funkcije i njenog grafa na prikaz grafa u Kartezijevom koordinatnom sustavu su sljedeće:

- Svaka vertikala (paralela s osi ordinata) siječe graf najviše jednom (zašto?).
- Sjecište grafa s osi ordinata je točka $(0, f(0))$, tj. njegova ordinata predstavlja vrijednost funkcije u nuli.
- Elementi domene kojima funkcija pridružuje nulu zovu se **nultočke funkcije**. Dakle, nultočke[3] funkcije f su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Svako sjecište grafa s osi apscisa kao apscisu ima neki $x \in D$, a kao ordinatu $0 = f(x)$, pa apscise sjecišta grafa s osi apscisa predstavljaju nultočke funkcije.

[1] Svaki skup je sam sebi podskup. Za skup B kažemo da je podskup skupa A ako je svaki element od B ujedno element od A.

[2] Dakle, ne samo onih koje smo stvarno u stanju nacrtati.

[3] Pod nultočkama ovdje podrazumijevamo *realne* nultočke.



Slika 2.1: Određivanje domene iz grafa.

- Funkcija je pozitivna/negativna (u smislu: vrijednosti $f(x)$ su pozitivne/negativne) za one vrijednosti apscisa x za koje su pripadne točke grafa iznad/ispod x-osi.

Zadatak 2. *Što znamo o funkciji ako njen graf ne siječe os ordinata?*

Zadatak 3. *Može li graf funkcije sječi neku paralelu s osi apscisa više od jednom?*

Zadatak 4. *Ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi i množini, dana je formulom:*

$$p(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}.$$

Tako definirana funkcija p ima prirodnu domenu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no zbog konteksta kao domenu[4] *uzimamo $\langle 0, +\infty \rangle$. Tlak pri pozitivnom volumenu je očigledno pozitivan, pa će se graf ove funkcije nalaziti u prvom kvadrantu. Skicirajte pet točaka pripadnog grafa i komentirajte (ne)postojanje sjecišta s koordinatnim osima!*

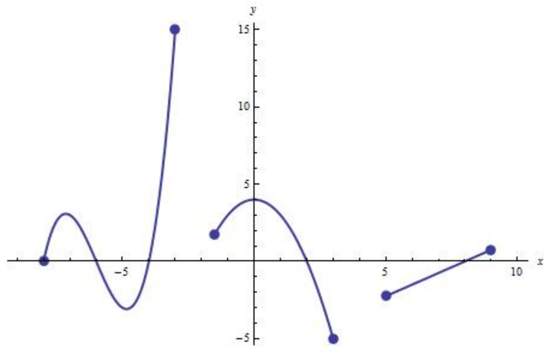
Zadatak 5. *Iz na slici 2.1 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite njezinu domenu.*

Zadatak 6. *Iz na slici 2.2 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite koja joj je vrijednost u $x = 0$ i koje su joj nultočke.*

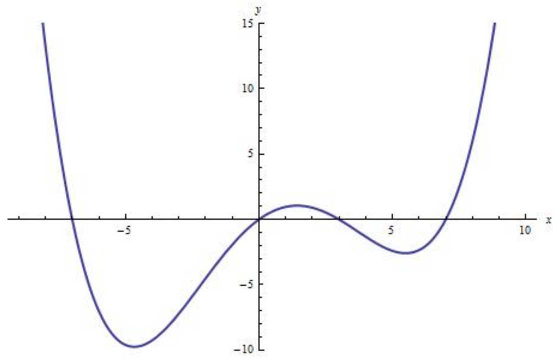
Zadatak 7. *Iz na slici 2.3 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite na kojim intervalima ona poprima pozitivne vrijednosti.*

☼ **Ponovimo bitno...** Funkcija se sastoji od domene, kodomene i pravila koje svakom elementu domene pridružuje po jedan element kodomene. Graf funkcije se sastoji od svih uređenih parova oblika (element domene, pridruženi element kodomene). Realne funkcije jedne varijable su funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Za takve funkcije njihov graf je moguće vizualizirati crtanjem točaka koje su elementi grafa funkcije u Kartezijevom koordinatnom sustavu. ☺

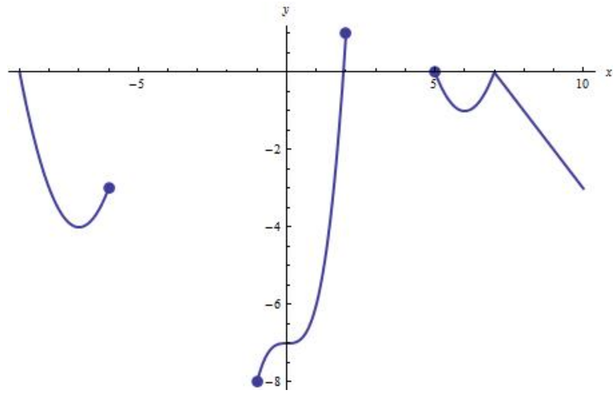
[4]Primijetimo da iako ovdje, nepravilno, volumene poistovjećujemo s realnim brojevima bez da smo definirali jedinicu, izjava o prirodnoj domeni je točna jer je svejedno želimo li reći da volumen mora biti veći primjerice od 0 L ili od 0 m^3.



Slika 2.2: Određivanje nultočki i vrijednosti funkcije u nuli iz grafa.



Slika 2.3: Određivanje predznaka funkcije iz grafa.



Slika 2.4: Određivanje intervala rasta i pada iz grafa.

2.2 Svojstva funkcija i njihovih grafova

Funkcija može biti rastuća ili padajuća na cijeloj domeni ili nekom njenom podintervalu. Funkcija (strogo) **raste** na intervalu I (koji je podskup domene) ako veće vrijednosti varijable iz I daju i veće rezultate:

$$x < x' \Rightarrow f(x) < f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Funkcija (strogo) **pada** na intervalu I (koji je podskup domene) ako veće vrijednosti varijable iz I daju manje rezultate:

$$x < x' \Rightarrow f(x) > f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Vizualno rast odnosno pad funkcije na intervalu I vidimo tako da gledajući slijeva nadesno (nad intervalom I na osi apscisa) graf ide prema gore odnosno dolje.

Zadatak 8. *Iz na slici 2.4 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite na kojim intervalima funkcija f pada.*

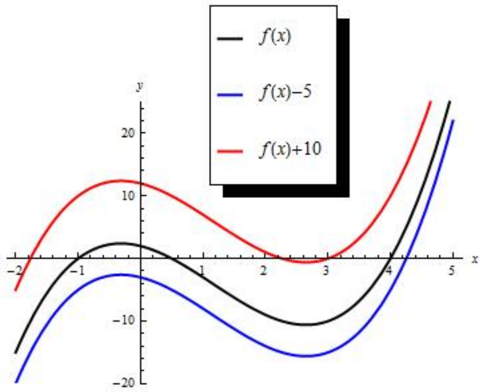
Drugo bitno svojstvo koje realna funkcija jedne varijable može imati je (ne)parnost. To svojstvo ima smisla provjeravati samo ako je domena funkcije simetrična obzirom na nulu, npr. ako je domena $\mathbb{R}$, $[-5, 5]$ ili $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. Funkcija f s takvom domenom je **parna funkcija** ako je svejedno uvrštavamo li u nju x ili $-x$ (promjena predznaka originala ne utječe na predznak rezultata): za sve x iz domene je

$$f(-x) = f(x).$$

Primjer parne funkcije je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Grafovi parnih funkcija su simetrični obzirom na os ordinata.

Funkcija f sa simetričnom domenom je **neparna funkcija** ako uvrštavanje $-x$ umjesto x promijeni predznak rezultata (promjena predznaka originala mijenja predznak rezultata): za sve x iz domene je

$$f(-x) = -f(x).$$



Slika 2.5: Vertikalna translacija grafa.

Primjer neparne funkcije je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Grafovi neparnih funkcija su simetrični obzirom na ishodište.

Na koncu, spomenimo i svojstva injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti. Funkcija je **injekcija** ako različiti originali daju različite rezultate, tj. ako iz $f(x) = f(x')$ uvijek slijedi $x = x'$. Vizualno injektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da sve horizontale graf funkcije sijeku najviše jednom. Funkcija je **surjekcija** ako svaki element kodomene ima original, tj. ako za svaki $y \in K$ možemo naći $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Surjektivnost je u pravilu lako postići smanjivanjem kodomene: ako stavimo da je slika funkcije njena kodomena, funkcija je automatski (štoviše, po definiciji) surjektivna. Vizualno surjektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da svaka horizontala kroz točke kodomene bar jednom siječe graf. Ako je funkcija injekcija i surjekcija kažemo da je **bijekcija**.

☼ **Ponovimo bitno...** Osnovna svojstva koja mogu imati realne funkcije jedne varijable, a koja imaju značaj za njihove primjene, su rast i pad (na pojedinim intervalima), parnost i neparnost, injektivnost i surjektivnost. ☺

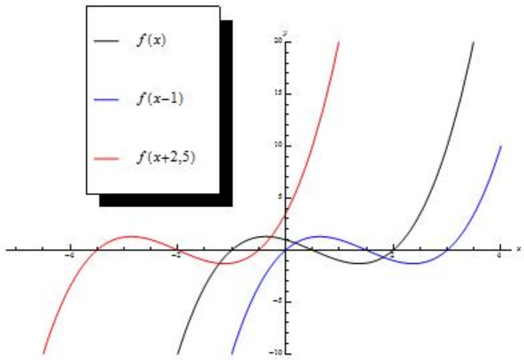
2.3 Transformacije grafova

Ako znamo kako u Kartezijevom koordinatnom sustavu izgleda graf realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, lako je skicirati grafove mnogih drugih funkcija.

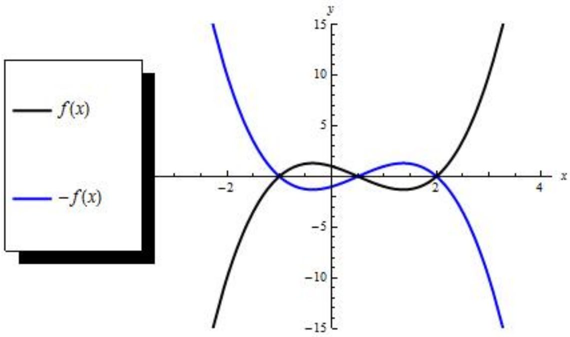
Prvi tip transformacije grafa je translacija, koja može biti horizontalna ako se odnosi na domenu (zamjena varijable x s varijablom $x + A$) ili vertikalna ako se odnosi na kodomenu (promjena vrijednosti funkcije s $f(x)$ na $f(x) + A$):

- Ako je $g(x) = f(x) + A$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A nagore (dakle, ako je A negativan, pomak je nadolje); vidi sliku 2.5.

- Ako je $g(x) = f(x + A)$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A ulijevo (dakle, ako je A negativan pomak je udesno); vidi sliku 2.6.



Slika 2.6: Horizontalna translacija grafa.



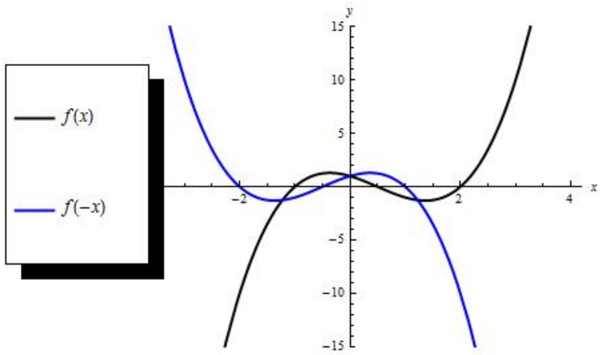
Slika 2.7: Promjena predznaka funkcije.

Drugi tip transformacije grafa je zrcaljenje obzirom na koordinatnu os uslijed promjene predznaka: ako se promjena predznaka odnosi na domenu (zamjena varijable x s $-x$), zrcalimo obzirom na os ordinata, a ako se odnosi na kodomenu (promjena predznaka s $f(x)$ na $-f(x)$) onda zrcalimo obzirom na os apsisa:

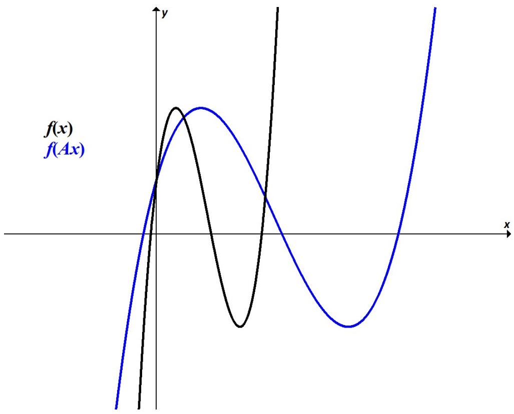
- Ako je $g(x) = -f(x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f obzirom na os apscisa; vidi sliku 2.7.
- Ako je $g(x) = f(-x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f obzirom na os ordinata; vidi sliku 2.8.

Treći tip transformacije je skaliranje (rastezanje odnosno stezanje) grafa u horizontalnom ili vertikalnom smjeru uslijed skaliranja varijable (x zamjenjujemo s Ax pa se skaliranje odnosi na domenu, odnosno graf se horizontalno rasteže ili stišće) ili vrijednosti funkcije ($f(x)$ prelazi u $Af(x)$ pa se skaliranje odnosi na kodomenu, odnosno graf se vertikalno rasteže ili stišće). Obzirom da smo već opisali efekt promjene predznaka funkcije na graf, ovdje je dovoljno razmatrati skaliranje pozitivnom konstantom $A > 0$:

- Ako je $g(x) = f(Ax)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i isto sjecište s osi ordinata, ali je horizontalno rastegnut (za $A > 1$, a za $A < 1$ je stisnut); vidi sliku 2.9.



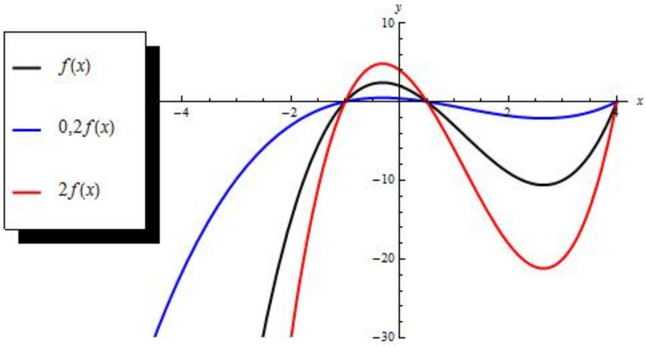
Slika 2.8: Promjena predznaka varijable.



Slika 2.9: Skaliranje varijable.

- Ako je $g(x) = Af(x)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i iste nultočke, ali je vertikalno rastegnut (za $A > 1$, za $A < 1$ je stisnut); vidi sliku 2.10.

Pomoću ovih pravila se iz poznavanja malog broja grafova (grafova elementarnih funkcija) mogu dosta precizno nacrtati grafovi mnogih drugih funkcija. Primjerice, ako znamo nacrtati graf funkcije s formulom $f(x) = e^x$, temeljem gornjih pravila možemo nacrtati grafove funkcija s formulama e^{x+1}, $e^x - 2$, $-e^x$ i $3e^x$. U nastavku ćemo ukratko ponoviti elementarne funkcije. One se dijele na algebarske i transcendentne funkcije. To razlikovanje nije bitno samo za matematičare, nego i za prirodoznanstvenike: u algebarske funkcije mogu se uvrštavati fizikalne veličine (dakle, brojevi s jedinicama) i rezultat također ima jedinicu; u transcendentne funkcije mogu se uvrštavati samo brojevi i rezultat je čisti broj.



Slika 2.10: Skaliranje funkcije.

2.4 Algebarske funkcije

2.4.1 Afine funkcije

Afine funkcije varijablu množe konstantom i tome pribrajaju još jednu konstantu. Formalnije, **afina funkcija** je realna funkcija s prirodnom domenom $\mathbb{R}$ kojoj je formula oblika

$$f(x) = ax + b.$$

Graf afine funkcije je pravac: sve točke oblika $(x, ax+b)$ za zadane a i b leže na istom pravcu, kojem je a **koeficijent smjera**, a b **slobodan član**. Kako je $f(0) = a\cdot 0+b = b$, to je točka $(0, b)$ na grafu, tj. odsječak grafa afine funkcije na osi ordinata jednak je slobodnom članu. Afina funkcija kojoj je slobodni član nula zove se **linearna funkcija**. Graf linearne funkcije prolazi kroz ishodište. Linearne funkcije opisuju proporcionalnost nezavisne i zavisne varijable: Par međuovisnih varijabilnih veličina zove se **proporcionalnim (razmjernim)** ako je omjer (konstanta proporcionalnosti) njihovih vrijednosti konstantan, tj. jednak za svaki par odgovarajućih vrijednosti.

Primjer 8. *Identiteta $f(x) = x$ je linearna funkcija.*

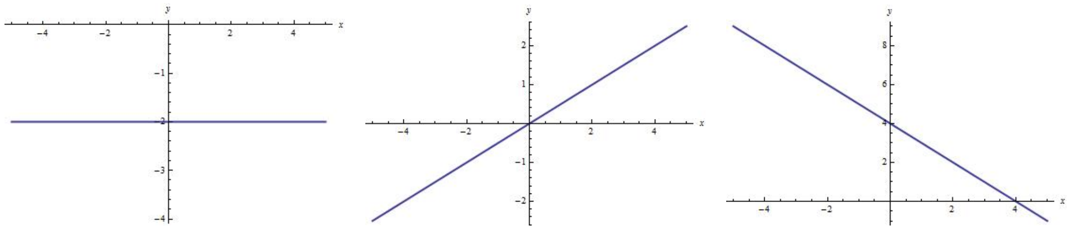
Primjer 9. *Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i polumjeru.*

Ako je koeficijent smjera afine funkcije jednak nuli, govorimo o **konstantnoj funkciji**. U tom slučaju slika funkcije je jednočlani skup $\{b\}$, jer takva funkcija svim vrijednostima varijable pridružuje istu vrijednost b. Konstantna funkcija nije injekcija, ali je parna funkcija. Graf konstantne funkcije je paralelan s osi apscisa. Ako koeficijent smjera nije nula, afina funkcija je bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ i ima točno jednu nultočku $-\frac{b}{a}$.

Zadatak 9. *Uz koji uvjet je afina funkcija parna (neparna)?*

Ovisno o predznaku koeficijenta smjera afina funkcija je rastuća, odnosno padajuća: za $a > 0$ raste, a za $a < 0$ pada.

Afine funkcije su vrlo česte u primjenama, iako su prave afine zavisnosti rijetke. Naime, često se pomoću afine funkcije aproksimira kompliciranija međuovisnost.



(a) (b) (c)

Slika 2.11: Graf konstantne (lijevo), linearne (sredina) i opće afine funkcije (desno).

Primjer 10. *Ovisnost koncentracije* c_{A} *reaktanta* A *o vremenu* t *u reakciji nultog reda opisana je jednadžbom*

$$c_{\mathrm{A}} = c_{\mathrm{A},0} - k_0 t.$$

Pritom je $c_{\mathrm{A},0}$ *početna koncentracija od* A*, a* k_0 *je konstanta brzine reakcije. Očito bismo uz*

$$x = t, \quad f(x) = c_{\mathrm{A}},$$

$$a = -k_0, \quad b = c_{\mathrm{A},0}$$

tu jednadžbu mogli interpretirati kao jednadžbu afine funkcije, s tim da joj domena ne bi bila cijeli skup $\mathbb{R}$ *jer nas ne zanimaju vremena prije reakcije i nakon što reakcija stane; stoga je domena ove funkcije segment oblika* $[0, T]$*, gdje je* T *trajanje reakcije, recimo u sekundama.*

Ovdje zapravo treba biti malo oprezan. Kad govorimo o domeni i kodomeni funkcije te iznosima koje nanosimo na koordinatne osi, govorimo o čistim brojčanim iznosima. Kad na horizontalnu os nanosimo vrijeme te os označimo primjerice s t/s*, znamo da apscise u tom koordinatnom sustavu predstavljaju broj sekundi; stoga je i domena neke funkcije vremena (ovdje koncentracije) u tom slučaju neki interval brojeva, a ne vremenski interval. Efektivno to znači da kad smo gore rekli* $x = t$ *zapravo mislimo reći* $x = t/\mathrm{s}$ *i podrazumijevamo da su sve jedinice u svakom članu formule izdvojene.*

Primjerice, ako imamo $c_{\mathrm{A}} = 0{,}100\,\mathrm{mol\,L^{-1}} - 0{,}667\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}\,t$*, zapravo nije* $x = t$*,* $f(x) = c_{\mathrm{A}}$*,* $a = -0{,}667\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}$ *i* $b = 0{,}100\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$*, nego je*

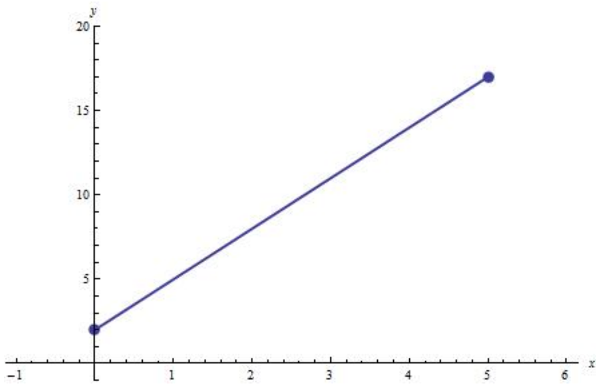
$$x = t\,\mathrm{s}^{-1},$$

$$f(x) = c_{\mathrm{A}}\,\mathrm{mol^{-1}\,L},$$

$$a = -0{,}667,$$

$$b = 0{,}100$$

(tj. $a = -k_0\,\mathrm{mol^{-1}\,L\,s}$ *i* $b = c_{\mathrm{A},0}\,\mathrm{mol^{-1}\,L}$*). No, zbog nepraktičnosti ovakvog zapisa u pravilu ga kod algebarskih funkcija nećemo koristiti usprkos njegove točnosti, već ćemo podrazumijevati da je pri uzimanju recimo* $x = t$ *uzet samo iznos vremena u odgovarajućoj jedinici.*



Slika 2.12: Graf funkcije $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.

Primjer 11. *Tlak idealnog plina kao funkcija recipročne vrijednosti volumena ($p = nRT \cdot \frac{1}{V}$) može se shvatiti kao*

$$y = ax + b$$

uz $y = p$, $x = \frac{1}{V}$, $a = nRT$ i $b = 0$. Možemo reći i: tlak idealnog plina proporcionalan je recipročnoj vrijednosti volumena.

Primjer 12. *Za kemijske reakcije prvog reda u jedanaestom poglavlju izvest ćemo sljedeću vezu ovisnosti koncentracije[5] reaktanta A o vremenu:*

$$\ln \frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}} = \ln \frac{[\mathrm{A}]_0}{c^{\ominus}} - k_1 t.$$

Pritom je $[A]_0$ početna koncentracija, a k_1 konstanta (koeficijent brzine reakcije). Uz $y = \ln [\mathrm{A}]$, $x = t$, $a = -k_1$ i $b = \ln [\mathrm{A}]_0$ opet imamo prikaz neafine ovisnosti pomoću afine.

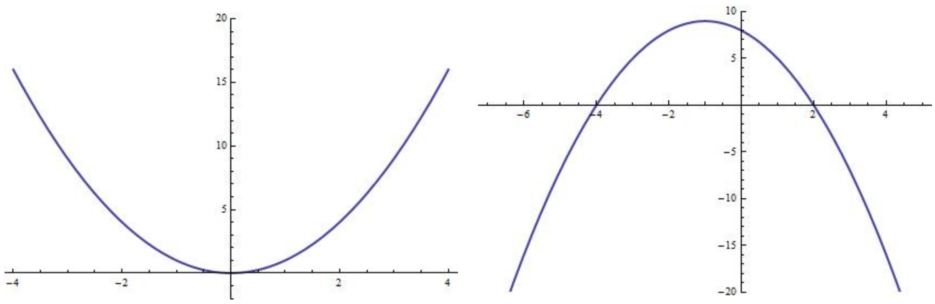
Kao u primjeru 10, u primjenama je često potrebno afinu funkciju promatrati tako da joj je domena samo neki segment, a ne cijeli skup realnih brojeva. Općenito, ako je domena neke funkcije segment $[A, B]$, onda odgovarajući graf sadrži samo točke s apscisama između A i B. Specijalno, graf afine funkcije kojoj je kao domena uzet segment $[A, B]$ je dužina koja je dio pravca koji predstavlja graf te funkcije između točaka s apscisama A i B, vidi sliku 2.12.

Zadatak 10. *Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 3$, $f(x) = 2x$ i $f(x) = 3-5x$. Precizno odredite sva sjecišta s koordinatnim osima.*

☼ **Ponovimo bitno...** Afine funkcije su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Graf svake afine funkcije je pravac koji os ordinata siječe u b. Ovisno o koeficijentu smjera a afine funkcije su rastuće ($a > 0$), konstantne ($a = 0$) ili padajuće ($a < 0$). ☺

---

[5] U izrazima pod logaritmima koncentracije su dijeljene sa standardnom koncentracijom $c^{\ominus} = 1$ mol L^{-1} jer se logaritmi mogu računati samo od čistih brojeva.



(a) (b)

Slika 2.13: Grafovi kvadratnih funkcija (lijevo: $f(x) = x^2$, desno: $f(x) = -x^2-2x+8$).

2.4.2 Kvadratne funkcije

Opća **kvadratna funkcija** je realna funkcija prirodne domene $\mathbb{R}$ koja je zadana formulom oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdje su a, b, c zadane konstante (koeficijenti). Koeficijent $a \neq 0$ zove se **vodeći koeficijent**, a c je **slobodni član**.

Primjer 13. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = x^2$$

je prototip kvadratne funkcije (s vodećim članom 1 i ostala dva koeficijenta jednaka nuli). Njen graf prikazan je slikom 2.13 (lijevo).

Kao i kod afine funkcije iz jednakosti $f(0)$ i slobodnog člana slijedi da sjecište grafa kvadratne funkcije s osi ordinata ima ordinatu jednaku slobodnom članu c.

Graf kvadratne funkcije ima oblik parabole, a predznak vodećeg koeficijenta određuje je li „otvorena prema gore" (za $a > 0$) ili „prema dolje" (za $a < 0$). U prvom slučaju se najniža, a u drugom najviša točka grafa zove **tjeme** parabole. Njegova apscisa je $x_T = -\frac{b}{2a}$. Kvadratna funkcija raste na $\langle -\infty, x_T \rangle$ i pada na $\langle x_T, +\infty \rangle$ ako $a < 0$, odnosno pada do tjemena i raste od tjemena ako $a > 0$. Graf kvadratne funkcije je uvijek simetričan obzirom na paralelu s osi ordinata povučenu kroz tjeme. Kvadratna funkcija nije injekcija.

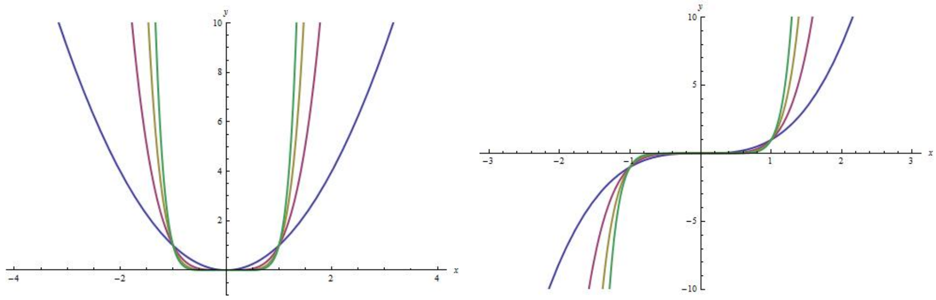
Zadatak 11. *Odredite formulu za ordinatu tjemena. Nakon toga odredite sliku kvadratne funkcije.*

Kao što smo rekli, nultočke funkcije (sjecišta s osi apscisa) su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ koja je u ovom slučaju kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Njena rješenja su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$



(a) (b)

Slika 2.14: Monomi parnog stupnja (lijevo) i neparnog stupnja (desno), za $a > 0$.

gdje je $D = b^2 - 4ac$ tzv. diskriminanta. Vidimo da graf kvadratne funkcije ne siječe os apscisa ako $D < 0$, siječe (dira) ju u samo jednoj točki (i to u tjemenu) ako $D = 0$, a ima dva sjecišta s osi apscisa ako $D > 0$.

Primjer 14. *Neka je kvadratna funkcija zadana formulom $f(x) = -x^2 - 2x + 8$. Tada je $a < 0$ pa će odgovarajuća parabola biti otvorena prema dolje. Sjecište s osi ordinata je u ordinati 8. Nultočke te funkcije, određene rješavanjem jednadžbe $-x^2 - 2x + 8 = 0$, su -4 i 2 pa su to apscise sjecištâ s osi apscisa. Tjeme ima apscisu $-(-2)/(2\cdot(-1)) = -1$. Odgovarajući graf je prikazan slikom 2.13 (desno).*

Zadatak 12. *Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 4x^2 + 7$, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ i $f(x) = x^2 + 4x + 4$, ali tako da je svakoj od njih domena segment $[-1, 4]$.*

☼ **Ponovimo bitno...** Kvadratne funkcije su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graf im je parabola, okrenuta prema gore ili dolje ovisno o predznaku vodećeg koeficijenta a. Sjecište s osi ordinata je u c, a sjecišta s osi apscisa su rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ (njih 0, 1 ili 2). ☺

2.4.3 Polinomi

Monom stupnja $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja broju pridružuje njegovu n-tu potenciju pomnoženu s nekim brojem:

$$m(x) = ax^n.$$

Ako je n paran i $a > 0$, m ima svojstva i graf sličan funkciji $f(x) = x^2$. Ako je pak n neparan i $a > 0$ radi se o strogo rastućoj funkciji čiji prototip je funkcija $f(x) = x^3$. Grafovi parnih odnosno neparnih monoma prikazani su slikom 2.14.

Polinom je zbroj od konačno mnogo monoma. Najveći od njihovih stupnjeva zove se **stupanj polinoma**. Primjeri polinoma su $f(x) = x^2 + 6x - 9$ (polinom stupnja 2) i $h(t) = 4t^5 - 7t^6 + 3{,}2t - 1{,}45367$ (polinom stupnja 5). Uočimo: polinom stupnja 0 je konstantna funkcija, a polinom stupnja 1 je afina funkcija s koeficijentom smjera različitim od nule.

Preciznije, polinom stupnja n je funkcija $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Brojevi $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ su unaprijed zadani (dakle, konstante) i zovu se **koeficijenti polinoma** p, pri čemu se koeficijent a_n zove **vodeći koeficijent**. Član a_0 zove se **slobodni član polinoma**, predstavlja vrijednost $p(0)$ i time sjecište pripadnog grafa s osi ordinata.

Broj c je nultočka polinoma p točno ako je p djeljiv s $(x - c)$. Ukoliko je polinom p djeljiv s polinomom $(x - c)^m$ za neki realan broj c, a pritom nije djeljiv s $(x - c)^{m+1}$, kažemo da je c **m-struka nultočka** polinoma p; pritom broj m zovemo kratnošću nultočke c. Višestruke nultočke su one kojima je kratnost veća od 1.

Primjer 15. *Polinom zadan formulom*

$$p(x) = 5x^8 - 5x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 10x^4$$

je djeljiv sa $(x - 1)$, $(x + 2) = (x - (-2))$ *i s* $x = (x - 0)$*:*

$$p(x) : (x - 1) = 10x^4 - 15x^5 + 5x^7,$$

$$p(x) : (x + 2) = -5x^4 + 15x^5 - 15x^6 + 5x^7,$$
$$p(x) : x = -10x^3 + 25x^4 - 15x^5 - 5x^6 + 5x^7.$$

Stoga su 1, -2 *i* 0 *njegove nultočke.*

Polinom p *je osim s* $(x - 1)$ *djeljiv i s* $(x - 1)^2$ *i s* $(x - 1)^3$*, ali nije djeljiv s* $(x - 1)^4$*. Stoga je* 1 *njegova trostruka nultočka. Polinom* p *nije djeljiv s nikojom višom potencijom od* $(x+2)$ *pa je* -2 *njegova jednostruka nultočka. Polinom* p *osim s* x *djeljiv i s* x^2 *i s* x^3 *i s* x^4*, ali nije djeljiv s* x^5*. Stoga je* 0 *njegova četverostruka nultočka.*

Ako su $x_1, \ldots, x_k$ sve (realne) nultočke polinoma p, redom s kratnostima $m_1, \ldots, m_k$, ako je zbroj svih kratnosti jednak stupnju polinoma ($m_1 + \cdots + m_k = n$), možemo ga zapisati u faktoriziranom obliku

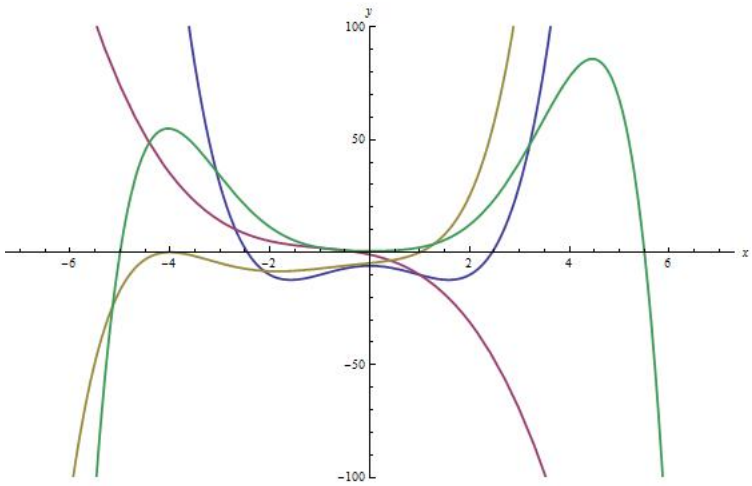
$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}.$$

Ukoliko je zbroj kratnosti svih realnih nultočaka manji od stupnja polinoma, znači da se u njemu pojavljuje bar još jedan kvadratni faktor bez realnih nultočaka.

Primjer 16. *Zbroj kratnosti nultočaka polinoma iz primjera 15 je* $3 + 1 + 4 = 8$*, što je stupanj polinoma* p *pa se on može zapisati kao*

$$p(x) = 5(x - 1)^3(x + 2)x^4.$$

Primjer 17. *Polinom zadan formulom* $p(x) = (x^2 + 1)(x - 3)(x + 4)$ *ima dvije realne nultočke (obje jednostruke) - to su* 3 *i* -4*. Zbroj njihovih kratnosti je* $1 + 1 = 2$*, što je manje od stupnja polinoma (4). Faktor* $x^2 + 1$ *nema realnih nultočki (diskriminanta mu je* -1*) pa* p *ne možemo do kraja faktorizirati na faktore oblika* $(x - c)^m$*.*



Slika 2.15: Grafovi nekih polinoma.

Polinom stupnja n ima najviše[6] n nultočaka. Graf polinoma je krivulja koja ima konačno mnogo prijevoja i konačno mnogo sjecišta s osi apscise (polinom stupnja n ima najviše n nultočaka).

Polinom neparnog stupnja uvijek ima bar jednu realnu nultočku tj. ako je stupanj polinoma neparan, graf mu ima bar jedno sjecište s x-osi, a ako je paran graf ne mora imati sjecišta s x-osi.

Ako je n neparan i vodeći koeficijent $a_n > 0$, onda lijevi kraj grafa ide prema dolje, desni prema gore; ako je n paran i vodei koeficijent $a_n > 0$, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema gore. Za negativne vodeće koeficijente pravila su obrnuta: ako je n neparan $a_n < 0$, onda lijevi kraj grafa ide prema gore, desni prema dolje; ako je n paran i $a_n < 0$, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema dolje.

Zadatak 13. *Sa slike 2.15 odredite koji grafovi prikazuju polinome parnog, a koji neparnog stupnja te predznake njihovih vodećih koeficijenata.*

☼ **Ponovimo bitno**... Polinomi su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čije formule su zbrojevi potencija varijable pomnoženih s nekim konstantama. Oni uključuju afine i kvadratne funkcije. Stupanj polinoma je najveći eksponent s kojim se varijabla pojavljuje u njemu. Polinomi imaju najviše onoliko nultočaka koliki im je stupanj. Graf polinoma os ordinata siječe u slobodnom članu (tj. konstantnom pribrojniku u polinomu). ☺

2.4.4 Racionalne funkcije

Dvije veličine su **obrnuto proporcionalne** ako im je umnožak konstantan. Primjerice, tlak i volumen idealnog plina su obrnuto proporcionalni. Primijetimo da kod obrnute

[6] Da računamo u kompleksnim brojevima: polinom stupnja n ima točno n nultočaka, s tim da neke mogu biti višestruke. U tom slučaju vrijedi: Ako su $x_1, \dots, x_k$ sve (kompleksne) nultočke polinoma p, redom s kratnostima $m_1, \dots, m_k$, je zbroj svih kratnosti jednak stupnju polinoma ($m_1 + \cdots + m_k = n$), i polinom se može zapisati u faktoriziranom obliku $p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}$.

proporcionalnosti ima smisla zahtijevati da te veličine ne postižu vrijednost nula (ako bi u xy =const. primjerice x bio 0, slijedilo bi da je const.$=0$, dakle bismo imali situaciju kad je umnožak stalno 0, dakle bi stalno bar jedna od veličina morala biti 0).

Ako su x i y obrnuto proporcionalne i y shvatimo kao funkciju od x, radi se o ovisnosti tipa $f(x) = a/x$. Ona očigledno nije polinom jer nije definirana u nuli. Ako malo bolje promotrimo, radi se o funkciji koja je kvocijent polinoma stupnja 0 i polinoma stupnja 1.

Racionalne funkcije su kvocijenti dva polinoma. Njihovu prirodnu domenu čine svi realni brojevi koji nisu nultočke nazivnika (dakle, ako nazivnik nema realnih nultočaka, prirodna domena im je cijeli skup $\mathbb{R}$). Pritom treba pripaziti: prirodnu domenu određujemo prije eventualnog skraćivanja.

Primjer 18. *Funkcija zadana s* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ *nije isto što i polinom zadan s* $g(x) = x+2$. *Naime, kraćenje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem (u našem primjeru to je* $(x-2)$*), što smijemo činiti samo ako smo sigurni da taj broj nije nula. Stoga je potrebno prvo odrediti prirodnu domenu za dano pravilo. Za* x *iz te domene onda nazivnik neće biti nula i moći ćemo kratiti, ali za* x *koji nije u toj domeni, funkcija nije definirana.*

Konkretno, prirodna domena funkcije f *je skup* $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. *Za* x *iz te domene je* $f(x) = x+2$, *tj. graf joj je do na jednu točku jednak grafu afine funkcije zadane pravilom* $g(x) = x+2$; *time je* f *prava racionalna, a ne afina, funkcija. Ta točka koja čini razliku između grafova funkcija* f *i* g *je točka* $(2,3)$, *koja je na grafu funkcije* g, *ali nije na grafu funkcije* f *koji izgleda kao da smo „iščupali" točku* $(2,3)$ *iz grafa funkcije* g.

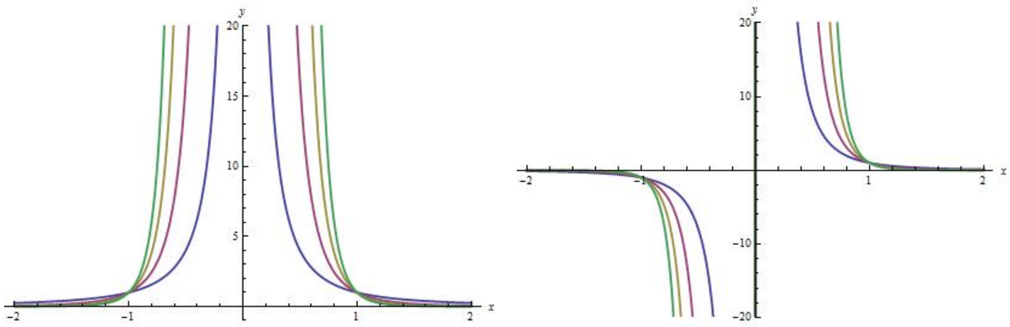
Osnovni primjer racionalnih funkcija su funkcije zadane formulom oblika

$$f_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$. Njima je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$ te im grafovi ne sijeku os ordinata. Kako je razlomak jednak nuli točno ako mu je brojnik jednak nuli, a brojnik ovakve funkcije je 1, slijedi da ove funkcije nemaju nultočki pa im grafovi ne sijeku ni os apscisa. Iz formule je vidljivo da za n neparan ove funkcije poprimaju pozitivne vrijednosti za pozitivne x, a negativne vrijednosti za negativne x, pa im je graf u I i III kvadrantu. Za paran n one poprimaju samo pozitivne vrijednosti pa im je graf u I i II kvadrantu (vidi sliku 2.16).

Na slici 2.16 vidljivo je da za ove funkcije postoje po dva pravca u ravnini koji su istaknuti time da grafovi priliježu uz njih. To su njihove asimptote. Općenito, **asimptota krivulje** je pravac koji ima svojstvo da su mu točke krivulje sve bliže što su dalje od ishodišta. Primijetimo da to znači i da je svaki pravac sam sebi asimptota. Vezano za grafove funkcija obično se ističu tri vrste asimptota: horizontalne, vertikalne i kose. Precizne definicije svih tih vrsta asimptota biti će dane u poglavlju o limesima, a ovdje ćemo se samo intuitivno upoznati s horizontalnim i vertikalnim asimptotama.

Horizontalna asimptota krivulje je horizontalni pravac u Kartezijevom koordinatnom sustavu sa svojstvom da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što je više lijevo



(a) (b)

Slika 2.16: Grafovi racionalnih funkcija $f(x) = \frac{1}{x^n}$ za paran n (a) i za neparan n (b).

ili desno, tj. krivulja se približava horizontalnoj asimptoti s porastom i/ili padom vrijednosti apscise. Graf funkcije može imati najviše dvije horizontalne asimptote, jednu lijevu i jednu desnu (objasnite zašto!). Sve racionalne funkcije oblika f_n imaju svojstvo da je $f_n(x) \approx 0$ za jako velike i jako male[7] x, tj. pravac $y = 0$ (x-os) im je horizontalna asimptota. Općenito, kod racionalnih funkcija se horizontalne asimptote pojavljuju kad je nazivnik stupnja većeg ili jednakog stupnju brojnika (ako je nazivnik strogo većeg stupnja, pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota).

Također, grafovi funkcija f_n imaju y-os (pravac $x = 0$) kao vertikalnu asimptotu. **Vertikalna asimptota** krivulje je vertikalni pravac $x = a$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu sa svojstvom da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što je više gore ili dolje, tj. krivulja se sve više približava vertikalnoj asimptoti što je apscisa bliža a. Vertikalnih asimptota graf funkcije može imati proizvoljno mnogo — koliko ih je, ovisi i o pravilu i o domeni. Općenito, vertikalne asimptote se pojavljuju u „rupama u domeni" (slučajevi kad samo jedan broj iz nekog intervala nije u domeni, recimo gore je nula „rupa u domeni" svih funkcija f_n) ili na (otvorenim) rubovima domene. Kod racionalnih funkcija vertikalne asimptote se pojavljuju kad nazivnik (nakon maksimalnog skraćivanja formule funkcije) ima realnih nultočki (tada su vertikalne asimptote točno pravci $x = a$ gdje su a redom nultočke nazivnika).

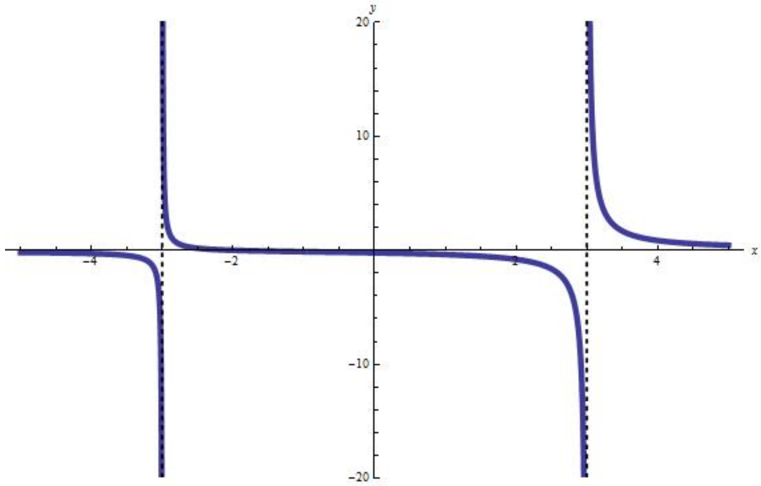
Primjer 19. *Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ima „rupu u domeni", ali njen graf nema vertikalnu asimptotu $x = 2$. Uzrok anomalije, tj. nepojavljivanja vertikalne asimptote u nultočki nazivnika je u tome što se algebarski razlomak koji predstavlja formulu funkcije mogao skratiti tako da rezultat do na jednu točku ispadne polinom, kako smo vidjeli u primjeru 18.*

Primjer 20. *Racionalna funkcija zadana formulom*

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + x^2 - 9x - 9} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$$

za prirodnu domenu ima skup $\mathbb{R}$ bez brojeva -1, 3 i 3. Kako joj je nazivnik većeg stupnja nego brojnik, ona za horizontalnu asimptotu ima pravac $y = 0$ (x-os). Nadalje,

[7] Jako mali broj ne znači da se radi o broju blizu nule, nego o „jako negativnom" broju.



Slika 2.17: Graf racionalne funkcije zadane formulom $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2-9x-9}$.

kako joj se formula može skratiti do oblika $f(x) = \frac{x+1}{(x-3)(x+3)}$, *ona ima dvije vertikalne asimptote* ($x = 3$ *i* $x = -3$)*. Graf ove funkcije prikazan je na slici 2.17.*

Zadnja dva primjera racionalnih funkcija su pomalo „egzotični" i situacije kakve su u njima opisane su rijetke, osobito u primjenama. Stoga se je dobro zapamtiti da načelno u nultočkama nazivnika imamo vertikalne asimptote, ali ne u potpunosti zaboraviti da ne mora tako biti.

Primjer 21. *Ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi i množini, opisana je s*

$$p(V) = \frac{nRT}{V},$$

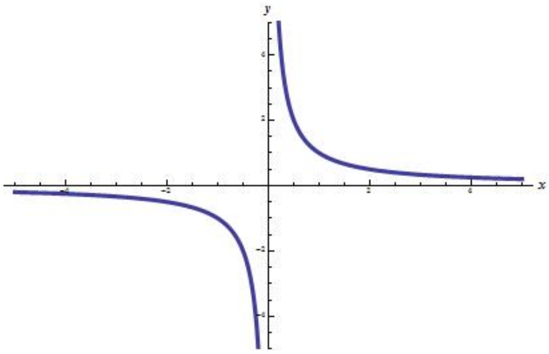
tj. uz odabir $x = V$, $y = p$ *i* $a = nRT$ *se radi o racionalnoj funkciji zadanoj s pravilom oblika*

$$y = \frac{a}{x},$$

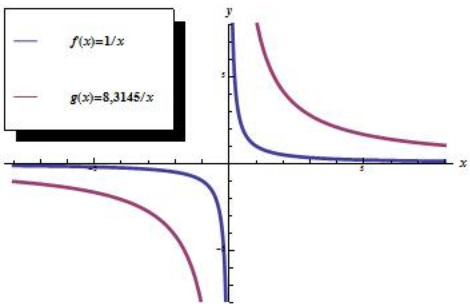
s $a > 0$*. Kad bi bilo* $a = 1$ *radilo bi se o funkciji zadanoj s* $f(x) = \frac{1}{x}$, *čiji graf (istostrana hiperbola) je dan na slici 2.18.*

Za $a \neq 1$ *(obzirom da je* $a = nRT$ *to je vrlo vjerojatno ☺) radi se o funkciji oblika* $a \cdot f(x)$, *pa se prema pravilu za transformaciju grafa (vidi poglavlje 2.3.) dobiva isti oblik grafa, samo malo rastegnut ili stisnut, kako je za slučaj* $a = 8{,}3145$ *vidljivo na slici 2.19.*

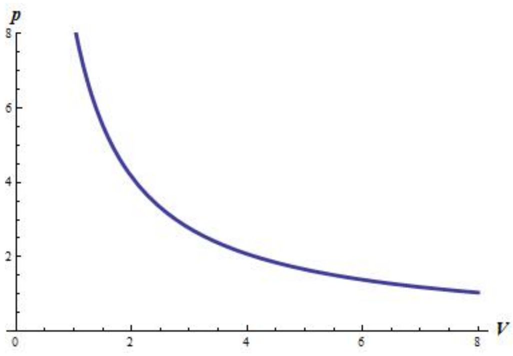
Mnogi bi crveni graf na slici 2.19 uzeli kao graf funkcije tlaka idealnog plina pri, primjerice, množini $0{,}01\,\mathrm{mol}$ *i temperaturi od* $100\,\mathrm{K}$*. No, u našem konkretnom slučaju trebamo uzeti u obzir da se ne radi o apstraktnoj matematičkoj funkciji u kojoj su* x, y *i* a *samo realni brojevi. Ovdje su to iznosi konkretnih fizičkih veličina i ne mogu biti negativni. Stoga je za taj slučaj besmisleno crtati obje grane grafa — lijeva grana odnosi se na negativne vrijednosti* x, *tj. ticala bi se negativnih iznosa volumena te je ona suvišna. Uz to,* x *i* y *nemaju jednoznačnu i s kontekstom povezanu interpretaciju*



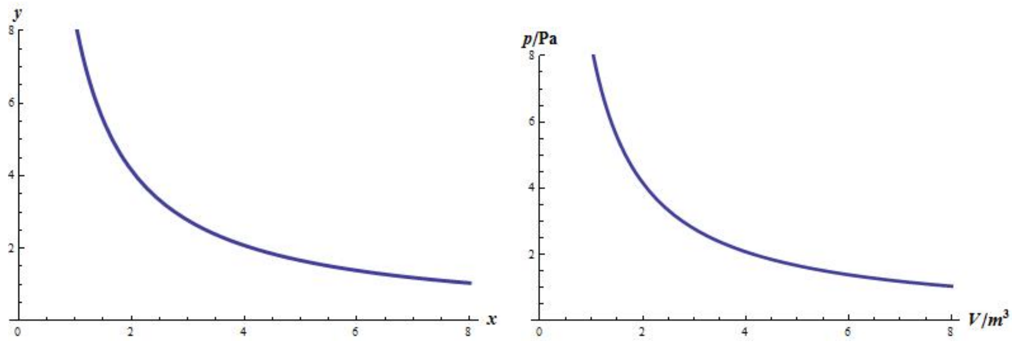
Slika 2.18: Graf funkcije $f(x) = 1/x$.



Slika 2.19: Usporedba grafova funkcija $f(x) = 1/x$ i $g(x) = 8{,}3145/x$.



Slika 2.20: Ne baš korektno prikazana ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina pri $n = 0{,}01$ mol i $T = 100$ K.



(a) (b)

Slika 2.21: Matematički model (a) i ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina uz $x = V/\mathrm{m}^3$, $y = p/\mathrm{Pa}$ i $a = nRT/\mathrm{J}$ (b).

te bi trebalo odgovarajuće promijeniti oznake. Stoga bi prikaz na slici 2.20 bio bolji prikaz grafa ovisnosti tlaka idealnog plina o volumenu, ako je množina $n = 0{,}01$ mol *i temperatura* $T = 100$ K.

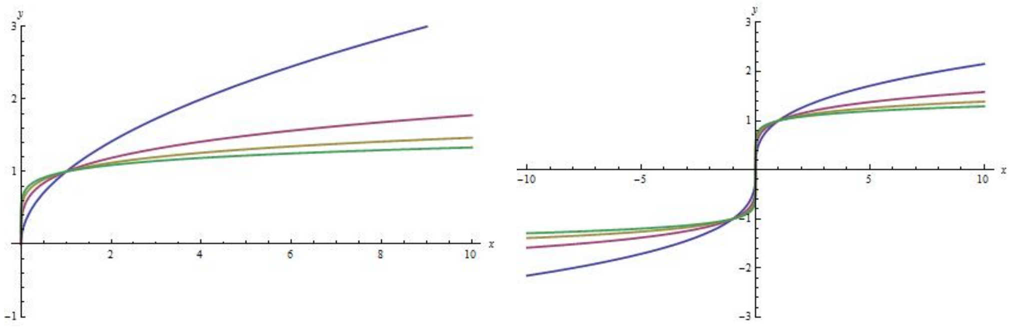
Prikaz na slici 2.20 ima jednu prirodoznanstvenu i jednu matematičku nekonzistentnost. Brojevi na koordinatnim osima nisu volumen i tlak, nego samo njihovi iznosi za odabrane jedinice. Stoga na slici 2.20 osi nisu korektno označene — os apscisa prikazuje iznose V/m^3, *a os ordinata iznose* p/Pa. *No, ako tako samo promijenimo oznake, nismo više u skladu s početnim odabirom* $x = V$ *i* $y = p$. *Što je krivo? Ovaj problem već smo spomenuli u primjeru 10. Naime, umjesto* $x = V$, $y = p$ *i* $a = nRT$ *preciznije smo trebali pisati* $x = V/\mathrm{m}^3$, $y = p/\mathrm{Pa}$ *i* $a = nRT/\mathrm{J}$, *ali smo dogovorno podrazumijevali da naš odabir* x, y *i* a *upravo to znači. Tek uz takvu interpretaciju matematičkih veličina* x, y *i* a *imamo korektan matematički model prirodoznanstvenog odnosa. Pravilan prikaz vidljiv je na slici 2.21.*

☼ **Ponovimo bitno**... Racionalne funkcije su kvocijenti dva polinoma, a prirodna domena im je skup realnih brojeva bez nultočaka nazivnika. Često posjeduju asimptote, tj. pravce kojima se graf vizualno približava kako se točka grafa udaljava od ishodišta. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu ako joj nazivnik nije manjeg stupnja od brojnika, a vertikalne asimptote ima u nultočkama nazivnika (nakon eventualnog kraćenja zajedničkih faktora brojnika i nazivnika). ☺

2.4.5 Korijeni

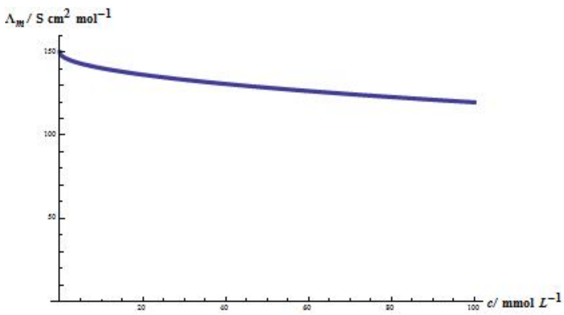
Neka je $y = x^n$. Ako je n neparan, onda je vrijednost od x jedinstveno određena vrijednošću y i kažemo da je $x = \sqrt[n]{y}$. Primjerice, $2^3 = 8$ znači da je $2 = \sqrt[3]{8}$. Kako je x^n za pozitivan broj pozitivno, a za negativan negativno (za neparan n), slijedi da su **neparni korijeni** definirani za sve realne brojeve te ih možemo shvatiti kao funkcije $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Radi se o rastućim funkcijama čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu.

Ako je n paran, onda iz $y = x^n$ (recimo, $y = x^2$) slijedi da je $y \geq 0$. Uz to,



(a) (b)

Slika 2.22: Funkcije zadane s $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ za n paran (a) i n neparan (b).



Slika 2.23: Ovisnost molarne provodnosti jakog elektrolita o njegovoj koncentraciji.

vrijednost od x nije jedinstveno određena vrijednošću y (primjerice, $(-3)^2 = 3^2 = 9$). Stoga se često piše $\sqrt{9} = \pm 3$. No, želimo li korijene promatrati kao funkcije, njihova vrijednost mora biti jedinstveno određena te se dogovorno uzima da **parni korijeni**, promatrani kao funkcije, pozitivnih brojeva daju pozitivne brojeve. Imamo dakle $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ za n paran. I ovo su rastuće funkcije, čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu, no graf se zbog prirodne domene $[0, +\infty\rangle$ nalazi samo u prvom kvadrantu Kartezijevog kooordinatnog sustava.

Zadatak 14. *Kohlrauschov zakon opisuje ovisnost molarne provodnosti Λ_m o koncentraciji c jakog elektrolita i glasi*

$$\Lambda_m = \Lambda_m^\circ - \mathcal{K}\sqrt{c}.$$

Pritom su Λ_m° i $\mathcal{K}$ konstante. Koristeći transformacije grafova objasnite zašto pripadni graf ima oblik prikazan slikom 2.23.

☼ **Ponovimo bitno**. . . Korijeni su rastuće realne funkcije. Neparni korijeni kao prirodnu domenu imaju cijeli skup $\mathbb{R}$, a u prirodnoj domeni parnih korijena su samo nenegativni brojevi.

2.5 Kompozicija funkcija i inverne funkcije

Mnoge funkcije djeluju tako da prvo iz varijable po jednom pravilu izračunamo neku međuvrijednost, a tek onda iz te međuvrijednosti konačnu vrijednost funkcije u polaznoj varijabli. Takvom kombinacijom pravila (uvrštavanjem jednog pravila u drugo na mjestu varijable) dobivamo novu funkciju koju možemo i ne moramo gledati kao sastavljenu od polazne dvije.

Primjer 22. *Ako želimo odrediti masu otopljene tvari u otopini poznate množinske koncentracije c i poznatog volumena V, možemo prvo iz c i V odrediti množinu otopljene tvari prema pravilu $n = cV$, a zatim iz množine odrediti masu prema pravilu $m = nM$, gdje je M molarna masa otopljene tvari. Alternativno, mogli smo odmah iskombinirati formule tako da dobijemo pravilo $m = cMV$, čime izbjegavamo računanje međurezultata n ako nam on nije od značaja.*

Preciznije, **kompozicija funkcija** $f : A \to B$ i $g : C \to D$ je funkcija $f \circ g$ čije pravilo je dano s

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

No, da ne zaboravimo da funkciju čine i domena i kodomena, što je domena, a što je kodomena od $f \circ g$? Rezultati od $f \circ g$ su negdje gdje su rezultati od f jer se dobiju uvrštavanjem nečega ($g(x)$-ova) u funkciju f. Dakle, kodomena od $f \circ g$ je kodomena od f, tj. B. S druge strane, u $f \circ g$ uvrštavamo x-eve koje prvo moramo uvrstiti u g da bismo mogli izračunati $f(g(x))$, dakle su x-evi iz domene od g odnosno domena od $f \circ g$ je C. Sve skupa nam daje $f \circ g : C \to B$. No, prije primjera, ovdje treba upozoriti da skupovi A i D ne smiju biti bilo kakvi. Kako je D kodomena od g, znamo da je $g(x) \in D$ za sve $x \in C$. Nadalje, kako $g(x)$ moramo moći uvrstiti u f slijedi da $g(x)$ mora biti u domeni A od f, tj. mora vrijediti $D \subseteq A$ da bi kompozicija $f \circ g$ bila smislena. U praksi se to lako vidi: ukoliko izračunati $g(x)$ ne možemo uvrstiti u f, kompozicija $f \circ g$ nije smislena.

Primjer 23. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = 2x+1$, a $g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s $g(x) = \sqrt{x}$, onda imamo da je $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$ i koji god nenegativan x uzmemo to je moguće izračunati te je $f \circ g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$.*

Zamijenimo li redoslijed, nailazimo na probleme. Formalno, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$ te se sve čini smisleno. No, kao domenu od f uzeli smo $\mathbb{R}$ te bi $g \circ f$ trebala također biti definirana na $\mathbb{R}$. Za neke realne x, primjerice za $x = -5$, broj $2x + 1$ je negativan te se ne može izračunati $g \circ f(x)$ za takve x. Stoga $g \circ f$ nije definirana uz početni odabir domene od f. Ako bi nam pak bilo dovoljno za domenu od f uzeti skup $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ (tj. brojeve x za koje je $2x + 1 \geq 0$), onda bi i $f \circ g$ i $g \circ f$ bile dobro definirane (ali različite).

Prethodni primjer važan je ne samo jer upozorava na oprez pri baratanju domenama kod kompozicije (matematički vrlo bitno, a u praksi u pravilu automatski „štima”), nego na još jednu bitnu stvar: kod kompozicije funkcija treba paziti na redoslijed. Čak i ako su definirane obje kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$, one u pravilu nisu iste funkcije. Neformalnije rečeno, nije svejedno koje pravilo uvrštavamo u koje.

Primjer 24. *Stavite knjigu na stol tako da joj poleđina leži na stolu i da je naslovnica u uobičajenom položaju pogodnom za čitanje. Ako tu knjigu prvo zaokrenete za 45° u smjeru kazaljke na satu (bez da ju podižete, tj. oko zamišljene vertikalne osi) pa ju onda, bez daljnjeg zaokreta oko vertikalne osi, preokrenete tako da joj naslovnica gleda prema stolu (oko osi koja je horizontalna i gleda prema Vama, tj. okretom prema desnoj ili lijevoj ruci), rezultat nije isti kao ako ju prvo preokrenete slijeva udesno pa onda zarotirate za 45° u smjeru kazaljke na satu.*

U nekim slučajevima desi se da kod uzastopnog primjenjivanja dva pravila stvari izgledaju kao na početku — što je prvo pravilo promijenilo, drugo vrati u polazno stanje.

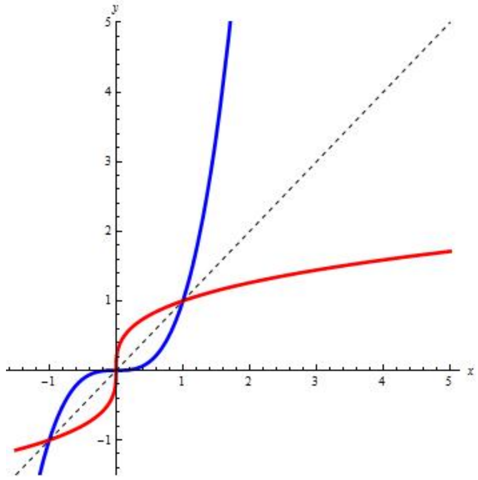
Primjer 25. *Ako knjigu iz prethodnog primjera prvo zaokrenete za 45° u smjeru kazaljke na satu pa onda za zaokrenete za 45° u suprotnom smjeru, izveli ste dvije akcije (uzastopno primijenili dvije funkcije rotacije), ali efekt je kao da niste ništa radili.*

U takvim slučajevima kažemo da je druga funkcija inverzna prvoj i prva inverzna drugoj. Preciznije, **inverzna funkcija** funkcije $f : A \to B$ je funkcija $g : B \to A$ (ako takva postoji) takva da je $f \circ g(x) = x$ za sve $x \in B$ i $g \circ f(x) = x$ za sve $x \in A$. Tada pišemo $g = f^{-1}$. Možemo reći: ako f x-u pridružuje y (recimo, broju 2 broj -3), onda f^{-1} y-u pridružuje x (broju -3 broj 2).

Nemaju sve funkcije inverze: funkcija ima inverz ako i samo ako je bijekcija, tj. injekcija i surjekcija. Zašto su ta dva svojstva bitna? Injektivnost znači da različitim x-evima pridružujemo različite y. Kad bi funkcija f imala inverz, a da pritom dvama x-evima x_1 i x_2 bude pridružen isti y, onda bi inverz f^{-1} morao tom y-u pridružiti i x_1 i x_2, tj. f^{-1} ne bi bio funkcija. Surjektivnost znači da je svaki y iz kodomene pridružen nekom x-u iz domene, dakle se može uzeti taj x kao $f^{-1}(y)$, tj. moguće je definirati pravilo pridruživanja.

Dosad smo se susreli s jednim važnim primjerom inverznih funkcija: korijeni. Pritom smo imali dva slučaja. Neparni korijeni su inverzi neparnih monoma, recimo $\sqrt[3]{.} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je inverzna funkcija bijekcije $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, jer je za sve realne brojeve $\sqrt[3]{x^3} = x$ (tj. $f^{-1} \circ f(x) = x$) i $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ (tj. $f \circ f^{-1}(x) = x$). S druge strane, parni monomi nisu bijekcije s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Uzmimo primjerice kvadriranje. Ono nije injekcija jer recimo -2 i 2 kvadrirani oba daju isti rezultat 4, a nije ni surjekcija jer se negativni brojevi ne mogu napisati kao kvadrati realnih brojeva. Surjektivnost lako postignemo: promijenimo kodomenu $\mathbb{R}$ u sliku te funkcije $[0, +\infty\rangle$. Time smo, formalno gledajući, promijenili funkciju (funkcija je osim pravilom određena i domenom i kodomenom), ali ta promjena je prilično nebitna jer nas ni u kom smislu ne ograničava. Injektivnost se ne može postići bez „zahvata” u domeni, točnije sužavanja domene. Takva promjena funkcije u novu kod koje se mijenja samo domena, i to na manji skup, zove se **restrikcija funkcije**. Restrikcije ćemo označavati jednako kao i polazne funkcije. U slučaju kvadriranja ako za domenu uzmemo $[0, +\infty\rangle$, onda smo stvarno dobili injekciju: kvadrati različitih nenegativnih brojeva su različiti. Stoga $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ doduše nema inverza, ali $f : [0, +\infty\rangle\to[0, +\infty\rangle$, $f(x) = x^2$ ga ima i to je točno funkcija kvadratnog korjenovanja.

Ako znamo graf bijekcije f, onda je lako nacrtati graf njezine inverzne funkcije: graf od f^{-1} je zrcalno simetričan grafu od f obzirom na pravac $y = x$ (vizualno je ta



Slika 2.24: Grafovi dviju međusobno inverznih funkcija.

simetrija vidljiva samo ako su odabrane jedinice na x- i y-osi jednake!). Usporedite primjerice grafove funkcije kubiranja i funkcije trećeg korijena (vidi sliku 2.24).

Sad možemo konačno reći i što su **algebarske funkcije**. To su sve funkcije koje se mogu dobiti komponiranjem polinoma, racionalnih funkcija i korijena.

Korisno je zapamtiti još i sljedeće: ako je funkcija rastuća njen inverz je također rastuća funkcija, a ako je funkcija padajuća njen inverz je padajuća funkcija.

☼ **Ponovimo bitno**... Kompozicija funkcija f i g je definirana s $f \circ g(x) = f(g(x))$. Domena joj je jednaka domeni unutrašnje funkcije g, a kodomena joj je jednaka kodomeni vanjske funkcije f. Inverzna funkcija bijekcije $f : A \to B$ je bijekcija $f^{-1} : B \to A$ sa svojstvom da su $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$ identitete. Graf inverzne funkcije f^{-1} je zrcalno simetričan grafu od f obzirom na pravac $y = x$. ☺

2.6 Transcendentne funkcije

Funkcije koje nisu algebarske, tj. čija pravila pridruživanja ne možemo izraziti konačnim brojem operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja s racionalnim eksponentima zovu se transcendentne. Najvažnije među njima su eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije.

Primijetimo da razlika algebarskih i transcendentnih funkcija ima i svoju fizikalnu interpretaciju: algebarske funkcije su one u koje ima smisla uvrštavati i fizikalne jedinice, dok u transcendentne funkcije ima smisla uvrštavati samo „čiste” brojeve.

2.6.1 Eksponencijalne funkcije

Dosad smo se susreli s funkcijama koje računaju cjelobrojne potencije varijable (monomi i kvocijenti monoma) te racionalne potencije (korijeni i njihove kompozicije s monomima), tj. s funkcijama koje varijabli x pridružuju $x^{\frac{m}{n}}$ gdje su m i n cijeli brojevi ($n \neq 0$). Ukratko, varijabla nam je bila u bazi, a eksponent je bio fiksiran. Funkcije kod kojih je baza fiksirana, a eksponent je varijabla, zovu se eksponencijalne funkcije. Preciznije, **eksponencijalna funkcija s bazom** a je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formule

$$f(x) = a^x.$$

Pritom baza a ne može biti bilo kakav broj. Kao prvo, ako bi bilo $a = 0$ imali bismo $f(x) = 0$ za $x \neq 0$ i $f(0)$ ne bi bio definiran[8], dakle nešto poput konstantne funkcije s „rupom" u domeni. Ako bismo uzeli $a = 1$, dobili bismo pravu konstantnu funkciju $f(x) = 1$. Dakle, baza ne smije biti 0 niti 1. A zašto ne bi baza bila negativna? Najjednostavniji primjer da bi nam to izazvalo probleme je pokušaj definiranja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(x) = (-1)^x$. Kako želimo da je prirodna domena cijeli $\mathbb{R}$, znači da kao x možemo uvrstiti bilo koji broj, recimo $-\frac{1}{2}$. Dobili bismo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, što nije realan broj, dakle takva funkcija ne bi bila realna funkcija. Sve skupa nam daje uvjet: baza eksponencijalne funkcije mora biti pozitivan broj različit od 1 (kratko: $a > 0$ i $a \neq 1$).

Napomena 3. *Osvrnimo se ovdje na neke česte pogreške studenata. Prvo, ne govorimo o eksponencijalnoj* funkciji *nego o eksponencijalnim* funkcijama *— za svaku dozvoljenu bazu imamo po jednu eksponencijalnu funkciju. Drugo, baza eksponencijalne funkcije se ni u kom slučaju ne smije zvati koeficijentom smjera — pojam koeficijent smjera ima veze (unutar konteksta elementarnih funkcija) isključivo s afinim funkcijama. Treće, i zasad posljednje, kad govorimo o konkretnoj eksponencijalnoj funkciji, njena baza a je fiksna — ona definira funkciju o kojoj govorimo — te je u kontekstu grafova besmisleno „tražiti" tu bazu po osi apscisa[9] odnosno reći da je prirodna domena eksponencijalne funkcije skup pozitivnih realnih brojeva različitih od* 1.

Sad kad smo utvrdili što su eksponencijalne funkcije, posvetimo se malo njihovim svojstvima i grafovima. Ovisno o tome je li baza veća ili manja od 1 dobit ćemo rastuću ili padajuću eksponencijalnu funkciju: eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$ su rastuće, a one za koje je $0 < a < 1$ su padajuće. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija os ordinata sijeku u točki $(0, 1)$ jer je za sve njih $f(0) = a^0 = 1$.

Zadatak 15. *U kojoj točki graf funkcije s formulom $f(x) = Ca^x$ siječe os ordinata?*

Eksponencijalne funkcije nemaju nultočaka, štaviše: rezultati su im strogo pozitivni, tj. slika svake eksponencijalne funkcije je $\langle 0, +\infty \rangle$ (graf im je uvijek iznad osi apscisa). Uz modifikaciju kodomene na taj skup, eksponencijalne funkcije su bijekcije.

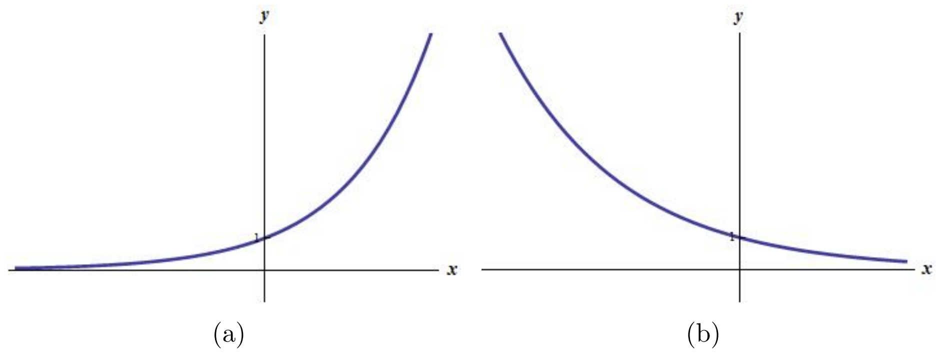
Os apscisa je horizontalna asimptota za svaku eksponencijalnu funkciju: ako je baza $a > 1$, radi se o asimptoti na lijevoj strani (brojevi a^x za jako negativne x su jako blizu nule), a ako je baza $a < 1$, radi se o asimptoti na desnoj strani (brojevi a^x za jako velike x su jako blizu nule). Grafovi eksponencijalnih funkcija vidljivi su na slici 2.25.

Eskponencijalne funkcije pojavljuju se u gotovo svim primjenama matematike, od kojih ćemo neke upoznati primjerice u poglavlju o diferencijalnim jednadžbama.

---

[8] Kao što nije definirano $0/0$, nije definirano ni 0^0.

[9] Osim naravno ako u $f(x) = a^x$ želimo uvrstiti $x = a$, no i tad se na apscisi traži vrijednost varijable koja se uvrštava, a ona je slučajno jednaka bazi.



Slika 2.25: Grafovi eksponencijalnih funkcija s bazom većom od 1 (a) i bazom manjom od 1 (b).

Primjer 26. *1s-orbitala vodikovog atoma je eksponencijalna funkcija formule* $\exp(-r)$*, gdje je* r *udaljenost elektrona do jezgre. Općenito, formule svih atomskih orbitala su oblika* $f(x,y,z)\exp(-ar)$*, gdje je* $f(x,y,z)$ *neko pravilo koje ovisi o poziciji* (x,y,z) *elektrona u prostoru, a* a *je neka pozitivna konstanta.*

Najčešće se koristi eksponencijalna funkcija s bazom e. Broj e je matematička konstanta i iracionalan je broj, a iznosi približno 2,718. Umjesto e^x često se koristi oznaka $\exp(x)$.

Na kraju, spomenimo još dva važna svojstva eksponencijalnih funkcija, a to su da za sve vrijednosti varijabli $x, y \in \mathbb{R}$ vrijede formule

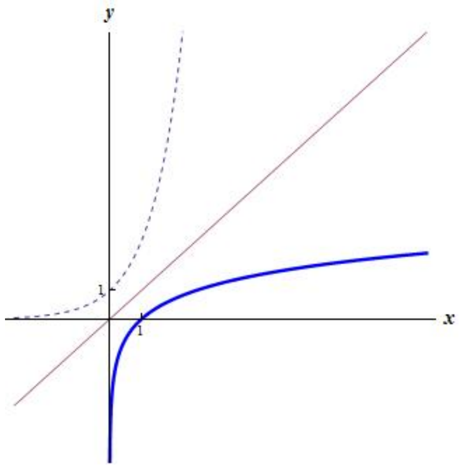
$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y),$$

$$f(x-y) = a^{x-y} = a^x : a^y = f(x) : f(y).$$

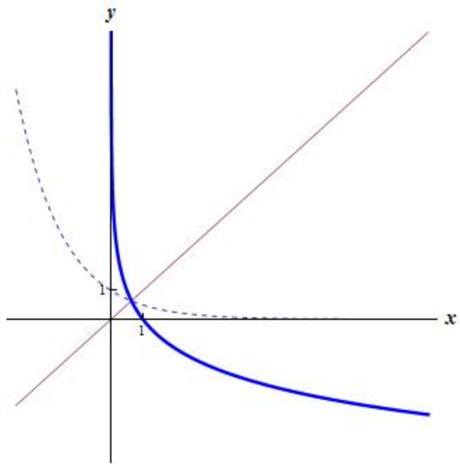
☼ **Ponovimo bitno...** Eksponencijalne funkcije su realne funkcije s prirodnom domenom $\mathbb{R}$ zadane formulom oblika $f(x) = a^x$. Pritom je baza a konstanta koja mora biti pozitivan broj različit od 1. Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija raste i ima x-os kao horizontalnu asimptotu lijevo, a za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija pada i ima x-os kao horizontalnu asimptotu desno. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija sijeku y-os u 1 i ne sijeku x-os. ☺

2.6.2 Logaritamske funkcije

Rekli smo da je svaka eksponencijalna funkcija injekcija te da joj je slika skup $\langle 0, +\infty\rangle$, tj. eksponencijalna funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$, $f(x) = a^x$ je bijekcija i stoga ima inverznu funkciju $f^{-1} : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. **Logaritamska funkcija s bazom** a definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s $\log_a : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Opisno rečeno, smisao logaritma broja po danoj bazi je da odredi eksponent na koju treba „dići" tu bazu da bi se dobio polazni broj. Naglasimo i da to što je prirodna domena svake logaritamske funkcije $\langle 0, +\infty\rangle$ znači da nema smisla „vaditi" logaritme iz negativnih brojeva i nule.



(a)



(b)

Slika 2.26: Grafovi logaritamskih funkcija s bazom većom od 1 (a) i bazom manjom od 1 (b).

Primjer 27. *Iz definicije slijedi:*

$$\log_7 1 = \log_7 7^0 = 0,$$

$$\log_{451} 451 = \log_{451} 451^1 = 1,$$

$$\log_{0,25} 4 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1,$$

a $\log_5 0$ *nema smisla jer* 5 *ni na koju potenciju ne daje nulu.*

Po definiciji za svaku dozvoljenu bazu a ($a > 0$, $a \neq 1$) imamo po jedan par eksponencijalne i logaritamske funkcije za koje vrijede formule koje izražavaju njihovu inverznost:

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a y} = y, \quad y > 0.$$

Za sve logaritme vrijedi

$$\log_a 1 = 0$$

jer je $1 = a^0$ za svaku dozvoljenu bazu a. Stoga je 1 nultočka, i to jedina, svake logaritamske funkcije; to znači da grafovi svih logaritamskih funkcija os apscisa sijeku u točki $(1, 0)$. Logaritamske funkcije s bazama većim od 1 su rastuće, a one s bazama manjim od 1 su padajuće, kao i njima inverzne eksponencijalne funkcije. Prema pravilu za dobivanje grafa inverzne funkcije vidimo da imamo dva tipa grafova logaritamskih funkcija, kako je prikazano na slikama 2.26 (crtkanom linijom na tim su slikama nacrtani grafovi eksponencijalnih funkcija čiji inverzi su logaritmi čiji grafovi su podebljani; tanko je ucrtan pravac $y = x$ da se bolje istakne simetrija grafova međusobno inverznih funkcija).

S grafova vidimo da je za sve logaritamske funkcije y-os vertikalna asimptota: za baze manje od 1 logaritmi brojeva blizu nule su jako veliki, a za baze veće od 1 su jako mali (jako negativni).

Dva osnovna svojstva logaritamskih funkcija su dualna na kraju prethodnog poglavlja navedenim dvama svojstvima eksponencijalnih funkcija:

$$f(x \cdot y) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y),$$

$$f(x : y) = \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y = f(x) - f(y).$$

Možemo ih zapamtiti ovako: logaritmi su povijesno uvedeni da bi olakšali komplicirane račune s „ružnim" decimalnim brojevima. Kako je lakše zbrojiti nego pomnožiti dva decimalna broja, pamtimo: logaritam umnoška je zbroj logaritama (logaritam pretvara množenje u zbrajanje); analogno vrijedi za dijeljenje i oduzimanje.

Za dvije posebno česte baze logaritmi imaju posebne oznake: logaritam s bazom 10 se označava jednostavno s log (a ne s $\log_{10}$), a logaritam s bazom e se umjesto s $\log_e$ obično označava s ln.

Napomena 4. *Povremeno je od koristi sljedeća formula za promjenu baze logaritma:*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

koja vrijedi za sve dozvoljene baze a i b. Specijalno, vrijedi

$$\log_{1/a} x = -\log_a x.$$

Primijetimo da se uz poznavanje logaritama sve eksponencijalne funkcije mogu svesti na bazu e: Za svaku dozvoljenu bazu a i sve brojeve x vrijedi

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Primjer 28. *Najpoznatija pojava pojma logaritma u kemiji je definicija* pH *otopine:*

$$\mathrm{pH} = -\log \frac{[\mathrm{H}^+]}{c^\ominus}.$$

Ta definicija nije posve točna (preciznija bi glasila: pH *je suprotna vrijednost dekadskog logaritma relativne aktivnosti vodikovih iona u otopini), a vrijednost* $-\log \frac{[\mathrm{H}^+]}{c^\ominus}$ *prikladnije bi bilo označiti s* p[H]*, no ovdje ćemo se poslužiti navedenom jednostavnijom definicijom. Primijetimo da stoga mjerenjem* pH *možemo odrediti koncentraciju* $[\mathrm{H}^+]$*:*

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}} \cdot \mathrm{mol/L}.$$

Uobičajeno je gornju definiciju riječima izreći ovako: pH *je* negativan *dekadski logaritam iznosa koncetracije hidronijevih iona u otopini, mjerene u molima po litri. Riječ* negativan *ovdje je naglašena jer bi prikladnije bilo reći* suprotan*: vrijednosti* pH *su (u pravilu) pozitivni brojevi i definicija je takva kakva jest upravo jer su logaritmi* $\log \frac{[\mathrm{H}^+]}{c^\ominus}$ *u otopinama najčešće negativni brojevi (koncentracije hidronijevih iona su u* *pravilu manje od standardne te je razlomak pod logaritmom po vrijednosti između* 0 *i* 1, *tj. dekadski logaritam mu je negativan).*

Kako je dekadski logaritam rastuća funkcija svog argumenta, a promjena predznaka funkcije pretvara rastuću u padajuću funkciju, slijedi da je pH *padajuća funkcija od* $\frac{[\mathrm{H}^+]}{c^\ominus}$*, tj.* pH *za kiseliju otopinu je manji nego za manje kiselu. Sâm simbol* p *može se tumačiti kao oznaka za* $-\log$.

Nadalje, za reakcije u kojima sudjeluju kiseline i baze, definirane su sljedeće veličine: ionski produkt vode

$$K_w = [\mathrm{H}^+][\mathrm{OH}^-],$$

konstanta disocijacije kiseline HA

$$K_a = \frac{[\mathrm{H}^+][\mathrm{A}^-]}{[\mathrm{HA}]},$$

i konstanta disocijacije baze B

$$K_b = \frac{[\mathrm{BH}^+][\mathrm{OH}^-]}{[\mathrm{B}]}.$$

Odgovarajuće p*-veličine su (uz oznaku* pOH$= -\log \frac{[\mathrm{OH}^-]}{c^\ominus}$*)*

$$\mathrm{p}K_w = -\log \frac{K_w}{(c^\ominus)^2} = \mathrm{pH} + \mathrm{pOH}, \quad \mathrm{p}K_a = -\log \frac{K_a}{c^\ominus}, \quad \mathrm{p}K_b = -\log \frac{K_b}{c^\ominus}.$$

Iz definicije konstante disocijacije kiseline, logaritmiranjem dobivamo

$$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_a + \log \frac{[\mathrm{A}^-]}{[\mathrm{HA}]},$$

tj. Henderson-Hasselbachovu jednadžbu za par (slabe) kiseline HA *i njene konjugirane baze* A^-.

☼ **Ponovimo bitno**... Logaritam s bazom a je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom. Stoga je definiran samo za pozitivne brojeve, raste ili pada točno kad odgovarajuća eksponencijalna funkcija raste odnosno pada i ima y-os za vertikalnu asimptotu (prema dolje ili gore ovisno o tom je li $a > 1$ ili $a < 1$). Logaritam produkta je zbroj logaritama, a logaritam kvocijenta je razlika logaritama. ☺

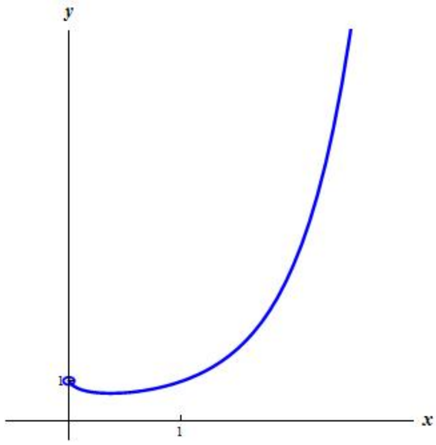
2.6.3 Opća potencija

Ponekad se susreću funkcije eksponencijalnog oblika čije pravilo sadrži varijablu i u bazi i u eksponentu. Takva je primjerice funkcija s pravilom

$$f(x) = x^x.$$

Takve funkcije nisu ni monomi ni eksponencijalne funkcije, nego spadaju u tzv. **opće potencije**. Formula takve funkcije je općenito oblika $f(x) = u(x)^{v(x)}$, a definira se kao

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$



Slika 2.27: Opća potencija $y = x^x$.

Iz te se definicije vidi da je prirodna domena takve funkcije skup svih realnih brojeva x za koje je $u(x) > 0$.

Primjerice, $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ za prirodnu domenu ima skup $\langle 0, +\infty\rangle$ jer je tu $u(x) = v(x) = x$. Graf te funkcije prikazan je na slici 2.27.

☼ **Ponovimo bitno...** Opća potencija $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$ je definirana na skupu realnih rješenja nejednadžbe $u(x) > 0$. ☺

2.6.4 Hiperbolne funkcije

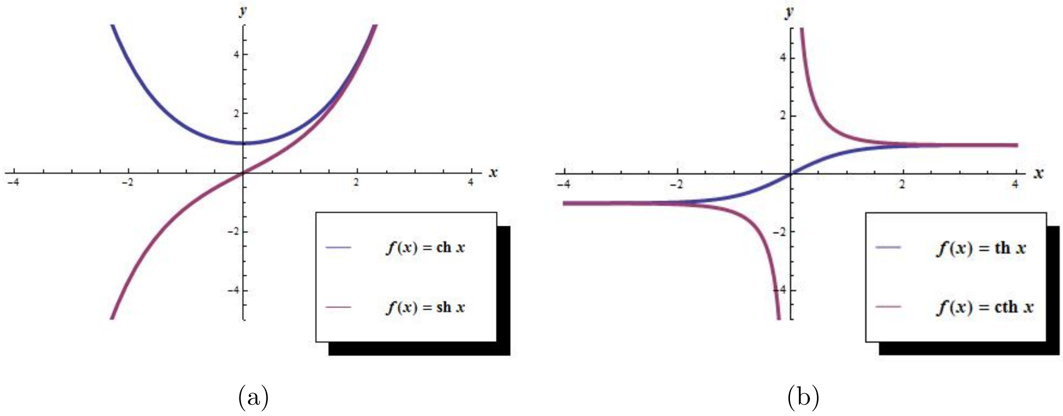
Nešto rjeđe u primjenama se pojavljuju i četiri hiperbolne funkcije. Njihove definicije su kako slijedi:

- **sinus hiperbolni**: $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- **kosinus hiperbolni**: $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- **tangens hiperbolni**: $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
- **kotangens hiperbolni**: $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

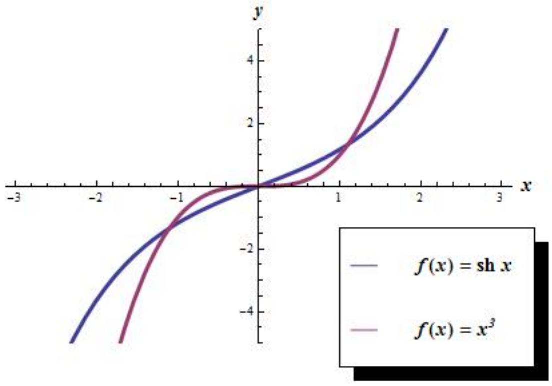
Kako su brojevi e^x i e^{-x} smisleni i pozitivni za sve realne brojeve, očito je prirodna domena za prve tri funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$. Kod kotangensa hiperbolnog u prirodnoj domeni nisu x-evi za koje je $e^x = e^{-x}$, tj. $e^{2x} = 1$. Takav broj je samo $x = 0$ pa je prirodna domena kotangensa hiperbolnog skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Napomena 5. *Imena hiperbolnih funkcija potječu od toga što bi se mogle definirati slično kao i trigonometrijske funkcije (vidi sljedeće poglavlje), s tim što bi se umjesto jedinične kružnice*[10] $X^2 + Y^2 = 1$ *uzela istostrana hiperbola* $X^2 - Y^2 = 1$.

[10] U jednadžbama su apscisa i ordinata označene velikim umjesto malim slovima X i Y kako bi se izbjeglo poistovjećivanje apscise kružnice/hiperbole s varijablom koju uvrštavamo u trigonometrijsku/hiperbolnu funkciju, a koju obično označavamo s x.



Slika 2.28: Grafovi sinusa i kosinusa hiperbolnog (a) i tangensa i kotangensa hiperbolnog (b).



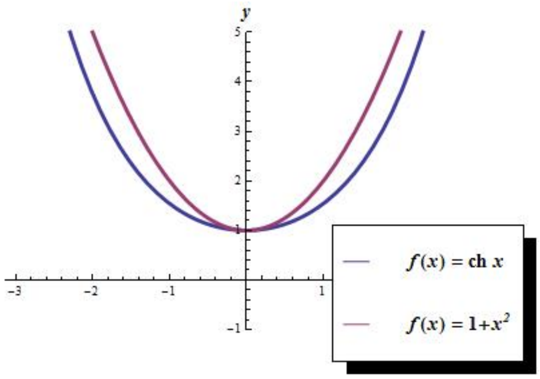
Slika 2.29: Usporedba krivulja $y = \operatorname{sh} x$ i $y = x^3$.

Grafovi hiperbolnih funkcija prikazani su na slici 2.28. Vidimo da je sinus hiperbolni neparna rastuća funkcija čiji graf podsjeća na graf funkcije kubiranja, no usporedbom tih grafova (slika 2.29) vidi se da je oko ishodišta graf sinusa hiperbolnog sličniji pravcu $y = x$, dok se krivulja $y = x^3$ oko ishodišta više priljubljuje uz x-os.

Graf kosinusa hiperbolnog pak podsjeća na parabolu $y = x^2 + 1$, no naravno nije joj jednak (slika 2.30); krivulja $y = \operatorname{ch} x$ zove se lančanica. Kosinus hiperbolni je parna funkcija.

Grafovi tangensa i kotangensa hiperbolnog imaju dvije horizontalne asimptote: lijevo $y = -1$ i desno $y = 1$. Tangens hiperbolni je rastuća, kotangens hiperbolni padajuća funkcija, a oba su neparne funkcije.

☼ **Ponovimo bitno...** Hiperbolne funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens hiperbolni, definirane s $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ i $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Prve tri su definirane na cijelom $\mathbb{R}$, a kotangens hiperbolni je definiran na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sve osim kosinusa hiperbolnog su neparne funkcije, a kosinus hiperbolni je parna. Sinus i tangens hiperbolni su rastuće funkcije, a kotangens hiperbolni je padajuća funkcija. ☺



Slika 2.30: Usporedba krivulja $y = \operatorname{ch} x$ i $y = x^2 + 1$.

2.6.5 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens. Sve one spadaju u periodičke funkcije: **periodična funkcija** (jedne varijable) je funkcija f sa svojstvom da se može naći broj T (**period**) takav da za sve x iz domene od f vrijedi

$$f(x + T) = f(x).$$

Uvrstimo li $x - T$ na mjesto broja x dobivamo da mora vrijediti i $f(x) = f(x - T)$; analogno bi se vidjelo da ako gornja jednakost vrijedi za sve x, onda mora vrijediti i $f(x+nT) = f(x)$ za sve x i za sve $n \in \mathbb{Z}$. Domena periodične funkcije za svaki x kojeg sadrži mora sadržavati i sve brojeve $x+nT$. Stoga je jedna moguća domena periodične funkcije skup $\mathbb{R}$. Alternativno, domena periodične funkcije može biti beskonačna unija intervala I_n $(n \in \mathbb{Z})$, gdje I_n sadrži brojeve između $a+nT$ i $b+nT$. Pritom intervali I_n mogu biti otvoreni, zatvoreni ili poluotvoreni i $0 \leq a < b \leq T$. Pojednostavljeno rečeno, takva domena sastoji se od svih za višekratnik od T ulijevo ili udesno translatiranih kopija osnovnog intervala unutar $[0, T]$ na kojem je funkcija definirana.

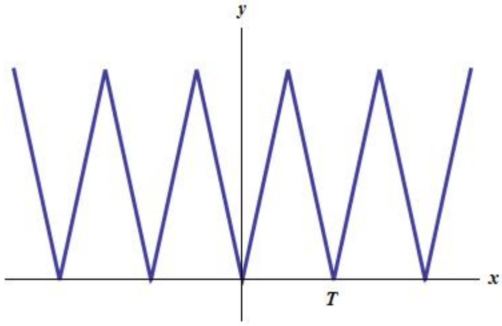
Primjer 29. *Unija* $\ldots \langle -5, 4] \cup \langle -3, 2] \cup \langle -1, 0] \cup \langle 1, 2] \cup \langle 3, 4] \cup \ldots$ *je moguća domena neke periodične funkcije.*

Vizualno, periodičnost funkcije očituje se u ponavljanju jednog dijela grafa (koji je širine perioda) u jednakim razmacima ulijevo i udesno, i to u beskonačnost. Primjer grafa periodične funkcije vidi se na slici 2.31. Najmanji period $T > 0$ zove se **temeljnim periodom**.[11] Na slici 2.31 označeni T je temeljni period — ako bismo uzeli bilo koji uži dio grafa ne bismo njegovim ponavljanjem ulijevo i udesno mogli rekonstruirati čitav graf.

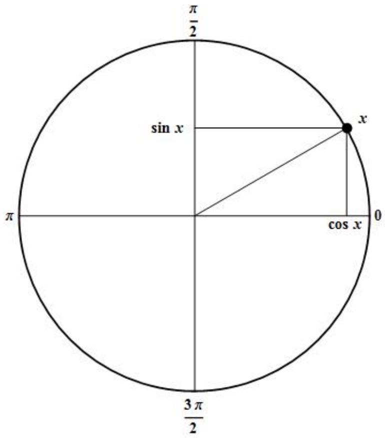
Najpoznatije periodične funkcije su trigonometrijske funkcije. Iako ne najprecizniji[12], svakako najjednostavniji način definiranja prve dvije od njih — **sinusa i**

[11] Ako je varijabla periodične funkcije vrijeme, temeljni period je uobičajeno zvati valnom duljinom i označiti s λ.

[12] Precizna definicija ovih funkcija koristi redove potencija, o kojima će biti riječi kasnije.



Slika 2.31: Graf periodične funkcije perioda T.



Slika 2.32: Definicija sinusa i kosinusa.

kosinusa — je putem jedinične kružnice. Radi se o kružnici polumjera 1 nacrtanoj u koordinatnoj ravnini[13]. Takva kružnica prikazana je na slici 2.32. Ako je x duljina luka te kružnice od točke $A = (1, 0)$ do neke promatrane točke na kružnici, onda je apscisa te točke jednaka $\cos x$, a ordinata je $\sin x$. Pritom x uzimamo kao pozitivan ako je luk gledan od točke $(1, 0)$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a negativan ako je gledan u smjeru kazaljke na satu. Ovdje je zgodno podsjetiti: isto je reći „x je duljina luka od točke A do točke B na jediničnoj kružnici" i „kut $\angle AOB$ ima x radijana". Dakle, ako nas zanima vrijednost sinusa ili kosinusa nekog broja, potrebno je naći točku B na jediničnoj kružnici tako da je duljina luka od A do B jednaka tom broju; taj proces poznat je kao namatanje brojevnog pravca na jediničnu kružnicu, pri čemu zamišljamo da je točka 0 tog pravca stavljena na točku A te da se pozitivni dio pravca namotava ulijevo, a negativni udesno na kružnicu.

Iz definicije sinusa i kosinusa odmah se vide njihova glavna svojstva:

- Brojevi $\sin x$ i $\cos x$ mogu se odrediti za sve realne brojeve x jer kružnicu možemo obilaziti u oba smjera proizvoljno mnogo puta: prirodna domena funkcija sinus i

[13]Oprez: radi opasnosti od zabune nikako nemojte koordinatne osi jedinične kružnice u definiciji sinusa i kosinusa zvati x-os i y-os; dovoljno ih je zvati osi apscisa i ordinata.

kosinus je cijeli skup $\mathbb{R}$.

- Apscise točaka na jediničnoj kružnici su brojevi između -1 i 1, a isto tako i ordinate. Stoga su za svaki broj x brojevi $\sin x$ i $\cos x$ između -1 i 1 ili, kraće rečeno, slika funkcija sinus i kosinus je segment $[-1, 1]$.

- Obilaskom kružnice točke se ponavljaju nakon svakog „punog kruga”, tj. nakon što se prijeđe opseg 2π jedinične kružnice. Stoga su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom 2π.

- Za $x = 0$ nalazimo se u točki $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ tj. $\cos 0 = 1$ i $\sin 0 = 0$.

- Općenito, $\sin x$ je nula kad god broju x odgovara jedna od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, a to se dešava kad god je x višekratnik od π: nultočke funkcije sinus su svi brojevi $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kosinus je nula kad god broju x odgovara jedna od točaka $(0, 1)$ i $(0, -1)$, a to se dešava kad god je x neparni višekratnik od $\frac{\pi}{2}$: nultočke funkcije kosinus su svi brojevi $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Primjenom Pitagorina poučka na trokut određen ishodištem, točkom $(\cos x, 0)$ i točkom $(\cos x, \sin x)$ (dakle, pravokutni trokut s katetama duljina $\cos x$ i $\sin x$ te hipotenuzom duljine 1) dobivamo osnovnu formulu koja povezuje sinus i kosinus:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- Ako bismo zamijenili ulogu osi, vidimo da bi došlo do zamjene uloga sinusa i kosinusa, ali bi slika u biti izgledala isto. Pomnijim promatranjem zaključili bismo da je jedina bitna razlika između sinusa i kosinusa u jednom pravom kutu (iznosu luka $\frac{\pi}{2}$). Formulama se to izražava ovako:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

  Stoga i grafovi tih funkcija izgledaju gotovo jednako — razlika je u horizontalnom pomaku za $\frac{\pi}{2}$ (vidi sliku 2.33).

- Sinus je neparna, a kosinus je parna funkcija.

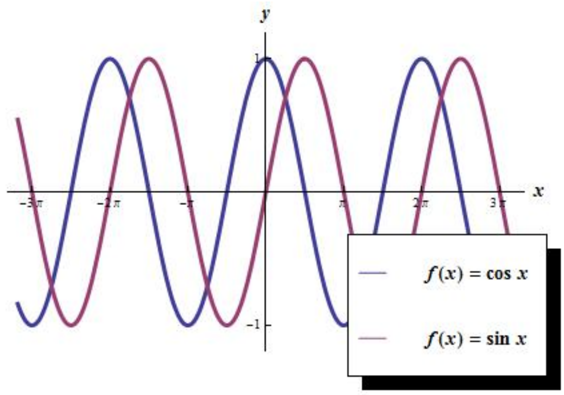
Od važnijih formula za sinus i kosinus ovdje navodimo još samo četiri. Formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta glase

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Adicione formule za sinus i kosinus su

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$



Slika 2.33: Grafovi funkcija sinus i kosinus.

Kao što smo rekli, oblici grafova sinusa i kosinusa su podjednaki, samo su različito pozicionirani u koordinatnom sustavu. Općenito, valovi sinusoidalnog oblika temeljnog perioda T i amplitude (polovice razlike visina najviše i najniže točke vala) A mogu se opisati formulom oblika

$$C + A\cos(\omega t + \delta),$$

gdje je C prosječna visina vala (tj. val se nalazi unutar horizontala $y = C \pm A$), $\omega = 2\pi/T$ je (kutna) frekvencija, a δ je fazni (horizontalni) pomak. Varijablu smo ovdje označili s t umjesto s x jer je u primjenama varijabla periodične funkcije najčešće vrijeme.

Funkcije **tangens** i **kotangens** su kvocijenti sinusa i kosinusa:

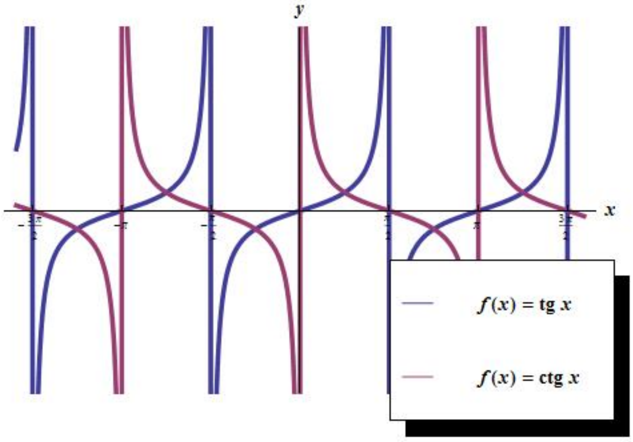
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Obzirom na nultočke funkcija sinus i kosinus vidimo da je prirodna domena funkcije tangens skup $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez neparnih višekratnika broja $\pi/2$), a prirodna domena funkcije kotangens je skup $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez višekratnika broja π). Grafove funkcija tangens i kotangens prikazuje slika 2.34. Uočimo da su obje funkcije periodične s temeljnim periodom π i imaju vertikalne asimptote u svim točkama u kojima nisu definirane. Tangens je rastuća neparna funkcija, a kotangens je padajuća neparna funkcija.

Periodična funkcija ne može imati horizontalne asimptote (zašto?). Također, periodična funkcija ne može biti injekcija jer se po njenoj definiciji za beskonačno mnogo vrijednosti varijable postižu iste vrijednosti funkcije. Stoga nijedna od trigonometrijskih funkcija nema inverznu funkciju. No, ako odaberemo njihove restrikcije na pogodne manje domene, moguća je definicija arkus-funkcija, tj. **ciklometrijskih funkcija**, koje mnogi (nepravilno) nazivaju inverznim trigonometrijskim funkcijama.

Ako umjesto sinusa $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju $\mathrm{Sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, a umjesto kosinusa $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (isto surjekcija,



Slika 2.34: Grafovi funkcija tangens i kotangens.

nije injekcija) gledamo restrikciju Cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$, onda smo dobili dvije bijekcije, čiji grafovi su prikazani na slici 2.35.

Arkus-sinus i **arkus-kosinus** su inverzne funkcije funkcija Sin i Cos:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

je definiran s

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Sin} y,$$

a

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

je definiran s

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Cos} y.$$

Odgovarajući grafovi prikazani su na slici 2.36. Iz definicije je očito da treba biti oprezan s korištenjem arkus-sinusa i arkus-kosinusa: za zadani broj između -1 i 1 one određuju samo po jedan od beskonačno mnogo kuteva kojima je taj broj sinus odnosno kosinus.

Slično se definiraju **arkus-tangens** i **arkus-kotangens**. Prvo se uzmu restrikcije Tg : $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ i Ctg : $\langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}$, koje su bijekcije, a njihovi inverzi su arkus-tangens i arkus-kotangens:

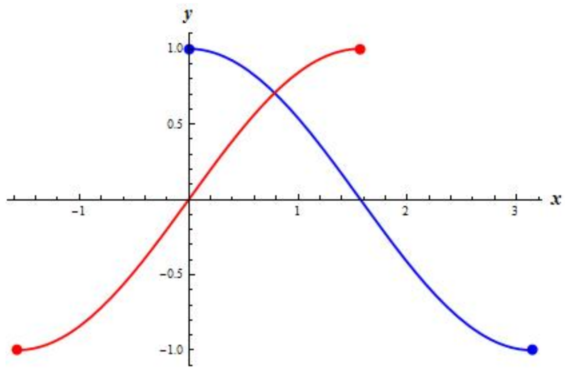
$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Tg} y,$$

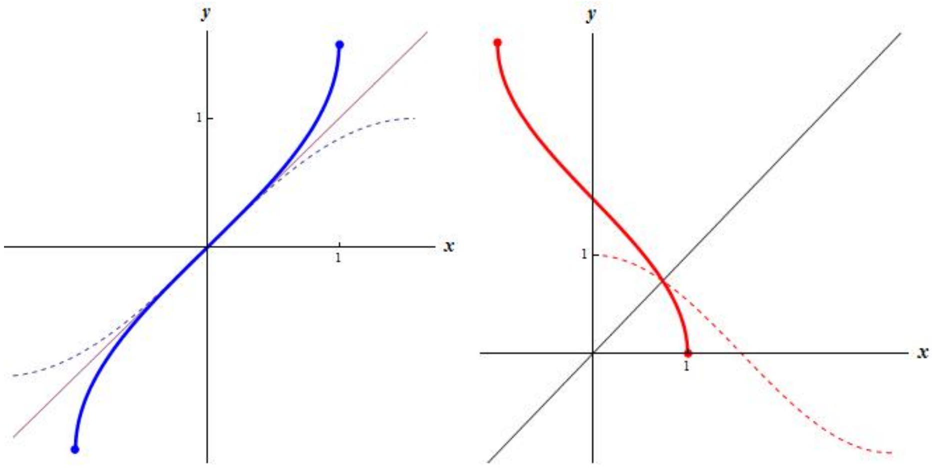
$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle,$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Ctg} y.$$

Odgovarajući grafovi vidljivi su na slici 2.37. Oba imaju horizontalne asimptote (arkus-tangens lijevo ima horizontalnu asimptotu $y = \frac{\pi}{2}$, a desno $y = \frac{\pi}{2}$, a arkus-tangens kao lijevu horizontalnu asimptotu ima $y = \pi$, a desnu $y = 0$).

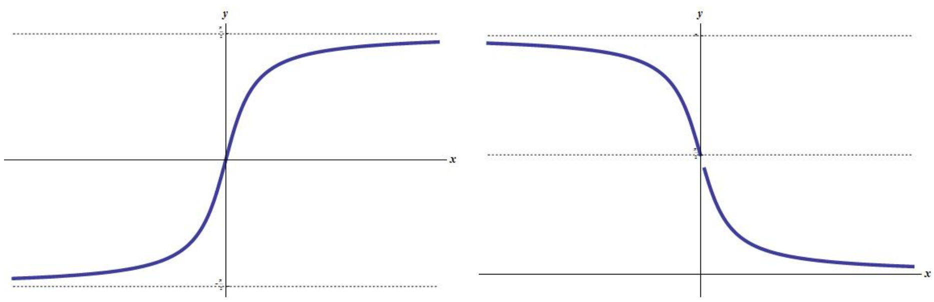


Slika 2.35: Grafovi restrikcija sinusa i kosinusa tako da se dobiju bijekcije.



(a) (b)

Slika 2.36: Grafovi funkcija arkus-sinus (a) i arkus-kosinus (b).



(a) (b)

Slika 2.37: Grafovi funkcija arkus-tangens (a) i arkus-kotangens (b).

Uočimo i da su arkus-sinus i arkus-tangens rastuće, a arkus-kosinus i arkus-kotangens padajuće funkcije. Arkus-tangens je neparna funkcija, dok ostale ciklometrijske funkcije nisu ni parne ni neparne.

☼ **Ponovimo bitno...** Periodične funkcije imaju svojstvo da im se vrijednosti ponavljaju u jednakim razmacima T: $f(x+T) = f(x)$ za sve x iz domene. Trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens su periodične funkcije. Sinus i kosinus realnog broja x definiraju se kao ordinata i apscisa točke B na jediničnoj kružnici takve da je kut $\angle BOA$ iznosa x radijana, pri čemu je A točka $(1, 0)$. Tangens je definiran s $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, a kotangens s $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Tangens nije definiran u neparnim višekratnicima od $\pi/2$, a kotangens u višekratnicima od π. Temeljni period funkcija sinus i kosinus je 2π, a temeljni period funkcija tangens i kotangens je π. Sinus, tangens i kotangens su neparne funkcije, a kosinus je parna funkcija. Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija restringiranih na manje domene, tako da su nakon restrikcije dobivene funkcije bijekcije. ☺

2.7 Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih

U kemiji i drugim prirodnim znanostima često želimo neku funkcionalnu ovisnost $y = f(x)$ prikazati pomoću pravca u koordinantoj ravnini. Razlozi mogu biti različiti, a jedan od češćih je mogućnost uspoređivanja eksperimentalno dobivenih podataka s pretpostavljenom funkcijom f. Ako f nije afina, graf joj nije pravac, ali se sama ovisnost uz odgovarajuću transformaciju varijabli često lako prevodi u afinu. To je najlakše opisati primjerom. Ostwaldov zakon za slabe elektrolite glasi

$$\frac{1}{\Lambda_m} = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} + \frac{c\Lambda_m}{K(\Lambda_m^\circ)^2}.$$

Pritom je Λ_m molarna provodnost elektrolita (u S cm^2 mol^{-1}), Λ_m° granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi), K je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u mol cm^{-3}), a c je koncentracija (u mol dm^{-3}). Označimo li

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}},$$

$$x = c\Lambda_m \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}},$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}$$

i

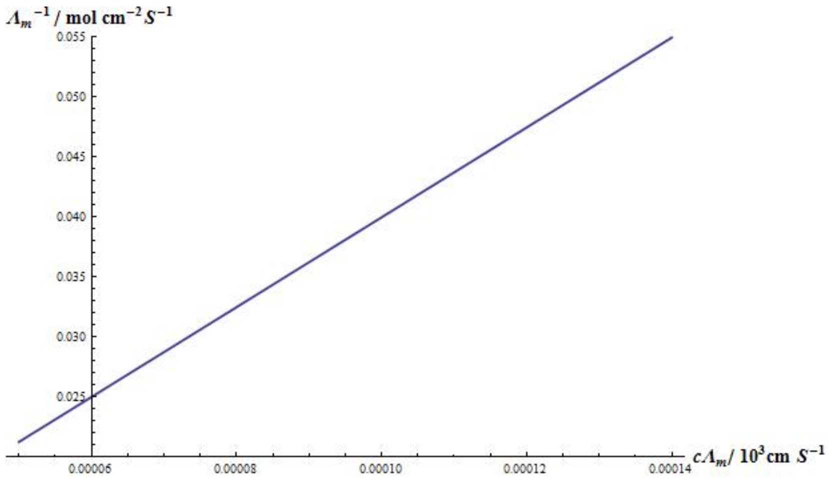
$$b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}},$$

zakon poprima oblik

$$y = ax + b.$$

Mogli smo pisati i kraće,

$$y = \frac{1}{\Lambda_m}, \quad x = c\Lambda_m,$$



Slika 2.38: Ostwaldov zakon prikazan pomoću afine funkcije.

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}, \quad b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ},$$

no tada je svakako potrebno istaknuti jedinice od y i b (mol S^{-1} cm^{-2}), x (10^{-3} S cm^{-1}) i a (S^{-2} cm^{-1} mol^{-1}). Uočimo: y i b moraju imati istu jedinicu.

Konkretno, ako su eksperimentom pri 25°C za octenu kiselinu utvrđivane molarne provodnosti za neki raspon koncentracija i ako su poznate teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri 25°C ($\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol dm^{-3}) dobivamo $y = 374{,}3x + 0{,}002560$. Ako su pri tom eksperimentu dobivene molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1}, vidimo da se vrijednosti y kreću između $y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128$ i $y_2 = \frac{1}{19} = 0{,}05263$ pa je razuman raspon na y-osi npr. od 0,02 do 0,055.

Kako je $y = ax + b$, znači da je $x = (y - b)/a$. Stoga je raspon x-eva između $x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0{,}0000500$ i $x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0{,}000134$. Stoga je prikladan raspon za x-os recimo od $5 \cdot 10^{-5}$ do $14 \cdot 10^{-5}$. Uz te raspone, odgovarajući graf kojim je prikazan Ostwaldov zakon u danoj konkretnoj situaciji prikazan je slikom 2.38.

Savjet: pokušajte ne komplicirati. Primjerice, moglo se Ostwaldov zakon prevesti redom u oblike

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} = \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

te definirati

$$y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ}$$

i $x = c$, $b = 0$, $a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}$, što bi doduše dalo vrlo jednostavan x te pravac kroz ishodište, ali bi y-os bila neprikladna za utvrđivanje osnovnih vrijednosti u danom kontekstu (c i Λ_m). Recimo da ste u takvom prikazu očitali da je pri nekoj koncentraciji $y = 2,372 \cdot 10^{-3}$, koliko biste morali računati da dobijete Λ_m? Probajte ako Vam nije očito. Dakle: ukoliko ima više mogućnosti što zvati x-om, a što y-om (u pravilu ima), odaberite ih tako da se iz koordinata, tj. iz x i y mogu lako dobiti vrijednosti promatranih međuzavisnih veličina X i $F(X)$ (u ovom primjeru bio je X koncentracija, a $F(X)$ molarna provodnost). Ako i dalje imate više „zgodnih" izbora, onda prednost dajte onome kod kojeg je x varijabla X.

Primjer 30. *Arrheniusov zakon za ovisnost koeficijenta brzine reakcije o temperaturi glasi*

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}.$$

Kad se žele usporediti eksperimentalno (i računski) dobiveni parovi (T, k) s tom ovisnošću, najčešće s ciljem određivanja vrijednosti E_a (energije aktivacije) obično je lakše crtati ovisnost $\ln k$ o $\frac{1}{T}$:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_a}{RT}.$$

Pritom je $y = \ln k$, $b = \ln A$, $a = -\frac{E_a}{R}$ (jedinica: K) i $x = \frac{1}{T}$ (jedinica: K^{-1}). Ovdje pod $\ln k$ i $\ln A$ podrazumijevamo prirodne logaritme čistih numeričkih vrijednosti od k i A (tj. onih koje dobijemo dijeljenjem iznosa k i A s $1\cdot$jedinica od k; recimo za reakcije prvog reda pod $\ln k$ podrazumijevamo $\ln \frac{k}{1\,\mathrm{s}^{-1}}$).

☼ **Ponovimo bitno...** Kad intepretiramo neku fizikalnu ili kemijsku jednadžbu kao pravac $y = ax + b$ potrebno je konstante i varijable u toj jednadžbi grupirati tako da njihovom zamjenom s x, y, a i b dobijemo jednadžbu pravca. Pritom b i y moraju imati istu jedinicu, varijabilne veličine trebaju biti raspoređene u x i y, a konstantne u a i b. ☺

2.8 Neelementarne funkcije

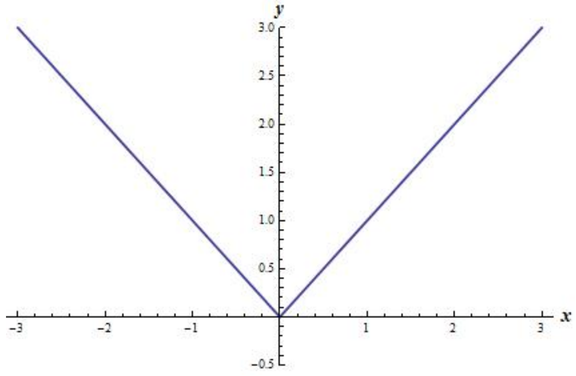
Ponekad su potrebne i funkcije koje se zadaju „po dijelovima": na jednom dijelu domene pravilo za izračunavanje vrijednosti funkcije je jedno, na drugom dijelu drugo itd. Sve takve funkcije (i ne samo one) spadaju u neelementarne funkcije. Zadajemo ih ovako:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x) & x \in B, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

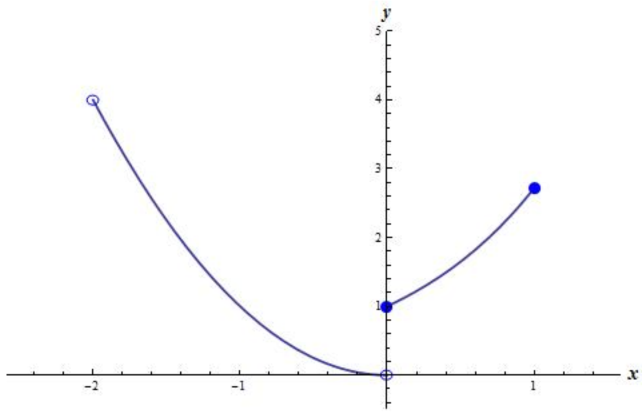
Takav zapis znači: ako je x iz A, onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_1; ako je x iz B, onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_2 itd. Unija svih skupova $A, B, \dots$ mora dati domenu funkcije f (i pritom skupovi $A, B, \dots$ moraju biti disjunktni tj. ne smiju imati zajedničkih elemenata). Graf funkcije f dobiva se „lijepljenjem" grafova funkcija $f_1, f_2, \dots$.

Najjednostavnija, a često korištena, neelementarna funkcija je **funkcija apsolutne vrijednosti** koja nenegativne brojeve ne mijenja, a negativnima promijeni predznak. Formalno, to je funkcija $|\ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Slika 2.39: Graf funkcije apsolutne vrijednosti.



Slika 2.40: Primjer grafa funkcije zadane „po dijelovima”.

Za negativne brojeve (lijevi dio koordinatnog sustava) vidimo da se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_1(x) = -x$, a za nenengativne (desni dio koordinatnog sustava) se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_2(x) = x$. Stoga se ukupni graf sastoji od ta dva dijela. Kako se f_1 i f_2 podudaraju u „točki lijepljenja” $(x, f(x)) = (0, 0)$, ukupni graf biti će „u komadu”, a prikazan je na slici 2.39.

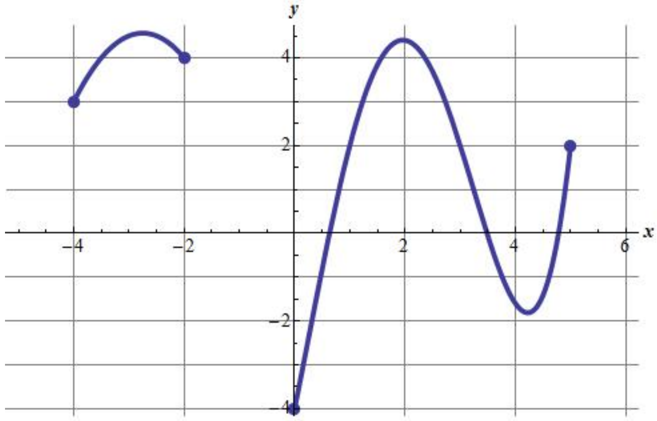
Primjer 31. *Neka funkcija f zadana je s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Ona je definirana za $x \in \langle -2, 0\rangle \cup [0, 1] = \langle -2, 1]$, a graf joj je prikazan slikom 2.40. Praznim kružićima istaknute su točke koje nisu dio grafa, a punim one koje jesu.

Ovime smo završili pregled svih osnovnih matematičkih funkcija jedne varijable koje se koriste u primjenama matematike u kemiji. U sljedećim poglavljima pozabavit ćemo se infinitezimalnim (diferencijalnim i integralnim) računom realnih funkcija jedne varijable i njegovim primjenama.

☼ **Ponovimo bitno...** Funkcije možemo zadati po dijelovima tako da za vrijednosti varijable iz različitih intervala definiramo različita pravila. Takve funkcije nisu elementarne. Najjednostavnija po dijelovima zadana funkcija je funkcija apsolutne vrijednosti, koja pozitivne brojeve ne mijenja, a negativnima mijenja predznak. ☺



Slika 2.41: Slika uz prvi zadatak.

2.9 Zadaci za vježbu

1. Na slici 2.41 je prikazan graf neke funkcije f. Odredite njezinu domenu, kodomenu te nultočke. Nadalje, odredite vrijednosti $f(-4)$, $f(0)$ i $f(2)$ te skupove $S_1 = \{x \in D \ : \ f(x) = 2\}$, $S_2 = \{x \in D \ : \ f(x) > 0\}$, $S_3 = \{x \in D \ : \ f \text{ raste }\}$ i $S_4 = \{x \in D \ : \ f \text{ pada }\}$.

   Rješenje. $D = [-4, -2] \cup [0, 5]$, $K = [-3, 4]$, nultočke: $x \in \{1, 3, 5\}$, $f(-4) = 1$, $f(0) = 3$, $f(2) = -3$, $S_1 = \{-3, 4\}$, $S_2 = [-4, -2] \cup [0, 1\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$, $S_3 = \langle -4, -3\rangle \cup \langle 2, 4\rangle$, $S_4 = \langle -3, -2\rangle \cup \langle 0, 2\rangle \cup \langle 4, 5\rangle$.

2. Zadana je funkcija (na svojoj prirodnoj domeni)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \ .$$

   Odredite nultočke funkcije f te vrijednosti $f(-2)$, $f(0)$ i $f(4)$.

   Rješenje. Nultočke su $x = -3$ i $x = 2$; $f(-2) = -\frac{4}{3}$, $f(0) = 6$, $f(4) = \frac{14}{15}$.

3. Na slici 2.42 je prikazan graf neke funkcije f. Odredite njezinu domenu D, sliku K te intervale na kojima funkcija f raste odnosno pada. Je li f bijekcija?

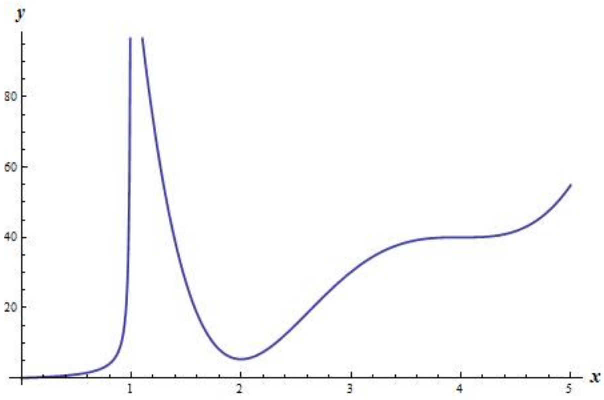
   Rješenje. $D = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, $K = \langle 0, +\infty\rangle$, f raste za $x \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle 1, 2\rangle$, f nije bijekcija (jest surjekcija, ali nije injekcija).

4. Na slici 2.43 je prikazan graf neke funkcije $y = f(x)$. Skicirajte grafove funkcija $g(x) = f(x) + 3$, $h(x) = f(x - 1)$, $m(x) = -f(x)$ i $n(x) = 3f(x)$.

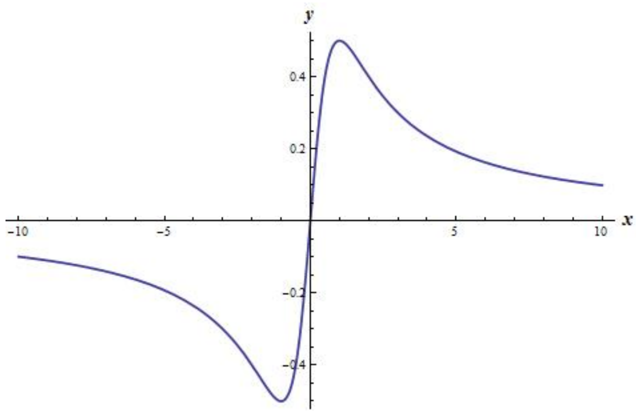
   Rješenje. Vidi sliku 2.44.

5. Odredite afinu funkciju f ako je poznato da je $f(0) = -3$ i $f(-2) = 1$. Skicirajte njezin graf.

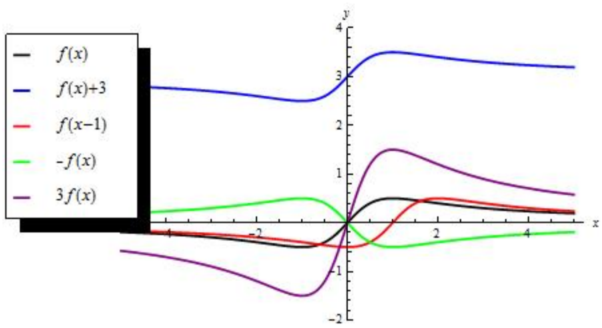
   Rješenje. $f(x) = -2x - 3$. Graf je prikazan slikom 2.45.



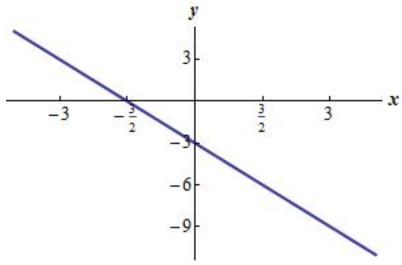
Slika 2.42: Slika uz treći zadatak.



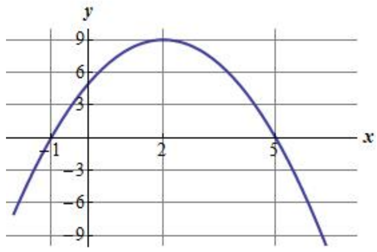
Slika 2.43: Slika uz četvrti zadatak.



Slika 2.44: Rješenje četvrtog zadatka.



Slika 2.45: Rješenje petog zadatka.



Slika 2.46: Rješenje šestog zadatka.

6. Odredite kvadratnu funkciju f ako je poznato da je

$$f(-1) = 0, \qquad f(0) = 5, \qquad f(3) = 8 \ .$$

Odredite njezine nultočke i tjeme. Skicirajte graf funkcije f.

Rješenje. $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Nultočke su $x = -1$ i $x = 5$. Tjeme je $T(2, 9)$. Graf je prikazan slikom 2.46.

7. Zadan je polinom petog stupnja

$$p(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 2x^2 \ .$$

Odredite nultočke ovog polinoma i njihove kratnosti.

Rješenje. Nultočke: $x = 0$ (dvostruka), $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ (jednostruke).

8. Faktorizirajte polinome

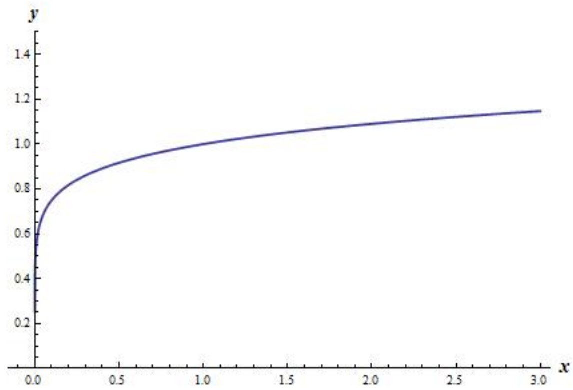
(a) $p(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

(b) $p(x) = x^5 + x^4 - x - 1$.

Rješenje.
(a) $p(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1)$. $\quad p(x) = (x+1)^2(x-1)(x^2+1)$.

9. Odredite prirodnu domenu racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x} \ .$$



Slika 2.47: Rješenje zadatka 11.(a).

Je li pravac $x = 0$ vertikalna asimptota funkcije f? A $x = 1$?

Rješenje. $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pravac $x = 0$ jest vertikalna asimptota, a pravac $x = 1$ to nije.

10. Odredite prirodnu domenu racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}\ .$$

Je li pravac $x = 1$ vertikalna asimptota zadane funkcije? Ima li funkcija f horizontalnu asimptotu?

Rješenje. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pravac $x = 1$ nije vertikalna asimptota, a pravac $y = 0$ je horizontalna asimptota.

11. Odredite prirodnu domenu te skicirajte grafove sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = \sqrt[8]{x}$.

(b) $f(x) = \sqrt[9]{x}$.

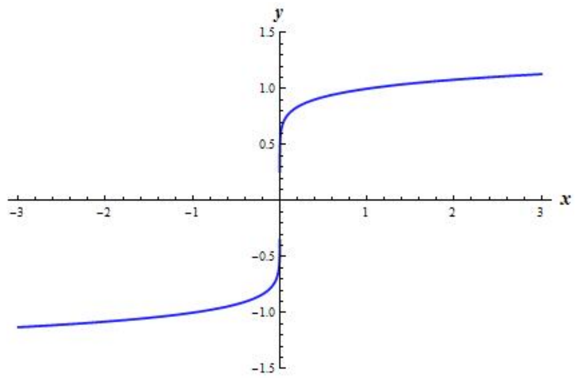
(c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$.

(d) $f(x) = -2\sqrt{2x + 1}$.

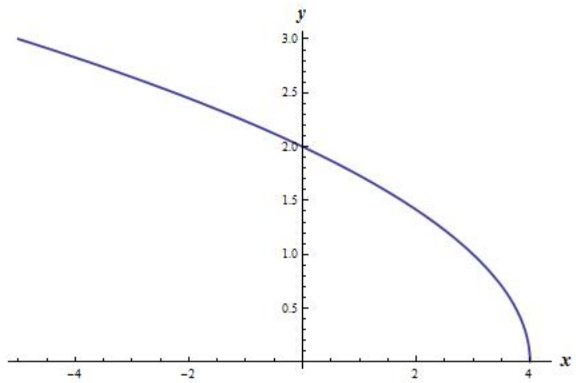
Rješenje.
(a) $D = [0, +\infty\rangle$. Graf je prikazan slikom 2.47.
(b) $D = \mathbb{R}$. Graf je prikazan slikom 2.48.
(c) $D = \langle -\infty, 4]$. Graf je prikazan slikom 2.49.
(d) $D = [-\frac{1}{2}, +\infty\rangle$. Graf je prikazan slikom 2.50.

12. Zadane su funkcije $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

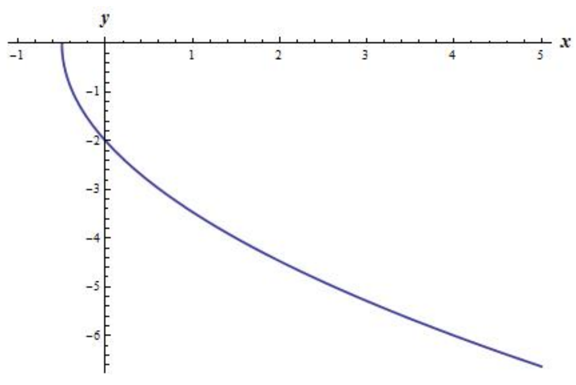
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}\ , \quad g(x) = \sqrt[2]{x^3}\ .$$



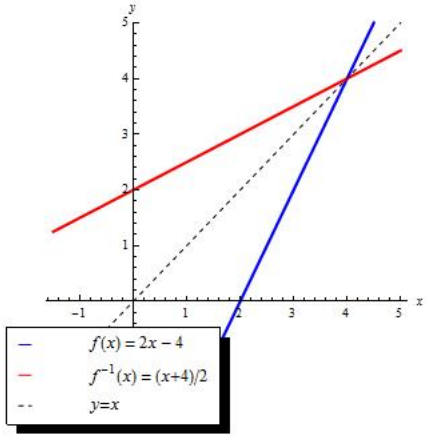
Slika 2.48: Rješenje zadatka 11.(b).



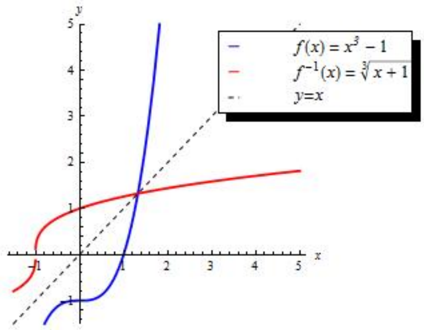
Slika 2.49: Rješenje zadatka 11.(c).



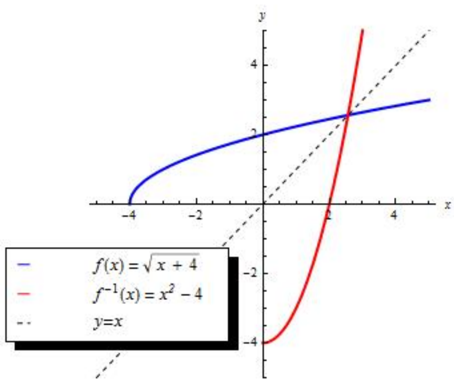
Slika 2.50: Rješenje zadatka 11.(d).



Slika 2.51: Rješenje zadatka 13.(a).



Slika 2.52: Rješenje zadatka 13.(b).



Slika 2.53: Rješenje zadatka 13.(c).

Odredite kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$. Jesu li i te kompozicije definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$?

Rješenje. $f \circ g(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$; $g \circ f(x) = \frac{|x^3|}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$. Kompozicija $f \circ g$ je definirana na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, a kompozicija $g \circ f$ je definirana na $\mathbb{R}$.

13. Odredite inverzne funkcije sljedećih funkcija (podrazumijevamo da je svaka definirana na svojoj prirodnoj domeni) i u istom koordinatnom sustavu za svaku skicirajte njezin graf i graf pripadne inverzne funkcije:

    (a) $f(x) = 2x - 4$.

    (b) $f(x) = x^3 - 1$.

    (c) $f(x) = \sqrt{x+4}$.

    Rješenje.
    (a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x+4)$. Grafovi su prikazani slikom 2.51.
    (b) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Grafovi su prikazani slikom 2.52.
    (c) $f^{-1} : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = x^2 - 4$. Grafovi su prikazani slikom 2.53.

14. Odredite inverzne funkcije sljedećih funkcija (podrazumijevamo da je svaka definirana na svojoj prirodnoj domeni) i u istom koordinatnom sustavu za svaku skicirajte njezin graf i graf pripadne inverzne funkcije:

    (a) $f(x) = 2^x$.

    (b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

    (c) $f(x) = \ln(-x)$.

    Rješenje.
    (a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Grafovi su prikazani slikom 2.54.
    (b) $f^{-1} : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_{1/3} x$. Grafovi su prikazani slikom 2.55.
    (c) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \langle -\infty, 0\rangle$, $f^{-1}(x) = -e^x$. Grafovi su prikazani slikom 2.56.

15. Odredite prirodne domene te inverzne funkcije za

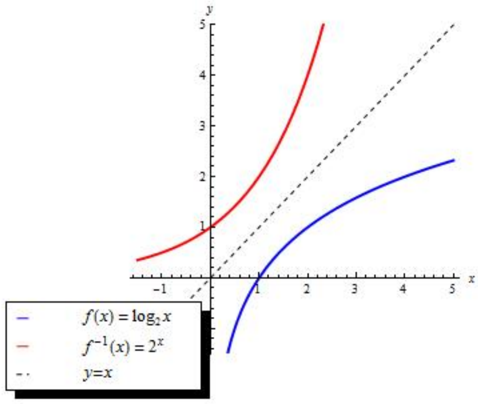
    (a) $f(x) = \log \frac{x-2}{5}$.

    (b) $f(x) = \ln \frac{2x-1}{x+5}$.

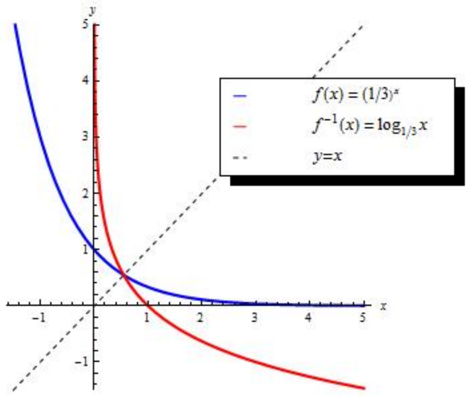
    (c) $f(x = \frac{3e^x-12}{2+e^x}$.

    (d) $f(x) = \sqrt{10^{x/2} - 1}$.

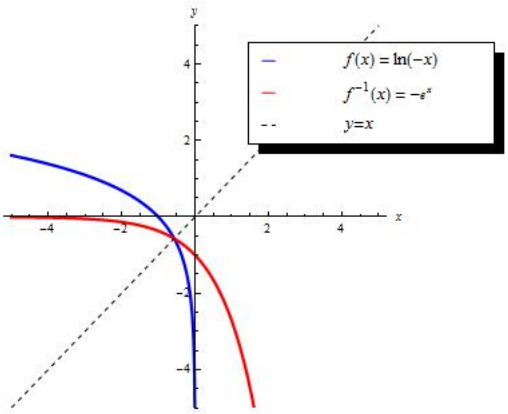
    Rješenje.
    (a) $D = \langle 2, +\infty\rangle$, $f^{-1}(x) = 5 \cdot 10^x + 2$.
    (b) $D = \langle -\infty, -5\rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty\rangle$, $f^{-1}(x) = \frac{5e^x+1}{2-e^x}$.
    (c) $D = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln \frac{2x+12}{3-x}$.
    (d) $D = [0, +\infty\rangle$, $f^{-1}(x) = 2\log(x^2+1)$.



Slika 2.54: Rješenje zadatka 14.(a).



Slika 2.55: Rješenje zadatka 14.(b).



Slika 2.56: Rješenje zadatka 14.(c).

16. Dokažite jednakosti

    (a) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.
    (b) $\mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x - 1)$.
    (c) $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x + 1)$.
    (d) $\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\ \mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\ \mathrm{sh}y$.
    (e) $\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}y\ \mathrm{ch}x$.

17. Odredite inverzne funkcije za

    (a) $f(x) = \mathrm{sh}x$.
    (b) $f(x) = \mathrm{th}x$.

    Rješenje.
    (a) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ x \in \mathbb{R}$. (b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x},\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

18. Ispitajte koje od sljedećih funkcija su periodične

    (a) $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.
    (b) $f(x) = \sin\frac{2x+3}{3}$.
    (c) $f(x) = \mathrm{ctg}2x$.
    (d) $f(x) = x^2\cos x$.
    (e) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$.
    (f) $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

    Rješenje.
    (a) periodična ($T = 6\pi$). (b) periodična ($T = 3\pi$).
    (c) periodična ($T = \frac{\pi}{2}$). (d) nije periodična. (e) periodična ($T = \pi$).
    (f) nije periodična.

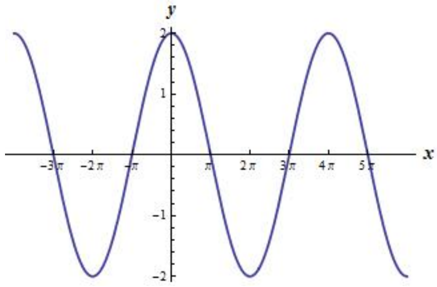
19. Odredite temeljni period funkcija

    (a) $f(x) = 3 + \cos(2\pi x)$.
    (b) $f(x) = 1 + \mathrm{tg}\big(5 - \frac{x}{2}\big)$.
    (c) $f(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x$.

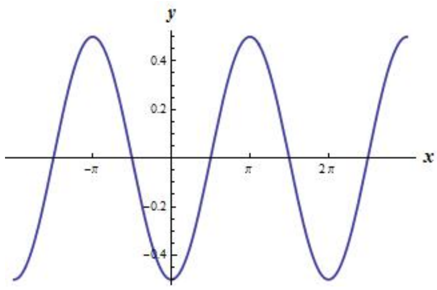
    Rješenje.
    (a) $T = 1$. (b) $T = 2\pi$. (c) $T = 2\pi$.

20. Odredite temeljni period T te skicirajte grafove zadanih funkcija na $[-T, \frac{3}{2}T]$

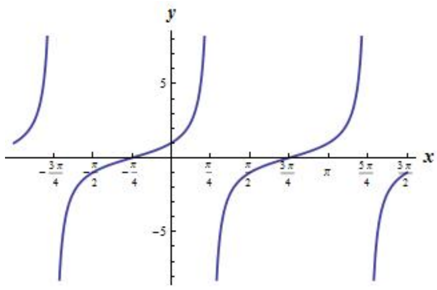
    (a) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$.
    (b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
    (c) $f(x) = \mathrm{tg}\big(x + \frac{\pi}{4}\big)$.



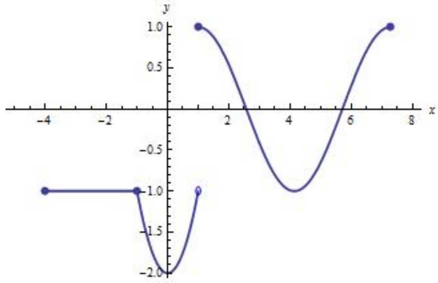
Slika 2.57: Rješenje zadatka 20.(a).



Slika 2.58: Rješenje zadatka 20.(b).



Slika 2.59: Rješenje zadatka 20.(c).



Slika 2.60: Rješenje zadatka 22.

Rješenje.
(a) $T = 4\pi$. (b) $T = 2\pi$. (c) $T = \pi$. Grafovi su redom prikazani na slikama 2.57, 2.58 i 2.59.

21. Odredite inverzne funkcije za

(a) $f(x) = \sin x + 1$.

(b) $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

(c) $h(x) = 3\text{tg}\frac{x}{2}$.

Rješenje.
(a) $f^{-1}(x) = \arcsin(x-1),\ x \in [0,2]$.
(b) $g^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2} + \text{arccos}x,\ x \in [-1,1]$.
(c) $h^{-1}(x) = 2\text{arctg}\frac{x}{3},\ x \in \mathbb{R}$.

22. Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -1\ , & -4 \le x < -1 \\ x^2 - 2\ , & -1 \le x < 1 \\ \cos(x-1)\ , & 1 \le x \le 2\pi + 1 \end{cases}$$

Odredite $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, i $f\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$. Skicirajte graf funkcije f.

Rješenje. $f(-3) = -1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = -2$, $f(1) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}+1\right) = 0$. Graf je prikazan slikom 2.60.

23. Dokažite

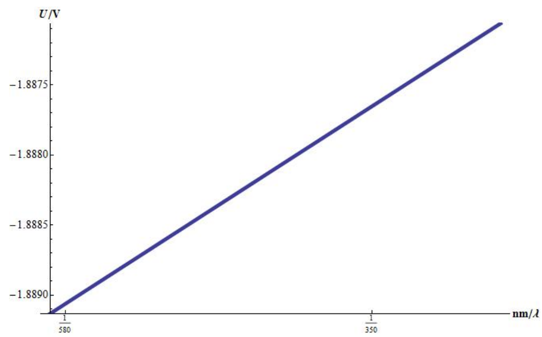
(a) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(b) $|x+y| \le |x| + |y|$.

(c) $||x| - |y|| \le |x| - |y|$.

24. Odredite prirodne domene funkcija

(a) $f(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x^2+5x-6}$.



Slika 2.61: Rješenje zadatka 25.

(b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{2x-5}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$.

(c) $f(x) = \ln\frac{1-x}{2x+13} + \sqrt{2^x+1}$.

(d) $f(x) = \sqrt{\ln\frac{x-4}{x-2}} + e^{\frac{x}{x+4}}$.

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\ln(1-x)} + \sin\frac{x-2}{2}$.

(f) $f(x) = \sqrt{\arcsin\frac{4-x}{3}} + \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Rješenje.
(a) $D = \langle -\infty, 4] \setminus \{-6, 1\}$. (b) $D = \langle -\infty, -2] \cup \langle 4, +\infty\rangle$.
(c) $D = \langle -\frac{13}{2}, 1\rangle$. (d) $D = \langle -\infty, -2\rangle \setminus \{-4\}$.
(e) $D = [-4, 1\rangle \setminus \{0\}$. (f) $D = \langle 1, 4]$.

25. Fotoelektrični efekt se opisuje jednadžbom

$$E_k = h\nu - \Phi.$$

Pritom je E_k kinetička energija izbačenog fotoelektrona (u J), koja se može poistovjetiti s eU uz $e = 1,60218 \cdot 10^{-19}$C ($U$ je potencijal u V), $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J s je Planckova konstanta, ν je frekvencija upadnog zračenja (u s^{-1}), a njena veza s valnom duljinom λ dana je jednadžbom $\lambda\nu = c$ (c je brzina svjetlosti, $c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m s^{-1}), Φ je izlazni rad (tj. minimalna energija potrebna da dođe do fotoelektričnog efekta, u J). Površina nekog metala obasjana je svjetlošću valnih duljina između 350 nm i 580 nm te su mjereni potencijali U kojima se zaustavljaju emitirani elektroni. Za promatrani metal izlazni rad iznosi $3{,}03 \cdot 10^{-19}$ J. Grafički prikažite ovisnost potencijala o valnoj duljini za opisani slučaj, za zadani raspon valnih duljina. Prikaz ovisnosti mora biti pravac te s time uskladite koje veličine ćete nanositi na apscisu i ordinatu koordinatnog sustava, tj. interpretirajte integrirani oblik jednadžbe fotoelektričnog efekta kao jednadžbu pravca $y = ax + b$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Obratite pažnju na pravilno označavanje osî i pogodan odabir raspona vrijednosti na osima.

Rješenje. $y = U/\mathrm{V}$, $x = \mathrm{nm}/\lambda$, $a = hc/e\,\mathrm{nm} = 1{,}2415$, $b = -\Phi/(e\cdot\mathrm{V}) = -1{,}8912$. Odgovarajući grafički prikaz dan je slikom 2.61.

Poglavlje 3

Diferencijalni račun za realne funkcije jedne varijable

3.1 Deriviranje funkcija

Limesi, deriviranje i integriranje spadaju u područje matematike poznato kao infinitezimalni račun. Pojam derivacije funkcije središnji je pojam više matematike. No, za stjecanje sposobnosti računanja s derivacijama i primjenjivanja istih u mnogim jednostavnim situacijama nije nužna precizna definicija derivacije. Stoga smo se ovdje odlučili za donekle nekonvencionalni pristup derivacijama, kako bi studenti čim ranije bili sposobni iste koristiti na fizikalnim kolegijima, koje studenti kemije u pravilu slušaju istovremeno s matematičkim. Prvo ćemo dati intuitivnu definiciju derivacije i zatim temeljem iste razraditi tehnika deriviranja, svojstva i primjene derivacija, a tek nakon toga ćemo obraditi limese funkcija i na kraju dati preciznu definiciju derivacije.

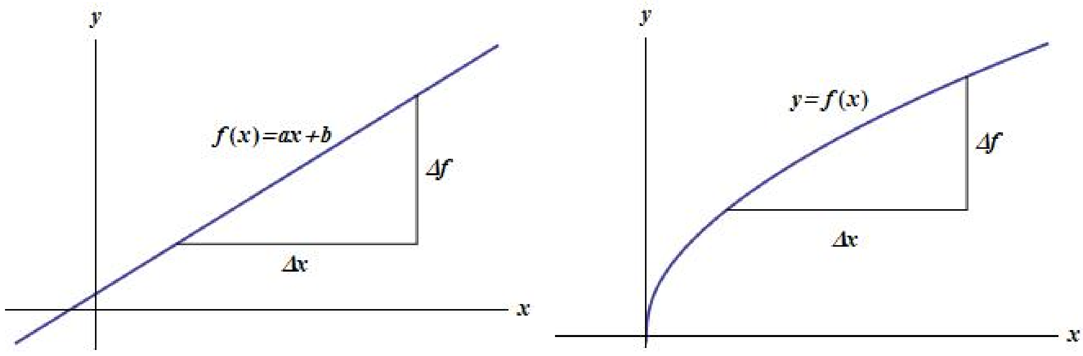
U ostatku ovog poglavlja neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neka funkcija (I je otvoren interval) i $c \in I$ neki fiksan broj. Oznaka za derivaciju funkcije f u točki c je $f'(c)$; derivacija $f'(c)$ je uvijek broj. Postoje bar tri intuitivne definicije derivacije funkcije u točki c.
Derivacija kao opis relativne promjene iznosa funkcije: Ukoliko je $f(x) = ax+b$ onda je omjer promjene vrijednosti funkcije $\Delta f = f(x)-f(c) = a(x-c)$ u odnosu na promjenu vrijednosti varijable $\Delta x = x-c$[1] jednak $\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$, tj. kod afine funkcije koeficijent smjera daje relativnu promjenu funkcije za svaku promjenu varijable u odnosu na početnu vrijednost c. Derivacija $f'(c)$ može se shvatiti kao poopćenje te ideje: to je procjena relativne promjene funkcije f ako je promjena varijable (Δx) približno jednaka nuli:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Iz gornjeg pristupa derivaciji lako zaključujemo: derivacija afine funkcije u bilo kojoj točki jednaka je njenom koeficijentu smjera. Specijalno, derivacija konstantne funkcije je svuda nula.

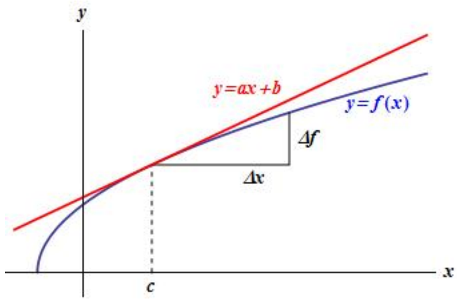
Vezano za gornju „definiciju" lako je zapamtiti još jednu oznaku za derivaciju funkcije: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ta se oznaka najčešće koristi u nekim fizikalnim kontekstima kad želimo

[1]Uočite: povećanje varijable daje pozitivan Δx, a smanjenje negativan.



(a) (b)

Slika 3.1: Derivacija kao relativna promjena vrijednosti funkcije.



Slika 3.2: Derivacija kao koeficijent smjera tangente.

pratiti jedinice u kojima su izražene f i x, tj. kad želimo odmah uz numeričku vrijednost derivacije imati i jedinicu koja treba ići uz izračunati broj (vidi primjer 32).

Za razliku od afinih funkcija, iz gornje „definicije” teško bismo izveli formule ili načine računanja derivacija za bilo kakve druge funkcije. No, pogledamo li slike 3.1 i 3.2, vidimo da za mali razmak Δx omjer $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ neće biti bitno različit od koeficijenta smjera tangente povučene na graf funkcije f u točki s apscisom c. Napomenimo ovdje da je tangenta na neku krivulju u danoj točki (recimo na graf funkcije) pravac koji najbolje „prianja” uz tu krivulju oko te točke (na uskom dijelu oko promatrane točke zanemariva je razlika između krivulje i tangente, tj. to je pravac koji od svih pravaca koji prolaze tom točkom najbolje aproksimira krivulju u blizini te točke); nije točno da je tangenta pravac koji krivulju siječe u samo jednoj točki.

Derivacija kao koeficijent smjera tangente: Prema gornjem, poboljšana verzija definicije derivacije $f'(c)$ glasi: to je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f povučene u točki s apscisom c. Iz ovakvog pristupa derivaciji odmah vidimo: ako funkcija raste na nekom intervalu oko c, onda je $f'(c) > 0$, a ako pada je $f'(c) < 0$.

Iz gornjeg slijedi da je jednadžba tangente na graf funkcije f u točki s apscisom c jednadžba pravca s koeficijentom $f'(c)$ kroz točku $(c, f(c))$, tj.

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c).$$

Bitno je spomenuti da je ovakva interpretacija derivacije funkcije moguća samo ako su x i y uobičajene Kartezijeve koordinate u ravnini, jer je pojam koeficijenta smjera pravca smislen samo za pravce u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Ukoliko je fizikalno značenje varijable x vrijeme, onda imamo još jednu mogućnost intuitivne definicije derivacije.

Derivacija kao trenutna brzina: Ako promatramo funkciju f, recimo poziciju točke na pravcu, kojoj je varijabla t iznos proteklog vremena u primjerice sekundama, onda za svaki vremenski interval Δt (u odnosu na fiksirani trenutak t_0) vrijedi: prosječna brzina promjene vrijednosti funkcije f u tom intervalu iznosi $\frac{\Delta f}{\Delta t}$. Ukoliko skraćujemo vremenski interval, bit ćemo sve bliži trenutnoj brzini promjene f u trenutku t_0 te možemo reći: derivacija od f u t_0 je trenutna brzina u tom trenutku. U ovom kontekstu se u fizici umjesto oznake $f'(t_0)$ često koristi oznaka[2] $\dot{f}(t_0)$.

Primjer 32. *Kod reakcije prvog reda koncentracija (c u $\mathrm{M} = \mathrm{mol\ L^{-1}}$) reaktanta R u trenutku t (izraženom u sekundama) iznosi*

$$c = c_0 e^{at},$$

gdje je a konstanta pri danoj temperaturi i reakciji i po iznosu je jednaka umnošku stehiometrijskog koeficijenta reaktanta (po definiciji, stehiometrijski koeficijenti reaktanata su pozitivni, a stehiometrijski koeficijenti produkata su negativni!) i koeficijenta brzine reakcije (dakle, $a < 0$ i a ima dimenziju recipročnog vremena odnosno jedinicu s^{-1}). Koncentracija reaktanta se u tom slučaju smanjuje te će $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}$ u svakom trenutku biti negativnog iznosa.

Ukoliko imamo samo jedan reaktant kojemu je stehiometrijski koeficijent jednak ν, brzina reakcije se definira kao

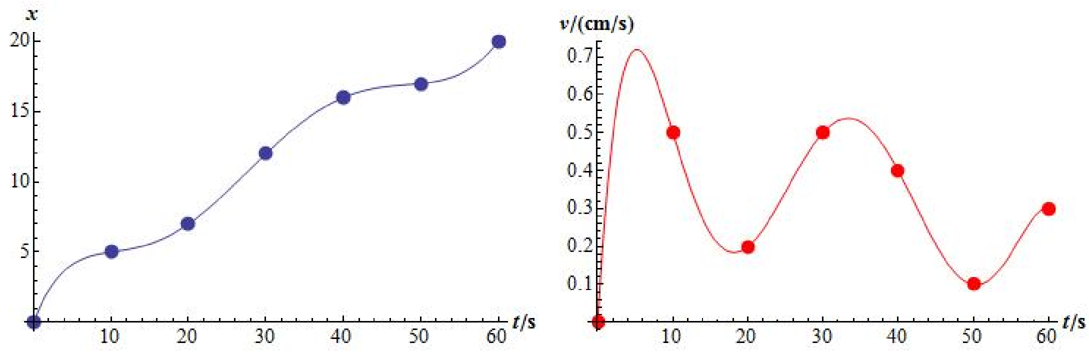
$$v = \frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t},$$

dakle, brzina reakcije je u svakom trenutku pozitivnog iznosa. Zapravo, tako možemo definirati brzinu reakcije u svakom slučaju, neovisno o broju reaktanata i redu reakcije: bitno je samo da je ν stehiometrijski koeficijent reaktanta čiju koncentraciju c pratimo.

Kako je jedinica od Δc ista kao i od c (dakle, M), a od Δt ista kao i od t (dakle, s), podrazumijevamo da je $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}$ fizikalna veličina za koju smo jedinice izlučili još u kvocijentu $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ koji opisuje prosječnu brzinu te $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{d}t}$ ima jedinicu kao i taj kvocijent, a to je $\mathrm{M\ s^{-1}}$. Strogo uzevši, derivacija je broj i za njenu definiciju bismo se morali „riješiti” jedinica, a gornji pristup (preko kvocijenta koji opisuje prosječnu brzinu odnosno prosječnu promjenu) omogućuje određivanje fizikalne jedinice rezultata. U praksi nije potrebno ovako detaljno razmatranje jer se pri deriviranju fizikalnih veličina jedinice mogu shvatiti kao konstante s kojima su pomnožene funkcije, a (kako ćemo kasnije vidjeti) derivacija produkta konstante i funkcije jednaka je toj konstanti pomnoženoj s derivacijom funkcije.

Koju god od gornjih „definicija” odabrali, trebamo biti svjesni da se ne radi o pravoj definiciji već su to zapravo svojstva derivacije koja slijede iz njene prave definicije. Ipak, za razumijevanje smisla derivacije i njenu primjenu, čak i uz poznavanje njene egzaktne definicije, neophodno je znati gornje tri interpretacije.

[2] Oznaka derivacije oblika $\dot{f}$ potječe od sir I. Newtona, a oznaka f' od J.-L. Lagrangea.



(a) (b)

Slika 3.3: Ovisnost pozicije o vremenu (a) i pripadna ovisnost brzine o vremenu (b).

Ukoliko bismo na neki način uspjeli odrediti $f'(c)$-ove za sve moguće c (recimo, sve $c \in I$) time bismo mogli derivaciju shvatiti kao novu funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$. To se i radi u svim tablicama i formulama, kao i primjenama derivacija.

Primjer 33. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$, onda je $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $f'(x) = 4$ jer je u svakoj mogućoj točki derivacija od f jednaka c.*

Primjer 34. *Niže ćemo u tablici derivacija imati pravilo da je za $f(x) = \sin x$ derivacija dana s $f'(x) = \cos x$. To znači da za svaki konkretan broj c vrijedi $f'(c) = \cos c$, primjerice $f'(\pi) = \cos \pi = -1$.*

Primjer 35. *U različitim trenutcima bilježene su pozicije točke koja se giba po osi apscisa (jedinica na osi apscisa iznosi, recimo, 1 cm):*

t/s	0	10	20	30	40	50	60
x	0	5	7	12	17	18	20

Slijedi da su (prosječne) brzine u pojedinim vremenskim intervalima

t/s	0	10	20	30	40	50	60
v/(cm/s)	0	1/2	1/5	1/2	2/5	1/10	3/10

Drugim riječima, iznos derivacije funkcije pozicije (x u ovisnosti o vremenu) za $t = 20$ s iznosi približno 0,2. Slikama 3.3 prikazana je ovisnost pozicije o vremenu (istaknute su poznate točke te je kroz iste provučena krivulja koja bi mogla biti opis te ovisnosti za sve trenutke) te odgovarajuća ovisnost brzine o vremenu, tj. procjena grafa derivacije x'.

☼ **Ponovimo bitno...** Derivacija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ definira se pojedinačno u svakom $c \in I$ i označava s $f'(c)$. Taj broj se može interpretirati kao aproksimacija relativne promjene vrijednosti funkcije u odnosu na promjenu varijable, za male promjene varijable u odnosu na c, ili pak kao koeficijent smjera tangente povučene na graf od f u točki $(c, f(c))$. Ako varijabla od f ima interpretaciju vremena, onda s $f'(c)$ može poistovjetiti s trenutnom brzinom promjene veličine f (u trenutku c). ☺

3.2 Kad ne postoji derivacija?

U nekim slučajevima može se desiti da $f'(c)$ ne postoji za neki c iz domene od f.

Primjer 36. *Uzmimo funkciju trećeg korijena. U njenoj prirodnoj domeni su svi realni brojevi, no njena prva derivacija* ($f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$) *nije definirana u nuli. Zaključujemo da funkcija trećeg korijena nije derivabilna u nuli.*

Ovdje ćemo se pozabaviti pitanjem kako nepostojanje derivacije prepoznajemo temeljem grafa funkcije prikazanog u Kartetijevom koordinatnom sustavu. Podsjetimo se: derivacija se može interpretirati kao koeficijent smjera tangente na graf funkcije (u promatranoj točki grafa). Stoga da bi postojala derivacija $f'(c)$, točkom $(c, f(c))$ treba prolaziti tangenta čija jednadžba je oblika $y = ax + b$. Problem u prethodnom primjeru je što graf funkcije u točki $(0, 0)$ ima vertikalnu tangentu, tj. tangenta je u ovom slučaju pravac u koordinatnom sustavu kojem koeficijent smjera nije definiran.

Drugi problem može nastati ako graf ima „špicu" u nekoj točki. Očito nijedan od pravaca kroz „špicu" nije tangenta jer je tangenta pravac koji se najbolje priljubljuje uz krivulju oko te točke. U slučaju „špice" mogla bi se naći dva pravca koji bi bili tangente „slijeva" i „zdesna", no nijedan od njih se ne priljubljuje uz graf na drugoj od dvije strane obzirom na „špicu", te stoga nema tangente i time niti derivacije u pripadnoj apscisi.

Treći mogući problem nastaje ako je u nekoj točki grafa graf „pukao" — i tada iz razloga analognih gore navedenima ne postoji tangenta u toj točki. O ovom će više riječi biti kasnije.

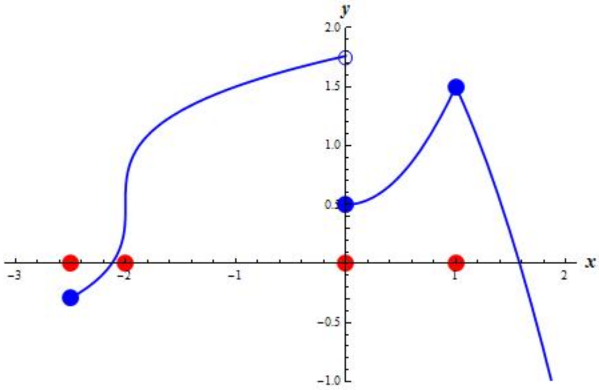
Također, ukoliko je neki dio domene poluotvoren ili zatvoren interval, funkcija (po definiciji) nije derivabilna u njegovom rubu. Primjerice, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neovisno o pripadnom pravilu nije derivabilna u a i b. Možemo to tumačiti ovako: za lijevi rub mogli bismo naći „desnu" tangentu, no kako funkcija nije definirana lijevo od lijevog ruba, slijeva se taj pravac ne priljubljuje uz graf funkcije (jer grafa tamo ni nema); analogno vrijedi za desni rub.

Slika 3.4 prikazuje graf funkcije koja u četiri točke domene (označene crveno) nije derivabilna.

☼ **Ponovimo bitno...** Ako je c element domene funkcije f, onda $f'(c)$ ne postoji u sljedećim slučajevima:

- U c graf ima „špicu";
- U c se graf razdvaja;
- U c je tangenta vertikalna;
- c je rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji čine domenu.

☺



Slika 3.4: Graf funkcije koja u četiri točke nije derivabilna.

3.3 Višestruke derivacije

Deriviranjem funkcije f' dobivamo drugu derivaciju f'', deriviranjem druge derivacije treću derivaciju itd. Oznake za prvu, drugu i treću derivaciju su redom f', f'', f'''. Daljnje derivacije (n-ta za $n > 3$) u pravilu se označavaju s $f^{(n)}$.

U kontekstu brzina, drugu derivaciju funkcije možemo interpretirati kao akceleraciju (ubrzanje): ako je $x(t)$ pozicija (na pravcu) u trenutku t, onda je $\dot{x}(t)$ trenutna brzina, a $\ddot{x}(t)$ je akceleracija u tom trenutku.

Ako koristimo oznake tipa $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ za derivaciju, onda je oznaka za drugu derivaciju $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, za treću $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$ itd.

Primjer 37. *Druga derivacija funkcije iz primjera 33 je* $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = 0$ *(nulfunkcija) jer je to derivacija konstantne funkcije* f'. *Treća i sve daljnje derivacije su također nulfunkcije.*

Naglasimo ovdje da je neispravno je govoriti da derivacije u gornjem primjeru ne postoje — one postoje i jednake su nuli! Derivacija ne postoji (u nekoj točki c) ako u toj točki ne možemo nacrtati tangentu na graf, ako tangenta nije jednoznačno određena ili ako je vertikalna. **Kad kažemo da derivacija ne postoji želimo reći da se ona ne može izračunati. Ako je ona jednaka nuli, znači da se mogla izračunati, dakle postoji.**

☼ **Ponovimo bitno…** Više derivacije su derivacije derivacija. Općenito je $(n+1)$-va derivacija $f^{(n+1)}$ jednaka prvoj derivaciji n-te derivacije $f^{(n)}$. ☺

3.4 Osnovna svojstva derivacija

Za rad s derivacijama nužna je tablica derivacija:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

Primjer 38. *Za sve smislene vrijednosti varijable x vrijedi*

$$x' = \left(x^1\right)' = 1x^0 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2},$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1},$$

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x,$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

Uočite pritom da je u svim osim u trećem slučaju derivacija definirana za iste x kao i funkcija koju deriviramo: u pravilu se pri deriviranju ne mijenja prirodna domena. Ipak, treći primjer (derivacija trećeg korijena) upućuje na oprez: treći korijen je definiran za sve $x \in \mathbb{R}$, dok njegova derivacija nije definirana za $x = 0$. Dakle, čak i elementarna funkcija ne mora biti derivabilna u svakoj točki svoje domene.

Najvažnije svojstvo deriviranja je linearnost. Linearnost deriviranja je zapravo spoj dva pravila: aditivnosti i homogenosti. Aditivnost deriviranja znači da je derivacija zbroja funkcija zbroj njihovih derivacija:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Homogenost deriviranja je već spomenuto pravilo da je derivacija produkta konstante i funkcije jednaka produktu te konstante i derivacije funkcije:

$$(Cf(x))' = Cf'(x).$$

Primjer 39. *Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left(x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}\right)' = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x.$$

Zadatak 16. *Koristeći linearnost deriviranja izvedite formule za derivacije sinusa hiperbolnog i kosinusa hiperbolnog.*

Korisno je primijetiti da se pomoću linearnosti deriviranja vidi da vrijedi: derivacija polinoma stupnja n je polinom stupnja $n-1$. Ako bismo n puta derivirali polinom stupnja n, dobit ćemo konstantnu funkciju; sve daljnje derivacije su nulfunkcije.

Za slučaj da trebamo derivirati funkciju koja je produkt ili kvocijent dviju funkcija potrebne su malo kompliciranije formule:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Napominjemo da je $g^2(x)$ uobičajena oznaka za kvadriranu vrijednost $g(x)$, tj. $g^2(x) = (g(x))^2$.

Primjer 40. *Prirodna domena funkcije zadane s $f(x) = x \ln x - \frac{x}{e^x}$ je skup svih pozitivnih brojeva. Za sve $x > 0$ vrijedi*

$$f'(x) = (x \ln x)' - \left(\frac{x}{e^x}\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \ln x + 1 - \frac{1-x}{e^x}.$$

Zadatak 17. *Koristeći formulu za deriviranje kvocijenta funkcija izvedite formule za derivacije tangensa i kotangensa.*

Primjer 41. *Derivirajmo funkciju $f(x) = (e^x)^3$. Kako je $f(x) = (e^3)^x$, možemo ju derivirati po pravilu za derivaciju eksponencijalne funkcije s bazom e^3:*

$$f'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Slično, ako bismo trebali derivirati $g(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$, mogli bismo primijeniti pravilo za derivaciju produkta i dobili bismo

$$g'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

No, što da smo trebali derivirati $h(x) = (\ln x)^{1000}$? Potencija je prevelika da bismo uzastopno primijenjivali pravilo za deriviranje produkta. Ili: kako derivirati $l(x) = (\cos x)^\pi$?

U gornjem primjeru radi se o kompozicijama nekih elementarnih funkcija s potenciranjem na fiksnu potenciju. Općenito, pravilo za deriviranje kompozicije funkcija glasi $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$, gdje je $y = f(x)$. To se pravilo često piše u obliku

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ovo pravilo poznato je i pod nazivom lančano pravilo.

Primjer 42. *Derivirajmo sad $h(x) = (\ln x)^{1000}$: to je kompozicija „vanjske funkcije” potenciranja na 1000-tu ($g(y) = y^{1000}$) i „unutrašnje funkcije” prirodnog logaritma ($y = f(x) = \ln x$). Stoga je*

$$f'(x) = 1000y^{999} \cdot \frac{1}{x} = 1000\,\frac{(\ln x)^{999}}{x}.$$

Analogno je derivacija od $l(x) = (\cos x)^{\pi}$ dana s $l'(x) = -\pi\,(\cos x)^{\pi-1} \sin x$.

Često dobro dođe zapamtiti specijalni slučaj pravila za derivaciju kompozicije funkcija, za slučaj da je „vanjska” funkcija prirodni logaritam:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjena gornje formule, tj. određivanje derivacije funkcije tako da ju prvo logaritmiramo, pa onda deriviramo logaritmiranu funkciju, zove se logaritamsko deriviranje.

Primjer 43. *Derivirajmo opću potenciju $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ logaritamskim deriviranjem. Prvo logaritmiramo funkciju:*

$$\ln f(x) = x \ln x.$$

Sad deriviramo logaritmiranu funkciju (deriviramo $\ln f(x)$) i iz dobivenog izrazimo $f'(x)$:

$$(\ln f(x))' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x,$$

$$f'(x) = (1 + \ln x) f(x) = (1 + \ln x) x^x.$$

Za slučaj da je f bijekcija i $g = f^{-1}$ njena inverzna funkcija imamo po definiciji

$$(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,$$

$$(g \circ f)'(x) = 1,$$

pa uz

$$y = f(x),$$

iz formule

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

dobivamo pravilo za derivaciju inverzne funkcije

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primjer 44. *Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-sinusa, koji je inverzna funkcija funkcije* Sin. *Za* $x \in I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ *je* $y = f(x) = \operatorname{Sin} x = \sin x$ *i* $y \in \langle -1, 1 \rangle$ *pa je* $f'(x) = \cos x$. *Stoga je po gornjoj formuli*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

U zadnjoj formuli biramo predznak $+$ *jer je* $\cos x > 0$ *za* $x \in I$ *pa imamo*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Za kraj ovog dosta tehničkog poglavlja, navedimo zapise svih navedenih formula za slučaj da se koristi notacija $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ za $f'(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) + g(x)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

(kraće: $\frac{\mathrm{d}(y+z)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x) + f(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

(kraće: $\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x) - f(x)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2(x)}$$

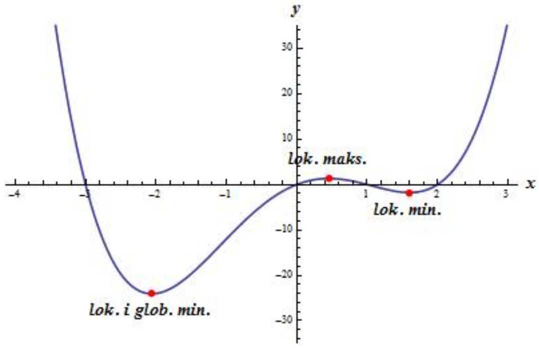
(kraće: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{z} = \frac{z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{z^2}$). Pravilo za derivaciju kompozicije obično se zapisuje ovako:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(pri čemo mislimo na $z = z(x) = z(y(x))$), a pravilo za derivaciju inverzne funkcije se onda obično zapisuje ovako:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Derivacije elementarnih funkcija u svim točkama njihove prirodne domene u kojima postoje navode se u tablicama derivacija. Najvažnije od derivacija elementarnih funkcija su $C' = 0$ (derivacija konstantne funkcije je nulfunkcija), $(x^n) = nx^{n-1}$ (derivacija potencije dobije se spuštanjem eksponenta i njegovim smanjivanjem za 1), $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$ i $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Deriviranje je linearno: derivacija zbroja ili razlike funkcije je zbroj odnosno razlika njihovih derivacija i derivacija od funkcije pomnožene s nekom konstantom jednaka je derivaciji te funkcije pomnožene s tom konstantom. Produkt funkcija se derivira tako da se derivira svaki član produkta i pomnoži s nederiviranim ostalim članovima te se tako dobiveni izrazi zbroje. Derivacija kvocijenta jednaka je razlici derivacije brojnika pomnožene s nazivnikom i derivacije nazivnika pomnožene s brojnikom, podijeljenoj s kvadratom nazivnika. Kompozicija funkcija se derivira tako da se uzastopno množe derivacije funkcija koje čine funkciju, pri čemu su u derivaciju pojedine funkcije uvršteni isti izrazi koji su u nju uvršteni prije deriviranja. ☺



Slika 3.5: Lokalni i globalni ekstremi.

3.5 Određivanje ekstrema funkcije

Neka je zadana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$. Jedno od najčešćih pitanja u primjenama matematike u kojima se kao model koriste realne funkcije je: gdje ta funkcija postiže ekstreme (i koliko oni iznose)?

Kao prvo, treba definirati što su to ekstremi funkcije. Postoje dvije vrste ekstrema: lokalni i globalni. Globalni ekstremi su oni koji se odnose na cijelu domenu funkcije, dok se lokalni odnose samo na njen dio. Preciznije:

Definicija 1 (Globalni ekstremi)**.** *Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (za minimum: $f(c) \leq f(x)$)* za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Geometrijski, točka globalnog maksimuma odnosno minimuma je apscisa najviše odnosno najniže točke na čitavom grafu. Napomenimo da funkcija može imati više globalnih maksimuma (ili više globalnih minimuma), ali tada svi moraju biti „na istoj visini".

Primjer 45. *Svi brojevi $c = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) su točke globalnog maksimuma za $y = \cos x$: u svima njima kosinus postiže globalni maksimum $\cos(2k\pi) = 1$.*

Lokalni ekstremi odnose se samo na dio grafa, a ne na cjelokupni graf (vidi sliku 3.5). Preciznije,

Definicija 2 (Lokalni ekstremi)**.** *Točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (za minimum: $f(c) \leq f(x)$) za sve x iz nekog otvorenog intervala koji sadrži c.*

Pogledamo li sliku 3.5 vidimo da je karakteristika lokalnih maksimuma da do njih funkcija raste, a od njih pada, dok za lokalne minimume vrijedi obrnuto. Ta je karakterizacija vrlo bitna te ćemo ju istaknuti kao propoziciju:

Propozicija 1. *Točka c iz domene funkcije f je točka lokalnog maksimuma ako f raste na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$ i pada na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$.*

Točka c iz domene funkcije f je točka lokalnog minimuma ako f pada na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$ i raste na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$.

Budući da predznak koeficijenta smjera pravca ukazuje na rast ili pad odgovarajuće afine funkcije, te budući da je tangenta pravac koji se najbolje priljubljuje uz danu krivulju $y = f(x)$ i njen koeficijent smjera jednak je derivaciji funkcije f u promatranoj točki, nije teško zaključiti, a niti preteško dokazati, da vrijedi

Teorem 1 (Veza između predznaka derivacije i rasta i pada funkcije)**.** *Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu prvu derivaciju, ona raste na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu prvu derivaciju, ona pada na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: rastuće derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a padajuće derivabilne funkcije negativnu prvu derivaciju (na intervalu na kojem rastu, odnosno padaju).*

U kombinaciji s prethodnom propozicijom, iz gornjeg teorema zaključujemo da se točke lokalnih ekstrema funkcija koje su derivabilne na nekom intervalu oko točke lokalnog ekstrema (ali ne nužno u samoj točki ekstrema) mogu prepoznati kao oni elementi domene u kojima derivacija mijenja predznak. Očito je nemoguće za svaki element domene provjeriti zadovoljava li taj uvjet. Stoga je zgodno prvo odabrati „listu kandidata", tj. moguće točke ekstrema i onda samo za njih provjeriti dolazi li u njima do promjene predznaka. Ta „lista kandidata" zove se skup kritičnih točaka funkcije i iz gornjeg teorema slijedi da za funkcije koje imaju najviše konačno mnogo točaka u kojima nisu derivabilne ti „kandidati" mogu biti samo oni elementi domene u kojima je derivacija jednaka nuli ili ne postoji.

Definicija 3 (Stacionarne i kritične točke)**.** *Stacionarna točka funkcije je element domene u kojemu je derivacija funkcije jednaka nuli (nultočka prve derivacije). Kritične točke su stacionarne točke i oni elementi domene u kojima funkcija nije derivabilna.*

Iz opisnih definicija derivacije vidi se da su stacionarne točke one u kojima je tangenta na graf horizontalna. One obično jesu točke ekstrema, no to ne mora uvijek biti tako.

Primjer 46. *Za funkciju kubiranja ($f(x) = x^3$) je $c = 0$ stacionarna točka ($f'(0) = 0$), no s grafa funkcije vidljivo je da ona nije točka ekstrema.*

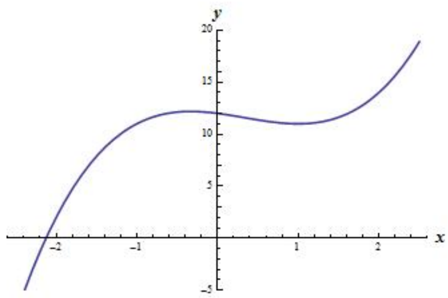
Dakle, želimo li znati gdje funkcija postiže lokalne ekstreme, prvo treba odrediti kritične točke. Najčešće su to samo stacionarne točke, no ne smije se zaboraviti i na točke u kojima funkcija nema derivaciju. Osobito česte kritične točke koje nisu stacionarne su rubovi a i b domene kad je domena oblika $[a, b]$.

Primjer 47. *Neka je $f(x) = x^3 - x^2 - x + 12$, $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$. Tada je*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

te su stacionarne točke rješenja jednadžbe $3x^2 - 2x - 1 = 0$, tj. $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$, s tim što x_2 ne uzimamo u obzir jer nije u domeni. Stoga je jedina stacionarna točka ove funkcije $x_1 = 1$.

Nadalje, funkcija je kubni polinom. Stoga nema točaka u kojima nije derivabilna osim rubova domene te je skup svih kritičnih točaka ove funkcije $\{0, 1, 2\}$.



Slika 3.6: Graf funkcije iz primjera 48.

Kako za kritične točke provjeriti radi li se o točkama ekstrema? Općenitiji je postupak koji koristi provjeru promjene predznaka derivacije, dok je brži postupak pomoću druge derivacije (koji nije primjenjiv na kritične točke koje nisu stacionarne, a ponekad ne daje odgovor ni za stacionarne točke).

Prvi postupak sastoji se u izradi tablice u kojoj označavamo predznake prve derivacije i temeljem njih zaključujemo koje od kritičnih točaka $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su točke ekstrema:

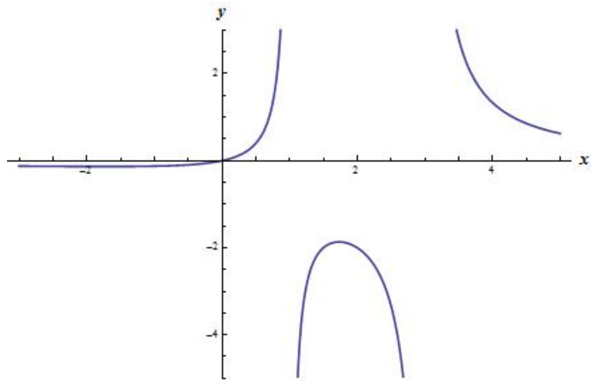
x		x_1		x_2		$\ldots$		x_n	
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	$\ldots$	$\searrow$	nije ekstrem	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	$*$	$-$	$*$	$+$	$\ldots$	$-$	$*$	$-$

gdje oznaka $*$ predstavlja ili nulu ili nedefiniran broj, oznaka $+$ znači da je derivacija u odgovarajućem intervalu pozitivna, $-$ da je negativna. Predznak derivacije u pojedinom intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ određujemo uvrštavanjem bilo kojeg broja iz tog intervala u derivaciju f'; pritom je važno biti siguran da su među x_i-ovima nabrojane sve kritične točke. Ako je domena funkcije unija više intervala, među x_i-ove se umeću i svi rubovi tih intervala.

Primjer 48. *Neka je $f(x) = x^3 - x^2 - x + 12$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (uočite: isto pravilo, ali druga domena nego u primjeru 47). Tada je $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ te su stacionarne točke $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$. Kako je funkcija derivabilna za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da su to jedine kritične točke. Odgovarajuća tablica je*

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Pritom smo predznake od $f'(x)$ u pojedinim intervalima odredili uvrštavanjem po jednog x koji je manji od $-1/3$, jednog između $-1/3$ i 1 i jednog većeg od 1 u $f'(x)$ (npr. $f'(-1) = 4 > 0$, $f'(0) = -1 < 0$ i $f'(2) = 20 > 0$). Dakle, funkcija f ima točku lokalnog maksimuma $-\frac{1}{3}$ i točku lokalnog minimuma 1. Odgovarajući graf prikazan je slikom 3.6.



Slika 3.7: Graf funkcije iz primjera 49.

Primjer 49. *Neka je* $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-3)}$, $f : \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 1, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. *Tada je* $f'(x) = \frac{3-x^2}{(x-1)^2(x-3)^2}$ *te su stacionarne točke funkcije* $-\sqrt{3}$ *i* $\sqrt{3}$. *Uz to je promjena predznaka derivacije moguća u* 1 *i* 3. *Pritom* 1 *i* 3 *nisu kritične točke jer nisu elementi domene pa ne mogu biti ni točke ekstrema. Odgovarajuća tablica je*

x		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{6}$		3	
$f(x)$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$	$*$	$\nearrow$	*lok.maks.*	$\searrow$	$*$	$\searrow$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$*$	$+$	0	$-$	$*$	$-$

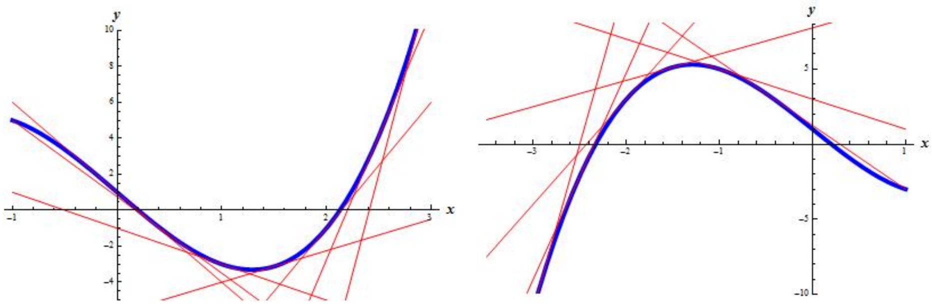
Funkcija f *raste na intervalima* $\langle -\sqrt{3}, 1\rangle$ *i* $\langle 1, \sqrt{3}\rangle$, *a pada na intervalima* $\langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle$, $\langle \sqrt{3}, 3\rangle$ *i* $\langle 3, +\infty\rangle$ *te postiže lokalni minimum u točki* $-\sqrt{3}$ *i lokalni maksimum u točki* $\sqrt{3}$. *Odgovarajući graf prikazan je slikom 3.7. S grafa je vidljivo da ova funkcija nema globalnih ekstrema.*

Prije nego opišemo postupak određivanja lokalnih ekstrema pomoću druge derivacije potrebno je objasniti njenu geometrijsku interpretaciju. Budući je druga derivacija prva derivacija prve derivacije, slijedi da pozitivna druga derivacija znači rast prve derivacije, a negativna druga derivacija znači pad prve derivacije. Kako prva derivacija predstavlja koeficijent smjera tangente u pojedinoj točki, znači da se pozitivna druga derivacija očituje u porastu koeficijenata smjera tangenti na graf (gledano slijeva udesno), a negativna druga derivacija očituje u padu koeficijenata smjera tangenti na graf. To je prikazano na slici 3.8.

Ako je $f''(x) > 0$ za x iz nekog intervala I, kažemo da je f konveksna na intervalu I. Ako je pak $f''(x) < 0$ za x iz nekog intervala I, kažemo da je f konkavna na intervalu I. Preciznija definicija konveksnosti i konkavnosti je sljedeća:

Definicija 4 (Konveksnost i konkavnost funkcije)**.** *Funkcija* f *je na intervalu* I *konveksna ako za svaka dva broja* $x_1 < x_2$ *iz tog intervala vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$



(a) (b)

Slika 3.8: Pozitivne druge derivacije (a) i negativne druge derivacije (b).

Funkcija f je na intervalu I konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Drugim riječima, funkcija je konveksna ako je pravac kroz bilo koje dvije točke na grafu iznad grafa, a konkavna ako je pravac kroz bilo koje dvije točke na grafu ispod grafa.

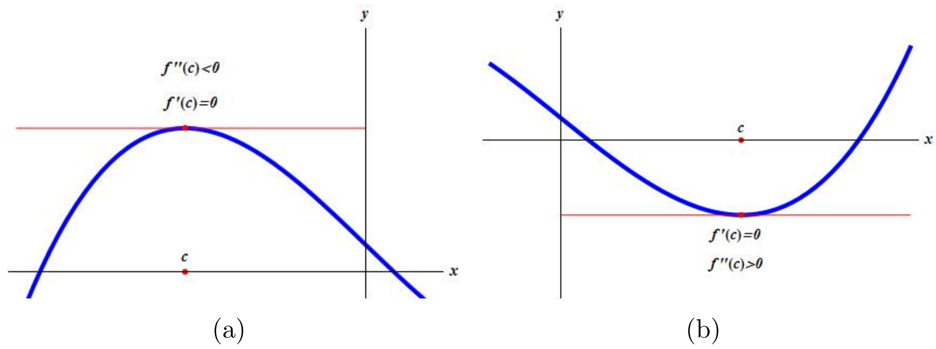
Kao što su bitne točke u kojima dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto (jer su to točke lokalnih ekstrema), važne su i točke u kojima dolazi do promjene oblika zakrivljenosti:

Definicija 5 (Točka infleksije)**.** *Točka infleksije funkcije je element njezine domene u kojem dolazi do promjene konveksnosti u konkavnost ili obrnuto.*

Obzirom na vezu konveksnosti i konkavnosti s drugom derivacijom vidimo da su točke infleksije točke u kojima druga derivacija mijenja predznak. Kao što su nultočke prve derivacije potencijalne točke lokalnih ekstrema, tako su i nultočke druge derivacije potencijalne točke infleksije.

Primjer 50. *Pitanje konveksnosti i konkavnosti nije samo geometrijsko. Primjerice, ako nam graf opisuje poziciju $x(t)$ točke koja se u jednom smjeru giba po pravcu (gdje nam je t proteklo vrijeme), onda se sigurno radi o rastućoj funkciji (točka je sve dalje od ishodišne pozicije). No, graf će biti konveksan iznad onih vremenskih intervala na kojima je točka ubrzavala, a konkavan iznad onih vremenskih intervala na kojima je točka usporavala. Ako se ne radi o točki nego primjerice o trkaču, onda će graf u pravilu do nekog trenutka T biti konveksan, a zatim konkavan: značenje trenutka T je da je to onaj trenutak u kojem se počeo očitovati umor trkača.*

Druga derivacija, ako postoji, može nam pomoći da utvrdimo je li neka stacionarna točka točka ekstrema. Naime, ako je točka c stacionarna, tangenta u odgovarajućoj točki grafa je horizontalna. Ako je uz to funkcija konkavna u toj točki ($f''(c) < 0$), u c funkcija mora postizati lokalni maksimum (vidi sliku 3.9 (a)), a ako je funkcija konveksna u toj točki ($f''(c) > 0$), u c funkcija mora postizati lokalni minimum (vidi sliku 3.9 (b)). Dakle, vrijedi sljedeći teorem:



Slika 3.9: Lokalni maksimum: horizontalna tangenta i konkavnost (a); lokalni minimum: horizontalna tangenta i konveksnost (b).

Teorem 2. *Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.*

Primjer 51. *Primijenimo gornje pravilo na funkciju iz primjera 48 koja je imala stacionarne točke $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$ i one su bile jedine kritične točke. Druga derivacija te funkcije je $f''(x) = 6x - 2$. Uvrstimo x_1 i x_2 u f'': $f''(1) = 4 > 0$ i $f''(-1/3) = -4 < 0$. Stoga je 1 točka lokalnog minimuma, a $-1/3$ točka lokalnog maksimuma.*

Vidimo da je provjera pomoću druge derivacije vrlo efikasna, no treba misliti na to da ona ne funkcionira uvijek. Provjera pomoću druge derivacije nije primjenjiva na kritične točke koje nisu stacionarne, a i za stacionarne ne mora dati odgovor (ako ispadne da je stacionarna točka nultočka i druge derivacije). U tim slučajevima za provjeru je li kritična točka ekstrem najbolje je koristiti ranije opisanu metodu pomoću tablice.

Svi dosad opisani postupci odnosili su se na određivanje lokalnih ekstrema. No, što je s određivanjem globalnih ekstrema?

Prva što bismo mogli pomisliti je da globalni maksimum (ili minimum) možemo odrediti tako da među točkama lokalnih maksimuma (minimuma) odaberemo onu u kojoj funkcija postiže najveću (najmanju) vrijednost. No, takav način često ne daje točan odgovor.

Primjer 52. *Funkciji čiji graf je prikazan slikom 3.6 u primjeru 48 smo odredili točke lokalnih ekstrema, no sa slike je vidljivo da jedini lokalni maksimum nije globalni maksimum jer funkcija poprima proizvoljno velike vrijednosti za velike vrijednosti varijable x. Isto tako, jedini lokalni minimum nije globalni minimum jer funkcija poprima proizvoljno male vrijednosti za male vrijednosti varijable x.*

Općenito se globalni ekstremi mogu odrediti tek kad je poznat cijeli graf funkcije, tj. kad je potpuno određen tok funkcije. Ipak, u jednom — u primjenama vrlo čestom — slučaju postoji „šablonski” postupak za određivanje globalnih ekstrema. Taj postupak se oslanja na sljedeći teorem:

Teorem 3. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna*[3]*, onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.*

Za funkcije koje su zadane na segmentu, neprekidne su i uz to derivabilne unutar segmenta (a takve su sve funkcije koje dobijemo iz elementarnih funkcija restrikcijom na segment) dovoljno je odrediti sve kritične točke u segmentu i usporediti vrijednosti funkcije u njima. Stoga imamo:
Postupak za određivanje globalnih ekstrema za elementarne funkcije kojima je za domenu uzet segment $[a, b]$:

1. Derivirajte funkciju i odredite joj stacionarne točke.
2. Od stacionarnih točaka kao kritične točke odabiru se samo one koje su u segmentu $[a, b]$.
3. U kritične točke dodaju se i rubovi segmenta, tj. brojevi a i b.
4. Za svaku kritičnu točku c izračuna se $f(c)$. One točke c za koje $f(c)$ ima najmanju vrijednost su točke globalnog minimuma. One točke c za koje $f(c)$ ima najveću vrijednost su točke globalnog maksimuma.

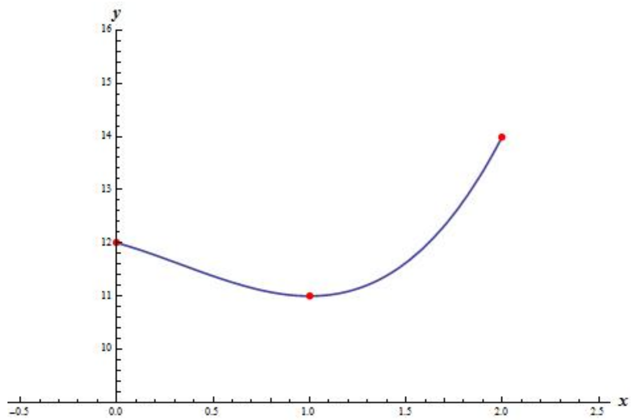
Primjer 53. *Nastavimo primjer 47. Tamo smo za zadanu funkciju „obavili” prve tri točke gornjeg postupka, tj. utvrdili da je skup kritičnih točaka skup $\{0, 1, 2\}$. Stoga treba ta tri broja uvrstiti u f:*

$$f(0) = 12,$$
$$f(1) = 11,$$
$$f(2) = 14.$$

Vidimo da najmanju vrijednost funkcija postiže u 1 te joj je to točka globalnog mimimuma, a najveća je vrijednost u 2 te joj je to točka globalnog maksimuma. Odgovarajući graf vidljiv je na slici 3.10.

Primijetimo da nam i ovaj primjer, povezano s primjerom 52, ponovno pokazuje da nam funkciju ne čini samo pravilo, već i njena domena (i kodomena) — za dvije različite domene uz isto pravilo jednom smo imali funkciju bez globalnih ekstrema, a drugi put s globalnim ekstremima.
☼ **Ponovimo bitno...** Točke globalnih ekstrema funkcije su elementi domene u kojima f postiže najmanju ili najveću vrijednost. Točke lokalnih ekstrema funkcije su oni elementi c iz domene u kojima funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost na nekom intervalu oko c. Neprekidna funkcija zadana na segmentu sigurno postiže globalni minimum i globalni maksimum. Lokalne ekstreme određujemo tako da prvo odredimo kritične točke, a onda za svaku provjerimo radi li se o lokalnom ekstremu. Kritične točke su stacionarne točke, tj. nultočke prve derivacije i točke u kojima funkcija nije derivabilna. Provjera je li kritična točka točka lokalnog ekstrema provodi se ili

[3] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija zadana na segmentu je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.



Slika 3.10: Globani ekstremi — graf funkcije iz primjerâ 47 i 53.

utvrđivanjem intervala rasta i pada ili pomoću druge derivacije. Predznak prve derivacije funkcije govori o njenom rastu ili padu (pozitivna prva derivacija znači rast funkcije, a negativna pad), a predznak druge derivacije govori o obliku zakrivljenosti funkcije (pozitivna druga derivacija znači konveksnost funkcije, a negativna konkavnost). ☺

3.6 Ispitivanje toka funkcije

Pod ispitivanjem toka funkcije podrazumijeva se skupljanje svih potrebnih podataka za crtanje njenog grafa. Prvi korak određivanja toka funkcije je određivanje njene prirodne domene (ako domena nije zadana). Prirodna domena za formulu $y = f(x)$ određuje se uzimajući u obzir prirodne domene elementarnih funkcija, tj.

- U logaritme smiju biti uvršteni samo pozitivni brojevi;
- U arkus-sinus i arkus-kosinus smiju biti uvršteni samo brojevi između -1 i 1;
- Pod parnim korijenima ne smiju biti negativni brojevi;
- Ne smije se dijeliti s nulom.

Primjer 54. *Formulom*

$$f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$$

zadana je realna funkcija. Prvo mora (zbog arkus-sinusa) biti $x \in [-1, 1]$. *Nadalje,* $\arcsin x$ *ne smije biti negativno jer je pod kvadratnim korijenom, dakle mora biti* $x \geq 0$, *tj. ostaje nam* $x \in [0, 1]$. *Na kraju, razlomak* $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$ *mora biti pozitivan jer je pod logaritmom, a to vrijedi za* $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} > 0$, *tj.* $\sqrt{\arcsin x} < \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. *Kako su tu prema prethodnom pod korijenima pozitivni brojevi, zadnju nejednakost smijemo kvadrirati te dobivamo* $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$. *Dakle, mora biti* $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Zaključujemo da je prirodna domena funkcije* f *skup* $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$.

Nakon što je određena domena određuje se vrijednost funkcije u nuli (naravno, ako je nula u domeni) te se, ukoliko je moguće, odrede nultočke funkcije. Time određujemo sjecišta grafa s koordinatnim osima.

Primjer 55. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana s* $f(x) = 0{,}1x^4 + 0{,}2x^3 - 1{,}3x^2 - 1{,}4x + 2{,}4$. *Radi se o polinomu sa slobodnim članom* $2{,}4$ *pa je sjecište s* y*-osi u* $2{,}4$.

Za određivanje sjecišta s osi apscisa treba riješiti jednadžbu

$$f(x) = 0{,}1(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) = 0.$$

Kako su djeljitelji[4] *od* 24 *brojevi* $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$, *pokušavamo među njima naći nultočke. Lako vidimo da je* $f(1) = 0$ *i* $f(-2) = 0$, *pa dijeljenje* $f(x)$ *s* $0{,}1(x-1)(x+2)$ *daje* $x^2 + x - 12$, *što pak ima nultočke* 3 *i* -4. *Dakle, graf funkcije* f *siječe* x*-os u* -4, -2, 1 *i* 3.

Ako ne znamo točno odrediti nultočke funkcije, za procjenu intervala u kojem se neka od nultočki nalazi često je od pomoći sljedeće pravilo: ako je funkcija f neprekidna (primjerice, ako je elementarna) na segmentu $[a, b]$ i ako su predznaci od $f(a)$ i $f(b)$ različiti, onda između a i b postoji bar jedna nultočka od f.

Primjer 56. *Funkcija iz primjera 48* y*-os siječe u* $f(0) = 12$.

Uvrštavanjem djeljitelja slobodnog člana 12 *u funkciju vidjet ćemo da nijedan od njih nije nultočka te funkcije, dakle ona nema cjelobrojnih nultočki.*

No, uvrstimo li u funkciju redom cijele brojeve od primjerice -5 *do* 5, *primijetit ćemo da je* $f(-3) < 0$, *a* $f(-2) > 0$, *pa kako se radi o polinomu slijedi da ova funkcija ima bar jednu nultočku između* -3 *i* -2. *Iz daljnjih razmatranja toka funkcije moći ćemo zaključiti da je to jedina nultočka funkcije* f.

U sljedećem koraku se, pomoću prve derivacije, određuju intervali rasta i pada i ekstremi funkcije. Postupak je opisan u prethodnom odjeljku. Nakon toga se pomoću druge derivacije odrede intervali konvesknosti i konkavnosti te točke infleksije. Ukratko: sve točke iz domene podijelimo na one u kojima je funkcija konveksna (druga derivacija pozitivna), one u kojima je funkcija konkavna (druga derivacija negativna), a za one u kojima druga derivacija nije definirana ili je jednaka nuli provjerimo dolazi li do promjene predznaka (u tom slučaju imamo točku infleksije).

Primjer 57. *Nastavimo s funkcijom iz primjera 48 i 56. Iz prve i druge derivacije funkcije* f *dobivamo tablicu*

x		$-\frac{1}{3}$		1		$\frac{1}{3}$	
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$		$\nearrow$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x) = 6x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Vidimo: funkcija raste za $x < -\frac{1}{3}$ *i za* $x > 1$, *a između* $-\frac{1}{3}$ *i* 1 *pada. Iz toga, budući da je* $f\left(-\frac{1}{3}\right) > f(1) > 0$, *zaključujemo da funkcija nema nultočki većih od* $-\frac{1}{3}$.

Funkcija je konveksna za $x > \frac{1}{3}$ *i konkavna za* $x < \frac{1}{3}$ *te je* $\frac{1}{3}$ *točka infleksije. Usporedimo li to sa slikom 3.6, vidimo da ta slika stvarno prikazuje graf funkcije* f.

[4] Cjelobrojne nultočke polinoma s cjelobrojnim koeficijentima su (ako ih ima) među djeljiteljima slobodnog člana.

Gore opisanim postupkom možemo saznati gotovo sve o grafu funkcije, osim ima li asimptota (i ako da, koje su to). Da bi se mogle odrediti asimptote potreban nam je pojam limesa, koji je ujedno u pozadini precizne definicije derivacije. No, o tom potom, prvo ćemo se još malo posvetiti primjenama derivacija.

☼ **Ponovimo bitno...** Ispitivanje toka funkcije uključuje: određivanje prirodne domene (ako domena nije zadana), određivanje sjecištâ grafa s koordinatnim osima, određivanje intervala rasta i pada i lokalnih ekstrema, određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti i točaka infleksije te određivanje asimptota. ☺

3.7 Uvod u diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe posredno opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njene varijable i njenih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti varijable. Primjerice, $y = Ce^x$ je za svaku konstantu C rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$ jer za svaki x vrijedi $(Ce^x)' = Ce^x$.

U fizikalnom kontekstu najčešće se radi o povezivanju osnovne funkcije (puta, koncentracije, ...) s brzinom njezine promjene i eventualno njenom akceleracijom.

Primjer 58. *Promatramo li titranje objekta mase m na vertikalno visećoj opruzi s koeficijentom elastičnosti k, u svakom trenutku možemo bilježiti vertikalni odmak z tijela od ravnotežnog položaja $z = 0$ (recimo, pozitivni z znači pomak nadolje, a negativni nagore). Prema zakonima Newtonove mehanike u svakom trenutku je $ma = -kz$, tj. $m\ddot{z} = -kz$. Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu za nepoznati opis ovisnosti pozicije z o vremenu koja opisuje vezu između te pozicije i akceleracije u svakom trenutku.*

Da bi diferencijalna jednadžba jednoznačno opisivala nepoznatu funkciju potrebni su i tzv. početni uvjeti.

Primjer 59. *Poznato je da je brzina promjene temperature sustava ϑ (u $^\circ C$) u svakom trenutku proporcionalna razlici temperature okoline i sustava. Recimo da je sustav patka koju želimo ispeći u pećnici (dakle, pećnica je okolina). Neka je pećnica zagrijana na $200^\circ\mathrm{C}$ (dakle, konstantne temperature). Vrijeme ćemo mjeriti u minutama. Prema opisanom, mora postojati konstanta k takva da je*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta).$$

Ukoliko znamo da je patka na početku izvađena iz hladnjaka i stoga imala temperaturu $2^\circ\mathrm{C}$, znamo da je $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2^\circ\mathrm{C}$ — to je početni uvjet za naš problem.

Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi bavit ćemo se kasnije, a ovdje ćemo samo primjerom pokazati kako za neku funkciju provjeriti je li ona rješenje dane diferencijalne jednadžbe.

Primjer 60. *Promotrimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Uzmimo da je $y = (1+x)e^{4x}$. *Tada je* $y' = e^{4x} + 4(1+x)e^{4x} = (5+4x)e^{4x}$ *i* $y'' = 4e^{4x} + 4(5+4x)e^{4x} = (24+16x)e^{4x}$. *Uvrstimo li* y, y' *i* y'' *u jednadžbu imamo*

$$(24+16x)e^{4x} - 8(5+4x)e^{4x} + 16(1+x)e^{4x} = 0.$$

Kako je $e^{4x} > 0$ *za sve* x, *prethodnu jednakost možemo podijeliti s* e^{4x} *te dobijemo* $24+16x-40-32x+16+16x = 0$, *što je istinito za sve* x. *Stoga je* $y = (1+x)e^{4x}$ *jedno rješenje jednadžbe* $y''-8y'+16y = 0$. *Sva rješenja jednadžbe su oblika* $y = (C_1+C_2x)e^{4x}$ *za različite konstante* C_1 *i* C_2 *— lako je uvrštavanjem provjeriti da to jesu rješenja, teže je dokazati da nema drugih.*

Diferencijalna jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija pojavljuje samo jednom derivirana je prvog reda, a ako se (kao u zadnjem primjeru) pojavljuje i druga derivacija nepoznate funkcije, onda je drugog reda. Općenito, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda (bez početnih uvjeta) sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi drugog reda (bez početnih uvjeta) sadrže dvije (C_1 i C_2 u gornjem primjeru).

Primjer 61. *Provjerimo da je u primjeru 59 ovisnost temperature patke o vremenu uvijek (neovisno o početnom uvjetu) opisana s*

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - Ce^{-kt},$$

gdje je C *neka konstanta nepoznatog iznosa. Ako smo točno pretpostavili da je to rješenje diferencijalne jednadžbe* $\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta)$, *onda uvrštavanje te funkcije u jednadžbu mora dati identitet koji vrijedi za sve trenutke* t. *Da bismo uvrstili* ϑ *u jednadžbu trebamo i derivaciju te funkcije po vremenu:*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = Cke^{-kt}.$$

Uvrstimo u jednadžbu:

$$Cke^{-kt} = k(200^\circ\mathrm{C} - 200^\circ\mathrm{C} + Ce^{-kt})$$

što daje

$$Cke^{-kt} = Cke^{-kt},$$

a to je očito istinito za sve trenutke t.

Dakle, ovisnost temperature patke o vremenu je dana s $\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - Ce^{-kt}$, *pri čemu imamo dvije nepoznate konstante* C *i* k. *Početni uvjet bio nam je da je* $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2^\circ\mathrm{C}$ *pa ga uvrstimo u gornju formulu za* ϑ:

$$2^\circ\mathrm{C} = \vartheta(0\,\mathrm{min}) = 200^\circ\mathrm{C} - Ce^{-k\cdot 0\,\mathrm{min}} = 200^\circ\mathrm{C} - C.$$

Vidimo dakle da je $C = 198^\circ\mathrm{C}$, *tj.*

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}e^{-kt}.$$

Početni uvjet nam nije dovoljan da odredimo obje nepoznate konstante. Za određivanje konstante k, *koja potječe (za razliku od* C*) ne od rješavanja problema, nego* *od njegovog postavljanja, treba nam još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo joj temperaturu i dobili da je tada bila na* 16°C, *dakle* $\vartheta(30\,\mathrm{min}) = 16°\mathrm{C}$. *Ponovimo postupak kao kad smo koristili početni uvjet, ali sa zadnjim određenim oblikom funkcije* ϑ*:*

$$16°\mathrm{C} = \vartheta(30\,\mathrm{min}) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-k\cdot 30\mathrm{min}}.$$

Rješavanje gornje eksponencijalne jednadžbe daje

$$k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}00244438\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Stoga je temperatura patke u svakom trenutku

$$\vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-0{,}00244438t\,\mathrm{min}^{-1}}.$$

Želimo li znati kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperara biti $\vartheta(t) = 80°\mathrm{C}$, *uvrstimo to u zadnju formulu i odredimo* t. *Ispasti će da se patka treba peći* 204,868 *minuta, tj. otprilike 3 sata i 25 minuta.*

☼ **Ponovimo bitno...** Diferencijalne jednadžbe indirektno opisuju funkciju preko veze između nje i njenih derivacija. Funkcija je rješenje diferencijalne jednadžbe ako njenim uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo jednakost istinitu za sve vrijednosti varijable. ☺

3.8 Primjene derivacija u kemiji

Kemijska kinetika se bavi (ne samo) brzinama reakcija. Brzina reakcije može se definirati kao

$$v = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$$

gdje je c množinska koncentracija bilo kojeg reaktanta ili produkta, a ν je pripadni stehiometrijski koeficijent (po definiciji je negativan za reaktante, a pozitivan za produkte). Ovakva definicija brzine ne ovisi o odabiru rektanta (ili produkta) čiju koncentraciju pratimo jer se zapravo radi o praćenju promjene dosega u vremenu.

Primjer 62. *U reakciji klorobutana s vodom,* $C_4H_9Cl(aq) + H_2O(l) \longrightarrow C_4H_9OH(aq) + HCl(aq)$, *stehiometrijski koeficijenti reaktanata su* -1, *a produkata* $+1$.

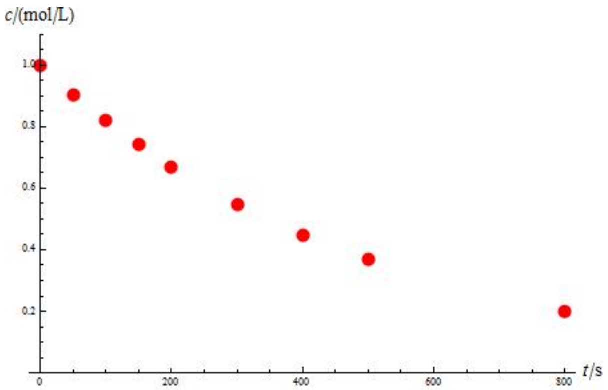
Tabeliranjem i crtanjem parova (vrijeme, koncentracija) u Kartezijevom koordinatnom sustavu moguće je uočiti trend ovisonosti koncentracije o vremenu.

Primjer 63. *Pri jednom izvođenju reakcije iz primjera 62 dobiveni su podaci prikazani na slici 3.11. Prikaz tih podataka u koordinatnom sustavu daje sliku 3.12.*

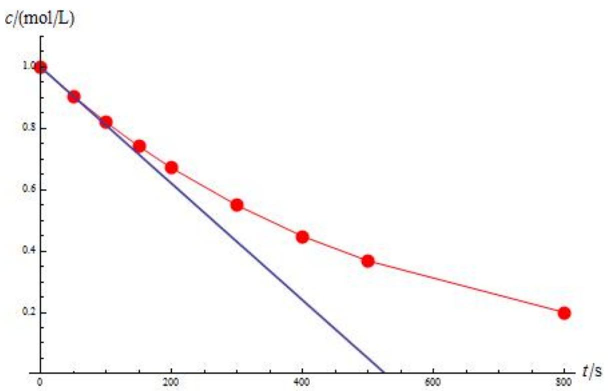
Ako smo izveli dovoljno mjerenja i precizno ih ucrtali, moguće je s razumnom točnošću crtati tangente u pojedinim točkama i očitati njihove koeficijente smjera, tj. trenutne brzine. Određivanje početne brzine prikazano je na slici 3.13. Prema toj slici i uzevši u obzir da je stehiometrijski koeficijent klorobutana u ovoj reakciji -1 *pa je* $v = -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$, *početna brzina reakcije iznosi približno koliko i suprotna vrijednost koeficijenta smjera pravca kroz prve dvije točke, a to je* $-\frac{0{,}905-1}{50-0}\cdot\frac{\mathrm{mol/L}}{\mathrm{s}} = 1{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}$.

t/s	c/(mol/L)
0.	1.
50	0.905
100	0.82
150	0.741
200	0.671
300	0.549
400	0.448
500	0.368
800	0.2

Slika 3.11: Izmjerene koncentracije klorobutana.



Slika 3.12: Grafički prikaz ovisnosti koncentracije klorobutana o vremenu.



Slika 3.13: Grafičko odrejivanje početne brzine reakcije.

U kemijskoj kinetici se temeljem definicija reda reakcije postavljaju odgovarajuće diferencijalne jednadžbe, čija rješenja (tzv. integrirani zakoni brzina reakcija) nam daju ovisnosti koncentracija promatranih reaktanata/produkata o vremenu, koje onda možemo usporediti sa stvarnim podacima i tako provjeriti točnost pretpostavke da je reakcija nekog reda. Konkretno, za reakcije kod kojih koncentracija samo jednog reaktanta A (sa stehiometrijskim koeficijentom ν) utječe na brzinu reakcije kažemo da su n-tog reda ako je u svakom trenutku brzina reakcije proporcionalna n-toj potenciji trenutne koncentracije c tog reaktanta: $v = kc^n$ odnosno

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = kc^n.$$

Koeficijent proporcionalnosti k zove se koeficijent brzine reakcije.

Primjerice, reakcija $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{P}$ je prvog reda ako je u svakom trenutku $\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = kc$, gdje je c trenutna koncentracija od A. To znači da je kod reakcija prvog reda koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti $c(t)$ u svakoj točki (t, c) jednak νkc. Rješavanjem te diferencijalne jednadžbe dobiva se da je integrirani zakon brzine reakcije prvog reda $c(t) = c_0 e^{\nu kt}$, gdje je c_0 početna koncentracija reaktanta A.

Primjer 64. *Nastavimo primjer 63. Provjerimo je li ta reakcija prvog reda obzirom na klorobutan. Ako da, onda bi ovisnost $c(t)$ trebala biti približno ista kao ona opisana jednadžbom*

$$c(t) = 1{,}000\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}} \cdot e^{-kt}.$$

Koeficijent k bi trebao biti takav da u svakom trenutku t koeficijent smjera tangente bude $-kc$ (isti k za sve trenutke). Uzmemo li početni trenutak $t = 0\,\mathrm{s}$ i već izračunati koeficijent smjera tangente $1{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}$, dobivamo zahtjev $-1{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}} = -k \cdot 1{,}000\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$, tj. $k = 1{,}90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s^{-1}}$. Stoga bi, ukoliko je pretpostavka točna, ovisnost c o t trebala biti

$$c(t) = 1{,}000\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}} \cdot e^{-0{,}00190t/\mathrm{s}}.$$

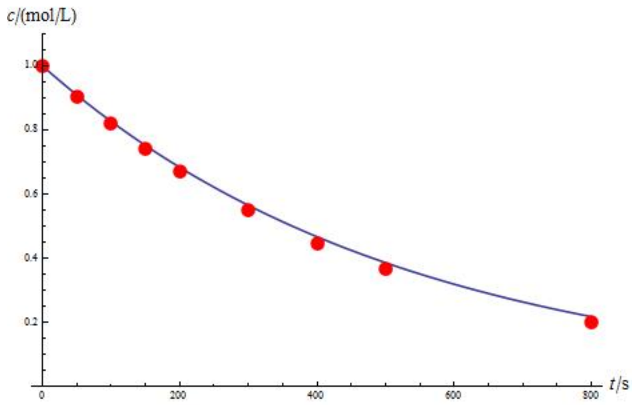
Usporedba te funkcije i podataka iz tablice dana je slikom 3.14. Vidimo da je ovisnost vrlo dobro pogođena te se s velikom vjerojatnošću radi o reakciji prvog reda.

Već smo rekli da je jedna od općenito najbitnijih primjena derivacija je određivanje ekstrema funkcija. Ta se primjena derivacija pojavljuje gotovo uvijek kad znamo teorijski opis neke ovisnosti i želimo znati kad je ona najveća ili najmanja. Slijede tri takva primjera.

Primjer 65. *U statističkoj termodinamici je vjerojatnost da se, pri temperaturi T, molekula plina mase m kreće brzinom iznosa v opisana formulom*

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Radi se o Maxwellovoj (ili Maxwell-Boltzmannovoj) funkciji gustoće vjerojatnosti. U formuli je s k označena Boltzmannova konstanta ($k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$). Za svaku brzinu v iznos $f(v)\Delta v$ (ako je Δv približno nula) opisuje vjerojatnost da za neku



Slika 3.14: Usporedba eksperimentalnih podataka i integriranog zakona brzine reakcije.

molekulu plina njena brzina iznosi približno v. *Domena od* f *je interval* $[0, +\infty\rangle$ *jer je brzine ne mogu poprimiti negativne iznose.*

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi $20°\mathrm{C}$*? Tu prvo trba napomenuti da to nije isto što i prosječna (očekivana) brzina dušikovih molekula u uzorku. No, važnije je znati da takva formulacija pitanja nije dobra. Naime, kad god se opisuje vjerojatnost da neko opažanje poprimi neku vrijednost (u situaciji kad je moguće opaziti bilo koju vrijednost iz nekog intervala realnih brojeva), onda nema smisla govoriti o vjerojatnosti da se pogodi točan iznos*[5]*: ta je vjerojatnost uvijek nula. Postavljeno pitanje bolje bi bilo formulirati ovako: odredite točku maksimuma* v^* *funkcije* f *za dušikovu molekulu pri* $20°\mathrm{C}$. *Dobivena vrijednost* v^* *biti će brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno odabrana dušikova molekula ima vrijednost blizu* v^*.

Da bi nam bilo lakše derivirati, označimo

$$\smiley = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}, \quad \frownie = \frac{m}{2kT}.$$

Sad naša funkcija ima pregledniji oblik

$$f(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2}.$$

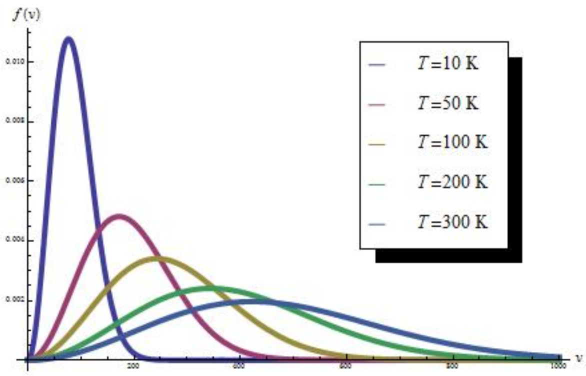
Imamo dakle

$$f'(v) = \smiley \cdot \left(2ve^{-\frownie v^2} - 2\frownie v^3 e^{-\frownie v^2}\right),$$

tj.

$$f'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

[5]Formalno, govorimo o kontinuiranoj slučajnoj varijabli X koja može poprimiti vrijednosti unutar nekog intervala I. Takve slučajne varijable opisuju se funkcijom gustoće vjerojatnosti $f : I \to [0, +\infty\rangle$. Vjerojatnost da X poprimi vrijednost u nekom podskupu J od I jednaka je površini omeđenoj s osi apscisa, grafom funkcije gustoće vjerojatnosti te vertikalama povučenim u rubovima od J. Ako se pitamo kolika je vjerojatnost da X poprimi vrijednost $a \in I$ imamo $J = \{a\}$, tj. interval je širine 0 pa je površina i time vjerojatnost jednaka nuli. O ovome će biti više riječi u poglavlju o primjenama integrala.



Slika 3.15: Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti brzina za dušik.

Kako eksponencijalna funkcija nema nultočki, jedine stacionarne točke funkcije f su $v = 0$ (zapravo, ona je kritična i f kao funkcija na $[0, +\infty\rangle$ u njoj nema derivacije) i nultočke izraza u zadnjoj zagradi, tj. treba riješiti jednadžbu

$$1 - \frownie v^2 = 0.$$

Njena rješenja su $v = \pm\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Kako su nemoguće negativne brzine, zaključujemo da su kritične točke 0 i $\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Kako je izraz za $f'(v)$ oblika $\alpha \cdot (1 - \frownie v^2)$ pri čemu je $\alpha \geq 0$ za sve smislene brzine v, slijedi da je $f'(v)$ pozitivno kad je $v > 0$ i $1 - \frownie v^2 > 0$, dakle za v između 0 i $+\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Stoga naša funkcija raste od 0 do $\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$ i zatim pada te je

$$v^* = \sqrt{\frac{1}{\frownie}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

točka globalnog maksimuma od f („najverojatnija brzina"). Za dušik pri zadanoj temperaturi ($M = 28{,}0134\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$) dobivamo $v^* = 420{,}69\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Grafovi funkcije f za dušik pri nekoliko različitih temperatura prikazani su slikom 3.15.

Primjer 66. *Odredimo tlak za koji je rad izvršen pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina minimalan. Za takve procese vrijedi $pV^\gamma =$const., gdje je $\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}$ (omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta). Može se pokazati da je tada rad opisan formulom*

$$w = w(p) = nRT\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{p_2}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 2\right).$$

Pritom su p_1 i p_2 početni odnosno konačni tlak, a n, R, T, i $\gamma \in \langle 0, 1\rangle$ su konstante.

Želimo odrediti točke minimuma funkcije w. Opet ćemo preglednosti radi skupiti konstantne izraze u nove konstante:

$$\heartsuit = nRT\frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \spadesuit = \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Sad je

$$w(p) = \heartsuit\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\spadesuit} + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{-\spadesuit} - 2\right).$$

Odredimo stacionarne točke:

$$w'(p) = \heartsuit\left(\frac{\spadesuit}{p_1^{\spadesuit}}p^{\spadesuit-1} - \frac{\spadesuit}{p_2^{\spadesuit}}p^{-\spadesuit-1}\right) = \heartsuit\spadesuit\left(\frac{p^{\spadesuit-1}}{p_1^{\spadesuit}} - \frac{p^{-\spadesuit-1}}{p_2^{\spadesuit}}\right).$$

Izjednačimo li $w'(p)$ s nulom dobivamo jednadžbu

$$p_2^{\spadesuit}p^{\spadesuit-1} = p_1^{\spadesuit}p^{-\spadesuit-1}$$

iz čega (množenjem s $\frac{p^{\spadesuit+1}}{p_2^{\spadesuit}}$) slijedi

$$(p^2)^{\spadesuit} = (p_1p_2)^{\spadesuit}.$$

Zaključujemo da su stacionarne točke $p = \pm\sqrt{p_1p_2}$, no kako fizikalni smisao ima samo pozitivna, jedini kandidat za točku minimuma je geometrijska sredina početnog i konačnog tlaka

$$p^* = \sqrt{p_1p_2}.$$

S obzirom na to da je u našem slučaju rad elementarna funkcija tlaka, lako provjerimo da je $w'(p) < 0$ za $p < p^*$ i $w'(p) > 0$ za $p > p^*$ (npr. uvrštavanjem $p = p_1 < p^*$ i $p = p_2 > p^*$ u $w'(p)$) te se stvarno radi o točki minimuma.

Zaključujemo: rad je minimalan kad je trenutni tlak jednak geometrijskoj sredini početnog i konačnog tlaka.

Primjer 67. *Gibbsova energija smjese dva enantiomera, u ovisnosti o koncentraciji c jednog od njih, uz oznaku $x = \frac{c}{c^{\ominus}}$, opisana je formulom*

$$G = G(x) = G^{\circ} + RTc^{\ominus}x\ln x + RTc^{\ominus}(x_0 - x)\ln(x_0 - x).$$

Tu je $x_0 = \frac{c_0}{c^{\ominus}}$ gdje je c_0 zbroj koncentracija ta dva enantiomera. Vrijednosti x_0 i G° su konstantne. Pri kojim koncentracijama tih enantiomera je (pri konstantnoj temperaturi) Gibbsova energija najmanja? Koja je najveća vrijednost Gibbsove energije za $0 < x < x_0$?

Prvo uočimo da je funkcija G elementarna te je derivabilna na čitavom intervalu $\langle 0, x_0\rangle$. Stoga su jedine kritične točke stacionarne. Odredimo ih:

$$G'(x) = RTc^{\ominus}(\ln x + 1 - \ln(x_0 - x) - 1) = RTc^{\ominus}\ln\frac{x}{x_0 - x} = 0$$

je zadovoljeno za

$$\frac{x}{x_0 - x} = 1,$$

tj. za $x = \frac{x_0}{2}$. Imamo dakle samo jednu stacionarnu točku $x^* = x_0/2$. Druga derivacija funkcije G je

$$G''(x) = \frac{RTc^{\ominus}}{x} - \frac{RTc^{\ominus}}{x_0 - x}$$

pa je $G''(x^*) = 0$, tj. druga derivacija nam ne daje informaciju o vrsti ekstrema. S druge strane, znamo da je $\ln y > 0$ za $y > 1$ pa je $G'(x) > 0$ za $\frac{x}{x_0 - x} > 1$. Kako su i x i $x_0 - x$ pozitivni brojevi za x iz domene (ako je x_0 zbroj koncentracija, onda je $x \leq x_0$, a jasno je da je $x \geq 0$), imamo da je $G'(x)$ pozitivno za $x > x_0 - x$ tj. za $x > x_S$. Dakle, G strogo pada lijevo od x^* i strogo raste desno od x^* pa je x^* točka lokalnog i globalnog minimuma za G: Gibbsova energija je minimalna kad su koncentracije oba enantiomera jednake i iznosi $G(x^*) = G^\circ + RTc^\ominus x_0 \ln \frac{x_0}{2}$. Točke maksimuma nemamo jer G nije definirana u 0 i x_0. No, kad bismo (vidi poglavlje o limesima) uzeli u obzir da je za x blizu nule $x \ln x$ približno jednako nuli[6] odnosno za x blizu x_0 je $(x_0 - x)\ln(x_0 - x)$ blizu nule, slijedilo bi da je za x blizu nule i za x blizu x_0 iznos $G(x)$ blizu $G^\circ + RTc^\ominus x_0 \ln x_0$, što je veće od $G(x^*)$, te zaključujemo da se maksimalna Gibbsova energija postiže kad je koncentracija jednog od enantiomera jednaka nuli.

☼ **Ponovimo bitno**... Glavne primjene derivacija u kemiji pojavljuju se u fizikalnoj kemiji, posebice kemijskoj kinetici. Brzina reakcije definira se kao $\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$, gdje su ν i c stehiometrijski koeficijent i koncentracija proizvoljnog sudionika reakcije. Česte primjene derivacija su vezane za određivanje minimuma i maksimuma raznih fizikalno-kemijskih veličina. Pritom je zbog kompliciranosti formula često od testa pomoću druge derivacije jednostavnije za stacionarnu točku provjeriti radi li se o točki ekstrema tako da provjerimo mijenja li se u njoj predznak prve derivacije promatrane funkcije. ☺

3.9 Deriviranje implicitno zadanih funkcija

Već smo se upoznali s jednim načinom opisa krivulja u ravnini: krivulja kao graf realne funkcije jedne varijable. No, očito takav način nije dovoljan jer neke krivulje, primjerice kružnica u Cartesiusovom koordinatnom sustavu, nisu grafovi funkcija jedne varijable. Općenito krivulju u ravnini možemo opisati jednom[7] jednadžbom oblika

$$F(x, y) = 0.$$

Tako je recimo uz $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ gornjom jednadžbom opisana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu. Vidimo da smo ovdje istakli ovisnost izraza F o dvije varijable, x i y, a budući smo rezultat $F(x, y)$ uspoređivali s brojem nula, znači da je $F(x, y)$ broj. Time pomalo zadiremo u jednu temu kojom ćemo se kasnije baviti, a to su funkcije više varijabli. No, za potrebe ovog poglavlja sasvim je dovoljno shvatiti da je gornjom jednadžbom opisana nekakva veza između x i y koja se može zapisati kao formula. U nekim slučajevima, recimo za $F(x, y) = x^2 + y$, moguće je iz te jednadžbe izraziti y i priču svesti na graf realne funkcije jedne varijable, no češće to nije moguće — već u slučaju jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$ imamo dva izbora: y zapisati kao $y = +\sqrt{x^2 - 1}$ ili kao $y = -\sqrt{x^2 - 1}$. Ovdje je zgodno primijetiti još nešto: iako se iz jednadžbe $x^2 + y^2 = 1$ ne može jednoznačno izraziti y (tj. kružnica nije graf neke funkcije),

---

[6]Formalno: $\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$, pri čemu je korišteno L'Hôpitalovo pravilo koje će biti objašnjeno u četvrtom poglavlju.

[7]Jedna, priznajmo: ne bilo kakva, jednadžba u ravnini koja je dimenzije 2 određuje „nešto" dimenzije $2 - 1 = 1$.

dijelovi te krivulje jesu grafovi funkcija: osim gornje dvije mogućnosti (uz domenu $[-1,1]$) imamo beskonačno mnogo drugih; zapravo, svaki luk te kružnice, ukoliko ne sadrži neku od točaka $(-1,0)$ i $(1,0)$, je graf neke funkcije. Preciznije, vrijedi[8]

Teorem 4 (Teorem o implicitnoj funkciji). *Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x,y)=0$. Neka je $G(y)=F(x,y)$ (smatramo x konstantom) te neka je (x_0,y_0) neki par koji zadovoljava jednadžbu $F(x_0,y_0)=0$ (tj. (x_0,y_0) je točka na krivulji). Ako je $G'(y_0)\neq 0$ (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke (x_0,y_0) predstavlja graf neke funkcije $y=f(x)$.*

U situaciji iz prethodnog teorema kažemo da je jednadžbom $F(x,y)=0$ (oko bilo koje točke (x_0,y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) implicitno zadana funkcija $y=f(x)$.

Primjer 68. *Uzmimo ponovno jednadžbu jedinične kružnice, tj. $F(x,y)=x^2+y^2-1$. Tada je $G(y)=y^2+const.$ pa je $G'(y)=2y$. Želimo $G'(y_0)\neq 0$, dakle $y_0\neq 0$. Po teoremu zaključujemo: kad god imamo točku na jediničnoj kružnici kojoj ordinata nije 0, neki luk kružnice oko te točke je graf neke funkcije $y=f(x)$; npr. za točku $(0,1)$ imamo $f(x)=+\sqrt{x^2-1}$.*

Prirodno je pitanje: a čemu ovo? U fizici su putanje materijalnih točaka često dosta općenite krivulje. Želimo li analizirati npr. brzinu točke u raznim trenucima, moramo moći opisati tu putanju, a zatim i derivirati, tj. određivati jednadžbe tangenti na tu krivulju. Konkretno pitanje je: ako je (x_0,y_0) točka na krivulji, kako odrediti koeficijent smjera tangente na krivulju $F(x,y)=0$ u toj točki? Ukoliko je tangenta u toj točki vertikalna ($G'(y_0)=0$ za G iz gornjeg teorema), tangenta je pravac $x=x_0$. Inače možemo uzeti da je u blizini (a samo to nam treba) od (x_0,y_0) $y=f(x)$ funkcija od x pa jednadžbu krivulje deriviramo po x uzevši u obzir lančano pravilo, tj. kad god deriviramo y množimo derivaciju s y'. Takvo deriviranje se često kratko zove implicitno deriviranje.

Primjer 69. *Jednadžba*

$$2x-3y=5$$

predstavlja implicitnu jednadžbu pravca; $2x$ derivirano po x je 2, a $-3y$ derivirano po *x je $-3y'$. Desna strana derivirana po x daje nulu te deriviranje gornje jednadžbe po x daje*

$$2-3y'=0,$$

odnosno $y'=\frac{2}{3}$. Da smo jednadžbu pravca zapisali u eksplicitnom obliku $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$ također bismo dobili $y'=\frac{2}{3}$.

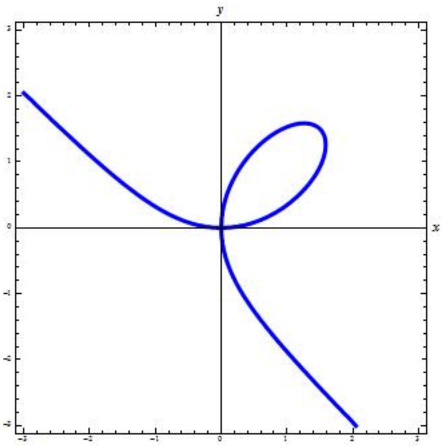
Primjer 70. *Odredimo jednadžbu tangente na kružnicu*

$$x^2+y^2=r^2$$

u točki (x_0,y_0). Implicitno deriviranje daje

$$2x+2y\cdot y'=0$$

[8] Zapravo se ovdje radi o specijalnom slučaju općenitijeg teorema.



Slika 3.16: Cartesiusov list

jer y^2 *derivirano po* x*-u je deriviranje* $y(x)^2$ *po* x*, a to je* $2y(x) \cdot y'(x)$ *prema pravilu za deriviranje kompozicije funkcija. Iz zadnje jednadžbe zaključujemo da je*

$$y' = -\frac{x}{y}$$

za svaku točku na kružnici kojoj ordinata nije nula. Stoga je u (x_0, y_0) *koeficijent smjera tangente jednak* $-\frac{x_0}{y_0}$ *te je jednadžba tangente*

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Pomnožimo li to s y_0 *dobivamo* $y_0 y - y_0^2 = -x_0 x + x_0^2$*, tj.* $x_0 x + y_0 y = x_0^2 + y_0^2$*. Kako je* (x_0, y_0) *točka na kružnici, vrijedi* $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ *te konačno dobivamo traženu jednadžbu tangente*

$$x_0 x + y_0 y = r^2.$$

Primjer 71. *Krivulja je opisana s* $x \sin y + e^x \ln y = xy$*. Deriviranje po* x *daje:*

$$1 \cdot \sin y + x \cdot \cos y \cdot y' + e^x \ln y + e^x \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot y + x \cdot 1 \cdot y',$$

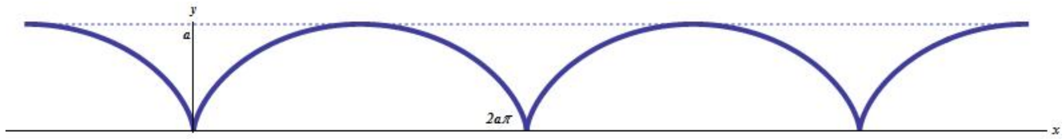
tj.

$$y' = \frac{y - e^x \ln y - \sin y}{x \cos y + \frac{e^x}{y} - x} = \frac{y(y - e^x \ln y - \sin y)}{xy \cos y + e^x - xy}.$$

Uzmemo li recimo $x_0 = 0$ *jednadžba krivulje daje* $\ln y = 0$*, tj. jedina točka krivulje s* $x_0 = 0$ *je* $(x_0, y_0) = (0, 1)$*. Uvrstimo li ju u izraz za* y' *dobivamo da je koeficijent smjera tangente u toj točki*

$$y'(0) = 1 - \sin 1.$$

Zadatak 18. *Odredite jednadžbu tangente na Cartesiusov list u točki* $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$*. Jednadžba Cartesiusovog lista (vidi sliku 3.16) je* $x^3 + y^3 = 3axy$*, gdje je* $a > 0$ *konstanta.*



Slika 3.17: Cikloida

☼ **Ponovimo bitno**... Jednadžbom oblika $F(x,y)=0$ zadaju se krivulje u koordinatnoj ravnini. U okolini točaka te krivulje u kojima tangenta nije vertikalna dio krivulje je uvijek moguće shvatiti kao graf funkcije za koju onda kažemo da je implicitno zadana, a njenu derivaciju određujemo deriviranjem jednadžbe $F(x,y)=0$ koristeći standardna pravila deriviranja. Pritom deriviranje izraza s y prema lančanom pravilu rezultira dodatnim faktorom y', primjerice $(\sin y)' = \cos(y)\cdot y'$. ☺

3.10 Parametarski zadane funkcije

Drugi način kojim možemo opisati krivulje u ravnini[9] je parametarski: za različite vrijednosti nekog parametra t eksplicitno definiramo krivulji pripadne točke $T_t = (x(t), y(t))$. To je jednostavnije zamisliti ovako: za svaki trenutak t iz nekog intervala bilježimo položaj T_t materijalne točke. Drugim riječima, želimo li pratiti položaje materijalne točke koja se kreće po ravnini, prirodno je reći da za svaki trenutak t bilježimo njenu apscisu $x(t)$ i ordinatu $y(t)$, tj. gledamo pridruživanje $t \mapsto (x(t), y(t))$ za t iz nekog intervala.

Primjer 72. *Kakvu krivulju opisuje točka koja je u trenutku t u točki s apscisom $\cos t$ i ordinatom $\sin t$? A ako su te koordinate $r\cos t$ i $r\sin t$? Što ako su one oblika $a\cos t$ i $b\sin t$?*

Primjer 73. *Krivulja cikloida prati poziciju točke na „kotaču" polumjera a koji se kotrlja po pravcu. Njen izgled vidi se na slici 3.17, a opisana je parametarski s*

$$x(t) = a(t-\sin t),$$

$$y(t) = a(1-\cos t).$$

Neka je s $x = x(t)$ i $y = y(t)$ parametarski zadana krivulja, gdje je t iz intervala I. Što tada predstavljaju $x'(t)$ i $y'(t)$? U fizikalnoj interpretaciji krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi $x'(t)$ i $y'(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t. Uređeni par $(x'(t), y'(t))$ predstavlja (vektor) brzine u tom trenutku. Iznos brzine je $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$. Koeficijent smjera tangente u istoj točki (a na toj tangenti leži vektor brzine) je $\frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Primjer 74. *Odredimo iznos brzine u točki cikloide. Imamo $x'(t) = a(1-\cos t)$ i $y'(t) = a\sin t$ te je $\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2} = a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} = a\sqrt{2-2\cos t}$.*

[9]Definicija krivulje u prostoru bit će dana na str. 219.

Zadatak 19. *Provjerite da cikloida zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* $(y')^2 = \frac{2a-y}{y}$.

Dvije važne parametarske jednadžbe poznatih krivulja su

- Kružnica radijusa R sa središtem u (x_0, y_0): $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$;
- Elipsa s poluosima a i b i središtem u ishodištu: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$.

Napomenimo da svaki graf funkcije $y = f(x)$ možemo zapisati u parametarskom obliku ako uzmemo $t = x$: tada su pripadne parametarske jednadžbe $x(t) = t$ i $y(t) = f(t)$.

Primjer 75. *Jednadžbu parabole* $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, *možemo parametarski zapisati kao*

$$x = t,$$

$$y = t^2,$$

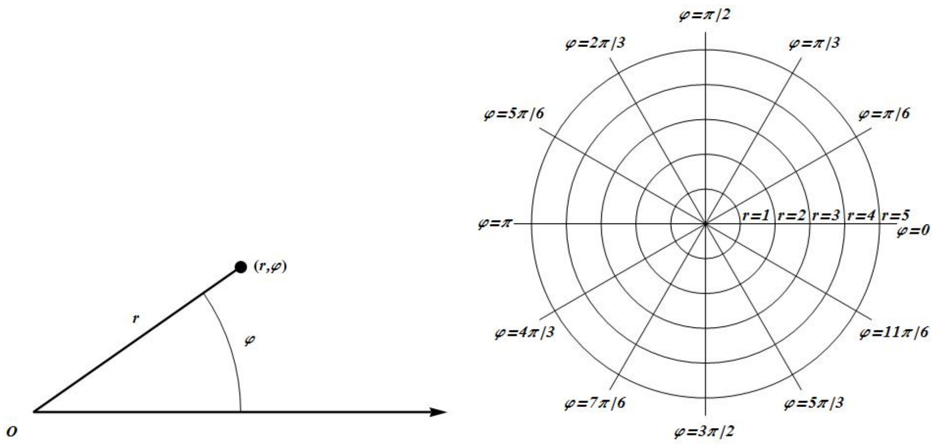
$$t \in \mathbb{R}.$$

☼ **Ponovimo bitno**... Parametarske jednadžbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in I)$ opisuju krivulju u Cartesiusovom koordinatnom sustavu koja se sastoji od točaka $(x(t), y(t))$. Koeficijent smjera tangente u promatranoj točki iznosi $y'(t)/x'(t)$. ☺

3.11 Polarne koordinate u ravnini

Treći važan način opisa krivulja u ravnini je pomoću polarnih koordinata. Tehnički gledano, ovo je vrlo slično shvaćanju krivulje kao grafa realne funkcije jedne varijable, samo umjesto $y = f(x)$ i shvaćanja para (x, y) kao točke u Cartesiusovom koordinatnom sustavu imamo $r = f(\varphi)$ i shvaćanje para (r, ϑ) kao točke u polarnom koordinatnom sustavu. U oba slučaja je f realna funkcija jedne varijable. Ovaj prikaz može se poopćiti na krivulje koje su u polarnom koordinatnom sustavu implicitno zadane jednadžbom oblika $F(r, \varphi) = 0$.

A što je to polarni koordinatni sustav u ravnini? To je sustav u kojem se točke shvaćaju kao uređeni parovi dva broja, od kojih je prvi udaljenost do referentne točke (ishodišta), a drugi broj je kut, mjeren u pozitivnom smjeru (tj. obrnuto od kazaljke na satu) između spojnice točke s ishodištem i polarne osi. Polarna os je polupravac s početkom u ishodišu, koji se obično poistovjećuje s pozitivnim dijelom osi apscisa, vidi sliku 3.18 (a). Slika 3.18 (b) prikazuje mrežu u polarnim koordinatama analognu mreži paralela s koordinatnim osima u Cartesiusovom koordinatnom sustavu. Primjerice, želimo li u polarnom sustavu ucrtati točku s koordinatama $(2, \pi/3)$, nađemo kružnicu polumjera 2 oko ishodišta i na njoj točku koja se nalazi na polupravcu koji ima kut $\pi/3$ prema polarnoj osi. Kako točkama na polarnoj osi (i samo njima) odgovara kut $\varphi = 0$, slijedi da je $\varphi = 0$ jednadžba polarne osi (tj. jednadžba pozitivnog dijela x-osi u polarnim koordinatama).



(a) (b)

Slika 3.18: Polarne koordinate u ravnini.

Kad kažemo da je krivulja opisana u polarnom sustavu s $r = f(\varphi)$, želimo reći da se ta krivulja sastoji od točaka s koordinatama[10] $(\varphi, f(\varphi))$ za φ iz domene funkcije f. Polarne koordinate su osobito zgodne za opis kružnice sa središtem u ishodištu: ona ima jednadžbu oblika

$$r = R,$$

gdje je R polumjer kružnice, jer udaljenost točke na kružnici do njenog središta ne ovisi o polarnom kutu φ[11]. Primjerice, $r = 1$ je jednadžba jedinične kružnice u polarnim koordinatama. Kako se radi o jednadžbi oblika $f = f(\varphi)$, gdje je $f(\varphi) = R$ za sve φ, vidimo da je graf konstantne funkcije u polarnim koordinatama kružnica sa središtem u ishodištu.

Od značajnijih krivulja koje se zgodno opisuju u polarnom koordinatnom sustavu vrijedi spomenuti sljedeće:

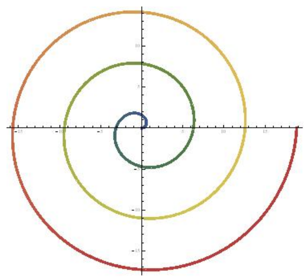
- Arhimedova spirala $r = a\varphi$, vidi sliku 3.19. Ona je trajektorija materijalne točke koja se jednoliko giba po polupravcu (koji počinje u ishodištu, gdje je i početni položaj točke), ako taj polupravac jednoliko rotira oko ishodišta.

- Hiperbolna spirala $r = \frac{a}{\varphi}$, vidi sliku 3.20.

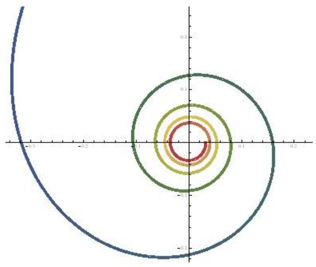
- Bernoullijeva lemniskata $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$. Primijetimo da je $\cos(2\varphi)$ parna funkcija kuta φ. Zbog parnosti je $r(-\varphi) = r(\varphi)$, primjerice za $\varphi = \pi/6$ i $\varphi = -\pi/6$

[10] Zgodno je uočiti da se i ovdje radi o vizualizaciji grafa realne funkcije jedne varijable, samo na nestandardan način: skup svih parova $(X, f(X))$ kad je X element domene funkcije f je njen graf, koji uz interpretaciju X kao apscise i $f(X)$ kao ordinate točke u Kartezijevom koordinatnom sustavu poprima standardni izgled grafa funkcije, dok uz interpretaciju X kao polarnog kuta i $f(X)$ kao udaljenosti od ishodišta poprima nestandardni oblik u polarnom koordinatnom sustavu. Primijetimo da ovaj drugi tip vizualizacije grafa funkcije ima smisla samo za nenegativne funkcije.

[11] U duhu prethodne bilješke: graf konstantne funkcije prikazan standardno u Kartezijevom koordinatnom sustavu je pravac paralelan s osi apscisa, dok prikazan nestandardno u polarnom koordinatnom sustavu poprima izgled kružnice sa središtem u ishodištu.



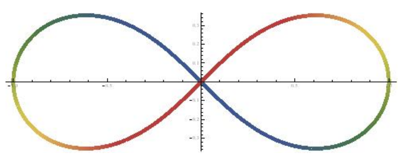
Slika 3.19: Arhimedova spirala.



Slika 3.20: Hiperbolna spirala.

dobit ćemo isti r. Dakle, Bernoullijeva lemniskata je simetrična obzirom na horizontalu. Nadalje, $\cos(2\varphi)$ je periodična funkcija od φ, temeljnog perioda π. Kako kut π opisuje pola kruga, slijedi da se udaljenosti ponavljaju svakih pola kruga te se stoga krivulja nakon pola kruga zatvori i unutar punog kruga imamo dva njena zatvorena dijela. Kako je za smislenost jednadžbe $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ nužno da je $\cos(2\varphi) \geq 0$, zaključujemo da se unutar jednog punog kruga (kojeg možemo opisati primjerice s $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$) točke krivulje dobivaju samo ako je $\cos(2\varphi) \geq 0$, tj. za $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\varphi}{4}$ i za $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\varphi}{4}$. Ucrtavanjem nekoliko točaka lemniskate i koristeći gornje činjenice možemo zaključiti da je izgled Bernoullijeve lemniskate takav kako je prikazano slikom 3.21.

Općenito, ako je f periodična funkcija s temeljnim periodom T, krivulja $r = f(\varphi)$ je zatvorena. Ukoliko je $T = \frac{2\pi}{n}$, gdje je n prirodan broj, krivulja unutar jednog punog kruga ima n dijelova koji se svi mogu dobiti rotacijom jednog takvog dijela za višekratnik od T. Ako je pak f negativna za kuteve φ između neka dva kuta φ_1 i φ_2, onda između zraka kroz ishodište koje odgovaraju tim kutevima nema dijelova krivulje,



Slika 3.21: Bernoullijeva lemniskata.

jer bi inače za takve kuteve udaljenost $r = f(\varphi)$ točke do ishodišta bila negativna. Ako je funkcija f parna, krivulja $r = f(\varphi)$ biti će simetrična obzirom na x-os, tj. na pravac na kojem leži polarna os (jer parnost znači $f(\varphi) = f(-\varphi)$, pa će udaljenosti točaka krivulje do ishodišta biti iste za kuteve $\pm\varphi$).

Zadatak 20. *Pokušajte zaključiti kakve implikacije na izgled krivulje $r = f(\varphi)$ ima neparnost funkcije f. Provjerite to na primjeru krivulje $r = \sin\varphi$.*

Zadatak 21. *Skicirajte grafove sljedećih funkcija zadanih u polarnim koordinatama:*

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\vartheta,\ \vartheta \in [0, 2\pi\rangle,$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{4}(3\cos^2\vartheta - 1),\ \vartheta \in [0, \pi].$$

Skicirajte i grafove funkcija $|r|$ za gornja dva slučaja.

Veza između polarnih i Cartesiusovih koordinata u ravnini dana je formulama:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Ako deriviramo funkciju $r = f(\varphi)$ po φ, to je obično deriviranje funkcije jedne varijable. Primjerice, za $r = a\varphi$ je $r' = a$. No, interpretacija iznosa derivacije ovdje ne odgovara nagibu tangente na promatranu krivulju gledanu u Cartesiusovom koordinatnom sustavu. Želimo li odrediti taj koeficijent u točki (r_0, ϑ_0), dobijemo ga po formuli

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0\mathrm{tg}\,\varphi_0}.$$

Tu formulu dobijemo ovako:

$$k = y'(x_0) = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{r'(\varphi_0)\sin(\varphi_0) + r_0\cos(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)\cos(\varphi_0) - r_0\sin(\varphi_0)} : \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}.$$

Primijetimo da koeficijent smjera ima smisla samo ako se odnosi na pravac (ovdje: tangentu) u Kartezijevom koordinatnom sustavu, te gornja formula podrazumijeva da krivulju $r = f(\varphi)$ gledamo istovremeno u polarnom i Kartezijevom koordinatnom sustavu (sa zajedničkim ishodištem i polarnom osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa).

Zadatak 22. *Odredite jednadžbu tangente (u Cartesiusovim koordinatama) na krivulju*

$$r = \varphi\sin\varphi$$

u točki $(r_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

☼ **Ponovimo bitno. . .** Polarne koordinate u ravnini opisuju točke s dva broja $r \geq 0$ i $\vartheta \in \mathbb{R}$, od kojih prvi predstavlja udaljenost točke do ishodišta, a drugi kut spojnice točke s ishodištem prema polarnoj osi (polupravcu kroz ishodište). Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem u ishodištu u polarnim koordinatama je $r = R$. ☺

3.12 Zadaci za vježbu

1. Odredite $f'(x)$, ako je

   (a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x - 5\sqrt{5}$.

   (b) $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} + 6\sqrt{x} + 3\log 2$.

   (c) $f(x) = 6\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}} - 12\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{11}}{2^{45}}.$

   (d) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{e^4}{4x^4}.$

   (e) $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$.

   (f) $f(x) = x\sin x$.

   (g) $f(x) = \sqrt{x}\ \ln x$.

   (h) $f(x) = 2^x\ \mathrm{arctg}\ x$.

   (i) $f(x) = (x^2-1)\arcsin x$.

   (j) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}.$

   (k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+4}.$

   (l) $f(x) = \dfrac{3}{2(x^2+2x+5)}.$

   (m) $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{2-\ln x}.$

   (n) $f(x) = 3\mathrm{tg}\, x + \dfrac{2x}{\mathrm{ctg}\, x}.$

   (o) $f(x) = \mathrm{ch}\ x\ - x\ \mathrm{sh}\ x.$

   (p) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{\sin x + \cos x}.$

   Rješenje.
   (a) $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$. (b) $f'(x) = \frac{3(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}}$. (c) $f'(x) = \frac{5\sqrt[6]{x}-8}{\sqrt[3]{x}}$.

(d) $f'(x) = \frac{e^4+x-2x^3}{x^5}$. (e) $f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$. (f) $f'(x) = \sin x + x\cos x$.
(g) $f'(x) = \frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$. (h) $f'(x) = 2^x\left(\ln 2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{1+x^2}\right)$.
(i) $f'(x) = 2x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}$. (j) $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.
(k) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)^2}$. (l) $f'(x) = -\frac{3(x+1)}{(x^2+2x+5)^2}$. (m) $f'(x) = -\frac{2}{x(2-\ln x)^2}$.
(n) $f'(x) = \frac{3+2x+\sin 2x}{\cos^2 x}$. (o) $f'(x) = -x \operatorname{ch} x$. (p) $f'(x) = \frac{\sin x\,(\sin x+\cos x)+x}{(\sin x+\cos x)^2}$.

2. Koristeći pravilo za deriviranje kompozicije funkcija odredite $h'(x)$, ako je

(a) $h(x) = (x^3-3)^7$.

(b) $h(x) = (\ln 5 + 3\ln x)^4$.

(c) $h(x) = \dfrac{9}{5(x+2)^5} - \dfrac{3}{(x+2)^4} + \dfrac{2}{(x+2)^3} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

(d) $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2}$.

(e) $h(x) = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

(f) $h(x) = 2\sqrt{(4-\arccos x)^3}$.

(g) $h(x) = e^{-x^2+x}$.

(h) $h(x) = \ln(\cos x)$.

(i) $h(x) = \ln^2 x + \ln(\ln x)$.

(j) $h(x) = \log_2(1 - x\cos x)$.

(k) $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+4})$.

(l) $h(x) = \dfrac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$.

(m) $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

(n) $h(x) = \arcsin(2x-1)$.

(o) $h(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$.

(p) $h(x) = \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - x$.

Rješenje.
(a) $h'(x) = 21x^2(x^3-3)^6$. (b) $h'(x) = \frac{12(\ln 5 + 3\ln x)^3}{x}$.
(c) $h'(x) = \frac{x^3-1}{(x+2)^6}$. (d) $h'(x) = \frac{7x-4}{x^3\sqrt{2x-3}}$. (e) $h'(x) = 1 + \operatorname{tg}^6 x$.
(f) $h'(x) = 3\sqrt{\frac{4-\arccos x}{1-x^2}}$. (g) $h'(x) = (-2x+1)\, e^{-x^2+x}$.
(h) $h'(x) = -\operatorname{tg} x$. (i) $h'(x) = \frac{1}{x}\big(2\ln x + \frac{1}{\ln x}\big)$. (j) $h'(x) = \frac{x\sin x - \cos x}{(1-x\cos x)\ln 2}$.
(k) $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. (l) $h'(x) = \frac{1}{(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2})^2}$. (m) $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
(n) $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$. (o) $h'(x) = \arccos x$. (p) $h'(x) = \frac{e^x+1}{e^{2x}-1}$.

3. Logaritamskim deriviranjem odredite $f'(x)$, ako je

   (a) $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

   (b) $f(x) = \big(\dfrac{x}{x-1}\big)^x$.

   (c) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

   Rješenje.
   (a) $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\sqrt[x]{x}$. (b) $f'(x) = \big(\frac{x}{x-1}\big)^x\big(\ln\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1}\big)$.
   (c) $f'(x) = (\cos x)^{\sin x}(\cos x \ln(\cos x) - \sin x\, \operatorname{tg} x)$.

4. Odredite jednadžbu tangente na krivulju

   (a) $y = \dfrac{x^3}{3}$ u točki s apscisom $x = -1$.

   (b) $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ u točki $T(-1, 0)$.

   Rješenje. (a) $y = x + \frac{2}{3}$. (b) $y = \sqrt[3]{4}\,(x+1)$.

5. U kojoj je točki tangenta na parabolu $y = x^2 + 4x$ paralelna sa osi x?
   Rješenje. $T(-2, -4)$.

6. Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da parabola $y = x^2 + ax + b$ dodiruje pravac $y = x$ u točki s apscisom $x = 2$. Kako glasi jednadžba normale na parabolu u toj točki?
   Rješenje. $a = -3,\ b = 4,\ y = -x + 4$.

7. Izračunajte udaljenost tjemena parabole $y = x^2 - 4x + 5$ od tangente na parabolu u sjecištu parabole sa osi y.
   Rješenje. $d = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

8. Odredite jednadžbu normale na krivulju $y = x^x$ u točki s apscisom $x = 1$.
   Rješenje. $y = -x + 2$.

9. Pokažite da je funkcija $y = x + \sqrt{1-x^2}$ rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y' + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} \ .$$

10. Pokažite da je funkcija $y = \dfrac{x^4}{4} \ln^2 x$ rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y} \ .$$

11. Izračunajte $f''(1)$, ako je
    (a) $f(x) = x \ln^2 x$.

    (b) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

    (c) $f(x) = (x-2)\, e^{2x-2}$.

    (d) $f(x) = x\sqrt{3-x^2} + 3 \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

    Rješenje.
    (a) $f''(1) = 2$. (b) $f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. (c) $f''(1) = 0$. (d) $f''(1) = -\sqrt{2}$.

12. Pokažite da je funkcija $y = \frac{1}{4}e^{-4x} - e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-3x}$ rješenje diferencijalne jednadžbe
$$y''' - 13y' - 12y = 0 \ .$$

13. Odredite $f^{(n)}(x)$, ako je
    (a) $f(x) = \sin x$.

    (b) $f(x) = \dfrac{3+x}{3-x}$.

    (c) $f(x) = \ln(1+x)$.

    Rješenje.
    (a) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. (b) $f^{(n)}(x) = \frac{6\, n!}{(3-x)^{n+1}}$.
    (c) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

14. Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije
    (a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

(d) $f(x) = xe^{2/x^2}$.

(e) $f(x) = x \ln^2 x$.

Rješenje.
(a) f raste za $x \in \langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle 1, 2\rangle$, za $x = 1$ f postiže lokalni maksimum, za $x = 2$ f postiže lokalni minimum.
(b) f raste za $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle -1, 1\rangle$, za $x = -1$ f postiže lokalni maksimum, za $x = 1$ f postiže lokalni minimum.
(c) f raste za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle 0, 2\rangle$, za $x = 0$ f postiže lokalni maksimum, za $x = 2$ f postiže lokalni minimum.
(d) f raste za $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle -2, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$, za $x = -2$ f postiže lokalni maksimum, za $x = 2$ f postiže lokalni minimum.
(e) f raste za $x \in \langle 0, \frac{1}{e^2}\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, f pada za $x \in \langle \frac{1}{e^2}, 1\rangle$, za $x = \frac{1}{e^2}$ f postiže lokalni maksimum, za $x = 1$ f postiže lokalni minimum.

15. Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = a \ln x + bx^2 + x$ ima lokalne ekstreme u točkama s apscisama $x = 1$ i $x = 2$.

    Rješenje. $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$.

16. Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = \frac{\sin^2 x}{a - b\cos x}$ ima lokalni ekstrem u točki $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$.
    Rješenje. $a = 5$, $b = 4$.

17. Odredite globalne ekstreme funkcije

    (a) $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$.

    (b) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5 - x}{9 - x^2}$.

    (c) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x - x$.

    Rješenje.
    (a) za $x = 1$ f postiže globalni maksimum, a za $x = -1$ globalni minimum.
    (b) za $x = 2$ f postiže globalni maksimum, a za $x = 0$ globalni minimum.
    (c) za $x = -\frac{\pi}{2}$ f postiže globalni maksimum, a za $x = \frac{\pi}{2}$ globalni minimum.

18. Dokažite da među pravokutnicima površine P kvadrat ima najmanji opseg.

19. Odredite maksimalnu površinu koju može imati pravokutnik upisan u jednakokračni trokut sa osnovicom duljine a i visinom h.
Rješenje. $P_{\max} = \frac{ah}{4}$.

20. Izračunajte duljine stranica pravokutnika najveće površine upisanog u krug polumjera R.
Rješenje. $x = y = \sqrt{2}\, R$, $P_{\max} = 2R^2$.

21. Odredite maksimalnu površinu pravokutnika s bridovima paralelnim koordinatnim osima koji se može upisati u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
Rješenje. $P_{\max} = 2ab$.

22. Odredite intervale konveksnosti i konkavosti te točke infleksije funkcije

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

(c) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

(d) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.

Rješenje.
(a) f konkavna za $x \in \langle -\infty, -\frac{2}{3}\rangle$, f konveksna za $x \in \langle -\frac{2}{3}, +\infty\rangle$, $x = 1$ točka infleksije.
(b) f konveksna za $x \in \langle -\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle 0, \sqrt{3}\rangle$, f konkavna za $x \in \langle -\sqrt{3}, 0\rangle \cup \langle \sqrt{3}, +\infty\rangle$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ točke infleksije.
(c) f konkavna za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, f konveksna za $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, f nema točaka infleksije.
(d) f konkavna za $x \in \langle -\infty, \frac{1}{e}\rangle \cup \langle e, +\infty\rangle$, f konveksna za $x \in \langle \frac{1}{e}, e\rangle$, $x = \frac{1}{e}$ točka infleksije.

23. Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = -\dfrac{ax}{x^2 + b}$ ima točku infleksije u $x = 2$. Odredite preostale točke infleksije.
Rješenje. $a = -\frac{20}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $x = 0$, $x = \pm 2$ točke infleksije.

24. Odredite parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = \dfrac{x + a}{\sqrt{x^2 + b}}$ ima lokalni ekstrem za $x = -1$ te točku infleksije za $x = -2$.
Rješenje. $a = -2$, $b = 2$.

25. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije

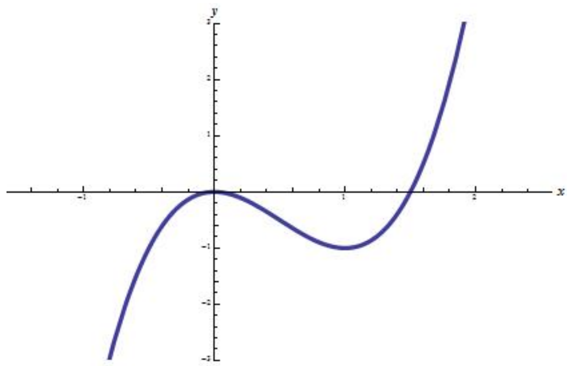
(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

(b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

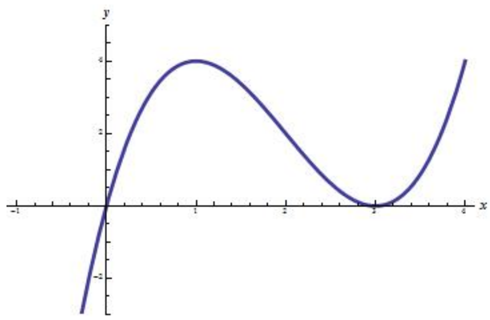
(c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Rješenje.

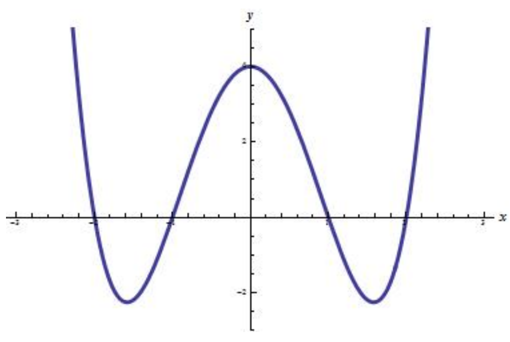
(a)



(b)



(c)



26. Odredite derivaciju $y'(x)$ funkcije $y = y(x)$ zadane implicitno s

(a) $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2y - 2x\sqrt{y^3} + \frac{2}{3}y^3 = 0$.

(b) $y^2 - 2ye^{-x} - 2x\ln y = 0$.

(c) $\dfrac{y}{x} - \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y} = 1.$

(d) $y^x = x^y$.

Rješenje.
(a) $y' = \frac{4xy-2x^2+2y\sqrt{y}}{2y^2-2x^2-3x\sqrt{y}}$. (b) $y' = y\frac{\ln y - ye^{-x}}{y^2-ye^{-x}-x}$. (c) $y' = \frac{y}{x}$. (d) $y' = \frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$.

27. Pokažite da funkcija $y = y(x)$ zadana implicitno sa

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$y'(x-y) = x+y\ .$$

28. Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$x^5 + y^5 = 2xy$$

u točki $T(1,1)$.
Rješenje. $y = -x + 2$.

29. Odredite derivaciju $y'(x)$ funkcije $y = y(x)$ zadane parametarski s

(a) $x = t^2 - t - 2, \quad y = t^3 + 1$.

(b) $x = 4\cos^3 t, \quad y = 4\sin^3 t$.

(c) $x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t)$.

(d) $x = t\ln t, \quad y = \dfrac{\ln t}{t}.$

Rješenje.
(a) $y' = \frac{3t^2}{2t-1}$. (b) $y' = -\operatorname{tg} t$. (c) $y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. (d) $y' = \frac{1-\ln t}{t^2(\ln t+1)}$.

30. Pokažite da funkcija $y = y(x)$ zadana parametarski sa

$$x = 2t + 3t^2, \quad y = t^2 + 2t^3$$

zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$2y'^3 + y'^2 - y = 0\ .$$

31. Odredite jednadžbu normale na krivulju

$$x = \frac{1+t}{t^3}, \quad y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$$

u točki $T(2,2)$.

Rješenje. $y = -x + 2$.

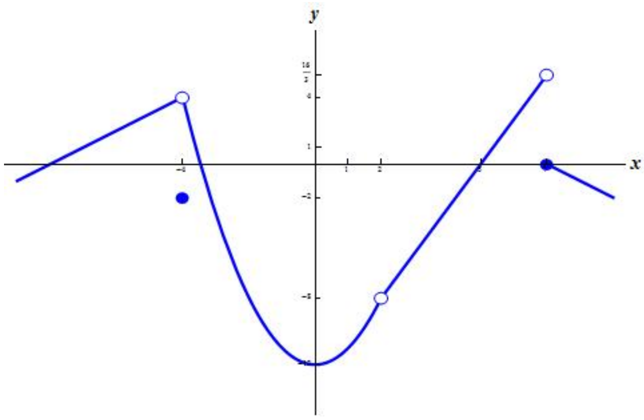
Poglavlje 4

Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija

4.1 Limesi funkcija

Zajedničko svim varijantama limesa funkcije je da se opisuju (procjenjuju) vrijednosti zadane funkcije u okolini neke vrijednosti varijable. Promotrimo sliku 4.1. Za funkciju s te slike, kad su x-evi blizu -4, vidljivo je da su $f(x)$-evi blizu 4 iako je $f(-4) = -2$. S druge strane, kad su x-evi blizu 0, $f(x)$-evi su blizu $-12 = f(0)$. Dakle, vrijednosti $f(x)$ oko neke točke c iz domene funkcije mogu i ne moraju biti bliske vrijednostima $f(c)$. Nadalje, vidljivo je da 2 nije u domeni funkcije jer ta apscisa nema pridružene točke na grafu, ali ipak možemo identificirati ordinatu -8 kao onu za koju vrijedi da kad je x blizu 2 su $f(x)$-evi blizu nje. Dakle, ponekad ima smisla pitati se kakvi su $f(x)$-evi za x-eve blizu nekog c čak i ako c nije u domeni od f.

Opis ponašanja vrijednosti $f(x)$-eva za x-eve blizu c zove se limes funkcije f u točki c. Ukoliko smo kao u gornja tri slučaja u stanju identificirati ordinatu L takvu da su za apscise x blizu c ordinate $f(x)$ blizu L, kažemo da taj limes postoji i pišemo



Slika 4.1: Funkcija koja posjeduje limes u svim $c \in \mathbb{R}$ osim u $c = 7$.

$\lim_{x\to c} f(x) = L$. Za funkciju sa slike 4.1 stoga pišemo: $\lim_{x\to -4} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -12$, $\lim_{x\to 2} f(x) = -8$.

Preciznije, limes funkcije f u točki c je, ako postoji, broj L takav da što je x bliži c (a da pritom nisu jednaki), to je $f(x)$ bliži L. Dakle, oznaka

$$\lim_{x\to\heartsuit} f(x) = \spadesuit$$

znači da što je x bliže $\heartsuit$, to je $f(x)$ bliže $\spadesuit$. Pritom podrazumijevamo da je $x \neq \heartsuit$, dakle ne zanima nas što se dešava za $x = \heartsuit$ (ako je $\heartsuit$ u domeni, to znamo odrediti izračunavanjem $f(\heartsuit)$, a ako nije, onda znamo da $f(\heartsuit)$ ne postoji), nego kako se funkcija ponaša oko $\heartsuit$. Iako se tehnika računanja limesa često svodi na uvrštavanje $\heartsuit$ u f, zapravo sam iznos $f(\heartsuit)$ ne utječe na iznos limesa. Uvjet da pitanje koliki je $\lim_{x\to\heartsuit} f(x)$ ima smisla jest da je funkcija f definirana na nekom intervalu oko $\heartsuit$ (kako bismo se x-evima iz tog intervala mogli približiti k $\heartsuit$ i pritom izračunavati $f(x)$-eve), osim eventualno u samom $\heartsuit$.

Precizna definicija limesa funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ glasi:

Definicija 6 (Limes funkcije u točki)**.** *Neka je f definirana na nekom intervalu I oko c, osim eventualno u c. Kažemo da $f(x)$ teži prema $L \in \mathbb{R}$ kad x teži u c (L je limes funkcije f u točki c) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in I$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo $\lim_{x\to c} f(x) = L$.*

Podsjetimo se da je za dva broja x i y broj $|x - y|$ jednak njihovoj udaljenosti (na brojevnom pravcu). Smisao broja ε u prethodnoj definiciji je opis udaljenosti $|f(x) - L|$ od $f(x)$ do L, za koju želimo da može postati proizvoljno mala; zato u definiciji tražimo da „za svaki $\varepsilon > 0$”, tj. za svaku zamislivu udaljenost od L možemo postići da udaljenost $|f(x) - L|$ bude manja od te udaljenosti ε. Pritom nas blizina $f(x)$ i L zanima samo za x blizu točke c u kojoj tražimo limes. To je opisano srednjim dijelom definicije „postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in I$ i $0 < |x - c| < \delta$”: možemo naći $x \neq c$ blizu c (udaljen za manje od nekog δ od c) tako da je $f(x)$ na udaljenosti od L manjoj od na početku proizvoljno male zadane kao ε. Vrijedi:

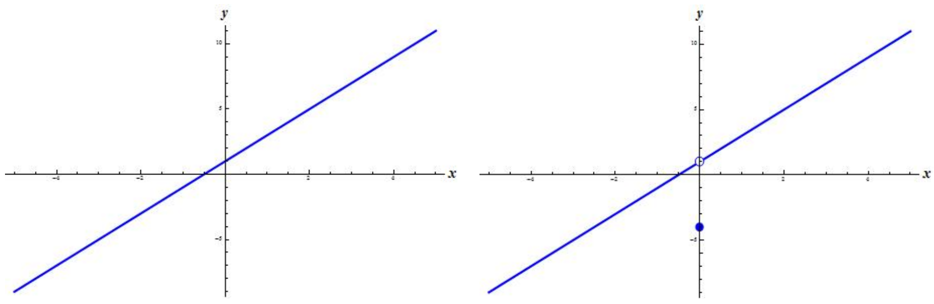
Teorem 5. *Ako postoji broj L takav da je $\lim_{x\to c} f(x) = L$, onda je taj broj jedinstven.*

Iznos limesa $\lim_{x\to c} f(x)$ grafički određujemo tako da nađemo ordinatu L (ako se može takva naći) sa svojstvom da sve točke grafa od f za x blizu c (osim eventualno točke s apscisom c) imaju ordinate blizu L.

Primjer 76. *Pogledajmo sliku 4.2 koja prikazuje grafove funkcija $f(x) = 2x + 1$ i*

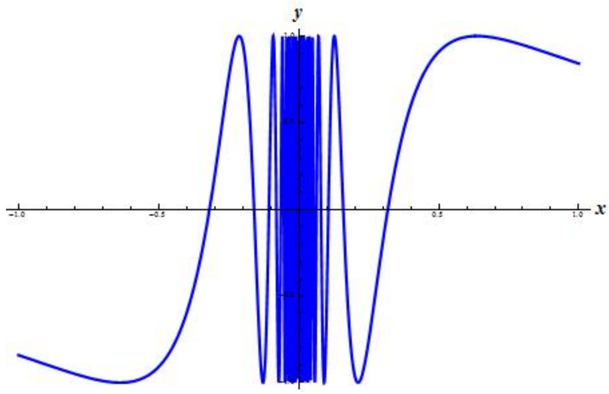
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 0 \\ -4, & x = 0 \end{cases}.$$

Sa slike je vidljivo da obje te funkcije imaju limes 1 u točki 0 iako je $f(0) = 1$, a $g(0) = -4$.



(a) (b)

Slika 4.2: Grafovi dviju funkcija s različitim vrijednostima, ali istim limesom u točki 0.



Slika 4.3: Graf funkcije $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Ovisno o funkciji, može se dogoditi da u nekim točkama domene njen limes ne postoji.

Primjer 77. *Limes* $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ *ne postoji jer ako je* x *blizu nule i recimo pozitivan, onda je* $\frac{1}{x}$ *jako velik, a sinusi velikih brojeva se zbog periodičnosti funkcije sinus ne približavaju nekom određenom broju. Graf funkcije* $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *prikazan je slikom 4.3.*

☼ **Ponovimo bitno...** Limes funkcije f u nekoj točki c (koju gledamo na osi apscisa) je, ako postoji, broj L (kojeg vidimo na osi ordinata) takav da što je x bliži c, to je $f(x)$ bliži L. Pritom je nebitno je li f definirana u c, a ako i jest, moguće je i da je $f(c) = L$ i da $f(c) \neq L$. ☺

4.2 Jednostrani limesi

Promotrimo još jednom sliku 4.1. Za x-eve koji su blizu 7 a koji su malo manji od 7 ordinate točaka grafa su blizu $\frac{16}{3}$, dok su za x-eve blizu 7 a koji su malo veći od 7 ordinate točaka grafa blizu 0. Dakle, limes $\lim_{x\to 7} f(x)$ za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 ne postoji, no kad bismo se ograničili na približavanje x-eva k 7 samo s jedne strane mogli bismo identificirati po jednu ordinatu koja bi bila limes. Takve situacije opisuju se pomoću jednostranih limesa.

Ukoliko promatramo što se dešava s $f(x)$ kad su x-evi sve bliži c, ali isključivo manji (ili isključivo veći) od c, govorimo o jednostranim limesima. Približavanje x-eva broju c slijeva označavamo s

$$x \to c-,$$

a približavanje x-eva broju c zdesna označavamo s

$$x \to c+ .$$

Limes funkcije f u točki c slijeva je (ako takav postoji) broj L takav da što je x bliži c, a da je pritom $x < c$, to je $f(x)$ bliži L. Tada pišemo $\lim_{x\to c-} f(x) = L$. Analogno, limes funkcije f u točki c zdesna je (ako takav postoji) broj L takav da što je x bliži c, a da je pritom $x > c$, to je $f(x)$ bliži L. Tada pišemo $\lim_{x\to c+} f(x) = L$. Formalnije,

Definicija 7 (Jednostrani limesi)**.** *Neka je f definirana na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$. Kažemo da je*

$$\lim_{x\to c-} f(x) = L,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in \langle a, c\rangle$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Neka je f definirana na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$. Kažemo da je

$$\lim_{x\to c+} f(x) = L,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in \langle c, b\rangle$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tako npr. za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 pišemo $\lim_{x\to 7-} f(x) = \dfrac{16}{3}$ i $\lim_{x\to 7+} f(x) = 0$.

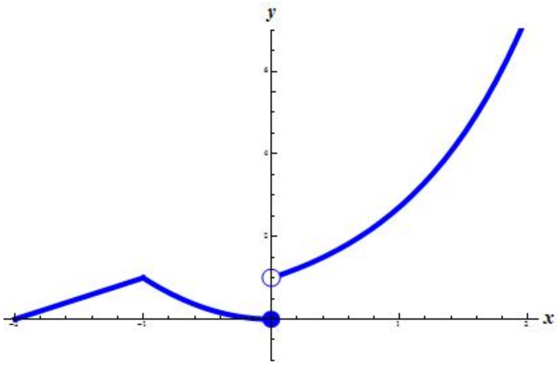
Korisno je znati, a intuitivno je jasno da vrijedi:

Teorem 6. *Limes $\lim_{x\to c} f(x)$ postoji ako i samo ako postoje oba jednostrana limesa $\lim_{x\to c-} f(x)$ i $\lim_{x\to c+} f(x)$ i jednaki su. U tom slučaju vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Primjer 78. *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$



Slika 4.4: Graf funkcije koja u točkama 0 i -1 posjeduje jednostrane limese, koji se u 0 razlikuju, a u -1 podudaraju.

Odredimo jednostrane limese u $c = 0$ i $c = -1$. Imamo:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = (\text{pravilo za } x < 0 \text{ je } x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = (\text{za}\, x \approx 0 \text{ je } x^2 \approx 0) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = (\text{pravilo za } x > 0 \text{ je } e^x) = \lim_{x\to 0} e^x = (\text{za}\, x \approx 0 \text{ je } e^x \approx 1) = 1.$$

Dakle, ne postoji limes $\lim_{x\to 0} f(x)$ jer se jednostrani limesi u nuli razlikuju. S druge strane,

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = (\text{pravilo za } x < -1 \text{ je } x+2) = \lim_{x\to -1}(x+2) = (\text{za}\, x \approx -1 \text{ je } x+2 \approx 1) = 1;$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = (\text{pravilo za } x > -1 \text{ je } x^2) = \lim_{x\to -1} x^2 = (\text{za}\, x \approx -1 \text{ je } x^2 \approx 1) = 1.$$

Dakle, postoji limes $\lim_{x\to -1} f(x)$ i jednak je 1 jer su jednostrani limesi u -1 jednaki. Odgovarajući graf prikazan je na slici 4.4.

☼ **Ponovimo bitno...** U slučajevima da definiciju limesa funkcije u točki c možemo zadovoljiti uz dodatni uvjet da gledamo samo $x < c$ ili samo $x > c$, govorimo o jednostranom — lijevom odnosno desnom — limesu funkcije u točki c. Ponekad oni postoje i različiti su; tada funkcija nema limes u točki c. Ako i lijevi i desni limes postoje i podudaraju se, onda postoji i „obični" obostrani limes i jednak im je (i obrnuto, ako znamo da limes od f u c postoji, onda postoje i oba jednostrana limesa u c i jednaki su mu). ☺

4.3 Vertikalne asimptote i beskonačni limesi

Uz slučaj kad se lijevi i desni limes u točki c razlikuju, postoji još jedna situacija kad ne možemo naći broj L takav da je $\lim_{x\to c} f(x) = L$, tj. kad taj limes ne postoji, a ipak postoji određena pravilnost ponašanja funkcije f blizu c.

Primjer 79. *Za vrijednosti varijable x blizu nule vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ postaju proizvoljno velike — ma koliko velik broj M zamislili, možemo naći $x \approx 0$ takav da je $\frac{1}{x^2} > 0$. Primjerice, za „preskočiti” vrijednost $M = 1000$ možemo uzeti $x = 0{,}01$ i dobit ćemo $f(x) = f(0{,}01) = 10000 > 1000 = M$.*

Za slučajeve poput gornjeg već smo ranije naveli da se radi o pojavi vertikalnih asimptota grafa funkcije. Sad ćemo taj pojam precizirati. Već smo se upoznali s oznakom

$$x \to c$$

koja znači da se x približava broju c. Označimo nadalje

$$x \to -\infty$$

situaciju kad x postaje jako mali (negativan), i to bez preciziranja koliko („proizvoljno mali”) — kažemo i da x postaje proizvoljno malen;

$$x \to +\infty$$

pak znači x postaje jako velik, i to bez preciziranja koliko („proizvoljno velik”) — x postaje proizvoljno velik.

S vertikalnim asimptotama smo se susreli kod racionalnih funkcija te kod logaritamskih funkcija. Tada smo ih opisali kao vertikalne pravce, dakle pravce s jednadžbom oblika

$$x = c,$$

koji imaju svojstvo da se graf funkcije oko vrijednosti varijable $x = c$ uz njih priljubljuje bez da se s njima poklapa (pri čemu funkcija obično nije definirana u c). Smisao vertikalne asimptote je da je za x blizu c vrijednost funkcije postaje jako velika ili jako mala, što označavamo s $f(x) \to +\infty$ odnosno $f(x) \to -\infty$. Ovakve situacije opisuju se tzv. beskonačnim limesima (koji su vrsta nepostojećih limesa).

Kažemo da je limes funkcije f u točki c beskonačan i pišemo

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

ili

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

ako vrijedi: što je x bliži c (a da je pritom $x \neq c$), to $f(x)$ postaje neograničeno veći (slučaj $+\infty$) odnosno neograničeno manji (slučaj $-\infty$).

Matematički precizna definicija beskonačnih limesa je

Definicija 8 (Beskonačni limesi)**.** *Kažemo da je $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi*

$$f(x) > M$$

odnosno

$$f(x) < -M.$$

Ideja gornje definicije je: za proizvoljno zadanu granicu M vrijednosti za funkciju možemo naći interval oko c (širine po δ ulijevo i udesno) takav da uvrštavanje x-eva iz tog intervala u funkciju daje rezultate veće od M odnosno manje od $-M$. Sad možemo precizno definirati vertikalne asimptote:

Definicija 9 (Vertikalne asimptote)**.** *Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota za funkciju $y = f(x)$ ako je bar jedan od jednostranih limesa $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ jednak $+\infty$ ili $-\infty$.*

Ponekad se, kao kod funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, dešava da funkcija ima vertikalnu asimptotu, ali se s jedne strane graf priljubljuje uz nju prema gore, a s druge prema dolje. Stoga je potrebno uvesti pojam jednostranog beskonačnog limesa, tj. limesa kod kojeg se varijabla x nekoj točki c približava samo slijeva ($x \to c-$) ili samo zdesna ($x \to c+$). Za slučaj jednostranih beskonačnih limesa u definiciji se uz uvjet $0 < |x-c| < \delta$ dodaje uvjet $x < c$ odnosno $x > c$:

Definicija 10 (Jednostrani beskonačni limesi)**.** *Kažemo da je $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = +\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ i $x < c$ vrijedi $f(x) > M$.*

Kažemo da je $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = +\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ i $x > c$ vrijedi $f(x) > M$.

Kažemo da je $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = -\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ i $x < c$ vrijedi $f(x) < -M$.

Kažemo da je $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = -\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ i $x > c$ vrijedi $f(x) < -M$.

Kraće: $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = +\infty$ ako što je x bliži c i pritom je $x < c$, to $f(x)$ postaje sve veći. Analogno se mogu opisati ostale tri definicije. Tako je recimo $x = 0$ vertikalna asimptota za $f(x) = \frac{1}{x}$ jer je $\frac{1}{x}$ jako velik kad je x blizu nule i pozitivan, a jako mali kad je x blizu nule i negativan: $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Napomenimo da je moguće, iako nije često, da funkcija posjeduje vertikalnu asimptotu u točki domene; također postoje funkcije koje imaju vertikalnu asimptotu samo s jedne strane, tj. limes s druge strane je konačan. Primjeri takvih „anomalija” prikazani su slikom 4.5.

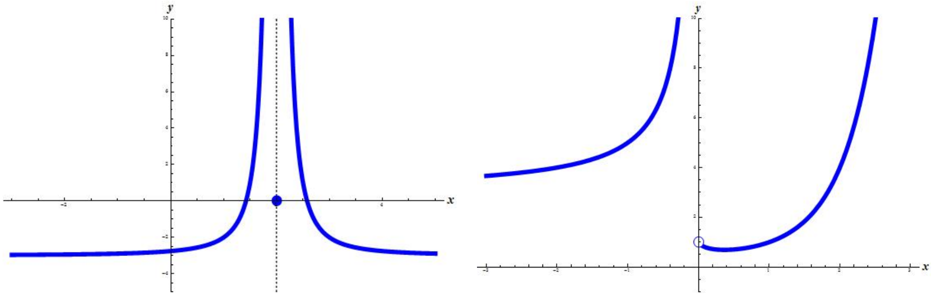
Od beskonačnih limesa, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ paran}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ neparan}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$



(a) (b)

Slika 4.5: Primjer funkcije s vertikalnom asimptotom u točki domene (lijevo) i s točkom c u kojoj je jedan od jednostranih limesa konačan, a drugi beskonačan (desno).

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

Vrijedi: ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{0} = \infty$$

(za $a \neq 0$). Ovo naravno ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom, već oznaka $\frac{a}{0}$ znači da se broj blizu a dijeli brojem koji je blizu 0, ali nije jednak 0. Nadalje, ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

(za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Ukoliko je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limes tipa $\frac{0}{0}$ koji spada u neodređene izraze. To znači da limes $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ovisno o funkcijama f i g može poprimiti različite vrijednosti.

Kod racionalnih funkcija potencijalne vertikalne asimptote odnosno beskonačni limesi funkcije mogu se pojaviti u „rupama u domeni" (nultočkama nazivnika). Već smo rekli da će se vertikalna asimptota $x = c$ kod racionalne funkcije pojaviti točno u onim slučajevima u kojima je nakon skraćivanja svih zajedničkih faktora brojnika i nazivnika broj c nultočka nazivnika, ali ne i brojnika. Skraćivanje[1] faktora $(x - c)$ iz brojnika i nazivnika pod limesom je dozvoljeno jer nas za limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ne zanima što je za $x = c$ te stoga možemo smatrati $x - c \neq 0$. Stoga je skraćivanje zajedničkih faktora brojnika i nazivnika prvi korak u izračunavanju limesa racionalne funkcije u točki c koja je nultočka nazivnika.

[1] Skraćivanje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, dakle možemo skratiti samo one faktore za koje smo sigurni da nisu jednaki nula.

Primjer 80. *Izračunajmo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)}.$$

Zajednički faktor brojnika i nazivnika je x, a on pri izračunavanja limesa u točki 0 nije jednak nuli. Stoga nakon skraćivanja dobivamo

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)}.$$

Brojnik tog izraza za $x \approx 0$ je približno jednak $(0-1)(0+2)^2 = -4$, tj.

$$\lim_{x\to 0}(x-1)(x+2)^2 = -4.$$

Nazivnik $x(x+5)$ postaje sve bliži nuli što je x bliži nuli, tj.

$$\lim_{x\to 0} x(x+5) = 0.$$

Stoga imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \text{limes tipa } \frac{-4}{0} \right\} = \infty$$

i to $+\infty$ slijeva (za $x < 0$, a blizu 0, je $x(x+5)$ negativno, a i brojnik je negativan: -4), a $-\infty$ zdesna (za mali $x > 0$ je $x(x+5)$ pozitivno). Kratko ovaj račun obično pišemo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \frac{-4}{0} \right\} = \pm\infty.$$

Primjer 81. *Limesi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$ i $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ su oba tipa $\frac{0}{0}$. Za prvi imamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

(jer je $x+1$ blizu 1 kad je x blizu 0), a za drugi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

(jer je $\frac{1}{x+1}$ blizu $\frac{1}{2}$ kad je x blizu 1). Vidimo dakle da limesi tipa $\frac{0}{0}$ mogu davati različite konačne rezultate.

☼ **Ponovimo bitno...** Isto je reći da funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ i da je bar jedan od jednostranih limesa od f u točki c beskonačan. Kažemo da je limes od f u c beskonačan ako što je x bliži c (bez da je pritom $x = c$) vrijednosti $f(x)$ postaju proizvoljno velike ili proizvoljno male. ☺

4.4 Horizontalne asimptote i limesi u beskonačnosti

S horizontalnim asimptotama susreli smo se kod racionalnih i kod eksponencijalnih funkcija. Tada smo ih opisali kao horizontalne pravce, dakle pravce s jednadžbom oblika

$$y = L$$

koji imaju svojstvo da se lijevi odnosno desni dio grafa funkcije uz njih sve više priljubljuje što smo dalje lijevo odnosno desno. Pod lijevi/desni dio grafa mislilo se: dio grafa koji se odnosi na jako male/jako velike vrijednosti varijable. Iz interpretacije grafa funkcije slijedi i drugačiji, nešto precizniji opis : pravac $y = L$ je horizontalna asimptota funkcije $y = f(x)$ kad za jako male ili za jako velike x vrijedi $f(x) \approx L$. U ovom poglavlju formalizirat ćemo tu „definiciju".

Ako nas zanima ponašanje funkcije f za jako male ili jako velike vrijednosti varijable x, onda govorimo o limesima u beskonačnosti. Oznaka

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

čita se „limes funkcije f kad x teži u plus beskonačnost je L" i znači: što je x veći, to je $f(x)$ bliži broju L. Slično, oznaka

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se čita „limes funkcije f kad x teži u minus beskonačnost je L" i znači: što je x manji (negativniji), to je $f(x)$ bliži broju L.

Definicija 11 (Horizontalne asimptote)**.** *Pravac $y = L$ je horizontalna asimptota lijevo odnosno desno za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ odnosno $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -L$.*

Matematički precizna definicija limesa u beskonačnosti glasi

Definicija 12 (Limesi u beskonačnosti)**.** *Kažemo da je*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

ako vrijedi: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da kad god je $x > M$ vrijedi

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kažemo da je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

ako vrijedi: za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ takav da kad god je $x < -M$ vrijedi

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

U obje definicije smisao broja ε je da opisuje udaljenost $f(x)$ do L za koju želimo da bude proizvoljno mala, a da pritom možemo s x „otići dovoljno daleko” lijevo odnosno desno (što je regulirano postojanjem broja M). Možemo to izreći i drugačije: za proizvoljno zadanu maksimalnu grešku aproksimacije ε možemo naći vrijednost varijable (M odnosno $-M$) počevši od koje (udesno odnosno ulijevo) aproksimacija vrijednosti $f(x)$ s L daje grešku manju od zadane.

Limesi u beskonačnosti pojavljuju se primjerice u kemijskoj kinetici, u kojoj se ravnotežna koncentracija[2] nekog reaktanta ili produkta B često označava s $[\mathrm{B}]_\infty$ i pod tim se misli na

$$[\mathrm{B}]_\infty = \lim_{t\to+\infty} [\mathrm{B}],$$

tj. koncentraciju [B] nakon što je proteklo jako puno vremena.

Od limesa u beskonačnosti, korisno je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} C = C,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

Nadalje, kod racionalnih funkcija lako je odrediti limese u beskonačnosti. Ideja postupka je da kad je x jako velik (ili jako mali) onda u iznosu polinoma dominira vodeći član (primjerice: ako je $f(x) = x^2 + 3x + 2$ onda za jako velike x imamo $x^2 >> 3x + 2$ te je $f(x) \approx x^2$). Stoga imamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Posljednji limes je 0 ako $n < m$, a za $n = m$ je jednak $\frac{a_n}{b_m}$. Stoga sve racionalne funkcije kojima nazivnik nema manji stupanj od brojnika imaju horizontalne asimptote (i to istu lijevo i desno). Ako je nazivnik većeg stupnja od brojnika ta asimptota je x-os (pravac $y = 0$), a ako su brojnik i nazivnik istog stupnja horizontalna asimptota je $y = \frac{a_n}{b_m}$ (kvocijent vodećih koeficijenata brojnika i nazivnika).

Napomenimo da, kao i limesi u nekoj točki $c \in \mathbb{R}$, limesi u beskonačnosti također ne moraju postojati. Jedan takav slučaj su beskonačni limesi u beskonačnosti. Ako $f(x)$ postaje proizvoljno velik (malen) što je x veći, pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ odnosno $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Analogno, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ znači da što je x manji, to je $f(x)$ veći i postaje proizvoljno velik, a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ znači da što je x manji, to je $f(x)$ manji i postaje proizvoljno malen.

Od beskonačnih limesa u beskonačnosti, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty \qquad \text{za paran } n \in \mathbb{N},$$

[2]Ponekad se trenutna koncentracija označava s c_{B}, a ravnotežna s [B].

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty \quad \text{za neparan } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1),$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1),$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Može se dogoditi i da se limes funkcije u beskonačnosti ne može opisati niti kao beskonačan.

Primjer 82. *Limesi* $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$ *ne postoje: očito nisu beskonačni jer kosinus poprima samo vrijednosti između* -1 *i* 1*, a zbog periodičnosti se ne može identificirati nikoji broj kojem bi se vrijednosti* $\cos x$ *približavale za jako velike ili jako male vrijednosti varijable.*

Treba biti oprezan i oko pitanja smislenosti ispitivanja nekog (ili oba) beskonačna limesa.

Primjer 83. *Nema smisla pitati koliki je i postoji li* $\lim_{x\to-\infty} \log_a x$ *jer nema smisla uvrštavati negativne brojeve u logaritam.*

Primjer 84. *Na slici*[3] *4.6 je graf funkcije koja je u polarnim koordinatama zadana jednadžbom:*

$$r = e^{-1/\vartheta}.$$

Lijepo se vidi da se ta krivulja sve gušće privija uz kružnicu $r = 1$*, tj. da je*

$$\lim_{\vartheta\to+\infty} e^{-1/\theta} = 1.$$

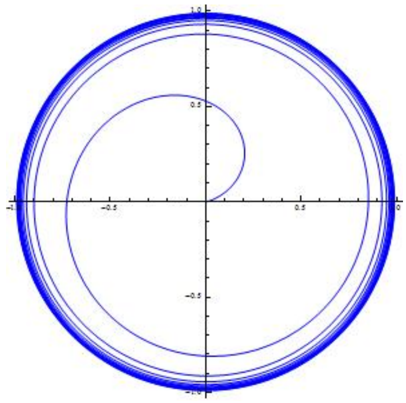
☼ **Ponovimo bitno...** Broj L je limes funkcije f u beskonačnosti ($+\infty$ odnosno $-\infty$) ako što je varijabla x veća odnosno manja, to je $f(x)$ bliži L. Postojanje limesa u beskonačnosti istoznačno je s postojanjem horizontalne asimptote. ☺

4.5 Kose asimptote

Ponekad se za graf funkcije može uočiti pravac koji nije horizontalan, a ima svojstvo da se graf uz njega priljubljuje sve više što su vrijednosti varijable veće ili manje. Tada govorimo o kosoj asimptoti.

Kada će pravac $y = kx + l$ biti kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, recimo desno? Za početak, f mora biti definirana za proizvoljno velike vrijednosti varijable x i ne smije postojati desna horizontalna asimptota (ne smije postojati $\lim_{x\to+\infty} f(x)$). Želimo da bude $f(x) \approx kx + l$ za jako velike x, tj. da bude $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x} \approx k$ i $f(x) - kx \approx l$ za jako velike x. Stoga imamo definiciju:

[3] Za ovaj primjer zahvaljujem asistentu Vladimiru Stilinoviću s PMF — Kemijskog odsjeka u Zagrebu.



Slika 4.6: Krivulja $r = e^{-1/\vartheta}$.

Definicija 13 (Kose asimptote). *Pravac $y = kx+l$ je kosa asimptota desno za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota lijevo za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

Primjer 85. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$. Tada je*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x} = 1,$$

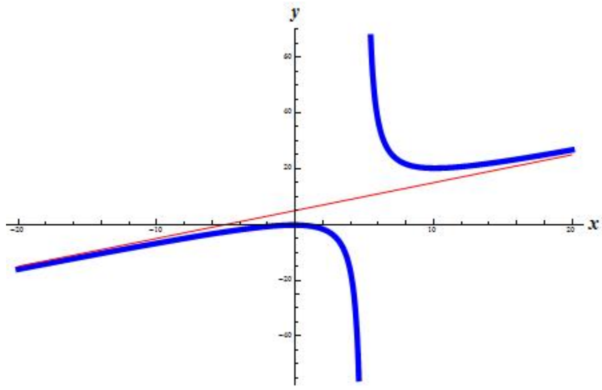
dakle $k = 1$. Sad možemo dalje računati

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 5} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x + 1}{x - 5} = 5,$$

tj. $l = 5$. Stoga je pravac $y = x + 5$ kosa asimptota (i lijevo i desno) za funkciju f, što je ilustrirano slikom 4.7.

Napomenimo da se može desiti da se može izračunati k, ali ne može izračunati l. U tom slučaju naravno nema kose asimptote.

Za kraj priče o ponašanju funkcija u beskonačnostima, zaključimo: horizontalne i kose asimptote, ako postoje, omogućuju aproksimaciju funkcije konstantnom odnosno afinom funkcijom. Na jednoj (lijevoj ili desnoj) strani funkcija može imati najviše jednu asimptotu, dakle ne može imati istovremeno horizontalnu i kosu. S druge strane, lijeva i desna asimptota ne moraju se poklapati te imamo sljedeće moguće kombinacije:



Slika 4.7: Primjer funkcije ($f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$) s kosom asimptotom ($y = x + 5$).

- Funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu za obje strane;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu, ali samo lijevo ili samo desno, a na drugoj strani nema asimptota;
- Funkcija ima dvije asimptote, jednu lijevu i jednu desnu, a svaka je ili horizontalna ili kosa.

Ponovimo još jednom: horizontalne i kose asimptote nema smisla tražiti ako funkcija nije definirana za proizvoljno male vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti lijevu) odnosno za proizvoljno velike vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti desnu). Specijalno, za dva slučaja najčešća u primjenama, ako je domena funkcije segment, ona ne može imati ni horizontalnih ni kosih asimptota, a ako je definirana na $\langle 0, +\infty\rangle$ ili na $[0, +\infty\rangle$, onda može imati samo desnu horizontalnu ili kosu asimptotu.

☼ **Ponovimo bitno...** Pravac $y = kx+l$ je kosa asimptota funkcije f ako što je x veći i/ili manji, to je $f(x)-kx$ bliži broju l. Postojanje kose asimptote lijevo odnosno desno znači da se za jako male odnosno velike vrijednosti x funkcija f može aproksimirati afinom funkcijom $y = kx + l$. ☺

4.6 Svojstva limesâ i neki važni limesi

Intuitivno je jasno da ako su za x blizu broja c (ili pak postaje jako velik odnosno mali, tj. $x \to \pm\infty$) vrijednosti $f(x)$ blizu L_1, a $g(x)$ blizu L_2, da je onda i $f(x) \pm g(x)$ blizu $L_1 \pm L_2$, $f(x)g(x)$ blizu L_1L_2 i $\frac{f(x)}{g(x)}$ blizu $\frac{L_1}{L_2}$ (ovo posljednje naravno samo za $L_2 \neq 0$ jer su iznosi limesa realni brojevi za koje nije dozvoljeno dijeljenje s nulom). Kao i obično u matematici, svojstva na koja nas intuicija navodi da bi morala vrijediti moraju se dokazati. Vjerovali ili ne, gornja svojstva se stvarno mogu dokazati te vrijedi

Teorem 7. *Neka postoje* $\lim_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c} g(x)$, *gdje je* $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ *ili* $c = -\infty$. *U tom slučaju postoje i limesi* $\lim_{x\to c}(f(x) \pm g(x))$ *i* $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))$ *te vrijedi:*

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x),$$

i

$$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

Nadalje, ako je $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, *postoji i* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *i jednak je* $\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

Zapravo, ta smo svojstva već koristili u opisu postupka za računanje limesa racionalnih funkcija, a slijedi još jedan primjer.

Primjer 86. *Treba izračunati* $\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2e^x}{\cos x}$. *Kad je* x *blizu* 0, *kosinus mu je blizu* 1 *te je limes nazivnika* 1. *Kad je* x *blizu nule, onda su* x *i* x^2 *blizu nule, a* e^x *je blizu* 1 *te je brojnik blizu* $0 + 0\cdot 1$ *odnosno limes brojnika je* 0 *(kad* x *teži u nulu). Stoga je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+x^2e^x}{\cos x} = \frac{0+0\cdot 1}{1} = 0.$$

Kako bismo izračunali limes $\lim_{x\to 0} \sqrt{\sin x}$? Nije primjenjivo nijedno od četiri pravila iz gornjeg teorema jer u teoremu nije navedeno pravilo za određivanje limesa kompozicije funkcija. No, opet će se potvrditi ono na što nas intuicija navodi: kad je x blizu 0, onda je $\sin x$ blizu 0 te je $\sqrt{\sin x}$ blizu $\sqrt{0} = 0$, tj. naš limes iznosi nula. Može se dokazati da vrijedi

Teorem 8. *Neka postoje limes* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *i* $\lim_{y\to L} g(y) = L'$. *Tada je*

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(\lim_{x\to c} f(x)) = L'.$$

Pomoću gornja dva teorema mogu se izračunati mnogi limesi, no problemi nastaju ako pravila ne primjenjujemo u skladu s gornjim teoremima, tj. ne pazimo na uvjet o postojanju limesa.

Primjer 87. *Neka je* $f(x) = \sin x$ *i* $g(x) = \frac{1}{\sin x}$. *Za* $x \to \pm\infty$ *ne postoji niti limes* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *niti* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$, *ali postoji* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 1 = 1$.

Dakle, moguće je da postoji limes produkta iako pojedinačni limesi ne postoje (jedan ili oba). Isto vrijedi i za ostala svojstva iz teorema.

Ponekad indirektno možemo zaključiti koliki je limes, primjenom tzv. „teorema o sendviču". On u bîti kaže da ako znamo da je za x-eve iz nekog intervala oko c

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

i ako znamo da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

onda je i

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Primjer 88. *Znamo da je za svaki* x

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Stoga je i za sve $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ *slijedi i da je*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

Analogno bi se vidjelo da je i

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$$

Za izračunavanje raznih limesa osobito korisno je znati sljedeća tri važna limesa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

(posljednji limes je definicija broja e).

Primjer 89. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ *i* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$*:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \{y = \ln(1+x)\} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y - 1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Limes zbroja/razlike/produkta/kvocijenta funkcija jednak je zbroju/ razlici/produktu/kvocijentu limesa tih funkcija (ako oni postoje). ☺

4.7 L'Hôpitalovo pravilo

Čest problem pri izračunavanju limesa su tzv. neodređeni izrazi $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Ti izrazi zovu se neodređeni jer daju različite konačne rezultate ovisno o funkcijama zbog kojih su se pojavili te nije moguće direktno zaključiti koji je konačni rezultat limesa. U neodređene izraze spadaju i $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, 0^∞ i još neki, no većina se uz određene manipulacije mogu svesti na tipove $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Iako se u nekim slučajevima, primjerice kod računanja limesa racionalnih funkcija, dosta lako „ispetljati" iz problema i izračunati takve limese do kraja, ipak se često radi o dosta mukotrpnim računima koji se obično mogu izbjeći korištenjem L'Hôpitalovog pravila[4]

Teorem 9 (L'Hôpitalovo pravilo)**.** *Neka su oba limesa $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ jednaka 0 ili su pak oba beskonačna (pri čemu je $c \in \mathbb{R}$ ili $c = \pm\infty$). Ako postoji limes $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ili ako je jednak $\pm\infty$, te ako je $g'(x) \neq 0$ za x-eve iz nekog intervala oko c, onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer 90. *Limes $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1}$ je tipa $\frac{0}{0}$. Primjena L'Hôpitalova pravila daje:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2.$$

U teoremu treba naglasiti uvjet „ako postoji" jer postoje situacije kad limes $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, ali ipak postoji limes $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Primjer 91. *Pokušaj izračunavanja limesa*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

(koji je tipa $\frac{\infty}{\infty}$) l'Hôpitalovim pravilom daje:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} (1 + \cos x).$$

Posljednji limes ne postoji iako postoji $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ i jednak je 1 (jer za jako velike x dodavanje sinusa - koji je broj između -1 i 1 - nema bitan utjecaj na limes pa vrijedi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = 1$).

[4]Pravilo je nazvano po francuskom matematičaru Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpitalu (1661.-1704.), autoru prvog udžbenika matematičke analize u kojem se nalazi i ovo pravilo. Pravilo otkrio je zapravo otkrio švicarski matematičar Johann Bernoulli (1667.-1748.). Prezime l'Hôpital se često piše i l'Hospital, kako se pisalo u 17. i 18. stoljeću, te se pravilo nalazi i pod nazivom l'Hospitalovo pravilo.

Također, treba paziti na to da se l'Hôpitalovo pravilo smije primjenjivati samo na limese kvocijenata funkcija koji su tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 92. *Imamo* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-5} = -\dfrac{1}{4}$ *jer je* 1 *u prirodnoj domeni funkcije kojoj računamo limes. Da smo išli primijeniti l'Hôpitalovo pravilo bez provjere uvjeta da se radi o limesu tipa* $\frac{0}{0}$ *ili* $\frac{\infty}{\infty}$ *(a ovdje to nije slučaj) dobili bismo krivi rezultat* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{1} = 2$.

Pomoću l'Hôpitalova pravila možemo pokazati da eksponencijalna funkcija s bazom $a>1$ brže raste od svake potencije tj. da vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a>1).$$

Primjer 93. *Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom*

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}.$$

Pritom su R*,* h*,* k *i* ν *konstante. Želimo li opisati molarni toplinski kapacitet pri vrlo niskim temperaturama, treba izračunati* $\lim\limits_{T\to(0\,\mathrm{K})+} C_{V,\mathrm{m}}$ *tj.*

$$\lim_{T\to(0\,\mathrm{K})+}\left(\frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) =$$

$$\frac{5}{2}R + \lim_{T\to(0\,\mathrm{K})+}\left(\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) = \diamondsuit$$

Radi lakšeg računanja označimo $x = \frac{h\nu}{kT}$*. Ako* $T\to(0\,\mathrm{K})+$*, onda* $x\to+\infty$*. Stoga je*

$$\diamondsuit = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} = (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+x^2)e^x}{2e^x(e^x-1)} =$$

$$= \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x^2}{2e^x-2} = (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2+2x}{2e^x} =$$

$$= (\textit{L'Hôpital}) = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2e^x} = \frac{5}{2}R + 0 = \frac{5}{2}R.$$

Dakle, pri vrlo niskim temperaturama molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena iznosi približno $\frac{5}{2}R$*.*

Zadatak 23. *Kakav je molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena za jako visoke temperature?*

Zadatak 24. *Ovisnost koncentracije c produkta* C *reakcije* $\mathrm{A}+\mathrm{B}\longrightarrow\mathrm{C}$ *o vremenu u slučaju reakcije drugog reda (parcijalno prvog obzirom i na* A *i na* B*) dana je formulom*

$$c(t) = ab\frac{1-e^{(b-a)kt}}{a-be^{(b-a)kt}}.$$

Pritom je a početna koncentracija reaktanta A, b je početna koncentracija reaktanta B, a k je koeficijent brzine reakcije (ima pozitivan iznos i jedinicu $\mathrm{L\,mol\,s^{-1}}$*). Odredite ravnotežnu koncentraciju c_∞ produkta* C *, tj. koncentraciju kad „reakcija ode do kraja". Uputa: odvojeno promatrajte slučajeve $a>b$, $a=b$ i $a<b$.*

☼ **Ponovimo bitno...** L'Hôpitalovo pravilo često pomaže kod traženja limesa kvocijenta dviju funkcija, ukoliko je taj limes tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Prema tom pravilu, ako umjesto početnog limesa izračunamo limes kvocijenta derivacija polaznih funkcija, taj limes jednak je početnom limesu. ☺

4.8 Neprekidnost funkcija

Na početku ovog poglavlja, vezano uz sliku 4.1, utvrdili smo da kad je točka u kojoj tražimo limes u domeni funkcije, limes u toj točki može i ne mora biti jednak vrijednosti funkcije u njoj. Tako smo sa slike 4.1 utvrdili da je $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = 4 \neq f(-4) = -2$ te da $\lim\limits_{x\to7} f(x)$ ne postoji, dok je $f(7)=0$. S druge strane, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -12 = f(0)$. Posljednja situacija je češća, a i ljepša — sa slike vidimo da pri crtanju grafa prolaskom kroz točku s apscisom -2 ne moramo podići ruku s papira odnosno da graf „prirodno" prolazi kroz odgovarajuću točku. Takvo svojstvo zove se neprekidnost u točki. Preciznije:

Definicija 14 (Neprekidnost)**.** *Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

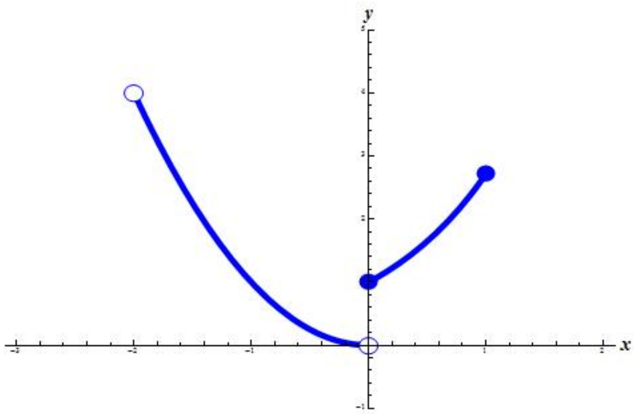
Ako je c u domeni od f i $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$, onda kažemo da f u c ima prekid (c je točka prekida funkcije f).

Funkciju koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene zovemo neprekidnom funkcijom.

Uobičajeno je točke prekida identificirati kao apscise mjesta na kojima smo pri crtanju grafa morali podići ruku s papira. Primijetimo da se pitanje (ne)prekidnosti funkcije odnosi samo na elemente domene. Dakle, funkcija sa slike 4.1 nema prekid u točki 2 jer tamo nije definirana.

Primjer 94. *Funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ nema prekid u 0 iako pri crtanju grafa kod apscise 0 moramo podići olovku s papira. Naime, 0 nije u domeni pa je besmisleno pitanje ima li ili nema f prekid u 0.*

Sve elementarne funkcije su neprekidne u svim točkama svoje domene.



Slika 4.8: Funkcija s jednim prekidom.

Primjer 95. *Neka funkcija f zadana je s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \le x \le 1, \\ x^2 & -2 < x < 0 \end{cases} .$$

Ona je definirana za $x \in \langle -2, 0\rangle \cup [0,1] = \langle -2, 1]$, a graf joj je prikazan slikom 4.8. S grafa je vidljivo da ova funkcija ima prekid u 0, a u ostalim točkama svoje domene je neprekidna.

Provjerimo to računski. Funkcija je na intervalu od 0 do 1 elementarna, a i na intervalu od -2 do 0. Stoga je jedina moguća točka prekida 0. Vrijednost funkcije u 0 je $f(0) = e^0 = 1$. Odredit ćemo lijevi i desni limes u 0:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = 1,$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

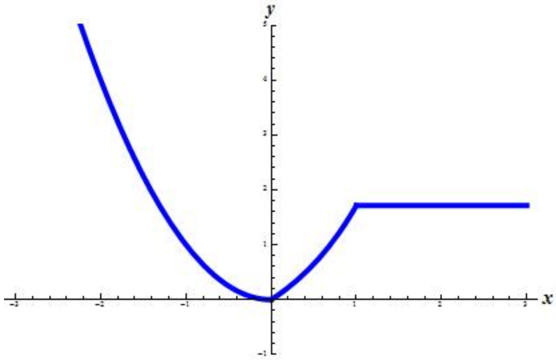
(za $x < 0$ pravilo je $f(x) = e^x$ pa kad računamo limes slijeva gledamo limes od e^x, dok je za $x > 0$ pravilo $f(x) = x^2$ pa za limes zdesna gledamo limes od x^2). Vidimo da se lijevi i desni limes u 0 razlikuju, a 0 je u domeni, pa funkcija ima prekid u 0.

Primjer 96. *Funkcija zadana po dijelovima može biti neprekidna, kao što je to primjerice funkcija apsolutne vrijednosti. Drugi primjer neprekidne funkcije zadane po dijelovima je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0, \\ e^x - 1, & 0 \le x \le 1, \\ e - 1, & x > 1. \end{cases}$$

Njen graf je prikazan slikom 4.9.

Obzirom na definiciju, postoje dva moguća uzroka prekida funkcije f u nekoj točki c iz domene:



Slika 4.9: Neprekidna funkcija zadana po dijelovima.

- Ne postoji limes $\lim_{x\to c} f(x)$ pa ne može biti jednak $f(c)$. Primjer takvog prekida je u točki $c = 7$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom 4.1. Ako pritom postoje jednostrani limesi $\lim_{x\to c+} f(x)$ i $\lim_{x\to c-} f(x)$, onda govorimo o prekidu prve vrste ili skoku, a ako bar jedan od ta dva jednostrana limesa ne postoji (ili je beskonačan), govorimo o prekidu druge vrste ili bitnom prekidu;
- Limes $\lim_{x\to c} f(x)$ postoji, ali je različit od $f(c)$. Primjer takvog prekida imamo u točki $c = -4$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom 4.1. U ovakvom slučaju govorimo o uklonjivom prekidu jer bismo promjenom definicije $f(c)$ iz trenutne vrijednosti u vrijednost $\lim_{x\to c} f(x)$ dobili funkciju neprekidnu u c.

Posljedica svojstava limesâ je da se neprekidne funkcije „pristojno” ponašaju kad ih kombiniramo. Preciznije:

Teorem 10. *Ako su funkcije f i g neprekidne u točki c, onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne u c. Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent f/g također funkcija neprekidna u točki c.*

Ako je funkcija f neprekidna u točki c i funkcija g neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c.

Najvažniji teorem o neprekidnim realnim funkcijama jedne varijable je

Teorem 11 (Bolzano-Weierstrass-ov teorem)**.** *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i nije konstantna funkcija, onda je slika te funkcije segment.*

Smisao tog teorema je da neprekidna funkcija kojoj je domena segment $[a, b]$ postiže svoj globalni minimum i globalni maksimum (rubovi segmenta koji je slika funkcije), da ona postiže sve međuvrijednosti između minimuma i maksimuma te da su jedine moguće točke promjene predznaka funkcije njene nultočke. Taj teorem opravdava ranije opisani postupak za određivanje globalnih ekstrema funkcije zadane na segmentu jer garantira da oni postoje.

Velika većina funkcija koje se pojavljuju u primjenama matematike u kemiji su neprekidne funkcije. Ipak, postoje i neke iznimke. One se najčešće pojavljuju u obliku skokova, tj. prekida prve vrste jer se obično radi o nagloj promjeni vrijednosti neke fizikalne ili kemijske veličine. Najtipičnije točke prekida imamo na granicama faza odnosno pri faznoj tranziciji.

Primjer 97. *Promotrimo ovisnost gustoće ρ neke čiste tvari o temperaturi T (pri konstantnom tlaku). Tada ρ ima dvije točke prekida (skoka), i to pri temperaturama ledišta i vrelišta (T_f i T_b). Skok (pad gustoće) pri T_f (razlika lijevog i desnog limesa od ρ u T_f) je u pravilu manji od onog pri T_b. Unutar pojedine faze se gustoća mijenja neprekidno u ovisnosti o T.*

Primijetimo ovdje da zbog mogućnosti supostojanja dviju faza ovdje nemamo pravu funkciju — temperaturama T_b i T_f pridružene su dvije gustoće koje odgovaraju dvjema supostojećima fazama promatrane tvari pri toj temperaturi.

Gotovo sve funkcije koje susrećemo u primjenama su na većem dijelu domene neprekidne i imaju najviše konačno mnogo prekida. Takve funkcije zovemo po dijelovima neprekidne funkcije.

☼ **Ponovimo bitno**... Funkcija je neprekidna u nekoj točki svoje domene ako je u toj točki svejedno računamo li limes ili ju uvrstimo u funkciju. U suprotnom govorimo o točki prekida. Nema smisla reći da je c točka prekida funkcije f (niti da je u c funkcija f neprekidna) ako c nije u domeni od f. Neprekidne funkcije su one koje su neprekidne u svim točkama domene. U primjenama najčešća vrsta prekida je skok, tj. prekid kod kojeg lijevi i desni limes u točki prekida postoje, ali su različiti. ☺

4.9 Derivacija kao limes

Sad konačno možemo dati preciznu definiciju derivacije funkcije f u točki c:

Definicija 15 (Derivacija). *Ako je c točka domene funkcije f i postoji limes*[5]

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

onda se taj limes zove derivacijom funkcije f u točki c i označava s $f'(c)$ ili $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$.

Funkcija koja je derivabilna u svakoj točki svoje domene zove se derivabilnom (ili diferencijabilnom) funkcijom.

Kad se govori o derivaciji funkcije, bez da naglasimo u kojoj točki, misli se na funkciju f' koja je definirana u svakoj točki c u kojoj je f derivabilna i koja svakoj takvoj točki pridružuje iznos derivacije $f'(c)$.

Sad je lako utvrditi u kojim slučajevima derivacija $f'(c)$ ne postoji. Mogući slučajevi su:

1. U zatvorenim rubovima domene funkcije (npr. u a i b ako je domena segment $[a, b]$) ne možemo tražiti obostrani, nego samo jednostrane limese, pa nema smisla

[5] Uočite da se radi o limesu koeficijenta smjera sekante kroz točke $(c, f(c))$ i $(x, f(x))$ u Cartesiusovom koordinatnom sustavu.

definirati derivaciju u zatvorenim rubovima intervala koji čine domenu. Stoga su, kako smo već ranije rekli, takvi zatvoreni rubovi dijelova domene uvijek kritične točke funkcije.

2. Limes $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ je beskonačan. U Kartezijevom koordinatnom sustavu to znači da je u točki s apscisom c tangenta na graf od f vertikalna. Primjer je derivacija funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x}$ u $c=0$: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{-2/3} = +\infty$.

3. Ako funkcija ima prekid u točki c, onda je $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ pa brojnik u limesu $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nema limes 0, dok nazivnik ima limes nula te je limes beskonačan ili neodređen. Dakle, ako funkcija ima prekid u c, onda ne postoji $f'(c)$.

4. Limes $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ne postoji jer se limes slijeva i limes zdesna ne podudaraju. Geometrijski se radi o „špici" na grafu. Primjer je derivacija funkcije $f(x)=|x|$ u točki $c=0$: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$, što je slijeva jednako $\lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$, a zdesna $\lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$.

Treći od nabrojanih slučajeva povlači da je neprekidnost nužna za postojanje derivacije:

Teorem 12. *Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je i neprekidna u toj točki.*

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji primjer je funkcija apsolutne vrijednosti.

Napomenimo da za većinu funkcija koje susrećemo u primjenama vrijedi ne samo da su derivabilne na svojim domenama, već i da su njihove derivacije neprekidne funkcije. Takve funkcije zovemo glatke funkcije (ili: funkcije klase C^1).

Vježbe radi, izvedimo svojstvo aditivnosti derivacija iz definicije derivacije.

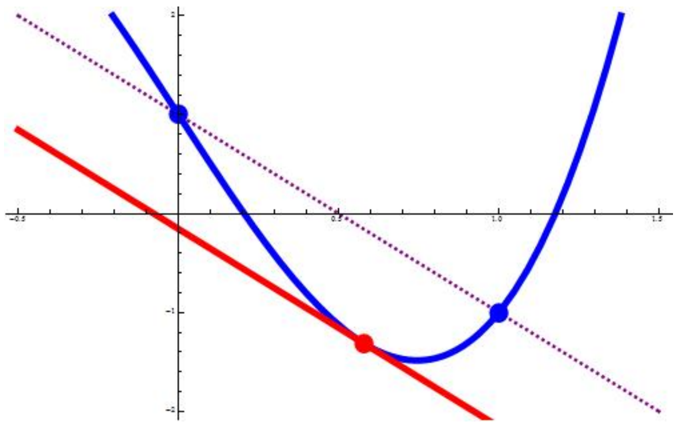
Primjer 98. *Neka su f i g derivabilne u c te neka je $h=f+g$ tj. za sve x je $h(x)=f(x)+g(x)$. Tada imamo:*

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{h(x)-h(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)+g(x)-f(c)-g(c)}{x-c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} + \lim_{x \to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = f'(c)+g'(c)$$

tj. pokazali smo da je $(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$.

Zadatak 25. *Dokažite svojstvo homogenosti, tj. formulu $(Af)'(c) = A \cdot f'(c)$ (A je konstanta, f je funkcija derivabilna u c, a Af je funkcija definirana s $(Af)(x) = A \cdot f(x)$).*



Slika 4.10: Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

Jedan od najvažnijih teorema o derivacijama je

Teorem 13 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)**.** *Ako je funkcija f derivabilna na $\langle a, b\rangle$ i neprekidna na $[a, b]$, onda postoji bar jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Geometrijski gledano teorem kaže da ćemo za derivabilnu funkciju i njenu proizvoljnu sekantu moći naći točku na grafu (između točaka koje određuju sekantu) takvu da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti (vidi sliku 4.10). Alternativno, možemo reći da se kod svih (derivabilnih) promjena neke fizikalne veličine u vremenu postoji trenutak u kojem je trenutna brzina jednaka prosječnoj brzini tokom cijelog promatranog vremenskog intervala.

☼ **Ponovimo bitno**... Derivacija funkcije f u točki c definirana je s

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Svaka derivabilna funkcija je neprekidna, ali obrat ne mora vrijediti. ☺

4.10 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$.

   (b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{3x^2+5x-12}$.

   (c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^4-4x-1}{x^2+x^5}$.

   (e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-2x+1}{x^2-3x+2}$.

   (f) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$.

(g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)^3}{x^3-4x^2+5}$.

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2-5x+13}{x^3+4x}$.

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-4}}{x+1}$.

(j) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-2x}$.

Rješenje.
(a) 0. (b) $\frac{1}{13}$. (c) 3. (d) 6. (e) -3. (f) -1. (g) 1.
(h) 0. (i) 2. (j) $\frac{1}{2}$.

2. Racionalizacijom odredite

(a) $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$.

(b) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x-1}$.

(c) $\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}$.

(d) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$.

(e) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)$.

(f) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{\sqrt[3]{x-8}+2}$.

Rješenje.
(a) $\frac{1}{2}$. (b) $-\frac{3}{4}$. (c) $\frac{1}{3}$. (d) $-\frac{5}{2}$. (e) $\frac{5}{2}$. (f) 3.

3. Uzimajući u obzir da je $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ izračunajte

(a) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 5x}{x}$.

(b) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x}$.

(c) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

(d) $\lim_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Rješenje.
(a) 5. (b) 0. (c) $-\frac{1}{4}$. (d) 1.

4. Uzimajući u obzir da je $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ izračunajte

(a) $\lim_{x\to0} \frac{e^{7x}-1}{x}$.

(b) $\lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$.

(c) $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$.

(d) $\lim_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$.

(e) $\lim_{x\to e} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

Rješenje.
(a) 7. (b) $\frac{3}{2}$. (c) 2. (d) $\frac{1}{e}$. (d) 1.

5. Uzimajući u obzir da je
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
izračunajte
   (a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$.
   (b) $\lim_{x\to0}\left(1+2x\right)^{\frac{1}{x}}$.
   (c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+2}\right)^x$.
   (d) $\lim_{x\to0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x}$.

   Rješenje.
   (a) e^4. (b) e^2. (c) e^{-3}. (d) -1.

6. Dokažite
$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{x-1} = 3 ,$$
koristeći definiciju limesa funkcije.

7. Pomoću L'Hospital-ovog pravila odredite
   (a) $\lim_{x\to2}\frac{x^4-4x^3+2x^2+3x+2}{x^3-3x-2}$.
   (b) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.
   (c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}$.
   (d) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos x)}$.
   (e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-4x^3+2x+4}{e^x}$.
   (f) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.
   (g) $\lim_{x\to0}(x\ln x)$.
   (h) $\lim_{x\to2}(x-2)\left(e^{\frac{1}{x-2}}-1\right)$.
   (i) $\lim_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
   (j) $\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(\sqrt{\sin x})}{\sqrt{2x-x^2}}$.

   Rješenje.
   (a) $-\frac{5}{9}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) 0. (d) 9. (e) 0. (f) $\frac{1}{2}$. (g) 0.
   (h) 1. (i) 2. (j) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Odredite asimptote funkcija

(a) $f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$.

(b) $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

(c) $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x^2+1}$.

(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$.

(e) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(f) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$.

(g) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2-x}$.

Rješenje.
(a) $y = 1$. (b) $x = 1,\ y = 0$. (c) $y = x$. (d) $x = -1,\ x = 2,\ y = x + 1$.
(e) $y = -1\ (x \to -\infty),\ y = 1\ (x \to +\infty)$. (f) $y = x - 1$. (g) $y = 0$.

9. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcija

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.

(c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x}$.

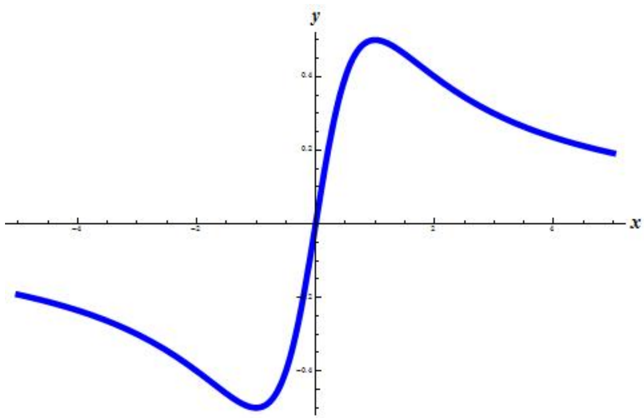
(d) $f(x) = \frac{x^2-2x-1}{x}$.

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

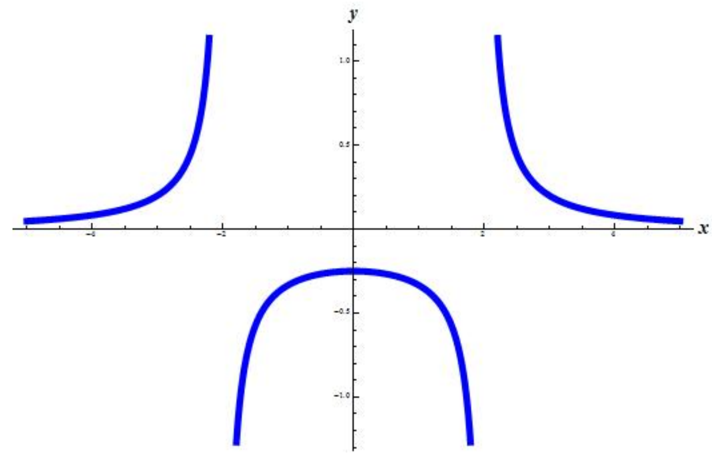
(f) $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{2}}$.

(g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.

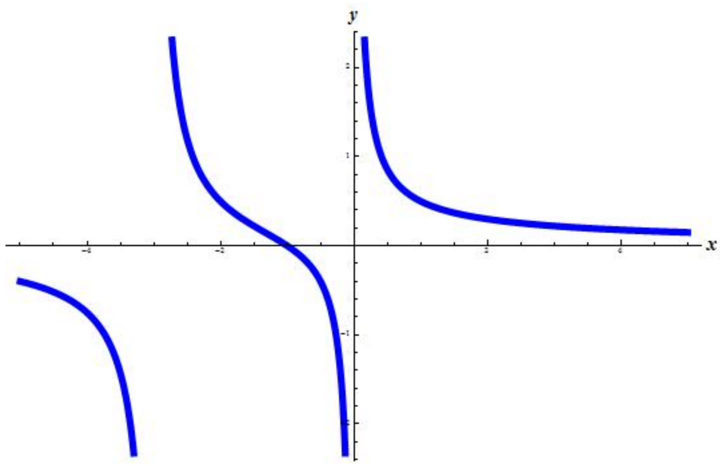
Rješenje.
(a)



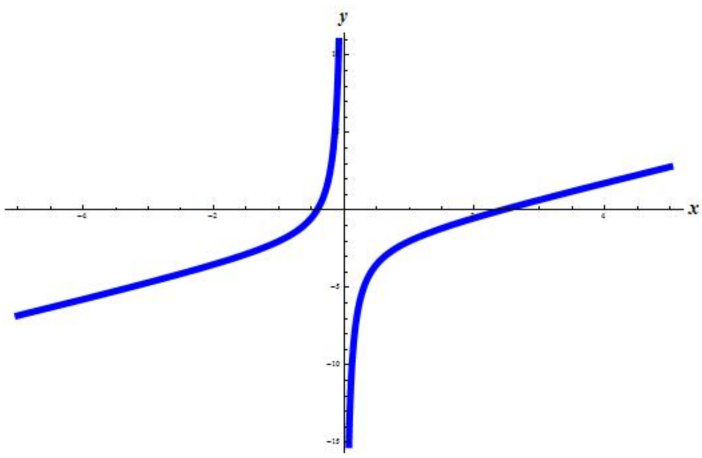
(b)



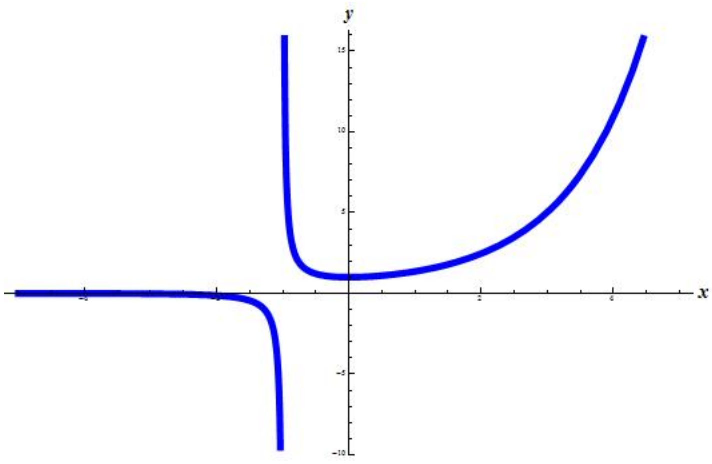
(c)



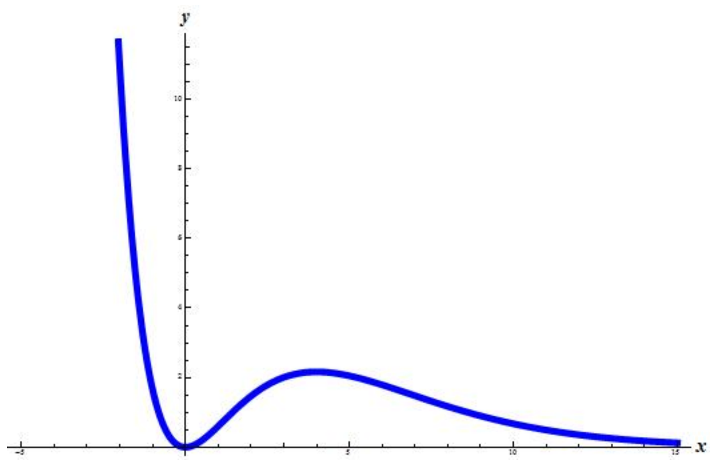
(d)



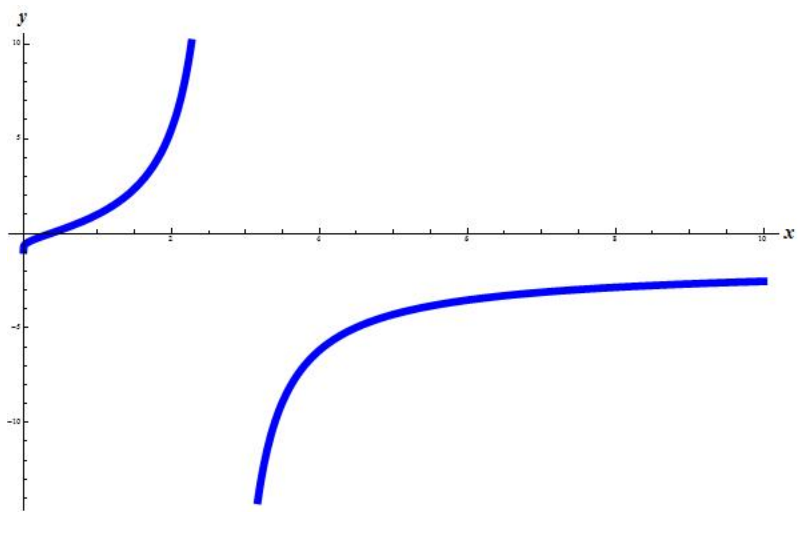
(e)



(f)



(g)



10. Dokažite da je funkcija
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$$
neprekidna na $\mathbb{R}$.

11. Odredite parametar $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , \ x < 0 \\ a & , \ x = 0 \\ 4 + \frac{x^2}{2} & , \ x > 0 \end{cases}$$
bude neprekidna na $\mathbb{R}$.

Rješenje. $a = 4$.

12. Može li se funkcija f dodefinirati u točki c tako da bude neprekidna na $\mathbb{R}$, ako je
    (a) $f(x) = \frac{x^3+5x^2+6x}{x+2}$, $c = -2$.
    (b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $c = 0$.
    (c) $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{1}{1-x}}$, $c = 1$.

Rješenje.
(a) da, $f(-2) = 0$. (b) ne. (c) ne.

13. Odredite točke i vrste prekida funkcije
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \ x < 0 \\ 2 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 2x & , \ 1 \leq x < 3 \\ 4 & , \ x \geq 3 \end{cases} .$$

Rješenje. $x = 0$ prekid druge vrste, $x = 3$ prekid prve vrste.

14. Koristeći definiciju derivacije funkcije odredite $f'(c)$, ako je
    (a) $f(x) = 2x - 3$, $c = 1$.
    (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $c = 4$.
    (c) $f(x) = \ln x$, $c = e$.

Rješenje.
(a) $f'(1) = 2$. (b) $f'(4) = \frac{1}{4}$. (c) $f'(e) = \frac{1}{e}$.

15. Ispitajte derivabilnost funkcije
$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & , \ x < -1 \\ 1 & , \ -1 \leq x < 0 \\ x^2 + 1 & , \ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x-1} & , \ x \geq 1 \end{cases} .$$

Rješenje. f derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

16. Dokažite da funkcija
$$f(x) = |1 - x^2| + 1$$
nije derivabilna u točkama $x = \pm 1$.

17. Koji od uvjeta Lagrange-ovog teorema srednje vrijednosti nije ispunjen za funkciju
$$f(x) = |\ln x| \ ?$$

Poglavlje 5

Integralni račun za realne funkcije jedne varijable

5.1 Neodređeni integral

Često je poznata derivacija funkcije, a nije poznata „početna” funkcija. Primjeri takvih situacija su brojni, a određivanje pozicije u ovisnosti o vremenu ako je poznata ovisnost brzine o vremenu je zasigurno najpoznatiji takav primjer. Stoga je prirodno pitanje: možemo li odrediti funkciju ako joj je poznata derivacija?

Definicija 16 (Antiderivacija (primitivna funkcija)). *Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in I$.*

Primjer 99. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 3x^2$ kao antiderivaciju ima npr. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$. No, uočimo da su primjerice i $F_2(x) = x^3 - 10$ i $F_3(x) = x^3 + \pi$ također antiderivacije od f.*

Teorem 14. *Ako funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je F jedna antiderivacija od f, onda je za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$ funkcija F_C zadana s $F_C(x) = F(x) + C$ također antiderivacija od f.*

Dokaz teorema je jednostavan: ako je F antiderivacija od f, tj. $F' = f$, onda je $(F_C)'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$ za sve $x \in I$ pa je i F_C antiderivacija od f.

Fizikalno interpretirano, postoji beskonačno mnogo funkcija pozicije ako nam je jedini poznati podatak o gibanju iznos brzine u svakom trenutku — to je razlog zašto se u takvim fizikalnim primjenama obično zadaje i početni uvjet koji omogućuje odabir točno jedne od svih antiderivacija.

Primjer 100. *Ako je brzina čestice pri slobodnom padu dana s $v_z(t) = -gt$, onda se lako vidi da je pozicija opisana sa $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C$ za neku konstantu C. Ukoliko znamo da je početna pozicija (u trenutku $t = 0$) bila $z(0) = h$, onda mora biti $z(0) = 0 + C = C = h$ pa je antiderivacija (funkcija pozicije) koja zadovoljava taj početni uvjet jedinstveno određena sa $z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$.*

Prije nego uvedemo pojam neodređenog integrala, upozorimo na jedan detalj iz definicije antiderivacije. U definiciji se zahtijeva da su funkcija i njena antiderivacija zadane na istom otvorenom intervalu. Uvjet otvorenosti je posljedica potrebe za deriviranjem antiderivacije (kako znamo, derivacije nisu definirane u „zatvorenim rubovima" intervala). No, ovdje je bitniji naglasak na *istom* intervalu.

Primjer 101. *Uzmemo li funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, lako bismo pogodili da su njene antiderivacije oblika $F_C(x) = \ln x + C$. No,* ln *je definiran na $I = \langle 0, +\infty\rangle$, a f za prirodnu domenu ima $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$!*

Ovdje se ne radi samo o tome da želimo da po mogućnosti f i F imaju istu domenu (izgleda kao da smo pri antideriviranju „izgubili" pola domene). Da smo f gledali kao funkciju zadanu na I, onda bi F_C stvarno bile njene antiderivacije. Kako je f zadana na uniji dva intervala, ona na svakom od njih ima drugačiju formulu antiderivacije: pogledamo li bolje, na $I' = \langle -\infty, 0\rangle$ jedna antiderivacija od f bila bi zadana formulom $G(x) = \ln(-x)$ jer je $G'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ za $x \in I'$. Dakle, možemo definirati da su antiderivacije od f (na njezinoj prirodnoj domeni) dane s

$$F_C(x) = \begin{cases} C + \ln x, & x > 0 \\ C + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ili drugačije zapisano, antiderivacije su dane s

$$F_C(x) = C + \ln|x|, \quad x \in I' \cup I = \mathbb{R}.$$

U pravilu, osobito u primjenama, situacija je bitno jednostavnija jer se većini funkcija kao domena uzima jedan interval.

Kako smo vidjeli, antiderivacija je svaka funkcija koja derivirana daje zadanu funkciju i (ako ih uopće imamo) imamo beskonačno mnogo antiderivacija — ako je F antiderivacija od f, tada su i sve F_C također antiderivacije. Jesu li to sve ili ima i drugih? Odgovor daje:

Teorem 15. *Ukoliko funkcija f ima antiderivaciju F, onda su sve njene antiderivacije oblika F_C, tj. skup svih antiderivacija od f je skup $\{F_C : C \in \mathbb{R}\}$.*

Jedan smjer („svaka F_C je antiderivacija") smo dokazali gore. Drugi smjer oslanja se na jednu posljedicu Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti koja kaže: ako je derivacija neke funkcije jednaka nuli na nekom intervalu, ta je funkcija na tom intervalu konstantna. Sad imamo idući tok zaključivanja: tvrdimo da f nema drugih antiderivacija osim onih oblika F_C, a pretpostavka teorema uzela je F kao poznatu. Neka je onda G bilo koja druga antiderivacija od f (dakle, znamo $G' = f$ i f, F i G su definirane na istom intervalu I). Tvrdimo da je G oblika F_C za neko C. Pogledajmo funkciju $G - F$. Njena derivacija za $x \in I$ je dana s $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Prema gore spomenutom, zaključujemo da je $F - G$ konstantna funkcija na I, tj. da je $(G - F)(x) = C$ za sve $x \in I$. Dobili smo što smo htjeli: $G(x) = F(x) + C$ za sve $x \in I$, dokaz gotov!

Definicija 17 (Neodređeni integral)**.** *Neodređeni integral funkcije f je skup svih njenih antiderivacija. Oznaka neodređenog integrala funkcije f, ako joj je varijabla označena s x, je*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcija f zove se podintegralna funkcija.

Temeljem gornjeg teorema i definicije, trebali bismo pisati: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{F_C : C \in \mathbb{R}\}$. Iz praktičnih razloga uobičajen je jednostavniji zapis:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Primjer 102. *Pišemo npr.*

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C.$$

Tablicu neodređenih integrala sad možemo shvatiti kao tablicu derivacija sa zamijenjenim stupcima, uz dodavanje konstante integriranja C.

Napomena 6. *U slučaju neodređenog integrala konstantu integriranja je nužno pisati; u suprotnom ne samo da se ne poštuje smisao neodređenog integrala kao skupa svih antiderivacija, nego se mogu dobiti i krivi rezultati. Primjerice, ako je ubrzanje u svakom trenutku dano s $a_z(t) = -g$, onda je brzina opisana kao neodređeni integral $v_z(t) = \int a_z(t)\,\mathrm{d}t = -gt + C$. Ako bismo ovdje izostavili konstantu integriranja dobili bismo $v_z(t) = -gt$, što je točno samo ako je početna brzina nula.*

Evo sad i tablice osnovnih neodređenih integrala:

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
K	$Kx + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Sjetimo li se da je deriviranje imalo svojstvo linearnosti (derivacija zbroja funkcija je zbroj derivacija i derivacija konstante pomnožene s funkcijom je ta konstanta pomnožena s derivacijom te funkcije) te uzeši u obzir da je neodređeni integral definiran preko antiderivacije, lako se vidi da vrijedi

Teorem 16 (Linearnost neodređenog integrala). *Neka su funkcije f i g zadane na istom intervalu te K neka konstanta. Tada vrijedi:*

$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int Kf(x)\,\mathrm{d}x = K\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pod tabličnim integriranjem podrazumijeva se integriranje temeljem osnovne tablice integrala uz eventualno korištenje svojstva linearnosti i transformacija podintegralne funkcije formulama iz elementarnije matematike.

Primjer 103. *Odredimo* $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$. *Znamo da je* $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ *pa imamo*

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

Napomena 7. *Iz prethodnog je vidljivo da su u određenom smislu deriviranje i integriranje međusobno inverzne operacije. Preciznije, vrijedi*

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x),$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Pritom se prvom formulom želi reći: koju god antiderivaciju od f derivirali, dobit ćemo f. Uz oznaku deriviranja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gornje formule poprimaju još lakše pamtljive oblike

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

☼ **Ponovimo bitno**... Antiderivacija funkcije je funkcija koja derivirana daje zadanu funkciju; obje moraju biti definirane na istom intervalu. Ako funkcija posjeduje antiderivaciju F, onda su sve njene antiderivacije oblika F plus konstanta te ih ima beskonačno mnogo. Neodređeni integral funkcije je skup svih njenih antiderivacija. ☺

5.2 Određeni integrali

Promotrimo sljedeći problem:

Primjer 104. *Dana je ravna (zatvorena) cijev, duljine l i površine presjeka A. Cijev je napunjena nekom otopinom poznate množinske koncentracije c. Kolika je množina otopljene tvari koja se nalazi u cijevi? Zadatak je lagan ako otopina u cijevi posvuda ima jednaku koncentraciju: tada je $n = cV = cAl$. No, što ako c varira ovisno o poziciji uzduž cijevi?*

Recimo da je na poziciji $x \in [0, L]$ koncentracija otopljene tvari jednaka $c(x)$. Aproksimativno, mogli bismo napraviti iduće: podijeliti cijev na više dijelova duljine Δx i ako svaki takav dio počinje pozicijom x_i procijeniti koncentraciju na tom dijelu sa $c(x_i)$. Uočimo da je uz te oznake $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ odnosno $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. U tom slučaju kao ukupnu množinu dobili bismo $n \approx A\Delta x \sum_i c(x_i) = A\Delta x \sum_i c(i\Delta x)$, no to je očigledno samo aproksimacija točne množine. Ipak, kad bismo zamislili da imamo sve više poddijelova, tj. da duljine Δx postaju sve bliže nuli, onda je intuitivno jasno da bi aproksimacija koncentracija sa $c(x_i)$ na pojedinom dijelu postajala sve točnija, tj. gornja suma bi se približavala točnoj množini — pisali bismo

$$n = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A\Delta x \sum_i c(i\Delta x) \right).$$

Sličan problem bio bi i sljedeći:

Primjer 105. *Kolika je površina koju s x-osi zatvara graf pozitivne funkcije $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, a koja je omeđena vertikalama $x = 0$ i $x = L$? Ako f nije afina, nema jednostavnog načina za izračunavanje te površine. Aproksimativno, mogli bismo interval $[0, L]$ podijeliti na puno dijelova širine $\triangle x$ i ukupnu površinu aproksimirati zbrojem površina pravokutnika širine Δx i visine $f(x_i)$. Dobili bismo*

$$P \approx \Delta x \sum_i f(x_i).$$

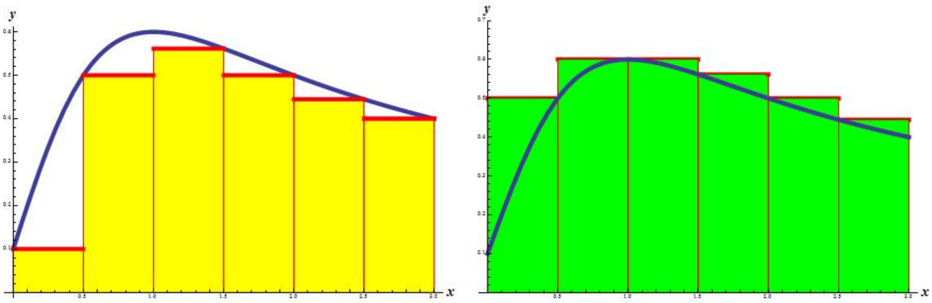
Iako naizgled drugačiji problem od prethodnog, primijetimo da su oni isti ukoliko je $f(x) = Ac(x)$.

Definicija određenog integrala temelji se na ideji iz prethodna dva primjera. Najjednostavniji pristup je preko problema površine, slično kao u prethodnom primjeru. Određeni integral određen je ne samo funkcijom, nego i segmentom na kojem funkciju promatramo.

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neka ograničena[1] funkcija (za drugačije se ne definiraju određeni integrali). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$). U pravoj definiciji određenog integrala razmaci između dva susjedna x_i-a ne trebaju biti jednaki, ali ćemo radi jednostavnosti pristupa uzeti da jesu: $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ za sve indekse i.

Na svakom podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$ umjesto funkcije f gledamo dvije konstantne funkcije: jednoj je iznos jednak najmanjoj vrijednosti m_i funkcije f na tom intervalu, a

[1] Funkcija je ograničena na svojoj domeni ako joj se graf može nacrtati između dva horizontalna pravca $y = m$ i $y = M$, tj. ako možemo naći brojeve $m < M$ takve za sve x iz domene vrijedi $m \leq f(x) \leq M$.



(a) (b)

Slika 5.1: Donja i gornja integralna suma kao aproksimacije površine ispod grafa funkcija.

drugoj je iznos jednak najvećoj vrijednosti M_i funkcije f na tom intervalu. Tako definirane funkcije nam daju stepenaste aproksimacije polaznog grafa, kako je vidljivo na slici 5.1. Vidimo da ćemo u prvom slučaju površinu između grafa i osi apscisa aproksimirati zbrojem površina pravokutnika koji na svakom podintervalu idu do najniže točke grafa na tom podintervalu (slika 5.1 (a)). Zbroj tih površina zovemo donja integralna suma[2] pridružena subdiviziji $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$. Analogno se zbroj površina pravokutnika kojima na svakom podintervalu visina ide do najviše točke grafa zove gornja integralna suma[3] pridružena subdiviziji $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$, vidi sliku 5.1 (b). Formalno zapisano, gornja i donja integralna suma s i S izgledaju ovako:

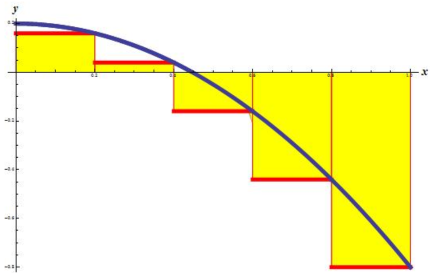
$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x,$$

Primijetimo ovdje da brojevi m_i i M_i (te stoga i iznosi suma) ne moraju biti pozitivni: ako funkcija na nekom (i-tom) podintervalu subdivizije postiže negativne vrijednosti, onda će m_i, a možda i M_i, biti negativan. Stoga samo za funkcije koje su nenegativne na $[a, b]$ sume s i S jesu aproksimacije površine između grafa i osi apscise; općenito, površine pravokutnikâ koji su ispod osi apscise u integralnim će se sumama pojaviti s negativnim predznakom — pogledajte sliku 5.2.

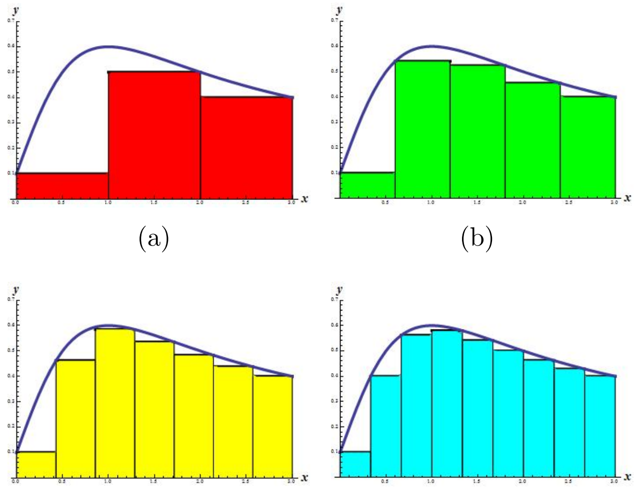
Očigledno će za različite odabire subdivizije slike izgledati donekle različito: svaka subdivizija određuje po jednu gornju i jednu donju sumu. Nadalje, intuitivno je jasno da što je manji Δx (uži pravokutnici) to će gornja i donja suma biti bliže točnoj površini između grafa funkcije i osi apscisa (odnosno tamo gdje je funkcija negativna, bit će bliže točnoj površini s predznakom minus), što se vidi i na slici 5.3.

Definicija 18 (Određeni integral). *Gornji integral* $\overline{I}$ *ograničene funkcije* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limes gornjih integralnih suma kad* $\Delta x \to 0$ *(ako taj limes postoji). Donji integral* $\underline{I}$ *ograničene funkcije* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limes donjih integralnih suma kad* $\Delta x \to 0$ *(ako taj limes postoji). Ako postoje i gornji i donji integral i jednaki su, onda se broj*

[2]Pravilan naziv je donja Darbouxova suma.
[3]Pravilan naziv je gornja Darbouxova suma.



Slika 5.2: Donja integralna suma za funkciju koja nije nenegativna na $[a, b]$ može biti negativna.



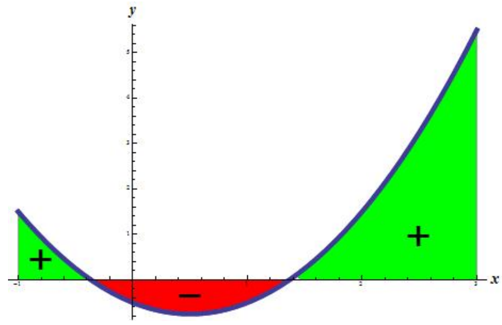
(a) (b) (c) (d)

Slika 5.3: Što je manji Δx to donje (i gornje) integralne sume imaju rubove sličnije zadanom grafu funkcije.

$I = \overline{I} = \underline{I}$ zove određenim (ili Riemannovim) integralom funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i označava s $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; kažemo da je f (Riemann-)integrabilna na segmentu $[a, b]$. Brojevi a i b zovu se granice (donja i gornja) određenog integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Istaknimo najvažnije činjenice o određenim integralima, vidljive iz prethodnog opisa:

- Ako je funkcija f nenegativna na $[a, b]$ i ako joj se na tom segmentu može izračunati određeni integral, onda je to broj koji je jednak površini između krivulje grafa funkcije f, x-osi te vertikalnih pravaca $x = a$ i $x = b$;
- Površine dijelova između grafa i x-osi ispod intervalâ na kojima je funkcija negativna pribrajaju se sa suprotnim predznakom (vidi sliku 5.4: određeni integral odgovara zbroju dvije zelene površine umanjenom za crvenu površinu, dok



Slika 5.4: Razlika između određenog integrala i površine.

je stvarna površina omeđena grafom, osi apscisa i rubnim vertikalama jednaka zbroju sva tri dijela);

- Osnovna ideja definicije određenog integrala je da površinu između grafa funkcije i x-osi aproksimiramo zbrojevima površina što užih pravokutnika, koje zovemo integralnim sumama;
- Određeni integral je broj[4], za razliku od neodređenog integrala koji je skup funkcija.

Vratimo se na uvodni primjer 104.

Primjer 106. *Množina otopljene tvari u cijevi duljine l i površine presjeka A čija koncentracija na udaljenosti x od početka cijevi iznosi $c(x)$ dana je s*

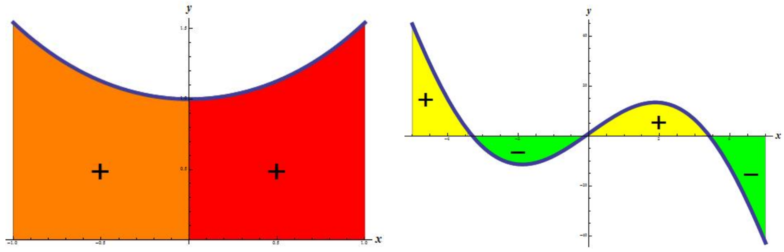
$$n = \int_0^l Ac(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primijetimo da smo u primjeru 104 na svakom podintervalu funkciju aproksimirali iznosom u lijevom rubu, no može se pokazati da ako je $\overline{I} = \underline{I}$ (tj. ako je funkcija integrabilna), onda je i $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \cdot \Delta x\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za bilo koji odabir vrijednosti y_i-ova između m_i i M_i.

Osnovna svojstva određenog integrala koja su vidljiva iz same definicije su:

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju f definiranu u a (jer površina dužine iznosi 0);
- $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za $c \in [a, b]$ (površinu možemo razbiti na dva dijela vertikalom $x = c$);

[4]Ukoliko x i y imaju neku fizikalnu dimenziju, tj. jedinice, onda određeni integral ima jedinicu koja je produkt jedinica od x i y.



(a) (b)

Slika 5.5: Određeni integrali parnih i neparnih funkcija.

- ne sasvim očito, ali također direktno iz definicije[5] slijedi i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (zamjena granica integrala mijenja predznak određenog integrala).

Također, ako je f zadana na simetričnom segmentu $[-c, c]$ i parna je ili neparna, imamo još dva korisna svojstva:

Propozicija 2. *Neka je $f : [-c, c] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[-c, c]$. Ako je f parna, onda je*

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a ako je f neparna, onda je

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Primjer 107. *Imamo $\int_{-5}^{5} xe^{-x^2} = 0$ i $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x = 2\int_0^{\pi} \cos x$.*

Dokaz nije težak (integral se rastavi na integrale od $-c$ do 0 i 0 do c i u lijevom zamijeni x s $-x$ te naravno koriste definicije parne i neparne funkcije), no umjesto preciznog dokaza, dajemo grafički dokaz uz intepretaciju određenog integrala kao površine, vidljiv na slici 5.5.

Primijetimo da je gornje zaključivanje kako su integralne sume sve bliže točnoj površini između grafa i x-osi što nam je Δx bliži nuli sigurno točno ako je funkcija neprekidna. Također, ako funkcija ima samo konačno mnogo točaka prekida između a i b, onda ćemo moći računati površine između po dvije susjedne točke prekida i onda ih zbrojiti te tako izračunati određeni integral. To ujedno pokazuje i da postoje funkcije koje nisu derivabilne, a jesu integrabilne. S druge strane, kako je svaka derivabilna funkcija neprekidna, ona je i integrabilna. Ukratko: iz derivabilnosti slijedi neprekidnost, a iz neprekidnosti integrabilnost.

Propozicija 3. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima najviše konačno mnogo točaka prekida u segmentu $[a, b]$, onda je ona integrabilna na $[a, b]$, tj. može se izračunati*

[5] Radi se o sljedećem: u definiciji smo od a do b išli tako da je svaki sljedeći x_i bio veći, tj. uz pozitivan Δx. Ako pak trebamo ići od b do a moramo ići ulijevo, tj. dodavati *negativan* Δx.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *Ako su sve točke prekida* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *(nabrojane po veličini, tj.* $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$*), onda je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_m}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkcije s beskonačno mnogo prekida ne moraju se moći integrirati[6].

☼ **Ponovimo bitno...** Određeni integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se za slučaj nenegativne funkcije f može definirati kao površina omeđena vertikalama $x = a$ i $x = b$, s x-osi i grafom funkcije f. Ukoliko funkcija f postiže i negativne vrijednosti na $[a,b]$, dijelovi površine ispod x-osi se u $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pribrajaju s negativnim predznakom. Sve funkcije koje su neprekidne ili imaju konačno mnogo prekida u $[a,b]$ su integrabilne na $[a,b]$. Integral $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ je za neparne, na $[-c,c]$ integrabilne, funkcije f jednak nuli. Integral kojem se gornja i donja granica poklapaju je također jednak nuli. ☺

5.3 Veza između određenog i neodređenog integrala: Newton-Leibnizova formula

Dosad definirane vrste integrala naizgled i nemaju puno toga zajedničkog — zašto se onda u oba slučaja govori o integralima? Uz to, očigledno bi bilo jako teško, možda i nemoguće, izračunavati određene integrale temeljem njihove definicije. Što učiniti?

Odgovor na oba gore postavljena pitanja za neprekidne funkcije daje tzv. osnovni teorem infinitezimalnog računa, poznat i kao Newton-Leibnizova[7] formula.

Teorem 17 (Osnovni teorem infinitezimalnog računa)**.** *Neka je realna funkcija* f *neprekidna na segmentu* $[a,b]$*. Tada je formulom*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

definirana funkcija F *i ona je antiderivacija za* f *na* $\langle a,b\rangle$*. Nadalje, za svaku antiderivaciju* F *od* f *vrijedi Newton-Leibnizova formula*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ovaj teorem zove se osnovnim teoremom infinitezimalnog računa jer iskazuje međusobnu inverznost deriviranja i integriranja. Uz to, on povezuje određene s neodređenim integralima te omogućuje računanje određenih integrala preko neodređenih (važnije u primjenama!) i obrnuto:

---

[6] Najjednostavniji primjer ograničene funkcije koja nije integrabilna je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = 1$ za racionalne x, a $f(x) = 0$ za iracionalne x. Ta funkcija je poznata kao Dirichletova funkcija.

[7] Formula je dobila ime po sir Isaacu Newtonu (1642.-1728.) i Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu (1646.-1716.) koji su neovisno jedan o drugom krajem 17. stoljeća otkrili međusobnu inverznost deriviranja i integriranja, tj. upravo tu formulu.

Korolar 1. *Za realnu funkciju f neprekidnu na $[a,b]$ i njenu antiderivaciju F vrijedi:*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b],$$

$$f(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da i određeni integral, kao i neodređeni, ima svojstvo linearnosti:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K f(x)\,\mathrm{d}x = K \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer 108. *Izračunajmo $\int_1^2 \frac{5\,\mathrm{d}x}{x}$:*

$$\int_1^2 \frac{5\,\mathrm{d}x}{x} = 5\int_1^2 x^{-1}\,\mathrm{d}x = (5\ln|x|)|_1^2 = 5\ln 2 - 5\ln 1 = \ln 25.$$

Primijetimo da Newton-Leibnizova formula vrijedi samo za neprekidne funkcije, no može se (temeljem propozicije 3) primijeniti i za funkcije s konačno mnogo točaka prekida $c_1, c_2, \ldots, c_m \in [a,b]$. Uz oznake $c_0 = a$ i $c_{m+1} = b$ dobivamo formulu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_i F_i(x)\Big|_{c_i}^{c_{i+1}},$$

gdje su F_i antiderivacije od f na pojedinim podintervalima.

Primjer 109. *Neka je zadana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x+2, & x \leq -1 \end{cases}.$$

Izračunajmo $\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Moguće točke prekida[8] *su $c_1 = -1$ i $c_2 = 0$. Prema svojstvima određenih integrala znamo da je*

$$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Stoga je

$$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x =$$

[8] U poglavlju o limesima vidjeli smo da je samo 0 točka prekida ove funkcije, no ovdje to nije potrebno ispitivati, nego možemo za svaki slučaj „razbiti” integral u obje potencijalne točke prekida, štoviše: moramo to učiniti jer su formule različite za $x \leq c_1$, $c_1 < x \leq c_2$ i za $x > c_2$.

$$\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{-1}+\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+(e^x)\big|_0^2=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-2-2+4\right)+\left(0+\frac{1}{3}\right)+(e^2-1)=e^2-\frac{1}{6}.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Newton-Leibnizova formula $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ povezuje određeni i neodređeni integral; pritom je F neka antiderivacija od f. Ona se najčešće koristi za izračunavanje određenog integrala pomoću neodređenog (tj. pomoću antiderivacije). ☺

5.4 Metoda parcijalne integracije

Ni u jednoj tablici osnovnih integrala ne može se naći integral logaritamske funkcije. Razlog je u tome što u tablici derivacija nema nijedne funkcije koja derivirana daje logaritamsku funkciju (ne znamo napamet nijednu funkciju f takvu da je $f'(x) = \log_a x$). S druge strane, nije nezamislivo da bi nam moglo biti korisno znati izračunati primjerice $\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

U ovom, a i mnogim drugim slučajevima, pomaže metoda parcijalne integracije, koja se izvodi iz formule za derivaciju produkta funkcija. Jedan od oblika te formule je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v+u\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Stoga je

$$u\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v.$$

Integriranje zadnje jednakosti po x daje

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv-\int v\,\mathrm{d}u.$$

Drugi, ekvivalentni, oblike te formule je

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

To je formula parcijalne integracije. Njena glavna primjena na rješavanje integrala pojavljuje se kad pod integralom prepoznajemo jednu funkciju ($u=u(x)$) i derivaciju neke druge ($\mathrm{d}v = v'(x)\,\mathrm{d}x$) takve da je tu drugu lako integrirati (lako je naći $v(x)$), a da pritom nakon deriviranja funkcije u dobijemo lakši integral $\int v\,\mathrm{d}u$. Najčešći slučajevi primjene ovog pravila su sljedeći:

- Funkcija u ima relativno jednostavnu derivaciju, a $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$;
- Funkcija u je potencija od x (u pravilu $u(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$), a $\mathrm{d}v$ je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s $\mathrm{d}x$;

- Funkcija u je neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$.

Dati ćemo primjere za sva tri navedena tipična slučaja.

Primjer 110.

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = \left\{u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v(x) = x\right\} =$$

$$= x\ln x - \int x\frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

Primjer 111.

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = \{u(x) = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x\} =$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x = \{u(x) = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x\} =$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Primjer 112.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1}\right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

U kontekstu određenih integrala, formula parcijalne integracije glasi

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u.$$

Primjer 113. *Izračunajmo* $\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$*:*

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \{u = \sin x,\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x\} = -\sin x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-0+0) + \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Označimo li $I = \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$*, dobili smo jednadžbu*

$$I = \pi - I$$

te je

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = I = \frac{\pi}{2}.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Analog formule za deriviranje produkta funkcija u kontekstu integrala je formula parcijalne integracije $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ koja opisuje kako integrirati produkt dvije funkcije od kojih je bar jedna prepoznatljiva kao derivacija neke druge funkcije. ☺

5.5 Metoda supstitucije

Promotrimo sljedeći integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}.$$

On podsjeća na integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, no ako bismo pretpostavili da je $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \ln|ax+b| + C$, lako bismo se deriviranjem uvjerili da to nije točan rezultat. Prirodna ideja bila bi zamijeniti „problematični" nazivnik $ax+b$ novom varijablom y, no time integral poprima oblik $\int \frac{\mathrm{d}x}{y}$, što nije smisleno jer smo dobili dvije varijable (y i varijablu po kojoj integriramo, tj. x) za koje znamo da nisu nezavisne (y nije konstanta obzirom na x). Stoga se pri takvoj supstituciji $y = ax+b$ treba zamijeniti i $\mathrm{d}x$. Kako? Ideja je jednostavna: $y' = a$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a$$

te je $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y$. Stoga je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \{y = ax+b,\ \mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x\} = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{a}\ln|y| + C = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C.$$

Takva supstitucija zove se linearna[9] supstitucija: izraz oblika $ax+b$ zamjenjujemo novom varijablom y, s time da onda zamjenjujemo i diferencijal $\mathrm{d}x$. Ukoliko je podintegralna funkcija općenitija kompozicija[10] afine funkcije $g(x) = ax+b$ s nekom funkcijom f, istom supstitucijom dobivamo opću formulu linearne supstitucije:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zadatak 26. *Izračunajte integral* $\int \sin(5-3x)\,\mathrm{d}x$.

Gornji slučaj je specijalni slučaj općenitije metode integriranja poznate pod imenom metoda supstitucije.

Vidjeli smo da je metoda parcijalne integracije ekvivalent formule za derivaciju produkta u kontekstu integrala. Analog lančanog pravila za derivaciju kompozicije funkcija kod računanja integrala je metoda supstitucije. Kao što znamo, jedan zapis lančanog pravila za deriviranje je oblika

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Neka je $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = f(y)$, tj. F je antiderivacija od f, pri čemu je $y = y(x)$. Tada gornju formulu možemo zapisati u obliku $\mathrm{d}F = f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$ odnosno (jer $\mathrm{d}F = f(y)\,\mathrm{d}y$) $\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$. Time smo izveli[11] formulu metode supstitucije za neodređene integrale:

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

[9] Prikladniji naziv bio bi afina supstitucija.
[10] Primijetimo da je $h(x) = \frac{1}{ax+b}$ kompozicija $h = f\circ g$, gdje je $g(x) = ax+b$ i $f(x) = \frac{1}{x}$.
[11] Izvod nije sasvim precizan, već se zapravo radi o ideji izvoda formule.

Uobičajena primjena ove formule je u situacijama kad pod integralom uočimo neku funkciju i njenu derivaciju (do na multiplikativnu konstantu). Pritom redovno koristimo činjenicu

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer 114. *Izračunajmo* $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. *Kako (do na konstantu* -2*)* x *možemo shvatiti kao derivaciju od* $-x^2$*, pokušaj supstitucije najsmisleniji je s* $y = -x^2$*. U tom slučaju je* $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$*, tj.* $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$*, te je*

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}e^y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}e^y + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

U rjeđim situacijama formulu metode supstitucije zgodno je čitati „udesno”.

Primjer 115. *Promotrimo integral* $\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$*. Kod njega nema vidljive kombinacije funkcije i njene derivacije. Pokušajmo vidjeti što bi nam dao jedini mogući pokušaj supstitucije u ovom integralu:* $y = \sqrt{x}$*, tj.* $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$*. Prema posljednjem imamo* $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}y$*. Dobili bismo*

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int 2y\sin y\,\mathrm{d}y.$$

Posljednji integral je rješiv metodom parcijalne integracije — riješite ga do kraja!

Zadatak 27. *Izračunajte* $\int \sin^{10} x\cos x\,\mathrm{d}x$*.*

Za određene integrale formula za supstituciju glasi:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pritom je bitno da je i derivacija od g neprekidna na segmentu $[a, b]$.

Primjer 116. *Integral* $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}$ *jednak je*

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x} = \{y = 3-2x,\ \mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x,\ y(2) = -1, y(3) = -4\} =$$

$$= \int_{-1}^{-4} -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1}{2}\ln|y|\Big|_{-1}^{-4} = -\frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 1) = -\ln 4^{1/2} = -\ln 2.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Metoda supstitucije za integrale opisana je formulom

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ona u mnogim slučajevima omogućuje da se u slučaju kad se u podintegralnoj funkciji pojavljuje izraz ovisan o x i njegova derivacija supstitucijom tog izraza novom varijablom y integral pojednostavi. ☺

5.6 Integriranje racionalnih funkcija

Svaku racionalnu funkciju moguće je integrirati, pri čemu prvo podintegralnu funkciju pogodno preoblikujemo. Ukoliko je brojnik racionalne funkcije stupnja većeg ili jednakog stupnju nazivnika, prvi korak je dijeljenje brojnika s nazivnikom kako bismo izdvojili polinomijalni dio.

Primjer 117. *Uzmimo* $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. *Prvo dijelimo*

$$x^3 : (x^2-1) = x$$

i ostatak je x *te je*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1},$$

dakle

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Stoga je pravo pitanje kako integrirati racionalne funkcije kojima je brojnik manjeg stupnja nego nazivnik. Metoda preoblikovanja takve racionalne funkcije u oblik koji se lako integrira zove se rastav na parcijalne razlomke. Radi se o zapisu racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k}$$

ili oblika

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

za koje treba odrediti A (i B). Za slučaj da su sve nultočke nazivnika $q(x)$ realne dovoljni su razlomci prvog oblika, pri čemu su nazivnici $ax+b$ faktori na koje možemo rastaviti $q(x)$.

Najjednostavniji slučaj imamo kad $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj (u daljnjem ćemo stupanj od q označiti s n). U tom slučaju možemo dobiti rastav oblika

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i},$$

gdje su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$. Oni se određuju tako da cijelu jednakost pomnožimo s $q(x)$, čime dobijemo jednakost polinoma, a zatim redom uvrstimo nultočke[12] pojedinih faktora. Postupak je najlakše opisati primjerom te ćemo nastaviti s primjerom 117.

[12] Zapravo, potrebno je uvrstiti onoliko različitih vrijednosti x koliko imamo nepoznanica, tj. njih n, no najjednostavnije jednadžbe dobivamo uvrštavanjem nultočki od $q(x)$.

Primjer 118. *Potrebno je $\frac{x}{x^2-1}$ rastaviti na parcijalne razlomke. Faktorizirani oblik nazivnika je $(x-1)(x+1)$ te pišemo*

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Potrebno je odrediti A i B. Pomnožimo li zadnju jednakost s x^2-1 dobivamo jednakost

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

U nju uvrstimo $x=1$ i $x=-1$ (nultočke od x^2-1) i dobivamo

$$1 = 2A,$$

$$-1 = -2B.$$

Stoga je $A = B = \frac{1}{2}$ i

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

te je

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x-1| + \ln|x+1|) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Početni integral iz primjera 117 stoga je jednak

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Nešto teži slučaj imamo ako $q(x)$ ima višestrukih nultočki, tj. ako se u $q(x)$ neki faktor $a_i x + b_i$ pojavljuje s potencijom k većom od 1. U tom slučaju tom faktoru ne odgovara jedan, nego k parcijalnih razlomaka po principu

$$\frac{p(x)}{(ax+b)^k} = \frac{B_1}{ax+b} + \frac{B_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}} + \frac{B_k}{(ax+b)^k}.$$

Riječima rečeno: pojedinom faktoru nazivnika odgovara onoliko parcijalnih razlomaka koliki je eksponent tog faktora, pri čemu su svi brojnici tih razlomaka nepoznate konstante, a nazivnici su redom potencije tog faktora od prve do one s kojom se on pojavljuje u nazivniku.

Primjer 119. *Riješimo integral*

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Prvi faktor nazivnika je $(2x+3)$ i on je potencije 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{A}{2x+3}$. Drugi faktor $(x-3)$ je potencije 2 pa njemu odgovaraju

2 parcijalna razlomka s nazivnicima $(x-3)$ i $(x-3)^2$. Dakle, pretpostavljamo rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke.

$$\frac{x}{(2x+3)(x-3)^2} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Množenje s $(2x+3)(x-3)^2$ daje

$$x = A(x-3)^2 + B(2x+3) + C(x-3)(2x+3).$$

Uvrstimo $x=3$ i $x=-3/2$ (nultočke nazivnika polazne funkcije) i dobijemo

$$3 = 9B,$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{81}{4}A$$

tj. $A = -\frac{2}{27}$ i $B = \frac{1}{3}$. Da bismo odredili C uvrstimo još bilo koji x, recimo $x=0$:

$$0 = 9A + 3B - 9C$$

iz čega dobivamo $C = \frac{1}{27}$. Imamo dakle

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2/27}{2x+3} + \frac{1/3}{(x-3)^2} + \frac{1/27}{x-3} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{27}\ln|2x+3| - \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{27}\ln|x-3| + C = \frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-3}{2x+3}\right| - \frac{1}{3(x-3)} + C.$$

Primijetimo: kad god $q(x)$ ima n realnih nultočki (gdje mu je n stupanj), $\frac{p(x)}{q(x)}$ se rastavlja na točno n parcijalnih razlomaka. Time se integriranje svodi na integriranje funkcija oblika $(ax+b)^{-n}\,\mathrm{d}x$ koje je lako integrirati linearnom supstitucijom.

U slučaju da $q(x)$ nema samo realne nultočke u rastavu se po sličnom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici afine funkcije, a nazivnici potencije promatranog faktora.

Primjer 120. *Rastavimo $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$ na parcijalne razlomke. Faktor (x^2+1) nema realnih nultočaka i pojavljuje se s potencijom 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{Ax+B}{x^2+1}$. Faktoru $(x-1)$ kao ranije odgovara parcijalni razlomak oblika $\frac{C}{x-1}$. Dakle:*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Množenje s $(x^2+1)(x-1)$ daje

$$1 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Imamo 3 neodređena koeficijenta A, B, C, a samo jednu realnu nultočku nazivnika (to je 1) pa ćemo osim 1 u zadnju jednakost morati uvrstiti još dva broja, primjerice 0 i 2. Ako redom uvrstimo $x = 0, 1, 2$ u zadnju jednadžbu dobijemo sustav

$$2C = 1,$$

$$-B+C=1,$$
$$2A+B+5C=1.$$

Rješenje tog sustava je $A=-\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$ *tj.*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{-x-1}{x^2+1}+\frac{1}{x-1}\right).$$

Zadatak 28. *Koristeći rastav na parcijalne razlomke određen u gornjem primjeru izračunajte* $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

☼ **Ponovimo bitno...** Integrali racionalnih funkcija računaju se pomoću rastava na parcijalne razlomke, u kojem svakom faktoru nazivnika koji je oblika $(x-c)^k$ odgovara k parcijalnih razlomaka oblika konstanta A_i kroz $(x-c)^i$, za potencije i od 1 do k. U slučaju da nazivnik ima kvadratne faktore bez realnih nultočki, na njih se primjenjuje analogan postupak, s tim da su pripadni brojnici afine funkcije. ☺

5.7 Nepravi integrali

Promotrimo integral
$$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1}.$$
Na prvi pogled radi se o običnom, određenom integralu za koji bi formalni račun dao $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1}=\ln|x-1|\big|_0^3=\ln 2-\ln 1=\ln 2$. To rješenje je krivo! Zašto? Ako je to određeni integral, onda on odgovara razlici površina između dijela kojeg pozitivni dio grafa zatvara s x-osi i onog kojeg zatvara negativni dio, naravno unutar granica od $x=0$ do $x=3$. Skica tih površina daje sliku 5.6. Pogled na tu sliku otkriva gdje leži problem: podintegralna funkcija $f(x)=\frac{1}{x-1}$ nije ograničena na intervalu na kojem integriramo, a preduvjet definicije određenog integrala je ograničenost funkcije na intervalu integriranja.

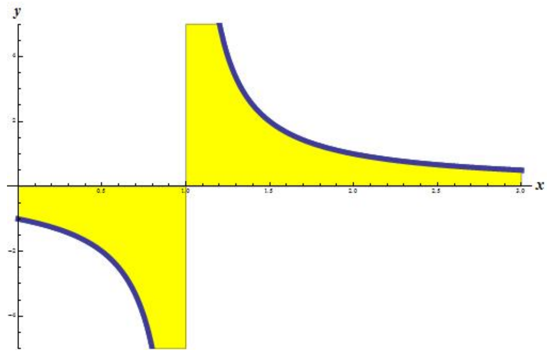
Promatranje slike 5.6 upućuje na to da bi smislen odgovor na pitanje iznosa $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ možda bio $+\infty$ ili $-\infty$, no neograničenost površina ne mora značiti da su proizvoljno velike, isto kao što i rastuća funkcija može „rasti u $+\infty$" ili biti odozgo ograničena nekom vrijednosti (npr. pozicijom eventualne horizontalne asimptote). Stoga nije *a priori* jasno ima li formula $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ ikakvog smisla i, ako da, što bi ona trebala predstavljati.

Ovakva pitanja tiču se tzv. nepravih integrala. To su integrali koji sliče na određene integrale jer su im definirane granice integriranja, ali je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je pak interval integriranja neograničen. U neprave integrale spadaju integrali poput

$$\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{x-1},\ \int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x,\ \int_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x$$

i integrali tipa

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2},\ \int_{-\infty}^{5}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$



Slika 5.6: Neograničena funkcija na ograničenom intervalu.

Prva tri od navedenih integrala kao zajedničku crtu imaju da je podintegralna funkcija neograničena (ima vertikalnu asimptotu) unutar ili na rubu područja integriranja, dok druga tri kao područje integriranja imaju neograničen interval realnih brojeva.

Prvo ćemo se zabaviti s drugim od dva navedena tipa jer je češći u primjenama, osobito onima vezanim za pitanja vjerojatnosti.

Definicija 19 (Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja)**.** *Integrali oblika* $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *definirani su putem limesa:*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty}\int_{a}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

s tim da je odabir c u zadnjem slučaju proizvoljan. Ukoliko navedeni limesi postoje, kažemo da pojedini od nepravih integrala konvergira, a u suprotnom da divergira.

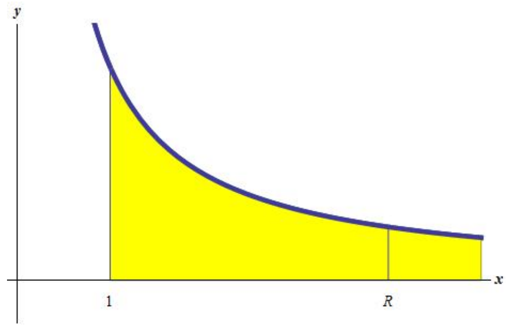
Ideja gornje definicije je da integrale s neograničenim područjem integriranja svedemo na određene integrale čiju jednu granicu ne fiksiramo, nego ju nakon izračunavanja određenog integrala pustimo da teži u beskonačnost.

Primjerice, želimo li izračunati $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$, možemo zamisliti da računamo površinu između grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, x-osi i granica $x = 0$ i $x = R$, s tim da granicu R pomičemo sve više udesno (vidi sliku 5.7):

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{R\to+\infty}\int_1^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{R\to+\infty}\ln x|_1^R = \lim_{R\to+\infty}\ln R = +\infty,$$

dakle integral $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergira. Za ostale neprave integrale tipa

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n}$$



Slika 5.7: Nepravi integral $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

vrijedi: ti integrali konvergiraju za $n > 1$ i divergiraju za $n < 1$. To je posljedica činjenice da je $\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{R^{-n+1}-1}{-n+1}$, što kad $R \to +\infty$ u slučaju da je $n > 1$ daje limes $\frac{1}{n-1}$, a za $n < 1$ daje limes $+\infty$.

Zadatak 29. *Izračunajte* $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Za slučaj integrala tipa $\int_{-\infty}^{+\infty}$, po definiciji treba ih „razbiti" u nekoj točki c, a najčešće se bira $c = 0$. Ukoliko je funkcija f parna (ili neparna) i nepravi integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, možemo primijeniti pravila za takve funkcije iz određenih integrala, tj. za parnu funkciju je tada $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, a za neparnu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Primjer 121. *Odredimo* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Po definiciji on je jednak* $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Podintegralna funkcija je parna. Odredimo* $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Imamo:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \operatorname{arctg}(R) = \frac{\pi}{2}.$$

Stoga je

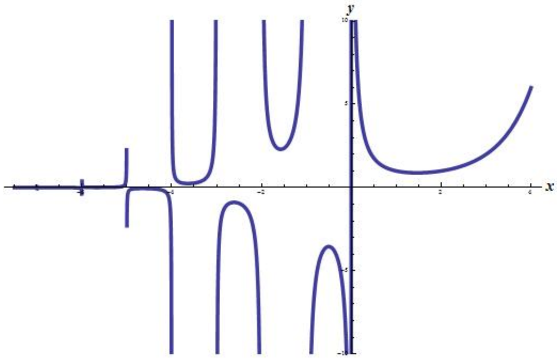
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Putem nepravih integrala s neograničenim područjem integriranja definiraju se mnoge tzv. specijalne funkcije, među kojima je najpoznatija gama-funkcija Γ. Njen smisao je poopćenje faktorijela[13] na realne brojeve[14]. Za prirodne brojeve n vrijedi

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

dakle primjerice $\Gamma(4) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$. Općenito se definira

[13] Za prirodan broj n, n faktorijela je broj $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$. Po definiciji je $0! = 1$.
[14] Gama-funkcija omogućuje poopćenje faktorijela i na kompleksne brojeve



Slika 5.8: Graf gama-funkcije.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Gama-funkcija kao prirodnu domenu ima skup realnih brojeva bez skupa negativnih cijelih brojeva. Njen graf možete vidjeti na slici 5.8.

Neki nepravi integrali se ne mogu izračunati preko definicije jer nije odrediva formula antiderivacije. Za neke od njih su drugim matematičkim metodama izračunate vrijednosti. Među tima se na studiju kemije najčešće pojavljuju

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

i

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

(uočite: posljednji navedeni integral je specijalni slučaj definicije gama-funkcije).

Drugi tip nepravih integrala su integrali tipa $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, gdje je f neograničena unutar segmenta $[a, b]$.

Definicija 20 (Nepravi integrali neograničenih funkcija)**.** *Integrali oblika* $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *gdje je* $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ *definirani su putem limesa:*

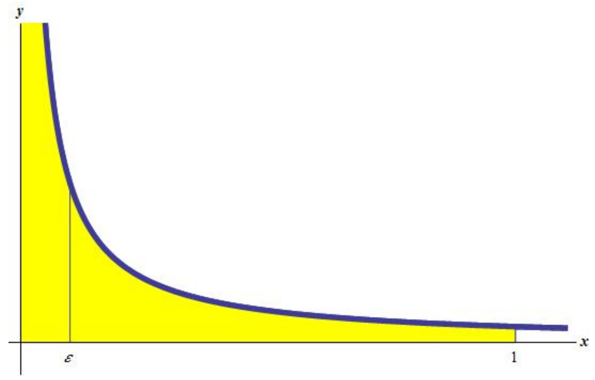
$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integrali oblika $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *gdje je* $\lim_{x \to b-} f(x) = \pm\infty$ *definirani su putem limesa:*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Integrali oblika $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ *gdje je* $\lim_{x \to c\pm} f(x) = \pm\infty$ *za neki* $c \in \langle a, b \rangle$ *definirani su s*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$



Slika 5.9: Nepravi integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Ukoliko navedeni limesi postoje, kažemo da pojedini od nepravih integrala konvergira, a u suprotnom da divergira.

Ideja gornje definicije je da se pri pokušaju računanja površine malo odmaknemo od točke u kojoj imamo vertikalnu asimptotu i pomalo smanjujemo odmak ε (usp. sliku 5.9). Tako imamo

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Za ostale neprave integrale tipa

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$$

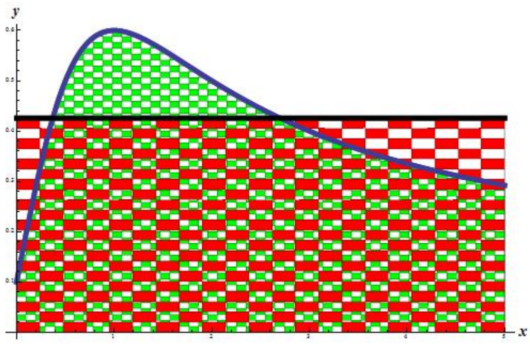
vrijedi: ti integrali konvergiraju za $n < 1$ i divergiraju za $n > 1$. To je posljedica činjenice da je $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^n} = \frac{1-\varepsilon^{-n+1}}{-n+1}$, što kad $\varepsilon \to 0+$ u slučaju da je $n < 1$ daje limes $\frac{1}{1-n}$, a za $n > 1$ daje limes $+\infty$.

Zadatak 30. *Izračunajte* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

☼ **Ponovimo bitno...** Nepravi integrali poopćuju određene integrale na slučajeve kad područje integriranja ili podintegralna funkcija nije ograničena. U oba slučaja problematični rubovi se zamjenjuju varijabilnim, čime se dobije određeni integral s varijabilnim rubom, te se vrijednost nepravog integrala računa kao limes određenog integrala kad uvršteni varijabilni rub teži prema problematičnom. ☺

5.8 Primjene integrala

Uz računanje površina, volumena i duljina krivulja, integrali se primjenjuju na niz fizikalnih i kemijskih problema. U ovom poglavlju opisat ćemo neke takve konkretne primjene.



Slika 5.10: Teorem srednje vrijednosti za integrale: zeleno i crveno karirane površine su jednake.

Ponekad nam je u primjeni dovoljna procjena vrijednosti određenog integrala. Za to nam pomaže teorem srednje vrijednosti za integrale koji kaže da je

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M,$$

ako je f neprekidna na $[a,b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu. Možemo to izreći i ovako: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot(b-a)$ za neki $c \in [m,M]$, tj. postoji ordinata c takva da je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jednak površini pravokutnika omeđenog pravcima $x=a$, $x=b$, $y=0$ i $y=c$ (vidi sliku 5.10).

Specijalno, iz prethodnog se vidi da je c prosječna (srednja) vrijednost neprekidne[15] funkcije f na intervalu $[a,b]$, dakle ju računamo kao $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Kako $b-a$ predstavlja raspon varijable, možemo reći da $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavlja ukupni iznos („zbroj svih vrijednosti") neprekidne funkcije f na $[a,b]$.

Primjer 122. *Tokom jednog dana utvrđeno je da je ovisnost temperature θ (u °C) o vremenu t (u satima od podneva: $-12\,\mathrm{h} \leq t \leq 12\,\mathrm{h}$) dobro opisana formulom* $\theta(t) = 0{,}001\,°\mathrm{C}\,\mathrm{h}^{-4}\,t^4 - 0{,}280\,°\mathrm{C}\,\mathrm{h}^{-2}\,t^2 + 25°\mathrm{C}$. *Tada je prosječna vrijednost temperature tog dana*

$$\frac{1}{24}\int_{-12}^{12} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 15{,}7°\mathrm{C}.$$

U fizikalnim i fizikalnokemijskim primjenama često se pojavljuju neodređeni integrali uz početni uvjet. Posebno česte su situacije kad poznamo funkciju brzine promjene neke funkcije (brzinu pređenog puta, brzinu reakcije, brzinu radioaktivnog raspada,. . .) i početni iznos funkcije čiju promjenu promatramo (početnu poziciju, početnu koncentraciju, početni broj atoma radioaktivnog elementa, . . .). Takvi zadaci se u pravilu rješavaju integriranjem funkcije brzine, a konstanta integriranja se određuje iz početnog uvjeta.

[15] Ako funkcija ima konačno mnogo prekida, pomoću integrala možemo računati prosječne vrijednosti na podintervalima na kojima je funkcija neprekidna, a onda prosjek na cijelom intervalu dobiti tako da zbrojimo te prosječne vrijednosti i podijelimo s brojem koliko ih ima.

Primjer 123. *Promotrimo reakciju* $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{P}$. *Stehiometrijski koeficijenti reaktanata su oba* -1. *Uvedimo pomoćnu veličinu*[16] x *čija veza s koncentracijom* c *bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je* ν *i početna koncentracija* c_0*) je dana s*

$$c = c_0 + \nu x.$$

Brzina reakcije je

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Ako je naša reakcija drugog reda, i to tako da je prvog obzirom na svaki od dva reaktanta, onda po definiciji vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{A}}c_{\mathrm{B}},$$

gdje je k *koeficijent brzine reakcije. Označimo s* a *i* b *početne koncentracije od* A *i* B. *Kako su stehiometrijski koeficijenti oba reaktanta u ovoj reakciji jednaki* -1, *slijedi* $c_{\mathrm{A}} = a - x$ *i* $c_{\mathrm{B}} = b - x$ *pa imamo*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x).$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi[17] *da je*

$$\frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(b-x)} = k\,\mathrm{d}t$$

te integriranjem dobivamo

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{a-x}{b-x} = kt + C.$$

Alternativno, na formulu $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x)$ *mogli smo primijeniti pravilo* $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$ *te bismo dobili* $kt'(x) = \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(b-x)}$ *što integriranjem daje* $kt + C = \int kt'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a-x)(b-x)}$, *tj. isti rezultat.*

Očigledno je $x(0\,\mathrm{s}) = 0$ *mola te iz zadnje jednadžbe slijedi da je*

$$C = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}.$$

Uvrštavanjem $a - x = c_{\mathrm{A}}$ *i* $b - x = c_{\mathrm{B}}$ *dobivamo integrirani oblik zakona brzine reakcije*

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{bc_{\mathrm{A}}}{ac_{\mathrm{B}}} = kt.$$

---

[16] Veličina x definira se kao $x = \frac{\xi}{V}$ i zove se koncentracija izvedenih pretvorbi.

[17] Ovdje primijenjeni postupak zove se separacijom varijabli, što je jedna od tehnika za rješavanje diferencijalnih jednadžbi s kojima ćemo se upoznati kasnije.

Zadatak 31. *Ako znamo da je u svakom trenutku t (u sekundama) ubrzanje protona u nekom električnom polju jednako $a = -20(1+2t)^{-2}$ (akceleracija u $\mathrm{cm\,s^{-2}}$), odredite brzinu protona u tom polju nakon 3600 sekundi ako je u početnom trenutku brzina iznosila $30\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Uputa: Ubrzanje je brzina brzine, tj. derivacija brzine po vremenu,*

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Slično kao što put iz brzine i brzinu iz akceleracije možemo odrediti integriranjem, možemo odrediti i preneseni naboj q ako znamo ovisnost jakosti struje i o vremenu ($q = \int i\,\mathrm{d}t$), s tim da je tu u pravilu početni uvjet $q(0\,\mathrm{s}) = 0$ C pa kao konstantu integriranja dobivamo nulu (nula kulona). Integriranjem se određuju i momenti inercije ne-diskretnih objekata, ukupna masa i dr.

Osobito česta fizikalna primjena integrala vezana je za pojam rada. Ukoliko na objekt djeluje sila čiji iznos F ovisi o poziciji x tog objekta, onda je rad izvršen pod utjecajem te sile za pomak objekta od pozicije $x = a$ do pozicije $x = b$ dan formulom

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

U kemijskoj termodinamici često je potrebno odrediti volumni rad, tj. rad koji je posljedica promjene volumena, ili pak kemijski rad koji je posljedica promjene kemijskog sastava sustava odnosno množine neke komponente. Često treba odrediti i električni rad. Odgovarajuće formule su

- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);
- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);
- Električni rad $w = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r$ (rad izvršen za pomicanje naboja q_1 od udaljenosti $r = a$ do udaljenosti $r = b$ u odnosu na naboj q_2; $k_e = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$ je Coulombova konstanta).

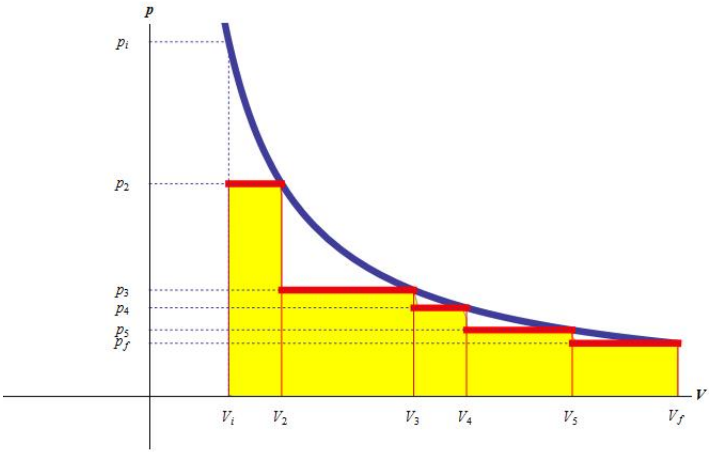
Primjer 124. *Pri izotermnoj ekspanziji volumen nekog idealnog plina povećao se osam puta. Koliki je rad izvršen ako je ekspandiralo 10,0 mola plina pri temperaturi 298 kelvina?*

Očigledno se radi o problemu volumnog rada. Kako za idealni plin vrijedi $pV = nRT$ imamo da je pri volumenu V tlak opisan s

$$p(V) = \frac{24777{,}21\,\mathrm{J}}{V}$$

te je izvršeni rad

$$w = -\int_{V_1}^{8V_1} \frac{24777{,}21\,\mathrm{J}}{V} = -24777{,}21\,\mathrm{J} \cdot \ln V|_{V_1}^{8V_1} = -24777{,}21 \ln 8 = -51{,}5\,\mathrm{kJ}.$$



Slika 5.11: Rad pri seriji od pet ireverzibilnih ekspanzija idealnog plina.

Napomenimo da se reverzibilna ekspanzija/kompresija može zamisliti kao niz ireverzibilnih ekspanzija/kompresija, kod kojih su promjene volumena infinitezimalno male. Kako se kod ireverzibilne promjene volumena izvršeni rad dobiva kao produkt konačnog tlaka i iznosa promjene volumena (vidi sliku 5.11), formula za reverzibilnu ekspanziju/kompresiju može se shvatiti kao specijalni slučaj definicije određenog integrala.

Primjer 125. *Neka je stanje plina opisano van der Waalsovom jednadžbom*

$$p(V_m - b)V_m^2 + a(V_m - b) = RTV_m^2,$$

gdje je p tlak, T temperatura, $V_m = \frac{V}{n}$ molarni volumen i $R = 8{,}3145\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ opća plinska konstanta, a konstantni parametri a i b su ovisni o promatranom plinu. Treba odrediti izvršeni rad ako $n = 52,0\,\mathrm{mmol}$ metana ($a = 2{,}283\,\mathrm{L^2\,bar\,mol^{-2}}$ i $b = 0{,}004278\,\mathrm{L\,mol^{-1}}$) ekspandira reverzibilno od $V_i = 1{,}00\,\mathrm{L}$ na $V_f = 50{,}0\,\mathrm{L}$ pri $25°\,\mathrm{C}$, uz pretpostavku da je plin van der Waalsov. Podsjećamo: $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Kako trebamo integrirati tlak, izrazimo ga iz početnog oblika van der Waalsove jednadžbe:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}.$$

Slijedi:

$$w = -nRT \int_{V_i}^{V_f} (V - nb)^{-1}\,\mathrm{d}V + an^2 \int_{V_i}^{V_f} V^{-2}\,\mathrm{d}V =$$

$$= -nRT \ln \frac{V_f - nb}{V_i - nb} - an^2 \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right).$$

Uvrštavanje n, R, a, b, V_i, V_f i $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$ daje $w = -101\,\mathrm{J}$.

Zadatak 32. *Koliki rad se izvrši pri razdvajanju dva elektrona od udaljenosti $1{,}0\,\mathrm{pm}$ do udaljenosti $4{,}0\,\mathrm{pm}$? Naboj elektrona iznosi $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.*

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa termodinamičkih funkcija stanja (entalpije, entropije, ...).

Primjer 126. *U kemijskoj termodinamici ponekad se ovisnost molarnog toplinskog kapaciteta pri konstantnom tlaku* ($C_{p,\mathrm{m}} = \frac{C_p}{n}$) *aproksimira funkcijom*

$$C_{p,\mathrm{m}}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Empirijski parametri a, b, c ne ovise o temperaturi i za dušik iznose

$$a = 28{,}58\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}},\ b = 3{,}77 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J\,K^{-2}\,mol^{-1}},\ c = -0{,}5 \cdot 10^{5}\,\mathrm{J\,K\,mol^{-1}}.$$

Uz pretpostavku da se dušik ponaša kao idealan plin, odredite promjenu entalpije $\triangle H$ i promjenu unutrašnje energije $\triangle U$ ako se $1{,}0\,\mathrm{mol}$ dušika izobarno (pri tlaku $p = 1\,\mathrm{atm}$) zagrije od $25°\mathrm{C}$ do $100°\mathrm{C}$.

Promjena entalpije se za izobarne procese računa kao integral toplinskog kapaciteta u zadanom rasponu temperatura tj.

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p \,\mathrm{d}T,$$

a veza između promjene entalpije i unutrašnje energije za izobarne procese dana je s

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V$$

(ΔV je razlika konačnog i početnog volumena). Imamo redom: $C_p(T) = n \cdot C_{p,m}(T) = na + nbT + \frac{nc}{T^2}$,

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} \left(na + nbT + \frac{nc}{T^2} \right) \mathrm{d}T =$$

$$= naT + nbT^2 - \frac{nc}{T}\bigg|_{T_1}^{T_2} = na(T_2 - T_1) + nb(T_2^2 - T_1^2) - nc\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

te nakon uvrštavanja poznatih podataka dobijemo $\Delta H = 2{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$. Podsjećamo da predznak promjene entalpije određuje je li proces egzoterman ili endoterman; ovdje imamo pozitivnu promjenu (tj. porast) entalpije pa je promatrani proces endoterman.

Kako je $pV = nRT$, slijedi da je pri izobarnoj promjeni (uz konstantnu množinu) $p\Delta V = nR\Delta T$ i stoga je

$$\Delta U = \Delta H - p\Delta V = \Delta H - nR\Delta T$$

te zbog $\Delta T = 75\,\mathrm{K}$ dobivamo $\Delta U = 1{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$.

U kvantnoj fizici i kemiji, ali i nekim drugim primjenama, česti su i nepravi integrali. Elektroni u atomu i molekuli opisuju se valnim funkcijama koje zovemo (atomskim) orbitalama, a koje indirektno opisuju vjerojatnost nalaženja elektrona u nekoj točki prostora. Analogno se mogu promatrati i valne funkcije za druge vrste čestica. Valne funkcije su u općem slučaju kompleksne funkcije, no ako je valna funkcija $\psi : D \to \mathbb{C}$, onda je uvijek funkcija $\psi^*\psi$ realna. Pritom je s ψ^* označena funkcija koja se iz funkcije

ψ dobije kompleksnim konjugiranjem rezultata (vidi sljedeće poglavlje). U slučaju da je ψ realna (što je često u jednostavnijim primjerima), umjesto o $\psi^*\psi$ govorimo o kvadratu valne funkcije (tj. o ψ^2) jer je za realne funkcije $\psi^*\psi = \psi^2$.

Vjerojatnost nekog događaja koji može poprimiti rezultate unutar nekog intervala I realnih brojeva (varijabla koja predstavlja te rezultate i može poprimiti vrijednosti unutar I zove se kontinuirana slučajna varijabla) opisuje se funkcijom gustoće vjerojatnosti. Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija gustoće vjerojatnosti za neki događaj, onda je vjerojatnost da će rezultat tog događaja biti između vrijednosti a i b dana s

$$P_{a,b} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Uočimo da je vjerojatnost da se postigne točno vrijednost a u kontinuiranom slučaju uvijek jednaka $P_{a,a} = 0$. Očekivana (prosječna) vrijednost rezultata (slučajne varijable) kojemu je vjerojatnost opisana funkcijom gustoće $f : I \to \mathbb{R}$ dana je s

$$\langle f \rangle = \int_I x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Često se provjerava i uvjet normiranja[18] tj. formula

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, funkcija $\psi^*\psi$ odnosno ψ^2 je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona u nekoj točki prostora. Često se koristi i radijalna gustoća vjerojatnosti $\phi(r) = 4\pi r^2\psi^2$ koja opisuje vjerojatnost da elektron bude na nekoj udaljenosti r od jezgre.

U kontekstu valnih funkcija često je pitanje i njihove ortogonalnosti. Ortogonalnost dvije realne funkcije f i g definirane na istom intervalu $[a, b]$ definira se putem jednakosti

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Primjer 127. *1s orbitala vodikova atoma je valna funkcija*[19]

$$\psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{a_0^3\pi}} \cdot e^{-r/a_0},$$

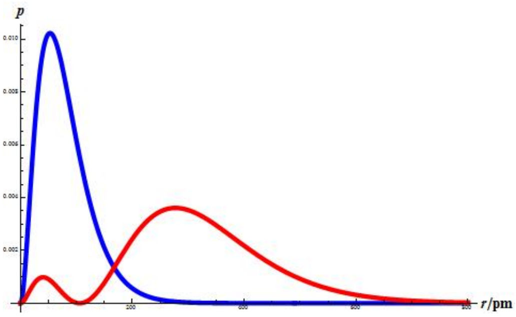
gdje je $a_0 = 52{,}9\,\mathrm{pm}$ *Bohrov radijus. Odgovarajuća funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje vodikova elektrona u nekoj točki prostora je*

$$\psi_{1,0,0}^2(r) = \frac{1}{a_0^3\pi} \cdot e^{-2r/a_0}.$$

---

[18] Funkcija gustoće mora biti takva da je sigurno da će se desiti neki od mogućih rezultata, tj. da je vjerojatnost da dobijemo bilo koji rezultat iz domene jednaka 100%=1.

[19] 1s orbitala zapravo ovisi o još dvije sferne koordinate, no obzirom na njih je konstantna pa ih nismo pisali.



Slika 5.12: Radijalna gustoća vjerojatnosti za 1s (plavo) i 2s (crveno) orbitalu jednoelektronskog atoma.

Funkcija je definirana za nenegativne iznose r, *tj. u ovom slučaju je* $I = [0, +\infty\rangle$.

Želimo li odrediti prosječni radijus $\langle r \rangle$ 1*s-orbitale vodikova atoma potrebna nam je radijalna valna funkcija jer ona opisuje vjerojatnost udaljenosti od ishodišta (koje u mislima poistovjećujemo s jezgrom atoma). Radijalna funkcija gustoće za* 1*s elektron vodikova atoma je*

$$\phi_{1,0,0}(r) = 4r^2\pi\psi_{1,0,0}^2(r) = \frac{4}{a_0^3}r^2e^{-2r/a_0}.$$

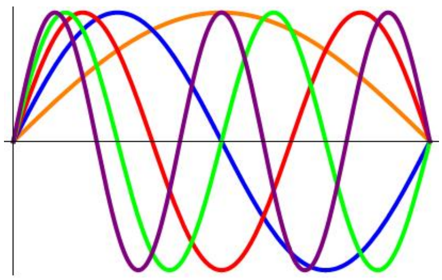
Prosječni radijus orbitale opisane radijalnom funkcijom gustoće $\phi(r)$ *jednak je* $\langle r \rangle = \int_0^{+\infty} r\phi(r)\,\mathrm{d}r$. *Stoga trebamo izračunati:*

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3}\int_0^{+\infty} r^3e^{-2r/a_0}\,\mathrm{d}r.$$

Prema u prethodnom poglavlju danoj formuli $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$ *dobivamo:*

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3}\cdot\frac{3!}{(2/a_0)^4} = \frac{3}{2}a_0.$$

Uočite: prosječna tj. očekivana udaljenost elektrona od jezgre je $\frac{3}{2}$ *Bohrova radijusa, dok je udaljenost za koju je* $\psi_{1,0,0}^2$ *maksimalna („najvjerojatnija" udaljenost) jednaka Bohrovom radijusu. Dakle: očekivani rezultat ne mora biti isto što i najvjerojatniji rezultat (nije svaka distribucija vjerojatnosti normalna). No, kako* r *može poprimiti bilo koju vrijednost u intervalu* I, *prema već spomenutom je vjerojatnost da* 1*s elektron nađemo točno na nekoj udaljenosti od jezgre, pa bila to i „najvjerojatnija" udaljenost* a_0 *ili očekivana* $\frac{3}{2}a_0$, *jednaka je nuli. Jedine nenul vjerojatnosti koje možemo odrediti u slučaju da je vjerojatnost opisana na nekom intervalu definiranom i neprekidnom funkcijom gustoće, su vjerojatnosti da rezultat bude unutar nekog intervala. Primjerice, vjerojatnost da će naš elektron biti na udaljenosti između* a_0 *i* $\frac{3}{2}a_0$ *jednak je površini ispod grafa od* $\phi_{1,0,0}$ *i između navedenih apscisa (iznosi* $\int_{a_0}^{3a_0/2}\phi_{1,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = (10e - 17)/(2e^3) \approx 25{,}3\%$.



Slika 5.13: Prvih pet funkcija gustoće vjerojatnosti za česticu u jednodimenzionalnoj kutiji.

Primjer 128. *2s orbitala za vodikov atom je valna funkcija*

$$\psi_{2,0,0}(r) = N\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/(2a_0)},$$

gdje je a_0 Bohrov radijus. Kako je smisao zahtjeva normiranja valnih funkcija u tome da kaže „elektron je sigurno negdje u prostoru”, iz zahtjeva normiranja moguće je odrediti konstantu normiranja N. Opet uzimamo radijalnu gustoću vjerojatnosti jer ona opisuje vjerojatnost nalaženja elektrona na bilo kojoj udaljenosti od jezgre, neovisno o smjeru „gledanja”. U ovom slučaju radijalna gustoća vjerojatnosti je $4r^2\pi\psi_{2,0,0}$, tj.

$$\phi_{2,0,0}(r) = 4N^2\pi r^2\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}.$$

Zahtjev normiranja za ovu funkciju glasi

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 1.$$

Računanje integrala na lijevoj strani gornje jednakosti daje

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 4N^2\pi\int_0^{+\infty} r^2\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}\,\mathrm{d}r = 32N^2a_0^3\pi$$

(opet je potrebno koristiti formulu $\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$). To treba biti jednako 1, dakle je konstanta normiranja

$$N = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}.$$

Zadatak 33. *Za česticu u jednodimenzionalnoj kutiji, tj. česticu koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$, pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}_0$) formulom*

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \le x \le a.$$

Odredite konstantu normiranja A, pokažite da su valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji za različite kvantne brojeve ortonormirane (normirane i međusobno ortogonalne), odredite očekivanu vrijednost $\langle x\rangle$ položaja čestice i vjerojatnost P da se čestica nađe u srednjoj trećini kutije! Lakša varijanta zadatka: riješite zadatak ako je kvantni broj $n = 1$. Grafove kvadrata valnih funkcija za česticu u jednodimenzionalnoj kutiji za kvantne brojeve od 1 do 5 možete vidjeti na slici 5.13.

Upute: Konstantu normiranja određujemo iz uvjeta $\int_0^a \psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Ortogonalnost provjeravamo tako da za $m \neq n$ pokažemo da je

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A^2\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Očekivana vrijednost pozicije dobije se kao $\langle x\rangle = \int_0^a x\psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x$, a vjerojatnost nalaženja u srednjoj trećini integrala kao $P = \int_{a/3}^{2a/3} \psi_n^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Rješenja: $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$, $\langle x\rangle = \frac{a(1+2n^2\pi^2-\cos(2n\pi)-2n\pi\sin(2n\pi))}{4n^2\pi^2}$, $P = \frac{2n\pi+3\sin(2n\pi/3)-3\sin(4n\pi/3)}{6n\pi}$. Za $n = 1$ dobivamo $\langle x\rangle = \frac{a}{2}$ i $P = \frac{1}{6}\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) \approx 60{,}9\%$.

☼ **Ponovimo bitno...** Integrali se izuzetno često pojavljuju u fizikalnim i fizikalnokemijskim primjenama matematike. Nešto češći su određeni i nepravi integrali, no i njih računamo pomoću neodređenih. Tipične primjene su određivanje funkcije y ako je poznata funkcija koja opisuje brzinu promjene y i početna vrijednost od y, izračunavanje različitih vrsta rada (primjerice volumnog definiranog kao $w = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$) te određivanje raznih kvantnih parametara vezanih za orbitale (primjerice, očekivanog radijusa orbitale), a koji se računaju temeljem Bornove interpretacije kvadrata orbitale kao funkcije gustoće vjerojatnosti. ☺

5.9 Zadaci za vježbu

1. Svođenjem na tablične integrale izračunajte
   (a) $\displaystyle\int (4x^7 + 15x^4 + 3x + 10)\ \mathrm{d}x.$
   (b) $\int_1^2 (4x^3 - 3x^2 + 2)\ \mathrm{d}x.$
   (c) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$
   (d) $\displaystyle\int_0^8 (1+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})\ \mathrm{d}x.$
   (e) $\displaystyle\int \frac{2^{x-1}-3^{x+1}}{6^x}\ \mathrm{d}x.$
   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\ \mathrm{d}x.$
   (g) $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\ \mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos 2x)}\ \mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+1}\ \mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x.$

(k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\ \mathrm{d}x.$

(l) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\ \mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) $\frac{1}{2}x^8+3x^5+\frac{3}{2}x^2+10x+C.$ (b) 10. (c) $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+C.$
(d) $\frac{124}{3}.$ (e) $-\frac{1}{2\cdot 3^x\ln 3}+\frac{1}{3\cdot 2^x\ln 2}+C.$ (f) $3-\frac{1}{\ln\frac{3}{2}}.$ (g) $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{2}x+C.$
(h) 4. (i) $x+3\,\mathrm{arctg}\,x+C.$ (j) $\frac{\pi}{2}.$ (k) $\ln|x+\sqrt{1+x^2}|-\arcsin x+C.$
(l) $\ln 2-\frac{15}{16}.$

2. Koristeći propoziciju 2, izračunajte

(a) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{2}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3+x^2}\ \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(3-\cos 2x)\cos^5 3x\ \mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) 4. (b) 0. (c) $2\sqrt{3}(1-\frac{\pi}{4}).$ (d) 0.

3. Metodom parcijalne integracije izračunajte

(a) $\displaystyle\int x\cdot 2^x\ \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} (x-1)\,e^x\ \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int (3x^2+2x+1)\ln x\ \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\ \mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\ \mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} x^2 \arcsin x \, \mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2 - 1) + C.$ (b) $\ln 4 - 2.$ (c) $(x^3+x^2+x)\ln x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + C.$
(d) $\frac{4}{9}(2e^3+1).$ (e) $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C.$ (f) $2\pi.$
(g) $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$ (h) $0.$

4. Metodom supstitucije izračunajte

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt[9]{(3x-5)^5}} \, \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{2x}{1-x^2} \, \mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x} \, \mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \frac{3^x}{1+3^{2x}} \, \mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)} \, \mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int_7^8 x\sqrt[3]{x-8} \, \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5} \, \mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, \mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) $3\sqrt[9]{(3x-5)^4} + C.$ (b) $\ln 8.$ (c) $-e^{1/x} + C.$ (d) $\frac{1}{2}.$
(e) $\frac{1}{\ln 3}\operatorname{arctg} 3^x + C.$ (f) $\frac{\pi^2}{9}.$ (g) $\frac{\sin^5 x}{35}(7 - 5\sin^2 x) + C.$
(h) $-\frac{17}{2}.$ (i) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$ (j) $\frac{\pi}{6}.$

5. Izračunajte integrale racionalnih funkcija

(a) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4+6}{x^2(x^2+3)}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^8-1}\,\mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}+C.$ (b) $\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}-\frac{x}{(x-1)^2}+C.$
(c) $\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ (d) $\frac{10}{3}-\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}.$
(e) $-\frac{1}{x-2}-\mathrm{arctg}\,(x-2)+C.$ (f) $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{20}.$
(g) $\frac{1}{4}\ln\frac{|x^2-1|}{x^2+1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2+C.$

6. Izračunajte neprave integrale

(a) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{4}{x^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-1)^4}\,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}\,\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^{4/3}}\,\mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) 1. (b) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$ (c) $+\infty.$ (d) 3. (e) $+\infty.$

7. Raznim metodama izračunajte integrale

(a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\ \mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\ \mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int e^{\sin x}\sin(2x)\ \mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\arcsin x\ \mathrm{d}x.$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+\sqrt[3]{x^2}}\ \mathrm{d}x.$

(h) $\displaystyle\int_0^{21} \frac{1}{1+\sqrt[3]{3x+1}}\ \mathrm{d}x.$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\ \mathrm{d}x.$

(j) $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sin(3x)\cos x\ \mathrm{d}x.$

(k) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{1+3e^{-x}}\ \mathrm{d}x.$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |4x^2-1|\ \mathrm{d}x.$

(m) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x}\ \mathrm{d}x.$

(n) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos(2x)}\ \mathrm{d}x.$

Rješenje.
(a) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$. (b) $\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$. (c) $\frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$.
(d) $\pi\sqrt{2}-4$. (e) $2e^{\sin x}(\sin x-1)+C$. (f) $\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}$. (g) $\ln|3\sqrt[3]{x}+1|+C$.
(h) $\frac{9}{2}+\ln\frac{5}{2}$. (i) $\frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x|+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+C$. (j) $\frac{\sqrt{2}-1}{8}$. (k) $4-\pi$.
(l) 1. (m) $3\ln\frac{9}{5}$. (n) 8.

8. Izračunajte površinu lika omeđenog

(a) parabolom $y=\frac{x^2}{4}$ i pravcem $y=2$.

(b) parabolom $y=x^2-4x$ i pravcem $y=x$.

(c) parabolom $y^2=2x+1$ i pravcem $y=x-1$.

(d) parabolama $y^2=9x$ i $y=\frac{x^2}{9}$.

(e) parabolama $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{4}$ i pravcem $y=4$.

(f) parabolom $y = x - \frac{1}{2}x^2$, tangentom na parabolu u točki s apscisom $x = 2$ te pravcem $x = 0$.

(g) krivuljom $y = \frac{4}{1+x^2}$ i pravcem $y = 0$.

(h) krivuljama $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{2}{3}\cos x$ te pravcem $x = 0$.

Rješenje.
(a) $\frac{20}{3}$. (b) $\frac{125}{6}$. (c) $\frac{16}{3}$. (d) 27. (e) $\frac{32}{3}$. (f) $\frac{4}{9}$. (g) 4π. (h) $\frac{16}{3}$.

9. Ako je krivulja zadana parametarski $t \mapsto (x(t), y(t))$, površina lika omeđenog lukom te krivulje za $t \in [t_1, t_2]$ računa se po formuli

$$P = \left| \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \right| .$$

Izračunajte površinu lika omeđenog

(a) cikloidom $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi\rangle$ i pravcem $y = 0$.

(b) elipsom $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Rješenje.
(a) 48π. (b) 15π.

10. Ako je krivulja zadana u polarnim koordinatama $r = f(\vartheta)$, površina lika omeđenog lukom te krivulje za $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$ računa se po formuli

$$P = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [f(\vartheta)]^2\,\mathrm{d}\vartheta .$$

Izračunajte površinu lika omeđenog

(a) kružnicom $x^2 + y^2 = 4$ te pravcima $y = x$ i $y = -\sqrt{3}\,x$.

(b) kardioidom $r = 2(1 + \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi\rangle$.

Rješenje.
(a) $\frac{5\pi}{6}$. (b) 6π.

11. Duljina luka krivulje $y = f(x)$ između točaka $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ dana je formulom

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x .$$

Izračunajte duljinu luka krivulje

(a) $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ između točaka $A(0, 0)$ i $B(9, 18)$.

(b) $y = \ln(\cos x)$ između točaka $A(0, 0)$ i $B(\frac{\pi}{3}, \ln\frac{1}{2})$.

Rješenje.
(a) $\frac{2}{3}(10\sqrt{10} - 1)$. (b) $\ln(2 + \sqrt{3})$.

Poglavlje 6

Kompleksni brojevi

Imaginarni brojevi prvi put su se pojavili u 16. stoljeću vezano za problem rješavanja kubne jednadžbe. Njihova upotreba raširila se tokom 19. stoljeća, kad su se pojavile i prve primjene. Najpoznatije primjene vezane su za teoriju elektriciteta i magnetizma (koju bitno pojednostavljuju) te za kvantnu teoriju.

Kao motivacija za uvođenje imaginarnih brojeva obično se uzimaju kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. Poznato je da kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ te jednadžbe negativna. Osnovni primjer takve jednadžbe je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Po dogovoru, ta jednadžba (iako nema realnih rješenja jer bi to bio realan x koji kvadriran daje negativan broj -1) ima dva rješenja u kompleksnim brojevima. Kao što su 1 i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 1 = 0$, definira se da su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ brojevi[1] i i $-i$. Broj i zove se imaginarna jedinica. Dakle, definicija imaginarne jedinice je da je to jedan od dva moguća broja koji kvadrirani daju -1:

$$i^2 = -1.$$

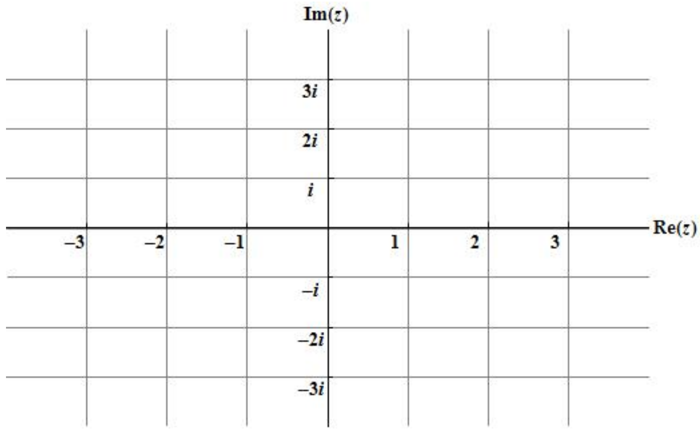
Isto svojstvo ima i broj $-i$: $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

Kompleksni brojevi se definiraju kao sve linearne kombinacije (s realnim koeficijentima) brojeva 1 i i, tj. kompleksni brojevi su brojevi oblika

$$z = x + yi$$

s $x, y \in \mathbb{R}$. Broj x se zove realni dio, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z (dakle: i realni i imaginarni dio kompleksnog broja su *realni* brojevi). Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C}$. Skup $\mathbb{R}$ je podskup od $\mathbb{C}$ jer svaki realni broj x možemo shvatiti kao kompleksni broj $x + 0 \cdot i$. Brojeve kojima je realni dio nula zovemo čisto imaginarnima.

[1] Oznaka i za imaginarnu jedinicu potječe iz 18. stoljeća, kad ju je uveo švicarski matematičar L. Euler.



Slika 6.1: Kompleksna ravnina.

Napomena 8. *Ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ negativna, realni dio njenih kompleksnih rješenja je $-\frac{b}{2a}$, a imaginarni je $\pm\frac{\sqrt{-D}}{2a}$. Primjerice, rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 =$ su $x_{1,2} = 2 \pm i$.*

Primjer 129. *Odredimo rješenja jednadžbi $4x^2 + 12x + 25 = 0$ i $z^2 + 36 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva:*

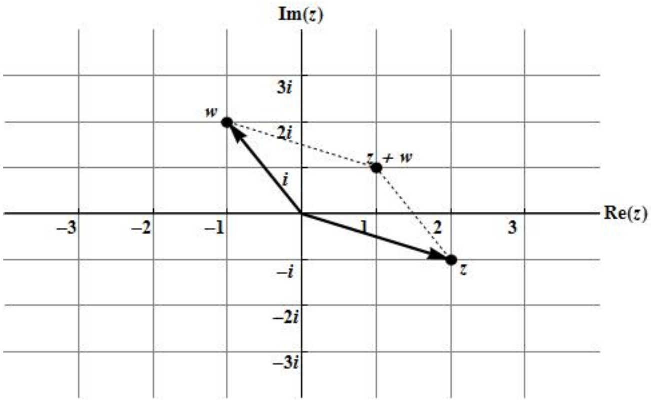
Za prvu jednadžbu imamo $x_{1,2} = \frac{-12\pm\sqrt{144-400}}{8} = \frac{-12\pm\sqrt{-1\cdot 256}}{8} = \frac{-12\pm i\sqrt{256}}{8} = \frac{-12\pm 16i}{8} = -\frac{3}{2} \pm 2i$. Druga je pak oblika $z^2 = -36$ pa su joj rješenja $\pm 6i$.

Napomena 9. *Iz definicije vidimo da je $\mathbb{C}$ dvodimenzionalni vektorski prostor (nad realnim brojevima). Kako mu bazu čine 1 te i, možemo ga interpretirati kao i svaki drugi realni dvodimenzionalni vektorski prostor: pomoću koordinatnog sustava u ravnini.*

☼ **Ponovimo bitno...** Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi (realni i imaginarni dio kompleksnog broja z), a i je imaginarna jedinica, tj. broj sa svojstvom $i^2 = -1$. ☺

6.1 Kompleksna ravnina

Početkom 19. stoljeća Argand i Gauss uveli su način vizualizacije kompleksnih brojeva. Svaki kompleksan broj $z = x + yi$ možemo poistovjetiti s točkom (x, y) u koordinatnoj ravnini (i obrnuto: svakoj točki odgovara kompleksan broj), uz uobičajeni Kartezijev koordinatni sustav. Pritom uzimamo da apscise predstavljaju realne, a ordinate imaginarne dijelove pa se koordinatne osi u ovom slučaju zovu realna i imaginarna os. Na realnoj osi tada se nalaze svi realni brojevi (dakle, kompleksni brojevi kojima je imaginarni dio 0), a na imaginarnoj svi čisto imaginarni (tj. kompleksni brojevi kojima je realni dio 0). Prikaz kompleksne ravnine vidljiv je na slici 6.1.



Slika 6.2: Zbrajanje kompleksnih brojeva.

6.2 Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja zbrajamo (oduzimamo) tako da im zbrojimo (oduzmemo) realne odnosno imaginarne dijelove:

$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i.$$

Primjer 130.

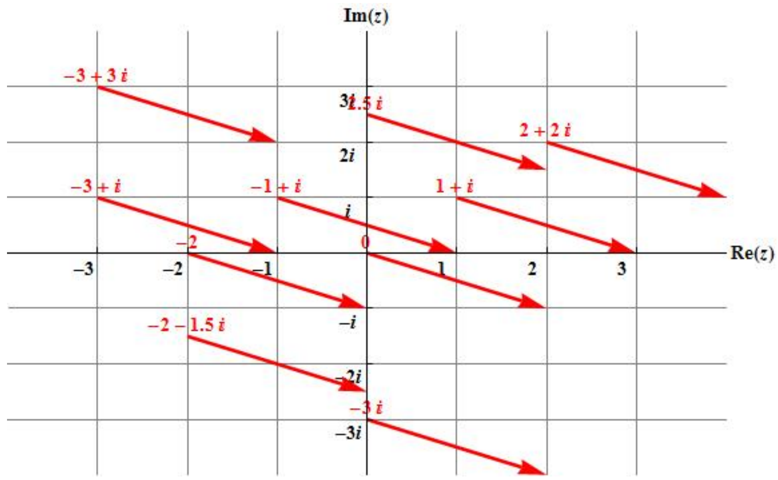
$$(3 + i) + (2i - 1) = 2 + 3i.$$

Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva imaju sva uobičajena svojstva tih operacija (komutativnost, asocijativnost, broj nula kao neutralni element, ...). U kompleksnoj ravnini zbroj odnosno razlika dva kompleksna broja z i z' nalazi se na kraju radij-vektora koji se dobije zbrajanjem odnosno oduzimanjem radij-vektora koji pripadaju z i z': zbrajanje i oduzimanje geometrijski se interpretiraju kao zbrajanje i oduzimanje radij-vektora u kompleksnoj ravnini. Pribrajanje istog broja svim kompleksnim brojevima (funkciju tipa $f(z) = z + z_0$) možemo shvatiti kao translaciju ravnine (vidi sliku 6.3).

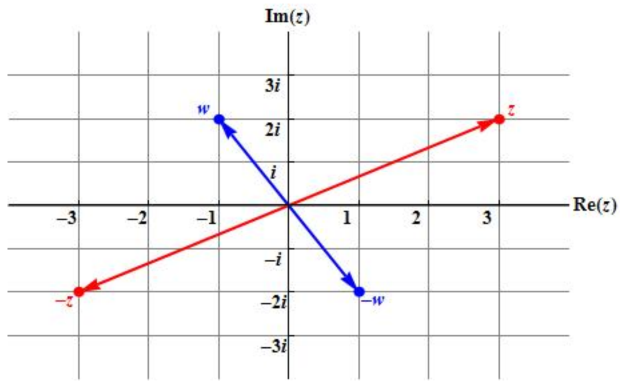
Suprotni broj od $x+yi$ je $-x-yi$. Određivanje suprotnog broja u tom je kontekstu centralna simetrija (inverzija) obzirom na ishodište (vidi sliku 6.4).

☼ **Ponovimo bitno...** Kompleksne brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo realne odnosno kompleksne dijelove. U kompleksnoj ravnini zbrajanje dva kompleksna broja je zbrajanje njihovih radij-vektora po pravilu paralelograma. Funkcija $f(z) = z + Z$ koja svim kompleksnim brojevima dodaje isti kompleksan broj Z može se interpretirati kao translacija kompleksne ravnine za radij-vektor od Z, a funkcija $f(z) = -z$ koja svakom kompleksnom broju pridružuje njemu suprotni je centralna simetrija obzirom na ishodište. ☺

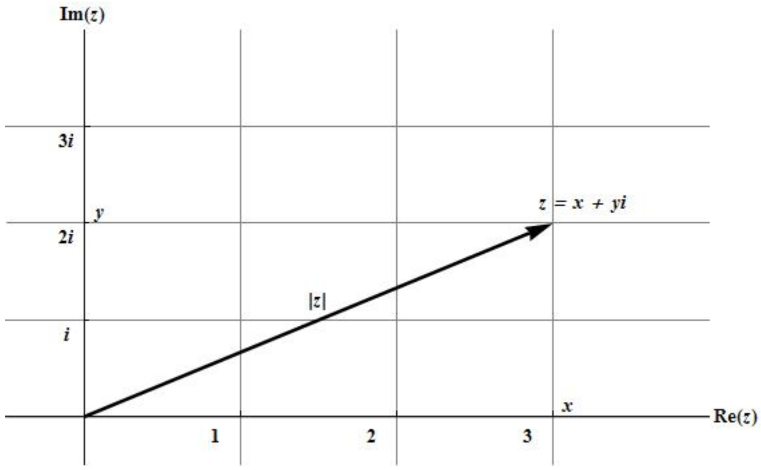
6.3 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i kompleksno konjugiranje



Slika 6.3: Pribrajanje kompleksnog broja kao translacija ravnine (krajevi strelica predstavljaju rezultate pribrajanja broja $z = 2 - i$ označenim kompleksnim brojevima).



Slika 6.4: Suprotni broj kao centralna simetrija.



Slika 6.5: Apsolutna vrijednost kompleksnog broja.

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + iy$ definira se kao $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (biramo pozitivni kvadratni korijen). Geometrijski gledano, to je udaljenost točke koja predstavlja z do ishodišta (slika 6.5).

Primjer 131. *Ako je* $z = 3 + 4i$, *onda je* $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1 nalaze se na jediničnoj kružnici oko ishodišta. Preciznije, u kompleksnoj ravnini jedinična kružnica oko ishodišta ima jednadžbu $|z| = 1$.

Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijedi tzv. nejednakost trokuta :

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Nju se lako dokaže pomoću slike 6.6.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj

$$\overline{z} = x - iy$$

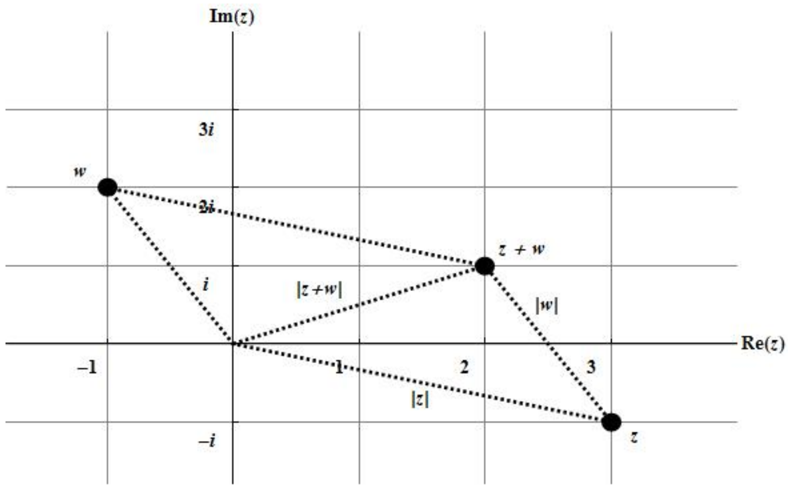
(promijeni se predznak imaginarnog dijela).

Primjer 132. *Ako je* $z = 5 - 9i$, *onda je* $\overline{z} = 5 + 9i$.

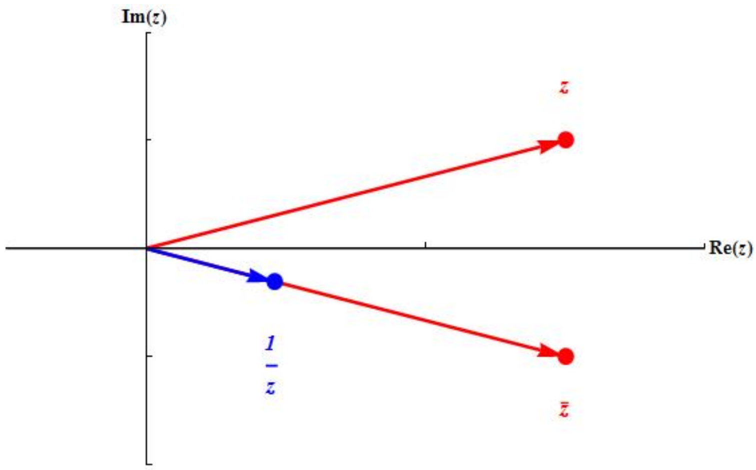
Napomena 10. *Par kompleksnih rješenja kvadratne jednadžbe je uvijek par kompleksno konjugiranih brojeva (vidi primjer 8).*

U kompleksnoj ravnini kompleksno konjugirani broj od z je njegova zrcalno simetrična slika obzirom na realnu os (vidi sliku 6.7). Vrijedi

$$\overline{\overline{z}} = z.$$



Slika 6.6: Nejednakost trokuta.



Slika 6.7: Kompleksno konjugiranje i recipročni brojevi.

Česta oznaka za $\overline{z}$ je i z^*, iako se oznaka sa zvjezdicom više koristi u kontekstu kompleksnih funkcija[2]: ako je dana funkcija $\psi : D \to \mathbb{C}$, onda se s ψ^* označava kompleksna funkcija definirana s $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)}$.

☼ **Ponovimo bitno...** Apsolutna vrijednost kompleksnog broja je duljina pripadnog radij-vektora tj. kvadratni korijen zbroja kvadrata realnog i imaginarnog dijela broja. Kompleksno konjugirani broj danog kompleksnog broja dobije se promjenom predznaka njegova imaginarnog dijela; on je zrcalno simetričan polaznom broju obzirom na realnu os. ☺

6.4 Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Množenje dva kompleksna broja $z = x + yi$ i $z' = x' + y'i$ definirano je formulom

$$zz' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

Primjer 133.

$$(2 + 3i) \cdot (6 - i) = 2 \cdot 6 + 3i \cdot 6 - 2i - 3 \cdot i^2 = 12 + 18i - 2i + 3 = 15 + 16i.$$

Vrijedi sljedeća korisna jednakost:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

Dokažimo ju. Ako je $z = x+yi$, onda je $z \cdot \overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+xyi-xyi-y^2i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Stoga je $\psi^*\psi$ za kompleksne funkcije isto što i $|\psi|^2$, što objašnjava korištenja izraza „kvadrat valne funkcije”[3] kad govorimo o funkciji oblika $\psi^*\psi$ u kvantnoj fizici i kemiji.

Primjer 134. *Kako je $-1 = i^2$, dijeljenjem s $-i$ dobivamo $\frac{1}{i} = -i$.*

Recipročni broj broja z je broj

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

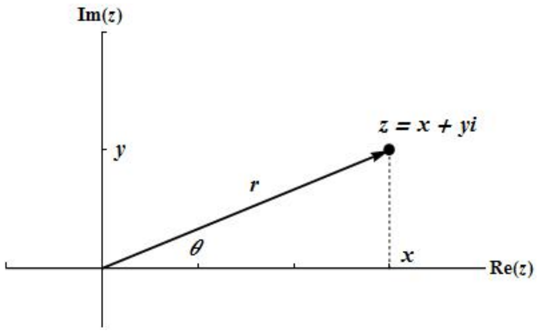
Točka koja predstavlja $1/z$ nalazi se na spojnici ishodišta i $\overline{z}$, kako je vidljivo na slici 6.7.

Primjer 135. *Za $z = 3 - 4i$ imamo*

$$\frac{1}{z} = \frac{3 + 4i}{3^2 + 4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

[2]Kompleksne funkcije pokazuju mnoga „čudna” svojstva u odnosu na realne, no za osnovno baratanje s njima kakvo je potrebno primjerice u temeljnim kolegijima iz fizikalne kemije dovoljno je razumijevanje da se radi o funkcijama koje nekim objektima, recimo točkama prostora, pridružuju kompleksne brojeve.

[3]Naravno, pravilnije bi bilo reći: kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije.



Slika 6.8: Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.

Dijeljenje je definirano kao množenje recipročnim brojem:

$$\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{|z'|^2}.$$

Primjer 136.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1-1+i+i}{2} = i.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Dva kompleksna broja množimo kao što množimo bilo koja dva dvočlana algebarska izraza, uzimajući u obzir da je $i^2 = -1$. Produkt kompleksnog broja z i njemu konjugiranog je kvadrat apsolutne vrijednosti od z. Dva kompleksna broja dijelimo tako da odgovarajući razlomak proširimo kompleksno konjugiranim nazivnikom. ☺

6.5 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Argument kompleksnog broja z je kut θ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi, dakle jedan od dva moguća kuta u rasponu $\langle -\pi, \pi]$ takva da je $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$.

Primjer 137. *Argument svakog pozitivnog realnog broja je 0, a argument svakog čisto imaginarnog broja s pozitivnim imaginarnim dijelom (npr. broja i) je $\frac{\pi}{2}$.*

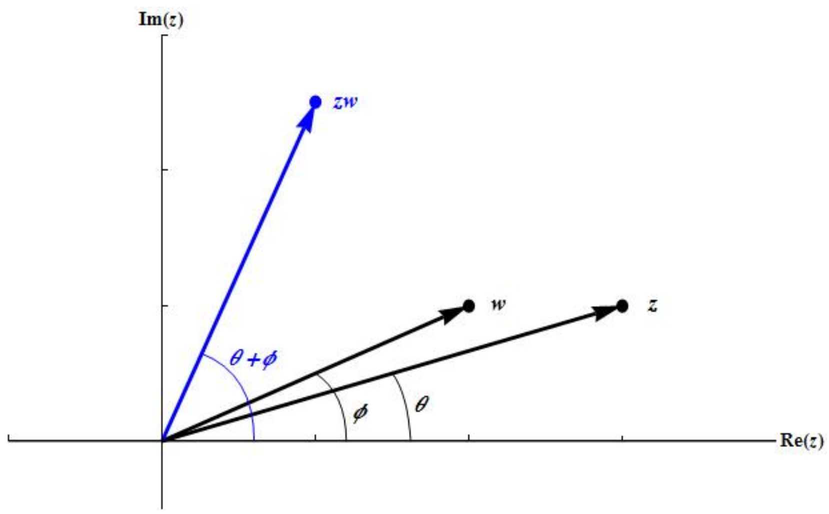
Kako je svaka točka u ravnini potpuno određena svojim polarnim koordinatama, a iz gornjeg se vidi da su $(|z|, \theta)$ polarne koordinate broja z, slijedi da je prikazu $z = x+yi$ (koji odgovara Cartesiusovom koordinatnom sustavu) ekvivalentan prikaz

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Taj se prikaz zove trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Primjer 138. *Ako je $z = 2+7i$, onda je $|z| = \sqrt{53}$ i $\theta = \operatorname{arctg}\frac{7}{2}$, te je $z = \sqrt{53} \cdot (\cos \operatorname{arctg}\frac{7}{2} + i \sin \operatorname{arctg}\frac{7}{2})$.*

S druge strane, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.



Slika 6.9: Množenje kompleksnih brojeva.

Trigonometrijski prikaz bitno olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Korištenjem adicionih formula za sinus i kosinus lako je provjeriti da za $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ i $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ vrijedi

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)), \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)), \\ \frac{1}{z} &= \frac{1}{|z|}(\cos\theta - i\sin\theta). \end{aligned}$$

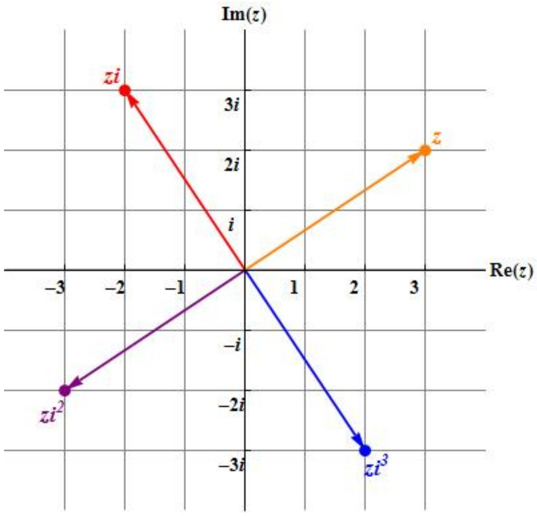
Iz posljednje formule se vidi da je argument recipročnog broja $1/z$ suprotan argumentu od z, kao što je i argument od $\overline{z}$. To je objašnjenje već prikazane slike 6.7.

Primjer 139.

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

Sad se vidi da se množenje, geometrijski gledano, svodi na kombinaciju rotacije i množenja apsolutnih vrijednosti kompleksnih brojeva: radij-vektor koji predstavlja produkt je po smjeru zarotirani radij vektor jednog broja za kut jednak argumentu drugog, a po duljini je jednak produktu apsolutnih vrijednosti množenih brojeva. Specijalno, množenje kompleksnog broja nekim brojem kojem je apsolutna vrijednost jednaka 1 interpretira se kao rotacija za argument tog drugog broja.

☼ **Ponovimo bitno...** Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja je njegov prikaz u obliku $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdje je θ argument broja z tj. kut kojeg radij-vektor od z zatvara s pozitivnim dijelom realne osi. Trigonometrijski prikaz olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva: umnožak/kvocijent dva kompleksna broja



Slika 6.10: Množenje s i je rotacija za pravi kut.

dana svojim trigonometrijskim prikazima je kompleksan broj čija apsolutna vrijednost je umnožak/kvocijent apsolutnih vrijednosti brojeva koje množimo/dijelimo, a čiji argument je zbroj/razlika argumenata brojeva koje množimo/dijelimo. Funkcija definirana s $f(z) = zZ$, gdje je $|Z| = 1$, je rotacija ravnine za arg$Z$. ☺

6.6 Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Promotrimo prvo potencije broja i. Imamo:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1\, i^3 = -i,\ i^4 = 1,$$

$$i^5 = i,\ i^6 = -1\, i^7 = -i,\ i^8 = 1, \ldots$$

Dakle, potenciranje broja i na višekratnik od 4 daje 1 i potencije se ciklički ponavljaju nakon svakog višekratnika od 4. Nadalje, potencije od i nalaze se na jediničnoj kružnici kao vrhovi kvadrata.

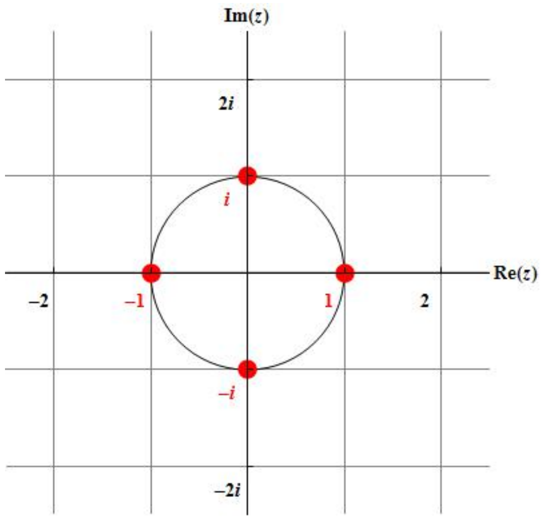
Za potenciranje kompleksnih brojeva na prirodne potencije se koristi de Moivre-ova formula

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

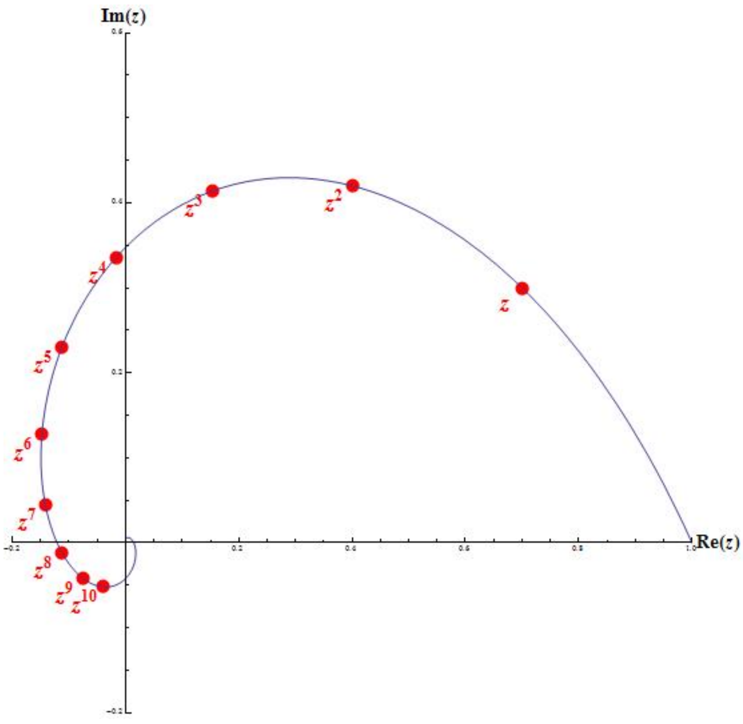
Primjer 140.

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos(4\cdot\pi/4) + i\sin(4\cdot\pi/4)) = 4(\cos\pi + \sin\pi) = -4.$$

Potencije od z se prema toj formuli dobivaju redom tako da argument povećavamo za argument od z i istovremeno potenciramo apsolutnu vrijednost, što je ilustrirano slikom 6.12.



Slika 6.11: Potencije broja i su ± 1 i $\pm i$.



Slika 6.12: Potencije kompleksnog broja (kojem je apsolutna vrijednost manja od 1).

Korjenovanje je kompliciranije jer svaki kompleksan broj z ima n n-tih korijena (tj. kompleksnih brojeva w takvih da je $w^n = z$ ima n). U to je lako uvjeriti se krenemo li od sljedeće definicije:

Definicija 21 (n-ti korijen kompleksnog broja)**.** *Za dani kompleksan broj z, njegov n-ti korijen je svaki kompleksan broj w sa svojstvom $w^n = z$.*

Napomena 11. *Zamjenom riječî „kompleksan" s „realan" u gornjoj definiciji dobijemo definiciju korijena realnih brojeva. Primjerice, realni broj je kvadatni korijen realnog broja 4 ako kvadriran daje 4. Kako 2 i -2 kvadrirani daju 4, slijedi da su 2 i -2 (svi) realni kvadratni korijeni od 4. Uočite važnost promatranog „ambijenta": u kontekstu realnih brojeva, kao korijeni nas zanimaju samo realni brojevi, a u kontekstu kompleksnih kompleksni.*

Primjer 141. *Kako kompleksni brojevi $1, i, -1, -i$ na četvrtu potenciju daju 1, vidimo da su svi oni kompleksni četvrti korijeni broja 1.*

Primjer 142. *Uzmimo $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Recimo da nas zanima(ju) njegov(i) treći korijen(i), tj. kompleksni brojevi $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sa svojstvom $w^3 = z$. De Moivreova formula povlači da mora biti zadovoljen uvjet*

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kako su apsolutne vrijednosti kompleksnih brojeva u zagradama jednake 1, zaključujemo prvo da mora vrijediti $|w|^3 = 8$, gdje $|w|$ mora biti nenegativan realan broj. On je stoga jednoznažno određen: $|w| = 2$.

Stoga dalje mora vrijediti $\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Jedan kut φ koji tu jednakost sigurno zadovoljava je $\varphi = \pi/12$. No, kosinus i sinus su periodične funkcije temeljnog perioda 2π, te stoga i svaki kut koji zadovoljava $3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zadovoljava traženi uvjet. Slijedi da svi argumenti

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{1+8k}{12}\pi$$

zadovoljavaju tražene uvjete, tj. svi kompleksni brojevi oblika

$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{1+8k}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1+8k}{12}\pi\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

su treći korijeni od z.

Na kraju, opet iz temeljnog perioda sinusa i kosinusa (ili pak skicom u kompleksnoj ravnini) vidimo da su samo tri od beskonačno mnogo brojeva w_k razlikuju, a to su w_0, w_1 i w_2. Stoga z ima tri kompleksna treća korijena:

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Predočavanjem tih triju brojeva u kompleksnoj ravnini (a i zato jer je razlika argumenata između svaka dva jednaka $2\pi/3 = 120°$, vidimo da se radi o vrhovima pravilnog trokuta.

Provođenjem slijeda zaključivanja iz gornjeg primjera za proizvoljne $z \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ zaključujemo: Svaki kompleksan broj z ima n kompleksnih n-tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta na kružnici radijusa $\sqrt[n]{|z|}$ (tu gledamo korijen u smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument $\frac{\theta}{n}$, a svaki sljedeći za $2\pi/n$ veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

Primjer 143. *Treći korijeni iz i imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt[3]{1} = 1$, a prvi po redu ima argument $\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Svaki sljedeći ima argument veći za $\frac{2\pi}{3}$ te su treći korijeni od i redom*

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$$

☼ **Ponovimo bitno...** Potencije z^n ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja z računaju se po de Moivreovoj formuli: apsolutna vrijednost od z^n je n-ta potencija apsolutne vrijednosti od z, a argument od z^n je n-terostruki argument od z. Svaki kompleksan broj z ima n n-tih korijena: to su kompleksni brojevi kojima je apsolutna vrijednost $\sqrt[n]{|z|}$, a argumenti su im redom $\frac{\theta+2k\pi}{n}$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gdje je θ argument od z (tj. to su vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu polumjera $\sqrt[n]{|z|}$, od kojih prvi vrh ima argument $\frac{\theta}{n}$). ☺

6.7 Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je svaki kompleksan broj z moguće zapisati u eksponencijalnom obliku kao

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Eksponencijalna funkcija u Eulerovoj formuli je eksponencijalna funkcija s bazom e proširena na kompleksne brojeve; ona ima mnoga specijalna svojstva, no osnovne formule za baratanje eksponencijalnim izrazima i dalje vrijede. Primijetimo da je ona periodična s temeljnim periodom 2π:

$$e^{i(\theta+2\pi))} = e^{i\theta+2\pi i} = e^{i\theta} \cdot e^{2\pi i} = e^{i\theta}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^{i\theta}.$$

Specijalno, imamo

$$e^{i\pi} = -1,$$
$$e^{i\pi/2} = i.$$

Primjer 144. *Zapišimo kompleksne brojeve $4+4i$ i -1 u eksponencijalnom obliku:*

Prikažemo li $4+4i$ u kompleksnoj ravnini kao točku s koordinatama $(4,4)$, očigledno je da je argument tog broja jednak $\frac{\pi}{4}$, a apsolutna vrijednost je po Pitagorinom teoremu $|z| = \sqrt{4^4+4^4} = 2\sqrt{2}$, dakle je $4+4i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Slično, broju -1 odgovara točka s koordinatama $(-1,0)$, koja je očigledno od ishodišta udaljena za $|z|=1$, a kut u odnosu na pozitivni smjer realne osi je $\varphi = \pi$, te je $-1 = e^{i\pi}$.

Primjer 145. *Zapišimo kompleksne brojeve $3e^{i\pi 2}$ i $\pi e^{i\pi 3}$ u obliku $x+yi$:*

Prvi broj ima argument $\frac{\pi}{2}$, dakle je čisto imaginaran s pozitivnim imaginarnim dijelom. Kako mu je apsolutna vrijednost 3, slijedi da je to $3i$. Drugi broj je najbolje prikazati točkom koja je na kružnici polumjera π oko ishodišta (jer mu je apsolutna vrijednosti π), a čija spojnica s ishodištem je pod kutem $\frac{\pi}{3}$ u odnosu na pozitivni dio realne osi. Ucrtavanjem okomica iz te točke na koordinatne osi dobivamo pravokutni trokut iz koga elementarnom trigonometrijom dobivamo $x = \pi \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ i $y = \pi \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$.

Primjer 146. *Vrijedi:*

$$\overline{z} = |z|e^{-i\theta}.$$

Naime, kako kompleksno konjugiranje u kompleksnoj ravnini možemo shvatiti kao zrcaljenje obzirom na realnu os, očigledno se ne mijenja apsolutna vrijednost broja, a argument postaje suprotan polaznom (ili jednak 2π minus polazni), te je

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} = re^{i(2\pi-\varphi)}.$$

Iz Eulerove formule dobiju se još preglednija pravila računa s kompleksnim brojevima:

$$zw = |z||w|e^{i(\theta+\phi)},$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta},$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\phi)},$$
$$z^n = |z|^n e^{in\theta}.$$

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobit ćemo i iduće dvije važne formule:

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},$$
$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Primjer 147.
$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0{,}208,$$
tj. i^i je realan broj! Uočimo: $e^{i\phi} = e^{i\phi+2k\pi}$. Stoga imamo beskonačno mnogo različitih vrijednosti od i^i, no one su sve realne.

Primjer 148. *Gdje se u kompleksnoj ravnini nalaze peti korijeni broja $32e^{i\cdot 3\pi/2}$?*

Peti korijeni nekog kompleksnog broja svi leže na kružnici polumjera jednakom (realnom) petom korijenu njegove apsolutne vrijednost, dakle u našem slučaju leže na kružnici polumjera $\sqrt{32} = 2$ oko ishodišta. Ti korijeni moraju biti raspoređeni kao vrhovi pravilnog peterokuta na toj kružnici zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom e u kompleksnim brojevima (posljedica Eulerove formule $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$). Prvi od pripadnih argumenata je petina od $\frac{3\pi}{2}$, dakle $\frac{3\pi}{10}$, a svaki sljedeći je u odnosu na prethodni veći za $\frac{2\pi}{5}$ (treba ih biti 5 u punom krugu), dakle se naši korijeni nalaze pod kutevima $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{7\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{11\pi}{10}$, $\frac{11\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{15\pi}{10}=\frac{3\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}=\frac{19\pi}{10}$.

Primjer 149. *Izračunajmo $\sqrt{(3+4i)^{12}}$.*

Očito se traže oba kompleksna druga korijena od $(-3-4i)^{12}$. Za potenciranje (a i korjenovanje) je pogodniji eksponencijalni oblik. Prvo je $-3-4i = 5e^{i\varphi}$, gdje je φ onaj od dvaju mogućih kuteva između 0 i 2π koji odgovara točki u trećem kvadrantu (jer su i realni i imaginarni dio broja $-3-4i$ negativni), a to je $\varphi = \pi + \mathrm{arctg}\,(4/3) \approx 4{,}06889 \approx 233°13'$. Stoga je $(-3-4i)^12 = (5e^{i\varphi})^{12} = 5^{12}e^{12\varphi i}$. Oba kvadratna korijena moraju imati istu apsolutnu vrijednost, koja je jednaka pozitivnom (realnom) kvadratnom korijenu apsolutne vrijednosti broja kojeg korjenujemo, dakle im je apsolutna vrijednost $(5^{12})^{1/2} = 5^6 = 15625$. Prvi od dva kvadratna korijena mora imati argument takav da udvostručen daje 12φ, dakle prvi od dva kvadratna korijena od $5^{12}e^{12\varphi i}$ ima argument $6\varphi \approx 24{,}4133$, dok drugi ima argument za pola kruga dalje, dakle $\pi + 6\varphi \approx 27{,}5549$. Zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom e, s temeljnim periodom 2π, od izračunatih argumenata možemo oduzimati višekratnike od 2π dok ne dobijemo argumente između 0 i 2π, bez da smo time promijenili naša dva kvadratna korijena. Kako je $24{,}4133 - 6\pi = 5{,}56734 = \varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle$ i $27{,}5549 - 8\pi = 2{,}42216 = \varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle$, zaključujemo da su dva tražena kompleksna korijena $15625e^{i\varphi_2}$ i $15625e^{i\varphi_1}$.

Primjer 150. *Kristalne strukture su periodične u tri nezavisna smjera. Tu periodičnost opisuje kristalna rešetka (vidi poglavlje* **??***). Funkcije koje opisuju periodične strukture poput kristala moraju i same biti periodične.*

Jednodimenzionalna se rešetka sastoji od u parovima jednako udaljenih točaka na pravcu. Ako im je razmak a, svaka funkcija f čija je periodičnost u skladu s periodičnošću rešetke mora imati svojstvo $f(x+a) = f(x)$ za sve x iz domene. Najjednostavnije takve funkcije su $\sin(2\pi x/a)$ i $\cos(2\pi x/a)$, koje se u kompleksnom kontekstu svode na samo jednu funkciju
$$f(x) = e^{2\pi x i/a}.$$

U trodimenzionalnom se kontekstu periodična funkcija s periodima a, b i c (u tri nezavisna smjera) dobije množenjem takvih funkcija, tj. prototip takve funkcije je

$$f(x,y,z) = e^{2\pi xi/a}e^{2\pi yi/b}e^{2\pi zi/a}.$$

Primjer 151. *Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini, koji se u kemiji koristit primjerice za opis rotacije planarne molekule, ima oblik*

$$-\frac{\hbar^2}{2I}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\psi,$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ (varijabla valne funkcije ψ) opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav.

Uvrstimo li $\psi(\theta) = Ce^{ia\theta}$ u jednadžbu ($a^2 = 2IE/\hbar^2$), vidimo da ju zadovoljava. Da bi to rješenje imalo fizički smisao (tj. da stvarno opisuje rotaciju u ravnini), mora biti periodično s periodom 2π. Iz toga je lako dobiti uvjet da $2\pi a$ mora biti višekratnik od 2π, tj. $a = n \in \mathbb{Z}$. Stoga su fizikalno smislena rješenja naše jednadžbe

$$\psi_n(\theta) = Ce^{in\theta}$$

gdje je $n \in \mathbb{Z}$ „kvantni broj”, a odgovarajući iznosi energija su $E_n = \hbar^2 n^2/(2I)$.

☼ **Ponovimo bitno...** Eulerova formula daje eksponencijalni zapis kompleksnog broja u obliku $z = |z|e^{i\theta}$, a ona glasi $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$. Za račun s kompleksnim brojevima prikazanim u eksponencijalnom obliku primjenjuju se uobičajena pravila za množenje, dijeljenje i potenciranje potencija, uz uzimanje u obzir periodičnosti kompleksne eksponencijalne funkcije. ☺

6.8 Zadaci za vježbu

1. Izračunajte

   (a) i^3, i^8, i^{46}, i^{2009}.

   (b) $(2-3i)(1+i)$, $\frac{4-2i}{1+i}$, $\frac{(1-3i)(i-1)}{2+2i}$, $\frac{3+i}{3i-4} - \frac{i}{i+2}$.

   (c) $(1-i)^2$, $(1+i)^6$, $(1-i)^{32}$, $\frac{(1-i)^5+1}{(1-i)^5-7i}$.

   R: (a) $-i,\ 1,\ -1,\ i$. (b) $5-i,\ 1-3i,\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{14}{25}-\frac{23}{25}i$.
   (c) $-2i,\ -8i,\ 2^{16},\ -i$.

2. Odredite apsolutnu vrijednost i argument kompleksnog broja z, ako je

   (a) $z = -i$.

   (b) $z = -6$.

   (c) $z = 1 - i$.

   (d) $z = -1 + \sqrt{3}\, i$.

(e) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

R: (a) $|z| = 1,\ \theta = \frac{3\pi}{2}$. (b) $|z| = 6,\ \theta = \pi$. (c) $|z| = \sqrt{2},\ \theta = \frac{7\pi}{4}$.
(d) $|z| = 2,\ \theta = \frac{2\pi}{3}$. (e) $|z| = \sqrt{1},\ \theta = \frac{\pi}{6}$.

3. Odredite parametre $b, c \in \mathbb{R}$ tako da polinom $p(x) = x^2 + bx + c$ zadovoljava

$$p(-1+i) = 4+i\ .$$

R: $b = 3,\ c = 7$.

4. Odredite polinom p trećeg stupnja sa realnim koeficijentima takav da vrijedi

$$p(1+i) = 6+9i\ , \quad p(-i) = 2-4i.$$

R: $p(x) = x^3 + x^2 + 5x + 3$.

5. Odredite $z \in \mathbb{C}$ sa svojstvom

   (a) $|z| - \overline{z} = 1 + 3i$.

   (b) $\overline{z} = z^2$.

   (c) $|\frac{z+1}{z}| = 1,\ \frac{\overline{z}}{z} = -i$.

   (d) $|z| = \sqrt{2},\ \theta = \frac{\pi}{4}$.

R: (a) $z = -4+3i$. (b) $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (c) $z = -\frac{1}{2}(1+i)$. (d) $z = \pm 1 \pm i$.

6. Odredite trigonometrijski prikaz kompleksnog broja z, ako je

   (a) $z = 2i$.

   (b) $z = -4$.

   (c) $z = 1 - i$.

   (d) $z = -\sqrt{3} + i$.

   (e) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

   (f) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

R: (a) $z = 2\big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\big)$. (b) $z = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$.
(c) $z = \sqrt{2}\,\big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\big)$. (d) $z = 2\big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\big)$.
(e) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$. (d) $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\big(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\big)$.

7. Koristeći de Moivre-ovu formulu, izračunajte

   (a) $(1+\sqrt{3}\, i)^5$.

   (b) $\big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\big)^{18}$.

   (c) $(\sqrt{3} - 3i)^4$.

R: (a) $16(1-\sqrt{3}\,i)$. (b) 1. (c) $72(-1+\sqrt{3}\,i)$.

8. Izračunajte

   (a) $\sqrt[3]{-8}$.

   (b) $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i}$.

   (c) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}\,i}$.

   (d) $\sqrt[5]{-32\,i}$.

   R: (a) $1+\sqrt{3}\,i,\ -2,\ 1-\sqrt{3}\,i$. (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\,i$.
   (c) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{(12k+5)\pi}{24}+i\sin\frac{(12k+5)\pi}{24}\right),\quad k=0,1,2,3.$
   (d) $2\left(\cos\frac{(4k+3)\pi}{10}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{10}\right),\quad k=0,1,2,3,4.$

9. Odredite sva tri korijena z_k jednadžbe

$$(2+5i)\,z^3=2i-5$$

   te izračunajte $|z_2-z_1|$.
   R: $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,i,\ z_2=-i,\ \ |z_2-z_1|=\sqrt{3}$.

10. Riješite jednadžbu

$$z^3-2\,\frac{1-i}{1+i}=(1-i)^5+2\,i^{20}-4\overline{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)}\,.$$

   R: (a) $z_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{(8k+5)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k+5)\pi}{12}\right),\quad k=0,1,2.$

Poglavlje 7

Klasična algebra vektora i analitička geometrija prostora

7.1 Klasična algebra vektora: Vektorski prostori V^2, V^3, $V^2(0)$ i $V^3(O)$

Linearna algebra je područje matematike koje se bavi vektorima i vektorskim prostorima. Vektori se često definiraju kao matematički objekti koji imaju iznos, smjer i orijentaciju. Takva definicija nije točna[1], no ona opisuje bitna svojstva onih vektora koji se nazivaju geometrijskim vektorima. U kontekstu vektora spominju se i skalari: to su brojevi (u pravilu: realni ili kompleksni), kojima po određenim pravilima možemo množiti vektore. Ako kao skalare koristimo realne brojeve, govorimo o realnim vektorskim prostorima. Svi prostori u ovom poglavlju su realni. Za sada ćemo kao dvije glavne karakteristike svih objekata koji se mogu zvati vektorima istaknuti:

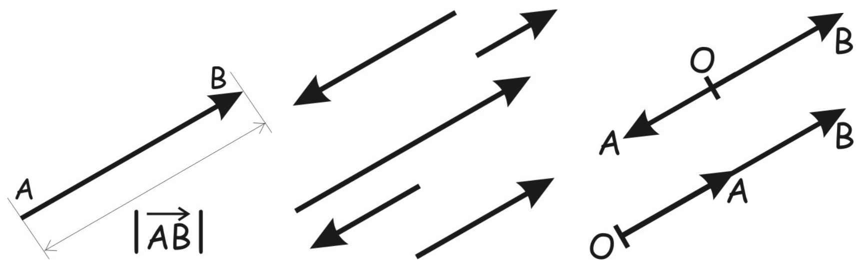
- ♡ vektore možemo međusobno zbrajati i
- ♡ možemo ih množiti skalarima.

Napomena 12. *Mnoge fizikalne veličine se uz odabir jedinice mogu jednoznačno opisati brojevima: masa, gustoća, duljina, površina, volumen, energija, rad, ... Takve veličine nazivaju se skalarnim veličinama. Vektorske veličine su one fizikalne veličine za koje nije dovoljan jedan broj da ih opiše, primjerice brzina, ubrzanje, sila, dipolni moment, ..., te ih prirodno možemo opisati pomoću geometrijskih vektora.*

U ovom poglavlju bavit ćemo se računom s geometrijskim vektorima u ravnini (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru V^2 odnosno $V^2(O)$) i u uobičajenom trodimenzionalnom prostoru (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru V^3 odnosno $V^3(O)$). U slučaju prostorâ $V^2(O)$ i $V^3(O)$ vektori su orijentirane dužine[2]

[1] Pravilna definicija glasi: Vektor je element vektorskog prostora. No što je vektorski prostor saznat ćemo kasnije, u poglavlju **??**.

[2] Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina kojoj je definirano koja od dvije rubne točke je početak (A), a koja kraj (B).



(a) (b) (c)

Slika 7.1: Duljina, smjer i orijentacija vektora.

kojima je početak u ishodištu O, dakle elementi tih prostora (vektori) su radij-vektori $\overrightarrow{OT}$ različitih točaka T u ravnini odnosno prostoru. Prostore $V^2(O)$ i $V^3(O)$ zvat ćemo i dvo- odnosno trodimenzionalnim prostorima radij-vektora.

U prostorima V^2 i V^3 podrazumijeva se da sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom[3] jedne odabrane orijentirane dužine predstavljaju isti vektor $\overrightarrow{v}$; bilo koja od njih zove se reprezentantom vektora $\overrightarrow{v}$. Iako bi prema gornjem formalno u V^2 i V^3 trebalo imati različite oznake za vektor i njegov reprezentant, uobičajeno je pisati $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ ako je $\overrightarrow{AB}$ odabrani reprezentant vektora $\overrightarrow{v}$. U $V^2(O)$ i $V^3(O)$ svaki vektor ima samo jedan reprezentant (onaj s početkom O), a u V^2 i V^3 svaki vektor ima beskonačno mnogo reprezentanata.

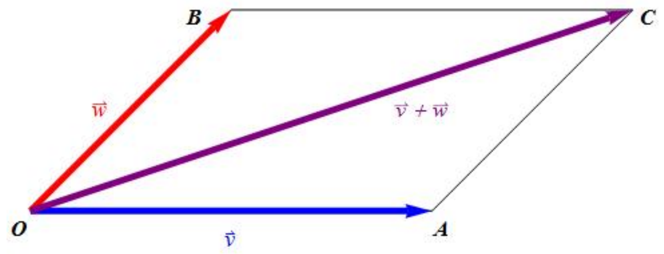
Kao što je rečeno, geometrijski vektori su objekti koji su opisani s tri podatka: smjer, orijentacija i duljina. Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti smjer. Za nulvektor[4] smjer nije određen (odnosno: možemo reći da nulvektor ima isti smjer kao svi vektori). Ako za dva nenul vektora istog smjera odaberemo reprezentante s istim početkom O, dakle dvije orijentirane dužine $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, kažemo da ta dva vektora imaju istu orijentaciju ako su točke A i B s iste strane točke O, a ako je O između A i B kažemo da vektori imaju suprotnu orijentaciju. Duljina dužine koja je reprezentant vektora $\overrightarrow{v}$ zove s duljina (iznos) vektora i označava s $|\overrightarrow{v}|$ ili jednostavno s v. Vektori duljine 1 (gdje 1 predstavlja odabranu mjernu jedinicu duljine) zovu se jedinični vektori.

7.1.1 Zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom

U svakom od navedenih vektorskih prostora zbrajanje se definira na isti način, pomoću pravila paralelograma.

Definicija 22 (Zbrajanje vektora)**.** *Ako su $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ dva vektora iz nekog[5] od prostora V^2, $V^2(O)$, V^3 ili $V^3(O)$, njihov zbroj je vektor $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ u istom prostoru definiran ovako: za $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ odaberemo reprezentate s istim početkom O. Neka je $\overrightarrow{OA}$ odabrani*

[3]Ovdje ćemo pod „$\overrightarrow{A'B'}$ je translatirana $\overrightarrow{AB}$" podrazumijevati: $ABB'A'$ je paralelogram.
[4]Reprezentant nulvektora je svaka orijentirana dužina kojoj se podudaraju početak i kraj.
[5]Naravno, oba vektora moraju biti iz *istog* prostora da bismo ih mogli zbrajati.



Slika 7.2: Zbrajanje vektora.

reprezentant za $\vec{v}$, a $\overrightarrow{OB}$ za $\vec{w}$. Dopunimo AOB do paralelograma AOBC (dakle, $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ su dvije stranice tog paralelograma). Tada je $\overrightarrow{OC}$ reprezentant vektora $\vec{v}+\vec{w}$.

Gornja definicija ilustrirana je slikom 7.2.

Svojstva zbrajanja vektora slična su svojstvima zbrajanja brojeva: zbrajanje vektora je asocijativno (kod uzastopnog zbrajanja ne trebaju nam zagrade), ima neutralni element (nulvektor je vektor $\vec{0}$ koji pribrojen bilo kom vektoru ne mijenja taj vektor), svaki vektor ima svoj suprotni vektor (suprotni vektor vektora $\vec{v}$ je vektor $\vec{w}$ sa svojstvom da je $\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$; suprotni vektor od $\vec{v}$ se označava s $-\vec{v}$). Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: za sve $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ iz istog od prostora V^2, V^3, $V^2(0)$, $V^3(O)$ vrijedi

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}),$$

$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v},$$

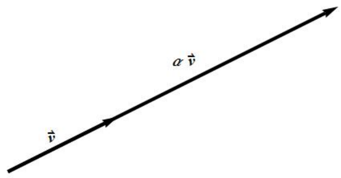
$$\vec{v}+(-\vec{v})=-\vec{v}+\vec{v}=\vec{0},$$

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}.$$

Oduzimanje vektora se definira kao pribrajanje suprotnog vektora: $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$. Zbrajanje vektora je također komutativno (ne treba paziti na redoslijed).

U kontekstu prostora V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$ kao skalari uvijek se uzimaju realni brojevi. Množenje vektora skalarom se definira na sljedeći način:

- nulvektor pomnožen bilo kojim skalarom daje nulvektor i bilo koji vektor pomnožen s nulom daje nulvektor ($\alpha \cdot \vec{0}=0 \cdot \vec{v}=\vec{0}$ za sve skalare α i vektore $\vec{v}$);
- za sve ostale slučajeve umnožak sa skalarom daje vektor istog smjera, s tim da vrijedi:
  - ako je $\vec{v}$ vektor i α skalar, onda je duljina vektora $\alpha\vec{v}$ jednaka $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$ i
  - ako je $\vec{v}$ vektor i $\alpha>0$ skalar, onda $\alpha\vec{v}$ ima istu orijentaciju kao $\vec{v}$, a ako je $\alpha<0$, onda $\alpha\vec{v}$ ima suprotnu orijentaciju od $\vec{v}$.



Slika 7.3: Množenje vektora skalarom.

Svojstva množenja skalarom su također prirodna i poopćavaju svojstva množenja brojeva. Množenje vektora brojem 1 ga ne mijenja, množenje vektora skalarom je distributivno prema zbrajanju (možemo izlučivati skalar odnosno vektor) i kvaziasocijativno (ako množimo dva skalara i jedan vektor, smijemo seliti zagrade). Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: za sve $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ iz istog od prostora V^2, V^3, $V^2(0)$, $V^3(O)$ i za sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v},$$

$$\alpha(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \alpha\overrightarrow{v} + \alpha\overrightarrow{w},$$

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{v},$$

$$(\alpha\beta)\overrightarrow{v} = \alpha(\beta\overrightarrow{v}).$$

Navedene dvije operacije (zbrajanje vektora međusobno i množenje vektora skalarom) te pripadnih osam istaknutih svojstava karakteristični su za sve vektorske prostore, a ne samo za prostore V^2, V^3, $V^2(0)$, $V^3(O)$. Zapravo, ta svojstva definiraju pojam vektorskog prostora, no o tom potom.

7.1.2 Baza prostora i koordinatizacija

Kombinacijom opisanih dviju operacija s vektorima grade se izrazi koji se zovu linearne kombinacije vektora: linearna kombinacija vektorâ $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, ... dobije se njihovim množenjem nekim skalarima α, β, ... te zatim zbrajanjem, tj. linearna kombinacija je vektor oblika $\alpha\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{w} + \ldots$. Primjerice, $2\overrightarrow{v} - 4\overrightarrow{w} + \overrightarrow{x}$ je jedna linearna kombinacija vektora $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ i $\overrightarrow{x}$.

Za dva ili više vektora kažemo da su kolinearni ako su istog smjera. Preciznije, dva vektora su kolinearna ako se jedan može zapisati kao skalar puta drugi: $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su kolinearni ako postoji skalar α takav da je

$$\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{w}.$$

Iz definicije vidimo da je nulvektor kolinearan svakom vektoru: za $\overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{v}$ odabirom $\alpha = 0$ dobivamo $\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{v}$.

Za tri ili više vektora (u V^3 ili $V^3(0)$) kažemo da su komplanarni ako im se mogu odabrati reprezentanti koji leže u istoj ravnini. Preciznije, tri vektora su komplanarna ako se jedan od njih može zapisati kao linearna kombinacija druga dva: $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su komplanarni ako postoje skalari α i β takvi da je

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}.$$

Pogledamo li bolje obje definicije, vidimo da u obje definicije jedan od promatranih vektora izražavamo kao linearnu kombinaciju (jedno- odnosno dvočlanu) ostalih vektora. Kažemo da su kolinearnost i komplanarnost specijalni slučajevi linearne zavisnosti.

Definicija 23 (Linearna (ne)zavisnost)**.** *Skup vektora $\{\vec{v}, \vec{w}, \ldots\}$ je linearno zavisan ako se (bar) jedan od vektora tog skupa može zapisati kao linearna kombinacija ostalih vektora. Skup vektora koji nije linearno zavisan zove se linearno nezavisan skup.*

Primjetimo nekoliko detalja. Prvo, svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je uvijek linearno zavisan: ako gledamo skup $\{\vec{0}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots\}$, odmah vidimo da se sigurno jedan od tih vektora, a to je nulvektor, može napisati kao linearna kombinacija ostalih: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} + \ldots$. Nadalje, svaki jednočlan skup $\{\vec{v}\}$ s $\vec{v} \neq \vec{0}$ je linearno nezavisan.

Definicija 24 (Dimenzija vektorskog prostora)**.** *Najveći broj elemenata koji u danom vektorskom prostoru može sadržavati neki linearno nezavisan skup vektora zove se dimenzijom tog vektorskog prostora.*

Tako pravac možemo zvati jednodimenzionalnim jer su svaka dva ne-nulvektora na pravcu kolinearni, tj. linearno zavisni, ravnina je dvodimenzionalna — lako nađemo dva nekolinearna vektora, ali svaki treći je s njima komplanaran, a naš uobičajeni prostor je trodimenzionalan.

Definicija 25 (Baza)**.** *Baza vektorskog prostora je bilo koji linearno nezavisan skup vektora koji ima onoliko elemenata kolika je dimenzija prostora.*

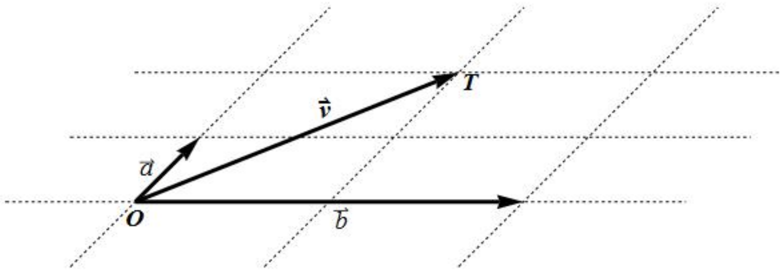
Osnovno svojstvo baze prostora je da se svaki vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, i to na jedinstven način. Takav zapis zovemo prikaz vektora u bazi.

Primjer 152. *Uzmimo dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u $V^2(O)$. Kako se radi o dvodimenzionalnom prostoru, njih dva čine bazu. Svaki vektor $\vec{v}$ iz $V^2(O)$ sad se može zapisati kao*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

s jedinstveno određenim skalarima α i β. Tako za slučaj prikazan slikom 7.4 vrijedi $\vec{v} = 2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Nakon uvođenja pojma baze prostora, lako se uvodi pojam koordinata, što omogućuje lakši (i manje geometrijski) račun s vektorima. Koordinatni sustav u ravnini odnosno prostoru sastoji se od jedne točke O koju zovemo ishodište koordinatnog sustava te jedne baze $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ odnosno $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ pripadnog vektorskog prostora (u pravilu se ta baza poistovjećuje s pripadnim radij-vektorima, tj. reprezentantima vektora baze



Slika 7.4: Prikaz vektora u bazi.

koji počinju u O). Sad svaku točku T ravnine/prostora na jedinstven način možemo opisati njenim radij-vektorom $\overrightarrow{OT}$. On se pak na jedinstven način može prikazati u bazi, tj. zapisati kao $\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ (u ravnini) odnosno $\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$ (u prostoru). Uređeni par brojeva (x, y) odnosno trojka (x, y, z) zovu se koordinate točke T. Pripadni radij-vektor tada zapisujemo i kao $[x, y]$ (ili: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) odnosno $[x, y, z]$ (ili: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$).

Primjer 153. *Točka T na slici 7.4, a obzirom na bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, ima koordinate $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Pripadni radij-vektor $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{v}$ možemo zapisati s $\left[2, \frac{1}{2}\right]$ ili kao*

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Primjer 154. *Ako netko govori o vektoru $\vec{v} = [2, -1, 3]$ u prostoru, to nije jednoznačno određeno bez da kaže obzirom na koju bazu su koordinate dane. Ako znamo da se radi o koordinatnom zapisu obzirom na bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, onda je $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.*

Primjer 155. *Koordinate vektorâ baze $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ obzirom na tu istu bazu su redom $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ i $[0, 0, 1]$.*

Uz koordinatni prikaz, lako je opisati zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Ipak, budite oprezni: **koordinatne operacije s vektorima imaju smisla samo ako smo odabrali i fiksirali bazu prostora, a koordinate rezultata ovise o izboru baze**. Drugim riječima, vektore možemo zbrajati koordinatno samo ako su im koordinate dane obzirom na istu bazu. Za dvodimenzionalni slučaj pravila su

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y'],$$

$$\alpha[x, y] = [\alpha x, \alpha y].$$

U trodimenzionalnom slučaju formule su analogne: vektore u koordinatnom prikazu zbrajamo tako da zbrojimo odgovarajuće koordinate, a množimo skalarom tako da im sve koordinate pomnožimo tim skalarom.

Primjer 156. *Poznato je da se triklinski kristalni sustav sastoji od kristala čija se jedinična ćelija može opisati kao paralelepiped s bridovima različitih duljina*[6] *($a \neq b \neq c \neq a$) koji tvore međusobno različite kuteve*[7] *($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$) koji su također različiti od pravog kuta. I u drugim kristalnim sustavima jedinična ćelija je razapeta s tri nekomplanarna vektora, s eventualnim specijalnim odnosima među njima.*

Želimo li opisivati položaje npr. atoma u kristalnoj strukturi, pogodno ih je opisati pomoću smjerova i duljina bridova jedinične ćelije. Stoga se za takve opise obično kao ishodište bira vrh jedne jedinične ćelije, a kao baza se biraju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ koji razapinju jediničnu ćeliju. Tako odabrana baza zove se kristalografska baza. Točke jedinične ćelije obzirom na kristalografsku bazu imaju kao koordinate brojeve $x, y, z \in [0, 1\rangle$.

7.1.3 Skalarni produkt vektora

U kontekstu klasične algebre vektora moguće je i međusobno množiti vektore. Kod jednog tipa produkta rezultat je skalar (skalarni produkt), a kod drugog vektor (vektorski produkt).

Definicija 26 (Skalarni produkt u V^2, V^3, $V^2(O)$ ili $V^3(O)$)**.** *Skalarni produkt vektora iz V^2, V^3, $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ definiran je s*

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}| \cos\varphi,$$

gdje je $\varphi \in [0, \pi]$ kut koji zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ (biramo manji od dva moguća kuta). Skalarni produkt se često označava i s $(\vec{v}|\vec{w})$.

Tako definiran skalarni produkt ima sljedeća četiri svojstva (za sve vektore i skalare koji se u izrazima pojavljuju):

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0},$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v},$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$
$$(\alpha \vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

Zapravo se, slično kao i kod definicije zbrajanja i množenja skalarom, radi o specijalnom slučaju općenitijeg konteksta: skalarni produkt na (realnom) vektorskom prostoru je operacija $\cdot$ koja dvama vektorima pridružuje skalar, tako da vrijede gornja četiri svojstva. Ako imamo vektorski prostor na kojem je definiran i skalarni produkt, govorimo o unitarnom prostoru.

Osim gornjih svojstava, zgodno je uočiti da vrijedi i

[6] Zapravo, duljine bridova su potpuno proizvoljne — za razliku od drugih kristalnih sustava, na bridove jediničnih ćelija kristalâ triklinskog sustava ne postoji nikakvo ograničenje [?].

[7] Kao i za duljine bridova, zapravo načelno nije zabranjeno da se neki kutovi podudaraju. Pritom kutevi nisu međusobno nezavisni, nego moraju zadovoljavati sustav nejednakosti $0 < \alpha+\beta+\gamma < 360°$, $0 < \alpha+\beta-\gamma < 360°$, $0 < \alpha-\beta+\gamma < 360°$, $0 < -\alpha+\beta+\gamma < 360°$ [?].

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}.$$

Taj se izraz u općenitijim slučajevima koristi kao definicija duljine vektora u unitarnom prostoru.

Dva vektora zovu se ortogonalnim ako im je skalarni produkt nula:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$

Lako se vidi da je time u slučaju skalarnog produkta $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi$ sačuvana uobičajena definicija ortogonalnosti. Svaki skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna je linearno nezavisan.

Baza unitarnog prostora zove se ortonormirana baza ako su svi vektori u njoj jedinični i međusobno ortogonalni. To posebno znači da za vektore ortonormirane baze vrijedi: ako bilo koji skalarno pomnožimo sam sa sobom, dobijemo 1, a ako pomnožimo bilo koja dva vektora ortonormirane baze, dobijemo 0.

Standardne ortonormirane baze za V^2 i V^3 označavaju se $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ odnosno $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Uzmimo da su dva vektora dani koordinatno s $\vec{v} = [x, y]$ i $\vec{w} = [x', y']$ obzirom na ortonorminanu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Tada je

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + x'y\vec{i} \cdot \vec{j} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}.$$

Kako je baza ortonormirana, imamo $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ pa dobivamo formulu

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = [x, y] \cdot [x', y'] = xx' + yy'.$$

Analogno bi se u trodimenzionalnom slučaju dobilo

$$[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = xx' + yy' + zz'.$$

Time smo dobili formule za skalarni produkt u koordinatnom obliku. No, **oprez!!!**: iz izvoda se vidi da one vrijede samo ako je referentna baza ortonormirana.

U slučaju koordinatizacije pomoću ortonormirane baze za specijalni slučaj $\vec{v} \cdot \vec{v} = [x, y] \cdot [x, y] = x^2 + y^2$ iz $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ dobivamo formulu za duljinu vektora

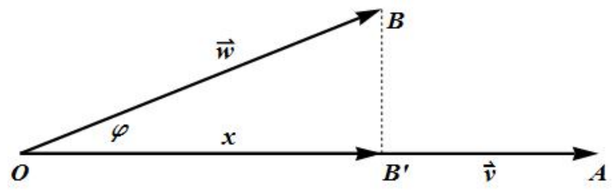
$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

koja u trodimenzionalnom slučaju poprima oblik $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. I te dvije formule vrijede samo ako je referentna baza ortonormirana.

Jedna od važnih primjena skalarnog produkta je određivanje kuteva. Naime, umjesto da izraz $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\varphi$ koristimo kao definiciju skalarnog produkta, možemo definirati: ako je dan skalarni produkt $\cdot$, kut φ među vektorima definiran je formulom

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}.$$

Koristili mi taj izraz kao definiciju kuta ili kao drugi oblik definicije skalarnog produkta, za uobičajenu geometriju dođe nam na isto: ako znamo odrediti duljine i skalarni produkt dva vektora, primjerice pomoću koordinatnog zapisa, onda možemo gornjom formulom odrediti i njihov kut.



Slika 7.5: Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi.

Primjer 157. *Pomoću skalarnog produkta se može odrediti udaljenost atoma ili kut među vezama atoma ako su poznati njihovi položaji (radij-vektori) u kristalnoj rešetki. Primjerice, za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom (duljinu brida a jedinične ćelije proglasimo jediničnom duljinom). Ako su nam u jediničnoj ćeliji dva atoma na pozicijama* $A = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ *i* $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$*, udaljenost ta dva atoma iznosi*

$$|AB| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = \left|\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right] - \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right]\right| = \left|\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}.$$

Ukoliko je duljina brida jedinične ćelije recimo $a = 320{,}3$ pm*, kako smo ju koristili kao jedinicu duljine (da bismo imali ortonormiranu bazu), slijedi da je stvarna udaljenost između atoma jednaka* $\frac{\sqrt{14}}{6} \cdot 320{,}3$ pm $= 199{,}7$ pm.

Ako bi se u istoj jediničnoj ćeliji nalazio još jedan atom na položaju $C = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ *te ako su atomi vezani tako da je* C *vezan s* A *i* B*, ali* A *i* B *međusobno nisu, kut veze* $\varphi = \angle ACB$ *je dan s*

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right] \cdot \left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right]}{\left|\left[-\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{15}\right]\right| \left|\left[-\frac{2}{15}, -\frac{3}{10}, \frac{1}{5}\right]\right|} =$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{15} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{25} + \frac{4}{225}} \cdot \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{9}{100} + \frac{1}{25}}} = \frac{-\frac{7}{150}}{\frac{133}{900}} = -\frac{6300}{19950} = -0{,}3158$$

te je $\varphi = 108°25'$.

Druga bitna primjena skalarnog produkta je računanje duljine ortogonalne projekcije jednog vektora na drugi. Recimo da želimo odrediti ortogonalnu projekciju vektora $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ na vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ i neka je ta ortogonalna projekcija $\overrightarrow{OB'}$ (vidi sliku 7.5). Ta ortogonalna projekcija je očito kolinearna s $\vec{v}$. Neka je njena duljina x.

Tada iz pravokutnog trokuta OBB' dobivamo $x = |\vec{w}|\cos\varphi$ pa množenje s $|\vec{v}|$ daje $x|\vec{v}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\varphi$ odnosno $x|\vec{v}| = \vec{v} \cdot \vec{w}$. Dakle, duljina ortogonalne projekcije $\vec{w}$ na $\vec{v}$ je

$$x = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|}.$$

Primijetimo da se zapravo ne radi o duljini, jer x može ispasti negativan (ako je $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$). U oba slučaja duljina je $|x|$, a ako je $\varphi \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, onda projicirani vektor ima suprotnu orijentaciju od $\overrightarrow{v}$.

Kako su $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'}$ kolinearni, prirodno je pitanje za koji α je $\overrightarrow{OB'} = \alpha \overrightarrow{v}$? To Skalar α određujemo na sljedeći način: $\overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{v} = x|\overrightarrow{v}|$ (po definiciji skalarnog produkta), a s druge strane je $\overrightarrow{OB'} \cdot \overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \alpha |\overrightarrow{v}|^2$ pa je $x|\overrightarrow{v}| = \alpha |\overrightarrow{v}|^2$. Stoga je $\alpha = x|\overrightarrow{v}|$, tj.

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{x}{|\overrightarrow{v}|} \overrightarrow{v}.$$

Za kraj priče o skalarnim produktima spomenimo jednu važnu nejednakost[8] koja vrijedi za sve vrste skalarnih produkata:

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}|^2 \leq (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}),$$

odnosno kraće

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{w}|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ kolinearni.

7.1.4 Vektorski i mješoviti produkt vektora

Osim skalarnog produkta, na prostorima V^3 i $V^3(0)$ definirana je još jedna vrsta produkta vektora.

Definicija 27 (Vektorski produkt). *Vektorski produkt dva nekolinearna vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ je vektor $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ koji je okomit na oba vektora, duljina od $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ jednaka je $|\overrightarrow{v}|\,|\overrightarrow{w}| \sin \varphi$ (tj. po iznosu je jednaka površini paralelograma razapetog s $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$), a $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ je orijentiran tako da $\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}\}$ u navedenom redoslijedu čine desnu bazu (po definiciji, produkt dva kolinearna vektora je nulvektor). Vektorski produkt dva kolinearna vektora (ili nekog vektora s nulvektorom) je nulvektor.*

Napomena 13. *Uočimo da gornja definicija duljine vektorskog produkta povlači da bi mu jedinica bila kvadrat jedinice duljine, dakle bi duljina imala fizikalnu dimenziju površine, što baš i nije smisleno. Ako bismo pak dogovorno promijenili jedinicu duljine vektorskog produkta u polaznu jedinicu duljinu, duljina vektorskog produkta bi ovisila o odabranim polaznim jedinicama (recimo, vektorski produkt dvaju okomitih vektora od kojih je jedan dug 1 cm, a drugi 2 cm, imao bi duljinu $1 \cdot 2 = 2$ cm, ali ako bismo jedinicu duljine promijenili u mm isti taj vektorski produkt bi imao duljinu $10 \cdot 20 = 200$ mm $\neq 2$ cm).*

Dva su moguća rješenja tog problema. Prvi, u skladu sa standardnim matematičkim opisom vektorskog produkta, je sve duljine vektora doživljavati kao čiste brojeve (kao što to činimo primjerice s varijablama koje se nanose na koordinatne osi), a u konkretnim primjenama biti svijestan da se zapravo radi o stvarnim duljinama podijeljenim s jedinicom, koja u slučaju vektorskog (kao i skalarnog) produkta nije jedinica duljine, već površine. U tom duhu bilo bi i korištenje izraza "iznos" umjesto "duljina" vektora.

[8]Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

Drugi pristup (istovremeno i matematički i fizikalno konzistentan) bio bi tumačenje vektorskog produkta kao orijentirane površine, tj. mogla bi se kao definicija $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ uzeti da je to površina paralelograma određenog vektorima $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ i orijentirane proizvoljno dugim vektorom okomitim na paralelogram i orijentiranim u skladu s pravilom desne ruke.

Pritom, „desna baza” znači: kad bismo kažiprst desne ruke držali tako da na njemu leži $\overrightarrow{v}$, a na podlaktici $\overrightarrow{w}$, onda palac pokazuje smjer (orijentaciju) od $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u},$$

$$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u},$$

kvaziasocijativnost

$$\alpha(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\alpha \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w},$$

ortogonalnost

$$\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0, \quad (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{w} = 0,$$

i antikomutativnost

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}.$$

Iz tih svojstava slijedi primjerice

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

$$(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v},$$

$$(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v'}) \cdot (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w'}) = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}) \cdot (\overrightarrow{v'} \cdot \overrightarrow{w'}) - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w'}) \cdot (\overrightarrow{v'} \cdot \overrightarrow{w}),$$

$$|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|^2 = |\overrightarrow{v}|^2\,|\overrightarrow{w}|^2 - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})^2.$$

Napomenimo: vektorski produkt je specifičan za prostore V^3 i $V^3(0)$ (točnije: za trodimenzionalne vektorske prostore), tj. za prostore drugih dimenzija ne može se definirati operacija $\times$ koja dvama vektorima pridružuje vektor koja bi pritom imala gore navedena svojstva.

Ukoliko je dan koordinatni sustav s ortonormiranom bazom $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ za V^3 odnosno $V^3(O)$, vektorski produkt možemo izračunati kao[9]

$$[x, y, z] \times [x', y', z'] = [yz' - y'z,\, x'z - xz',\, xy' - x'y].$$

U V^3 odnosno $V^3(0)$ definira se i mješoviti produkt tri vektora:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

[9] Pomoću determinanti dobije se zgodniji zapis $[x, y, z] \times [x', y', z'] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$.

Njegovo osnovno svojstvo je ciklička invarijantnost:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}).$$

Broj $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ predstavlja volumen paralelepipeda (paralelogramske prizme) razapetog vektorima $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Primijetimo dakle da gore navedena tri produkta vektora omogućuju računanje triju metričkih svojstava vektora i pritom karakteriziraju neke posebne odnose među njima:

- iz skalarnog produkta vektora sa sobom možemo izračunati njegovu duljinu ($|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$), a korištenjem skalarnog produkta možemo saznati jesu li dva vektora ortogonalna (ortogonalni su točno ako im je skalarni produkt nula);

- iz vektorskog produkta dvaju vektora možemo izračunati površinu paralelograma kojeg određuju (ona je po iznosu jednaka duljini njihova vektorskog produkta, a jedinica površine bit će kvadrat jedinice u kojoj mjerimo duljinu vektora), a korištenjem vektora produkta možemo saznati jesu li dva vektora kolinearna (jesu točno ako im je vektorski produkt nulvektor);

- iz mješovitog produkta triju vektora možemo izračunati volumen njima određenog paralelepipeda (on je po iznosu jednak apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta, a jedinica volumena je kub jedinice u kojoj mjerimo duljinu vektora), a korištenjem mješovitog produkta možemo saznati jesu li tri vektora komplanarna (jesu točno ako im je mješoviti produkt nula).

Napomena 14. *Spomenimo sad poopćenje vektorskih prostora dimenzija 2 i 3 na druge (konačne) dimenzije. Time ćemo se detaljnije baviti kasnije. Vektorski (zapravo, unitarni) prostor dimenzije n možemo zamisliti ovako: njegovi elementi (vektori) su uređene n-torke realnih (ili kompleksnih) brojeva. U realnom slučaju govorimo o prostoru $\mathbb{R}^n$, u kompleksnom o $\mathbb{C}^n$. Pritom su brojevi iz $\mathbb{R}$ odnosno iz $\mathbb{C}$ pripadni skalari. Elemente takvog vektorskog prostora po definiciji zbrajamo po koordinatama, množimo skalarom po koordinatama i skalarno množimo zbrajajući produkte odgovarajućih koordinata:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Tako definirane operacije imaju sva potrebna svojstva. Sad se dalje kao gore definiraju pojmovi linearne kombinacije, linearne (ne)zavisnosti, baze, okomitosti, duljine vektora, kuta među dvama vektorima... Za vektore v i w[10] tako imamo: vektori su ortogonalni (okomiti) ako im je skalarni produkt nula, tj. $v \perp w \Leftrightarrow v \cdot w = 0$, duljina (norma) vektora je definirana s $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$, a kut među vektorima s $\cos\varphi = \dfrac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}$.

[10] Izvan konteksta V^2 i V^3 vektori se obično ne označavaju strelicama iznad pripadnih slova, pa im se duljine označavaju s $||\ ||$.

Linearna kombinacija vektora $v, w, \ldots$ *iz* $\mathbb{R}^n$ *(ili* $\mathbb{C}^n$*) je izraz oblika* $\alpha v + \beta w + \ldots$ *za neke skalare* $\alpha, \beta, \ldots$*; skup vektora je linearno zavisan ako se bar jedan od njih može zapisati kao linearna kombinacija ostalih, a inače je linearno nezavisan. Baza je svaki linearno nezavisan skup s maksimalnim brojem elemenata (koji u* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *iznosi* n *te je* n *dimenzija promatranog prostora).*

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ *(odnosno* $\mathbb{C}^n$*) je skup* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *vektora iz tog prostora koji su oblika:* e_i *na* i*-toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + x_n(0, 0, 0, \ldots, 0, 1) =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

moguć i jedinstven za svaki vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *odnosno* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$*.*

Na gore opisani način mogu se zamisliti svi realni i kompleksni konačnodimenzionalni vektorski prostori: oni kojima elementi nisu n*-torke brojeva, mogu se na njih svesti koordinatizacijom na analogan način na koji smo u* V^2 *i* V^3 *uveli kooordinate*[11]*. Riječ „konačnodimenzionalni" označava da se dimenzija promatranog prostora može opisati prirodnim brojem (*n*). Postoje i beskonačnodimenzionalni vektorski prostori.*

☼ **Ponovimo bitno...** Vektorski prostori V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ sastoje se od vektora predstavljenih orijentiranim dužinama, tj. dužinama kod kojih je specificiran početak i kraj, poznatih kao geometrijski vektori. Karakteristične operacije za sve vektorske prostore su zbrajanje i množenje skalarom. Zbrajanje geometrijskih vektora definira se pravilom paralelograma, a množenje vektora skalarom ne mijenja smjer, ali mijenja duljinu i, ako je skalar negativan, orijentaciju vektora. Linearna kombinacija nekih vektora je zbroj njihovih umnožaka nekim skalarima. Skup vektora je linearno nezavisan ako se nijedan vektor tog skupa ne može zapisati kao linearna kombinacija ostalih vektora u tom skupu. Baza vektorskog prostora je linearno nezavisan skup koji sadrži najveći mogući broj vektora; taj broj zove se dimenzijom prostora. Ako je odabrana baza, svaki vektor jedinstveno se može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, a skalari te linearne kombinacije zovu se koordinatama vektora. Skalarni produkt dva vektora dvama vektorima pridružuje skalar; za geometrijske vektore njihov skalarni produkt je produkt njihovih duljina pomnožen s kosinusom kuta među njima. Vektorski prostor na kojem je definiran skalarni produkt zove se unitaran prostor. Ortogonalni vektori su oni kojima je skalarni produkt nula. Ortonormirana baza je baza u kojoj su svaka dva vektora ortogonalna i svi su iste (jedinične) duljine. Na V^3 i $V^3(O)$ definiraju se i vektorski i mješoviti produkt. Vektorski produkt dva vektora je vektor okomit na oba čija duljina je po iznosu jednaka površini paralelograma kojeg određuju vektori koje množimo, a orijentacija je određena pravilom desne ruke. Mješoviti produkt tri vektora je skalar koji je po apsolutnoj vrijednosti jednak volumenu paralelepipeda kojeg određuju pomnoženi vektori, a predznak mu je pozitivan ili negativan ovisno o tome je li treći vektor u odnosu na prva dva orijentiran prema pravilu desne ruke ili suprotno. ☺

[11] Kaže se: svaki vektorski prostor dimenzije n je izomorfan s $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$.

7.2 Analitička geometrija prostora $\mathbb{R}^3$

U analitičkoj geometriji ravnine se pomoću koordinata (uređenih parova realnih brojeva) proučavaju točke ravnine i geometrijski objekti: pravci, krivulje drugog reda, ... Od zanimanja uz pojedinačne točke su jednodimenzionalni objekti tj. razne vrste krivulja u ravnini. U trodimenzionalnom prostoru razmatraju se i dvodimenzionalni skupovi — plohe. Najvažnija vrsta ploha u prostoru zovu se ravnine.

Da bismo se mogli baviti analitičkom geometrijom prostora, potrebno je prvo odabrati koordinatni sustav. Kako je rečeno u prethodnom poglavlju, koordinatni sustav sastoji se od odabrane točke prostora (ishodište O) i baze prostora $V^3(O)$, dakle tročlanog skupa nekomplanarnih vektora. U prethodnom poglavlju smo također vidjeli da uz odabir koordinantog sustava svaku točku prostora možemo opisati uređenom trojkom koordinata (x, y, z). Prva koordinata zove se apscisa, druga je ordinata, a treća aplikata. Jednostavnosti radi ćemo i skup točaka prostora i skup vektora označavati jednako (s $\mathbb{R}^3$), a po zagradama oko koordinata (okruglim ili uglatim) i označavanju (bez ili sa strelicom iznad) ćemo razlikovati govorimo li o točkama ili o vektorima. Koordinatne osi su brojevni pravci kroz ishodište kojima se smjerovi redom podudaraju sa smjerovima vektora odabrane baze. Uobičajeno je tri koordinatne osi zvati redom x-os, y-os i z-os. Na skicama, smjer trećeg vektora baze (os aplikata) crta se vertikalno. Koordinatne ravnine su ravnine određene s po dvije koordinatne osi te govorimo o (x, y)-ravnini, (y, z)-ravnini i (x, z)-ravnini. Objekti u prostoru se opisuju s jednom ili više jednadžbi s tri nepoznanice, koje predstavljaju vezu između koordinata točaka pojedinog promatranog objekta. Tri osnovne vrste objekata koje ćemo promatrati su točke, pravci i ravnine (nul-, jedno- i dvodimenzionalni objekti u prostoru opisivi linearnim jednadžbama). Općenito, presjek objekata u prostoru pomoću analitičke geometrije određujemo rješavanjem sustava jednadžbi tih objekata; rješenja tog sustava su koordinate točaka presjeka.

Ako nije drugačije naglašeno, podrazumijeva se da je koordinatni sustav određen desnom ortonormiranom bazom $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; u tom slučaju govorimo o Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Zbog ortonormiranosti baze koja ga određuje, mnogi računi koji se odnose na objekte opisane u Kartezijevom koordinatnom sustavu su jednostavniji. U nastavku ćemo ipak povremeno isticati jednadžbe i pravila koja su primjenjima i u općenitijim kosokutnim sustavima, budući da se isti često pojavljuju u primjenama analitičke geometrije u kristalografiji.

Ako promatramo pojedinačne točke, najčešće nas zanimaju njihove međusobne udaljenosti. Za dvije točke $T(x, y, z)$ i $T'(x'y', z')$ njihova udaljenost jednaka je duljini vektora $\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{OT'} - \overrightarrow{OT} = [x' - x, y' - y, z' - z]$, a ona je jednaka $\sqrt{\overrightarrow{TT'} \cdot \overrightarrow{TT'}}$. Ako je odabrana baza ortonormirana slijedi formula za udaljenost dvije točke u prostoru:

$$d(T, T') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Zadatak 34. *Izvedite formulu za udaljenost dviju točaka u proizvoljnom kosokutnom koordinatnom sustavu određenom bazom $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ čiji vektori imaju duljine a, b, c, a kutevi među po dva od njih su $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$ i $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.*

Polovište dužine $\overline{TT'}$ ima koordinate $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$. Ta formula vrijedi i ako odabrani koordinatni sustav nije Kartezijev.

7.2.1 Ravnine u prostoru

Pravac u koordinatnoj ravnini može se opisati jednadžbom oblika $ax + by = c$, tj. jednom linearnom jednadžbom koja povezuje koordinate točaka pravca. Analog takvog pristupa u prostoru, tj. linearna[12] jednadžba

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

koja povezuje tri prostorne koordinate je opća jednadžba ravnine. Sve jednadžbe koje se iz takve jednadžbe mogu dobiti njenim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu. Točka je u ravnini točno ako zadovoljava njenu jednadžbu.

Primjer 158. *Jednadžbom $x + y - 2z = 5$ zadana je ravnina. Ishodište $(0, 0, 0)$ ne leži u njoj jer $0 + 0 - 2 \cdot 0 \neq 5$, a točka $(1, 8, 2)$ leži u njoj jer je $1 + 8 - 2 \cdot 2 = 5$.*

Zadatak 35. *Koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti A, B, C, D u općoj jednadžbi ravnine da bi se radilo o općoj ravnini koja prolazi kroz ishodište? Drugim riječima, nađite svojstvo svih ili nekih od tih koeficijenata koje karakterizira ravnine kroz ishodište.*

Svaka[13] linearna jednadžba s tri nepoznanice opisuje neku *ravninu* u prostoru kao što[14] svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice opisuje neki pravac u ravnini.

Najjednostavnije ravnine su koordinatne ravnine. Točke u (x, y)-ravnini imaju aplikatu jednaku nuli te je jednadžba (x, y)-ravnine

$$z = 0,$$

tj. $0x + 0y + 1z = 0$. Analogno je jednadžba (y, z)-ravnine

$$x = 0$$

i jednadžba (x, z)-ravnine

$$y = 0.$$

Često se koristi i segmentni oblik jednadžbe ravnine. Radi se o posebnom slučaju općeg oblika jednadžbe ravnine, koji je takav da se iz koeficijenata direktno vide probodišta koordinatnih osi s ravninom (odsječci ravnine na koordinatnim osima). To je oblik

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1,$$

[12] Jednadžba s nepoznanicama $x, y, \dots$ je linearna ako je njen oblik „linearna kombinacija nepoznanica jednako neki broj”.

[13] Koju konkretno ravninu u prostoru (ili pak koji pak pravac u ravnini) zadana jednadžba opisuje ovisi o odabranom koordinatnom sustavu. U svim direktnim računima s jednadžbama ravnina i pravaca te koordinatama točaka bitno je da je unaprijed poznat koordinatni sustav i da se sve koordinate odnose na njega.

[14] Općenito, jedna jednadžba s n nepoznanica opisuje objekt dimenzije $n - 1$ u n-dimenzionalnom prostoru. Možemo reći da općenito svaka jednadžba oduzima po jedan bstupanj slobode (dimenziju) od objekta (prostora, ravnine, ...) na čije elemente se odnosi.

a brojevi m, n, p su redom odsječci ravnine na koordinatnim osima. Segmentni oblik jednadžbe se ne koristi ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi.

Primjer 159. *Ravnina na slici 7.6 ima segmentni oblik* $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. *Istu ravninu mogli smo zadati i jednadžbom* $6x + 4y + 3z = 12$.

Iz opće jednadžbe ravnine u Kartezijevom koordinatnom sustavu lako je očitati smjer njenog vektora normale: to je vektor s koordinatama $[A, B, C]$ (ili bilo koji njemu kolinearan vektor koji nije nulvektor). Općenito, u proizvoljnom prostornom koordinatnom sustavu, veza između koordinata $[A_n, B_n, C_n]$ vektora normale i koeficijenata A, B, C jednadžbe ravnine dana je[15] s

$$A = a(aA_n + bB_n \cos\gamma + cC_n \cos\beta),$$

$$B = b(aA_n \cos\gamma + bB_n + cC_n \cos\alpha),$$
$$C = c(aA_n \cos\beta + bB_n \cos\alpha + cC_n),$$

gdje su a, b i c redom duljine vektora baze, a α, β i γ redom kutovi između drugog i trećeg, prvog i trećeg te prvog i drugog vektora baze.

Primjer 160. *Uz pretpostavku da je koordinatni sustav Kartezijev, ravnina iz primjera 159 ima vektor normale* $\overrightarrow{n} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right]$, *odnosno* $[6, 4, 3]$.

Općenito, u Kartezijevom koordinatnom sustavu ravninu možemo zadati vektorom normale (dakle, smjerom okomitim na nju) i jednom točkom. Ako znamo da je točka (x_0, y_0, z_0) u ravnini i da je vektor normale ravnine $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$, jednadžba ravnine je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Primjer 161. *Ravnina kroz ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava čiji vektor normale ima koordinate* $[1, 2, 3]$ *je opisana jednadžbom* $1(x-0)+2(y-0)+3(z-0) = 0$, *tj.* $x + 2y + 3z = 0$.

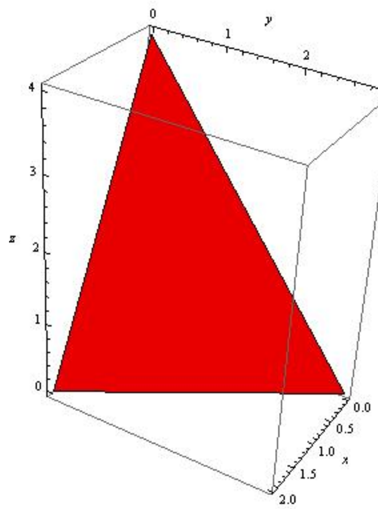
Ravninu (u Kartezijevom koordinatnom sustavu) možemo zadati i jednom točkom (x_0, y_0, z_0) te s dva toj ravnini paralelna vektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2, w_3]$. U tom slučaju prvo određujemo vektor normale koji treba biti okomit na ta dva vektora pa možemo uzeti

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w},$$

a nakon toga jednadžbu ravnine odredimo po pravilu za jednadžbu ravnine određenu točkom i normalom.

Najčešće se ipak ravnina zadaje s tri (nekolinearne) točke (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, 3)$. Jednadžba tim točkama određene ravnine određuje se rješavanjem sustava triju jednadžbi $Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0$, $i = 1, 2, 3$. Uočimo da ćemo (ako su točke stvarno bile nekolinearne) u rješenju jedan od koeficijenata A, B, C i D moći birati proizvoljno, što je u skladu s time da sve proporcionalne jednadžbe predstavljaju istu ravninu. Ako je

[15] Formule se lako dobiju raspisivanjem vektora s koordinatama $[A_n, B_n, C_n]$ i $[A, B, C]$ obzirom na bazu i korištenjem distributivnosti skalarnog produkta vektora.



Slika 7.6: Ravnina $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

koordinatni sustav Kartezijev, jednadžbu ravnine određenu trima točkama možemo dobiti i tako da problem svedemo na određivanje ravnine zadane jednom točkom (x_1, y_1, z_1) i dvama toj ravnini paralelnim vektorima $\overrightarrow{v} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$ i $\overrightarrow{w} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1]$.

Dvije ravnine u prostoru su paralelne točno ako su im vektori normala paralelni (tj. imaju proporcionalne koordinate). Ako su jednadžbe ravnina $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, uvjet paralelnosti ravnina možemo formulom zapisati kao

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Gornji uvjet paralelnosti primjenjiv je i na ravnine opisane u ne-Kartezijevom koordinatnom sustavu zato što paralelne ravnine imaju proporcionalne koordinate vektorâ normala, a iz na strani 216 navedene veze između koordinata vektora normale i koeficijenata jednadžbe ravnine vidljivo je da proporcionalnost koordinata vektorâ normala povlači i proporcionalnost koeficijenata uz x, y i z u odgovarajućim jednadžbama ravnine. Ekvivalentno možemo reći i: ravnine su paralelne ako je $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n'} = \overrightarrow{0}$, gdje su $\overrightarrow{n}$ i $\overrightarrow{n'}$ njihove normale.

Dvije ravnine su okomite ako su im vektori normala okomiti (tj. skalarni produkt im je nula). Taj uvjet okomitosti ravnina možemo zapisati kao $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$, odnosno (uz pretpostavku da je koordinatni sustav Kartezijev) koordinatno[16]

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Primjer 162. *Ravnine $2x + y - z = 4$ i $-x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = -2$ su paralelne.*

[16] Za općenite koordinatne sustave uvjet okomitosti poprima oblik $AA'b^2c^2(\cos^2\alpha - 1) + BB'a^2c^2(\cos^2\beta - 1) + CC'a^2b^2(\cos^2\gamma - 1) + (A'B + AB')abc^2(\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta) + (A'C + AC')ab^2c(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) + (B'C + BC')a^2bc(\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma) = 0$.

Primjer 163. *Pretpostavimo da se sve jednadžbe i koordinate odnose na Kartezijev koordinatni sustav. Nađimo ravninu okomitu na ravnine* $x+y+z=1$ *i* $x-y+z=2$ *koja prolazi ishodištem. Kako znamo jednu točku,* $(0,0,0)$*, radi se o ravnini s jednadžbom oblika* $Ax+By+Cz=0$*. Da bismo odredili koordinate njezina vektora normale, iskoristimo uvjete okomitosti:*

$$1 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C = 0$$

(okomitost na $x+y+z=1$*) i*

$$1 \cdot A - 1 \cdot B + 1 \cdot C = 0$$

(okomitost na $x-y+z=2$*). Tako smo dobili sustav*

$$A+B+C=0,$$

$$A-B+C=0.$$

Zbrajanjem jednadžbi sustava i zatim dijeljenjem s 2 *vidimo da mora vrijediti* $C=-A$*. Iz prve jednadžbe je onda* $A+B-A=0$*, tj.* $B=0$*. Dakle, vektori normale imaju koordinate oblika* $[A,0,-A]$ *s proizvoljnim* $A \neq 0$ *(vektor normale nikad nije jedinstveno određen već do na faktor proporcionalnosti). Odaberimo jedan takav, recimo s* $A=1$*. Imamo* $A=1$*,* $B=0$ *i* $C=-1$ *te je tražena jednadžba ravnine*

$$x-z=0.$$

Kut između ravnina definira se kao kut njihovih normala, tj. jednakošću

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n'}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|}.$$

Pritom se bira $\varphi \in [0,\pi\rangle$.

Primjer 164. *Kut između ravnine zadane u Kartezijevom koordinatnom sustavu jednadžbom* $x-y-z=0$ *i* (x,y)*-ravnine* $z=0$ *dan je s*

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 - 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0+0+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

te je $\varphi \approx 125°16'$*.*

Ponekad je zgodno ravninu opisati parametarskim jednadžbama. Parametarske jednadžbe ravnine u prostoru imaju oblik

$$x = x_0 + v_1 t + w_1 s,$$

$$y = y_0 + v_2 t + w_2 s,$$

$$z = z_0 + v_3 t + w_3 s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Pritom je (x_0, y_0, z_0) neka točka u ravnini, a $[v_1, v_2, v_3]$ i $[w_1, w_2, w_3]$ su dva nekolinearna vektora paralelna ravnini. To primjerice mogu biti vektori smjerova dva ukrštena pravca koji određuju ravninu. Za svaku vrijednost slobodnih parametara t i s dobivamo po jednu točku (x, y, z) u ravnini. Primijetite da je ravnina dvodimenzionalni objekt — upravo zato u njenim parametarskim jednadžbama imamo dva slobodna parametra.

Primjer 165. *Odredimo parametarske jednadžbe ravnine zadane općom jednadžbom*

$$2x - 5y + z = 2.$$

Izrazimo li primjerice $z = 2-2x+5y$ *i uzmemo da su* $x = tb$ *i* $y = s$ *slobodni parametri, dobijemo traženi parametarski oblik*

$$x = t,$$

$$y = s,$$

$$z = 2 - 2t + 5s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 36. *Kako biste iz parametarskog oblika odredili opću jednadžbu ravnine?*

7.2.2 Pravci u prostoru

Pravac u prostoru određen je svojim smjerom (tj. bilo kojim njemu paralelnim vektorom smjera) i jednom točkom. Alternativno, pravac možemo zadati kao presjek dvije neparalelne ravnine. U prvom slučaju, pravac se opisuje parametarskim jednadžbama ili tzv. kanonskim oblikom jednadžbe pravca. U drugom slučaju pravac se zadaje sustavom od dvije opće jednadžbe ravnina.

Parametarske jednadžbe pravca s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [a, b, c]$ koji prolazi točkom (x_0, y_0, z_0) su oblika

$$x = x_0 + at,$$

$$y = y_0 + bt,$$

$$z = z_0 + ct,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

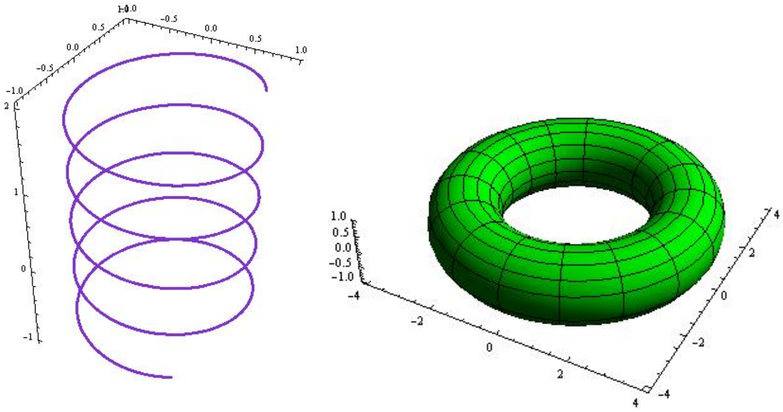
Vidimo da je za parametarski opis pravca dovoljan jedan slobodni parametar (t), dok su za ravninu potrebna dva $(t$ i $s)$. To je vezano za činjenicu da je pravac jednodimenzionalan, a ravnina dvodimenzionalan objekt. Općenito[17], krivulje u prostoru zadane su parametarski jednadžbama oblika

$$x = f(t),$$

$$y = g(t),$$

$$z = h(t),$$

[17] Općenitija definicija krivulje u prostoru proizvoljne dimenzije bit će dana na str. **??**.



(a) (b)

Slika 7.7: Obična cilindrična spirala i torus.

$$t \in I,$$

a plohe u prostoru zadane su parametarskim jednadžbama oblika

$$x = f(t, s),$$

$$y = g(t, s),$$

$$z = h(t, s),$$

$$t \in I, s \in I'.$$

Primjer 166. *Obična cilindrična spirala zadana je s*

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pritom su a i b zadani parametri — a je polumjer spirale (gledana odozgo tj. uzduž z-osi ona izgleda kao kružnica), a b je razmak dvije najbliže točke spirale koje su točno jedna iznad druge. Na slici 7.7 (a) prikazana je jedna takva cilindrična spirala.

Primjer 167. *Torus je ploha zadana s*

$$x = (b + a \cos s) \sin t, \quad y = (b + a \cos s) \cos t, \quad z = a \sin s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Pritom su $b > a$ zadani parametri. Na slici 7.7 (b) prikazan je torus.

Vratimo se pravcima u prostoru. Umjesto točkom i vektorom smjera, pravac može biti zadan i s dvije točke. U tom slučaju mu je vektor smjera vektor koji spaja te dvije točke, a bilo koju od njih uzmemo kao (x_0, y_0, z_0) te tako dobivamo parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1):

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t,$$

$$y = y_0 + (y_1 - y_0)t,$$

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)t,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar t i onda ih izjednačimo zove se kanonski oblik jednadžbi pravca u prostoru:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Radi se o vrlo preglednom obliku jednadžbi pravca, no kad god je potrebno rješavati neke probleme vezane za pravac, potrebno je prvo taj oblik prevesti u parametarski oblik. Također, kako je taj oblik samo skraćeni zapis parametarskog oblika, moguće je da neki od a, b i c budu nula jer izraze u formuli ne treba shvaćati kao pravo dijeljenje brojeva.

Primjer 168. *Odredimo sjecište pravaca*

$$\frac{x}{0} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{2}$$

i

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 3}{1}.$$

Prvi pravac ima parametarske jednadžbe

$$x = 0,\ y = 2t - 1,\ z = 3 + 2t,$$

a drugi

$$x = 1 + s,\ y = s + 2,\ z = s + 3.$$

Slobodne parametre smo im različito označili jer se radi o dva različita pravca pa dok jedan parametar opisuje „korake šetnje" po jednom, drugi to opisuje za drugi, a ti „koraci" ne moraju biti isti. Sjecište je točka (x, y, z) koja je na oba pravca, dakle treba izjednačiti odgovarajuće koordinate i riješiti sustav:

$$0 = 1 + s \Rightarrow s = -1,$$

$$2t - 1 = s + 2 \Rightarrow t = 1,$$

$$3 + 2t = s + 3 \Rightarrow 5 = 2.$$

Kako vidimo, za ova dva pravca nije moguće naći točku koja je na oba jer je sustav kontradiktoran te se pravci ne sijeku.

Da smo iz dvije jednadžbe uspjeli odrediti s i t koji zadovoljavaju i treću, uvrštavanje vrijednosti od t u parametarske jednadžbe prvog (ili vrijednosti parametra s u jednadžbe drugog) pravca dalo bi koordinate sjecišta tih pravaca. Tako je, primjerice, sjecište pravca $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ s pravcem $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ točka $(0, 1, 5)$ — provjerite to sami!

Kako je vidljivo iz prethodnog primjera, pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. Uvjet paralelnosti pravaca je kolinearnost, tj. proporcionalnost njihovih vektora smjera: ako su $\overrightarrow{s} = [a, b, c]$ i $\overrightarrow{s'} = [a', b', c']$ vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je $a : a' = b : b' = c : c'$. Ekvivalentno, ti pravci su paralelni ako je $\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{s'} = \overrightarrow{0}$. Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se mimoilazni (mimosmjerni) pravci. Određivanje sjecišta dva pravca u prostoru (tj. rješavanje sustava s 3 jednadžbe i 2 nepoznanice) dovest će do jednog od zaključaka:

- jedinstven par (t, s) zadovoljava jednadžbe — pravci se sijeku u jednoj točki;
- sustav nema rješenja, a koordinate vektora smjera su proporcionalne — pravci su paralelni;
- sustav nema rješenja, a koordinate vektora smjera nisu proporcionalne — pravci su mimoilazni;
- sustav ima beskonačno mnogo rješenja (moguće samo ako su koordinate vektora smjera proporcionalne) — pravci se podudaraju.

Dva pravca su okomita ako imaju okomite vektore smjera, tj. uvjet okomitosti pravaca je

$$\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{s'} = 0,$$

odnosno koordinatno (ako je koordinatni sustav Kartezijev[18])

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Korisno je zapamtiti uvjete paralelnosti pravaca s koordinatnim osima. Kako vektor smjera x-osi ima koordinate $[1, 0, 0]$ (ili općenitije $[p, 0, 0]$, $p \neq 0$), iz prethodnog slijedi da je pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [a, b, c]$ paralelan x-osi točno ako je $b = c = 0$. Analogno se dobije opći zaključak: pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [a, b, c]$ paralelan je nekoj od koordinatnih osi ako su mu dvije koordinate (one koje se ne odnose na promatranu koordinatnu os) jednake nuli.

Na početku smo rekli da pravac može biti zadan i kao presjek dvije ravnine prostora, tj. sustavom oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Iz tog oblika parametarski oblik možemo dobiti rješavanjem sustava te dvije jednadžbe. Ako je pravac presjek dvije ravnine, njegov vektor smjera je okomit na normale tih ravnina te vektor smjera pravca zadanog gornjim sustavom (uz pretpostavku da je koordinatni sustav Kartezijev) možemo dobiti kao

$$\overrightarrow{s} = [A, B, C] \times [A', B', C'].$$

[18] Za općeniti koordinatni sustav, uvjet okomitosti dobijemo raspisivanjem značenja koordinata i korištenjem svojstva distributivnosti skalarnog produkta.

Pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s}$ je okomit na ravninu s vektorom normale $\overrightarrow{n}$ ako su ti vektori paralelni, a pravac je paralelan ravnini ako mu je vektor smjera okomit na njezin vektor normale. Stoga imamo uvjet okomitosti pravca na ravninu

$$\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$$

(odnosno, koordinate od $\overrightarrow{s}$ i $\overrightarrow{n}$ su proporcionalne), a uvjet paralelnosti pravca s ravninom je

$$\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

(odnosno, $aA + bB + cC = 0$ ako je odabrani sustav Kartezijev, $\overrightarrow{s} = [a, b, c]$ i $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$).

Napomena 15. *Sve karakterizacije paralelnosti i okomitosti pravaca i ravnina koje su izražene preko skalarnih i vektorskih produkata dvaju vektora vrijede za svaki tip koordinatnih sustava. Karakterizacije opisane koordinatno, a koje su vezane za skalarni produkt, vrijede samo u ortonormiranim sustavima.*

Zadatak 37. *Odredite uvjete paralelnosti općeg pravca s koordinatnim ravninama i uvjete paralelnosti opće ravnine s koordinantim osima.*

Zadatak 38. *Kako biste definirali kut pravca i ravnine? A kako biste definirali kut između dva pravca?*

Ako pravac nije paralelan ravnini, on ju siječe u jednoj točki koja se zove probodište pravca i ravnine. Određivanje probodišta pravca i ravnine svodi se na rješavanje sustava koji se sastoji od jednadžbe(i) pravca i jednadžbe(i) ravnine.

Na kraju, izvedimo još jednu korisnu formulu — formulu za udaljenost točke do ravnine u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Neka je dana točka $T(x_0, y_0, z_0)$ i ravnina Π s jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Želimo odrediti udaljenost $d(T, \Pi)$. Ona je jednaka udaljenosti od T do njene ortogonalne projekcije na ravninu. Vektor normale ravnine Π dan je s $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$. Uzmemo li proizvoljnu točku ravnine (x, y, z) i spojimo s T, dobit ćemo vektor $\overrightarrow{v} = [x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z]$ (za svaku točku ravnine jedan takav vektor). Duljina ortogonalne projekcije od $\overrightarrow{v}$ na $\overrightarrow{n}$ je upravo tražena udaljenost i ona prema prethodnom poglavlju iznosi

$$\frac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax + By + Cz)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je po pretpostavci točka (x, y, z) u ravnini pa je $Ax + By + Cz = -D$. Zaključujemo: formula za udaljenost točke do ravnine je

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Napomenimo da i ova formula vrijedi samo ako je baza koordinatnog sustava ortonormirana.

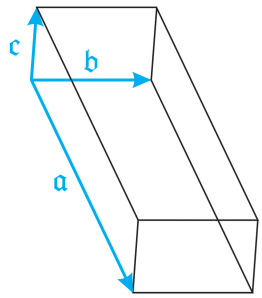
☼ **Ponovimo bitno...** Koordinatni sustav se sastoji od jedne točke prostora (ishodišta) i jedne baze prostora. Koordinate točke u prostoru su skalari u prikazu pripadnog radij-vektora kao linearne kombinacije vektora baze. Ravnina u prostoru zadana je jednom linearnom jednadžbom s tri nepoznanice koju zovemo općom jednadžbom ravnine ($Ax+By+Cz+D=0$); vektor normale ravnine tada ima koordinate $[A, B, C]$. Drugi oblici jednadžbe ravnine u prostoru su segmentni (poseban slučaj opće jednadžbe u kojem je $D=-1$) ili parametarski (koordinate točaka ravnine su zadane preko dva nezavisna slobodna parametra). Pravac u prostoru može biti zadan sustavom od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice (dakle, kao presjek dvije ravnine) ili parametarski (koordinate točaka pravca su zadane putem jednog slobodnog parametra; koeficijenti uz slobodni parametar određuju koordinate vektora smjera pravca). Presjek dva objekta u prostoru određuje se tako da rješavamo sustav koji se sastoji od jednadžbi koje opisuju te objekte. ☺

7.3 Primjene analitičke geometrije prostora u kristalografiji

7.3.1 Kristalne rešetke

U kristalografiji se redovno koriste općeniti kosokutni koordinatni sustavi u prostoru $\mathbb{R}^3$, dakle koordinatni sustavi u kojima koordinatne osi ne moraju biti međusobno okomite niti vektori baze moraju biti jednako dugi. Karakteristika kristalnih struktura je njihova periodičnost koja se očituje u tome da je moguće odabrati četverostranu prizmu (jediničnu ćeliju) čijim translacijama u smjerovima njenih bridova dobivamo čitav kristal. Nešto preciznije, neka je jedinična ćelija četverostrana prizma razapeta vektorima $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ (te vektore zovemo kristalografskom bazom). Odaberimo ih tako da imaju zajednički početak kojeg ćemo uzeti kao ishodište koordinatnog sustava. Duljine a, b, c tih vektora uzimamo kao jedinice duljine na odgovarajućim koordinatnim osima (te duljine se često nazivaju parametrima kristalne rešetke). Odgovarajući koordinatni sustav zvat ćemo kristalografskim koordinatnim sustavom, čije osi zovemo a-os, b-os i c-os. Točke jedinične ćelije u tom sustavu imaju sve tri koordinate unutar intervala $[0, 1\rangle$ (gdje 1 u smjeru a-osi ima stvarnu duljinu a, u smjeru b-osi stvarnu duljinu b i u smjeru c-osi stvarnu duljinu c). Kuteve među vektorima kristalografske baze označit ćemo s $\alpha = \angle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $\beta = \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$, $\gamma = \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.

Kristalna rešetka je skup svih točaka prostora koje obzirom na kristalografski koordinatni sustav imaju cjelobrojne koordinate. Ovdje smo podrazumijevali da je kristalografska baza primitivna; to je uvijek moguće odabrati, no često je zgodnije raditi s neprimitivnim bazama kod kojih se kao točke kristalne rešetke pojavljuju i neke s racionalnim koordinatama. Primjerice, kod volumno-centriranih rešetki, uz točke s cjelobrojnim koordinatama rešetku čine i točke koje su translati središta jedinične ćelije, dakle točke s koordinatama oblika $\left(\frac{1}{2}+n, \frac{1}{2}+m, \frac{1}{2}+p\right)$ gdje su brojevi m, n, p cijeli. Jednostavnosti radi, u nastavku ćemo raditi samo s primitivnim bazama tj. kristalografskim bazama obzirom na koje kristalna rešetka sadrži samo točke s cjelobrojnim koordinatama.



Slika 7.8: Jedinična ćelija.

Kristalna rešetka opisuje periodičnost kristalne strukture: na poziciji (x, y, z) nalazi se neki atom (ion, ...) točno ako postoji pozicija (x_0, y_0, z_0) unutar jedinične ćelije $(0 \le x_0, y_0, z_0 < 1)$ na kojoj je istovrsni atom i pritom vrijedi

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b} + p\mathfrak{c},$$

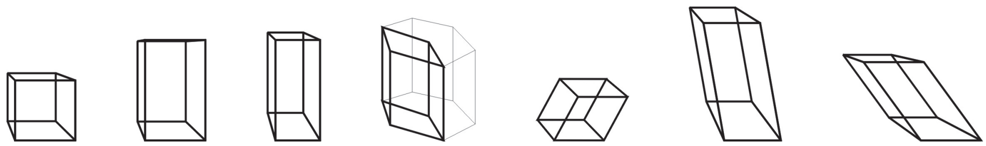
za neke cijele brojeve m, n, p.

Ovisno o odnosu vektora kristalografske baze i simetriji same kristalne rešetke, razlikujemo sedam kristalnih sustava.

1. Kubični sustav kao bazu ima[19]ortonormiranu kristalografsku bazu ($a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$);
2. Tetragonski sustav kao bazu ima ortogonalnu bazu u kojoj su dva vektora iste duljine, a treći različite ($a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$);
3. Rompski sustav kao bazu ima ortogonalnu bazu u kojoj su svi vektori različite duljine ($a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$);
4. Heksagonski sustav kao bazu ima dva vektora iste duljine pod kutem 120°, a treći je na njih okomit i druge duljine ($a = b \neq c$, $\gamma = 120°$, $\alpha = \beta = 90°$);
5. Trigonski sustav kao bazu ima tri vektora iste duljine pod jednakim, ali nepravim, kutevima ($a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$);
6. Monoklinski sustav kao bazu ima neortogonalnu bazu s tri vektora različite duljine od kojih je jedan okomit na druga dva ($a \neq b \neq c \neq a$, $\beta \neq \alpha = \gamma = 90°$);
7. Triklinski sustav kao bazu ima opću kosokutnu bazu s tri vektora različite duljine i pod različitim kutevima ($a \neq b \neq c \neq a$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$).

Kako kristalografska baza često nije ortonormirana, analitička geometrija koja opisuje podskupove prostora vezane za kristal ne može (direktno) koristiti sve standardne

[19]Pod „ima” mislimo „kristalografska baza za opis kristalâ ovog sustava može se odabrati tako da bude ...”.



Slika 7.9: Jedinične ćelije sedam kristalnih sustava (slijeva udesno: kubični, tetragonski, rompski, heksagonski, trigonski, monoklinski i triklinski sustav).

formule za izračunavanje udaljenosti i kuteva iz koordinata i jednadžbi pravaca i ravnina. Iznimka je kubični sustav, za opis kojeg se koristi ortonormirana kristalografska baza, tj. Kartezijev koordinatni sustav[20]. Za ostale sustave problematične su formule koje se temelje na koordinatnom prikazu skalarnog produkta obzirom na ortonormiranu bazu. Ipak, oblici jednadžbi pravaca i ravnina ostaju nepromijenjeni i u ostalim kristalografskim koordinatnim sustavima. Tako uvjeti paralelnosti i okomitosti zapisani preko skalarnog i vektorskog produkta vektora smjera odnosno normala vrijede i dalje, a volumen jedinične ćelije je dan formulom

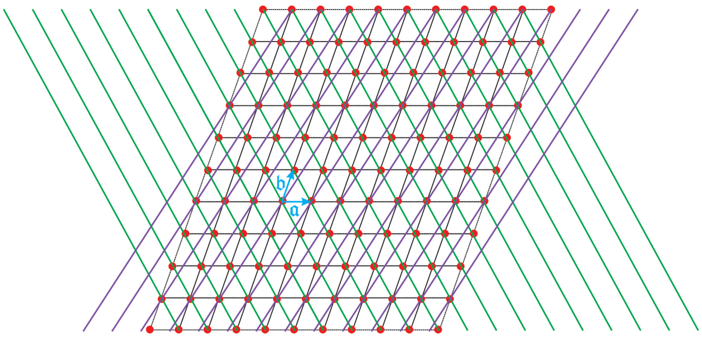
$$V = |(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})| = |\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c})|.$$

Specijalno, volumeni jedinične ćelije po sustavima su:

1. Kubični sustav: $V = a^3$;
2. Tetragonski sustav: $V = a^2c$;
3. Rompski sustav: $V = abc$;
4. Heksagonski sustav: $V = a^2c\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5. Trigonski sustav: $V = a^3\sqrt{1 - 3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}$;
6. Monoklinski sustav: $V = abc\sin\gamma$;
7. Triklinski sustav: $V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

☼ **Ponovimo bitno**... Kristalna struktura opisuje se matematičkim modelom koji zovemo kristalnom rešetkom. Jedinična ćelija je paralelepiped čijim translatiranjem u smjeru njegovih bridova dobivamo čitavu kristalnu strukturu, a svi translatirani položaji njezinih vrhova čine kristalnu rešetku. Ako jedan vrh jedinične ćelije odaberemo kao ishodište koordinatnog sustava, kristalografski koordinatni sustav određen je kristalografskom bazom, tj. trima vektorima od ishodišta do (duž bridova) susjednih vrhova jedinične ćelije. Duljine bridova jedinične ćelije uzimaju se kao jedinice duljine u odgovarajućim smjerovima. Obzirom na odnos kutova među vektorima kristalografske baze te obzirom na odnose njihovih duljina razlikujemo sedam kristalnih sustava. Kristalna rešetka (primitivna) sastoji se od točaka prostora koje imaju cjelobrojne koordinate obzirom na kristalografski koordinatni sustav. ☺

[20]Pri čemu je jedinica duljine 1 jednaka duljini a brida jedinične ćelije, tj. sve udaljenosti su izražene kao višekratnici od a.



Slika 7.10: Dvodimenzionalna kristalna rešetka.

7.3.2 Weissovi parametri i Millerovi indeksi

U kristalografiji od zanimanja su samo određene, tzv. mrežne ravnine: to su ravnine koje prolaze kroz, međusobno relativno bliske, točke rešetke (njih beskonačno mnogo). Pritom se međusobno paralelne mrežne ravnine smatraju ekvivalentnim (jer jesu ekvivalentne u smislu rasta kristala). Konkretan makroskopski kristal može se opisati kao poliedar omeđen plohama (stranama poliedra) čije ravnine pripadaju pojedinom skupu međusobno ekvivalentnih mrežnih ravnina.

Promotrimo prvo dvodimenzionalni analog kristalne rešetke određen bazom $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ kao na slici 7.10. Na toj slici prikazana su dva od mogućih smjerova mrežnih pravaca. Kad bismo neku točku rešetke odabrali za ishodište koordinatnog sustava, vidimo da su odsječci pravaca danog smjera na pojedinoj od osi proporcionalni, s cjelobrojnim koeficijentom proporcionalnosti. Drugim riječima, pravci danog smjera imaju jednadžbe u segmentnom obliku

$$\frac{x}{m\lambda} + \frac{y}{n\lambda} = 1,$$

gdje su $m, n, \lambda \in \mathbb{Z}$ (uz fiksirane m i n za različite λ dobivamo različite, ali međusobno paralelne, mrežne pravce). Analogno, u prostoru će odabrani smjer ravnina u kristalnoj rešetki biti opisan jednadžbama segmentnog oblika

$$\frac{x}{m\lambda} + \frac{y}{n\lambda} + \frac{z}{p\lambda} = 1$$

s $m, n, p, \lambda \in \mathbb{Z}$. Napomenimo da λm, λn i λp nisu stvarne udaljenosti od ishodišta do sjecišta koordinatnih osi s ravninama, nego samo relativne (stvarne udaljenosti su λma, λnb i λpc).

Vidimo da su s trojkom (m, n, p) karakterizirane sve međusobno paralelne mrežne ravnine jednog smjera. Načelno, ta se trojka može odabrati proizvoljno, no konvencija je iduća: (m, n, p) se bira tako da su m, n i p relativno prosti cijeli brojevi[21]. Ti brojevi zovu se Weissovi parametri plohe na kristalu, točnije smjera odgovarajućih mrežnih ravnina. Kaže se da ploha ima Weissove parametre

$$ma : nb : pc.$$

[21]Zapravo se često kao Weissovi parametri dozvoljavaju i racionalni brojevi uz uvjet da je $n = 1$.

Primijetimo da su u slučaju kristala kubičnog sustava (obzirom na kristalografsku bazu) koordinate vektora normale tog smjera mrežnih ravnina

$$\left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right].$$

U slučaju da je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, dogovorno se pripadni Weissov parametar označava s ∞ i ignorira u uvjetu da Weissovi parametri trebaju biti relativno prosti.

Primjer 169. *Ploha paralelna s* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *ima Weissove parametre* $\infty a : \infty b : pc$*. Ploha paralelna sa* $\mathfrak{c}$ *ima Weissove parametre* $ma : nb : \infty c$*.*

Kako često nisu točno poznate duljine od a, b, c, obično se kao $1a : 1b : 1c$ ploha (tzv. jedinična ploha) odabire najveća ploha kristala koja sigurno siječe sve tri kristalografske osi. Millerovi indeksi (hkl) uspoređuju osni odnos (odnos duljina odsječaka na osima) jedinične plohe s osnim odnosom promatrane plohe. Ako su Weissovi parametri plohe $ma : nb : pc$ te ako je v najmanji zajednički višekratnik od m, n i p, onda je

$$h = \frac{v}{m}, \quad k = \frac{v}{n}, \quad l = \frac{v}{p}.$$

Drugim riječima, Millerovi indeksi su (uz po određenom konvencionalnom pravilu odabranu konstantu proporcionalnosti) proporcionalni koeficijentima A, B, C jednadžbe $Ax + By + Cz + D = 0$ jednadžbe jedne od ravnina danog smjera. Ako je neki od Weissovih parametara ∞, odgovarajući Millerov indeks je stoga očito jednak 0 (paralelnost ravnine nekoj koordinatnoj osi prepoznajemo po nul-koeficijentu uz odgovarajuću varijablu). Ako promatramo kristal kubičnog sustava, Millerovi indeksi su koordinate vektora normale na dani smjer ravnina, s tim da nisu proizvoljno odabrane.

Primjer 170. *Promotrimo ravninu* $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$*. Njeni odsječci na kristalografskim osima su* $15a$*,* $10b$*,* $20c$*. Kako Weissovi parametri trebaju biti maksimalno skraćeni, oni su* $3a : 2b : 4c$ *(isti za sve gornjoj ravnini paralelne ravnine). Najmanji zajednički višekratnik od* $3, 2, 4$ *je* 12 *pa je* $h = \frac{12}{3} = 4$*,* $k = \frac{12}{2} = 6$ *i* $l = \frac{12}{4} = 3$ *te je smjer ravnine* $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$ *opisan Millerovim indeksima* (463)*.*

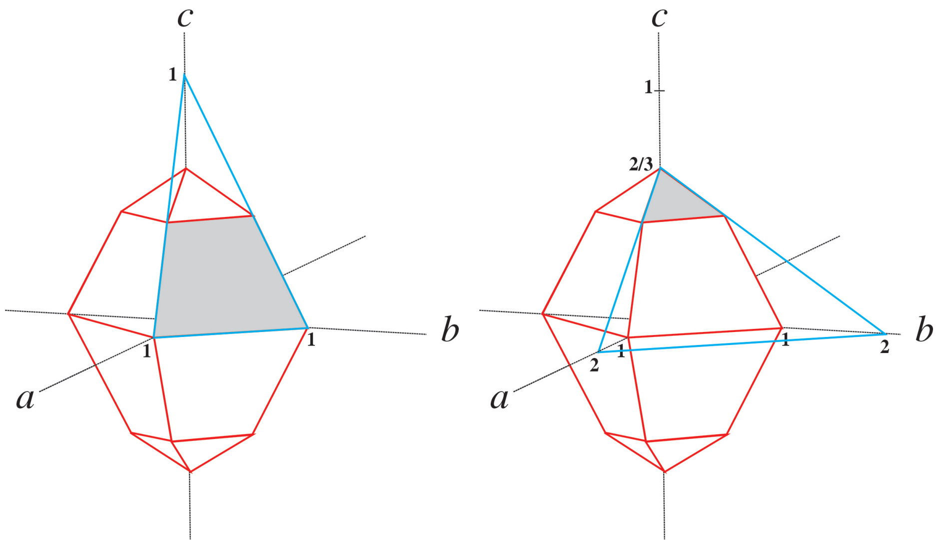
Primjer 171. *Recimo da jedna ravnina danog smjera siječe koordinatne osi redom u točkama* $2a, b, 3c$*. Tada je pripadni segmentni oblik jednadžbe te jedne ravnine*

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$$

Pomnožimo li jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom 6 *od* $2, 1, 3$ *dobivamo*

$$3x + 6y + 2z = 6.$$

Vektor normale ove ravnine i svih njoj paralelnih je $[3, 6, 2]$ *(ili njemu proporcionalan vektor). Millerovi indeksi smmjera naše ravnine su* (362)*.*



(a) (b)

Slika 7.11: Određivanje Millerovih indeksa plohe.

Primjer 172. *Millerovi indeksi* (110) *pripadaju ravninama paralelnim vektoru* $\mathfrak{c}$ *koje u jednakim (relativnim) odsječcima sijeku druge dvije kristalografske osi, a* (010) *su Millerovi indeksi ravnina paralelnih ravnini razapetoj s* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{c}$*. Jedinična ploha ima indekse* (111)*.*

Zgodno je uočiti: što je neki Millerov indeks veći u odnosu na druga dva indeksa (dakle, odgovarajući odsječak na pripadnoj osi je manji), ravnina je bliža paralelnosti s drugim dvjema osima.

Primjer 173. *Promotrimo kristal rompskog sustava na slici 7.11 (a). Odaberemo si smjerove koordinatnih osi. Najveća ploha čija ravnina siječe sve tri osi na pozitivnoj strani je tamno osjenčana. Po definiciji stavljamo da su Millerovi indeksi svih toj strani paralelnih ravnina* (111)*. Recimo da želimo odrediti Millerov indeks još tamnije osjenčane plohe na slici 7.11 (b).*

Produljenjem njenih bridova vidimo da je sjecište na a-osi dvaput udaljenije od ishodišta nego što je to sjecište (111) *ravnine, s b-osi također, a s c-osi sjecište je pak na* $\frac{2}{3}$ *udaljenosti na kojoj* (111) *ravnina siječe c-os. Stoga je segmentni oblik jednadžbe te ravnine*

$$\frac{x}{2\lambda} + \frac{y}{2\lambda} + \frac{z}{\frac{2}{3}\lambda} = 1.$$

Množenjem jednadžbe sa 2 *dobivamo oblik*

$$x + y + 3z = 2$$

s relativno prostim cjelobrojnim koordinatama vektora normale. Stoga su Millerovi indeksi ove ravnine (113)*.*

Negativni Weissovi parametri i Millerovi indeksi označavaju se znakom minus *iznad* parametra odnosno indeksa.

Primjer 174. *Ravnina* $2x - y = 3$ *ima Weissove parametre* $1a : \overline{2}b : \infty c$, *a Millerove indekse* $(2\overline{1}0)$.

Napomena 16. *Ravnine poput* $x + y - z = 1$ *i* $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$ *su doduše paralelne, ali se kod označavanja putem Weissovih parametara i Millerovih indeksa razlikuju. Tako će prva od njih imati Millerove indekse* $(11\overline{1})$, *a druga* $(\overline{1}\overline{1}1)$.

Drugim riječima: iako su vektori normala tih ravnina istog smjera, suprotne su orijentacije te se u označavanju Weissovim parametrima i Millerovim indeksima ističe ne samo smjer, nego i orijentacija vektora normale.

Često je potrebno odrediti međusobnu udaljenost d_{hkl} dvije susjedne mrežne ravnine s Millerovim indeksima (hkl): d_{hkl} jednaka je udaljenosti ishodišta do ishodištu najbliže (hkl) ravnine (koja ne prolazi ishodištem). Primijetimo da je volumen jedinične ćelije

$$V = d_{100} \cdot |\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}| = d_{010} \cdot |\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}| = d_{001} \cdot |\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}|.$$

Za sve rešetke s okomitim baznim vektorima (dakle, za kubičnu, tetragonski i rompsku) se d_{hkl} može lako odrediti iz Millerovih indeksa formulom

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

Primjer 175. *Recimo da je rompska jedinična ćelija zadana parametrima* $a = 4{,}830$ *Å,* $b = 10{,}896$ *Å,* $c = 6{,}288$ *Å. Želimo li znati razmak susjednih* (211) *ravnina, imamo*

$$\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{23{,}3289} + \frac{1}{118{,}722816} + \frac{1}{39{,}538944} = 0{,}20517565$$

pa je

$$d_{211} = 2{,}208 \text{ Å}.$$

Napomena 17. *Formule za udaljenosti susjednih mrežnih ravnina u heksagonskom, trigonskom, monoklinskom i triklinskom sustavu dane su redom s:*

$$\text{heks.sustav}: \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{4(h^2 + hk + k^2)}{3a^2} + \frac{l^2}{c^2},$$

$$\text{trig.sustav}: \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{(h^2 + k^2 + l^2)\sin^2\alpha + 2(hk + kl + lh)(\cos^2\alpha - \cos\alpha)}{a^2(1 - 2\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha)},$$

$$\text{monokl.sustav}: \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} - \frac{2hl\cos\beta}{ac}\right) + \frac{k^2}{b^2},$$

$$\text{trikl.sustav}: \quad \frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{1}{V^2}\big(2kla^2bc(\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha) + 2hlab^2c(\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta) +$$
$$+ 2hkabc^2(\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma) + h^2b^2c^2\sin^2\alpha + k^2a^2c^2\sin^2\beta + l^2a^2b^2\sin^2\gamma\big).$$

☼ **Ponovimo bitno...** Mrežne ravnine u kristalnoj stukturi opisuju se Weissovim parametrima $ma : nb : pc$ ili Millerovim indeksima (hkl). Jedni i drugi opisuju konkretan smjer mrežnih ravnina tj. skup svih međusobno paralelnih mrežnih ravnina, a temelje se na segmentnom obliku jednadžbe ravnine. Weissovi parametri m, n, p su nazivnici u segmentnom obliku jednadžbe ravnine, odabrani tako da budu relativno prosti. Millerovi indeksi su koordinate vektora normale smjera ravnina odabrani tako da su jednaki recipročnim Weissovim parametrima pomnoženim njihovim zajedničkim višekratnikom. Ako je ravnina paralelna nekoj od kristalografskih osi, odgovarajući Weissov parametar označava se s ∞, a odgovarajući Millerov indeks je 0. ☺

7.4 Recipročni prostor i recipročna rešetka

Kristalna rešetka često se zove i direktna rešetka, skup svih odgovarajućih radij-vektora je direktna vektorska rešetka, a prostor $\mathbb{R}^3$ kad mu točke interpretiramo kao pozicije atoma u kristalu i opisujemo koordinatama obzirom na kristalografsku bazu zovemo direktni prostor. Kako je nemoguće kristalnu strukturu direktno opaziti, o njoj zaključujemo pomoću difrakcije. Pojednostavljeno rečeno, difrakcija na smjeru (hkl) mrežnih ravnina kao rezultat (nakon odgovarajuće obrade snimljenih podataka) daje uređenu trojku (h, k, l) kao točku prostora $\mathbb{R}^3$, čije koordinate su izražene obzirom na drugu bazu prostora. Kad točke prostora gledamo kao rezultate difrakcije, zovemo ga recipročnim prostorom. Recipročni prostor ponekad se zove i fazni ili Fourierov prostor. Matematički gledano, direktni i recipročni prostor ne razlikuju se u prirodi svojih elemenata (to su točke u trodimenzionalnom prostoru), nego u odabiru koordinatnog sustava koji je pogodan za određenu interpretaciju točaka prostora.

Recipročna rešetka promatrane direktne rešetke je skup svih točaka prostora takvih da je skalarni produkt njihovih radij-vektora sa svim radij-vektorima točaka direktne rešetke cjelobrojan[22]. Formalno:

Definicija 28 (Recipročna rešetka). *Ako je s bazom $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ određena direktna vektorska rešetka $L = \{\mathfrak{r} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b} + p\mathfrak{c} : m, n, p \in \mathbb{Z}\}$, njena recipročna vektorska rešetka se definira kao $L^* = \{\mathfrak{r}^* : \mathfrak{r}^* \cdot \mathfrak{r} \in \mathbb{Z}, \mathfrak{r} \in L\}$. Recipročna rešetka dane direktne rešetke sastoji se od svih točaka prostora čiji su vektori iz L^* radij-vektori.*

Kad govorimo o točki, vektoru ili ravnini direktnog prostora znači da su koordinate dane obzirom na kristalografsku bazu, a kad govorimo o točki, vektoru ili ravnini recipročnog prostora znači da su koordinate dane obzirom na bazu recipročne rešetke.

Po definiciji za svaki vektor $\mathfrak{r} = m\mathfrak{a}+n\mathfrak{b}+p\mathfrak{c} \in L$ (dakle, za svaki odabir $m, n, p \in \mathbb{Z}$) i svaki vektor $\mathfrak{r}^* \in L^*$, $\mathfrak{r}^* \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r}^* \cdot (m\mathfrak{a} + n\mathfrak{b} + p\mathfrak{c})$ treba biti cijeli broj. Odaberimo bazu $\{\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*\}$ sa svojstvima (tzv. međusobna ortogonalnost baznih vektora direktnog i recipročnog prostora):

$$\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{c} = 1,$$

[22] Stvarni smisao definicije je da u recipročnoj rešetci budu točke takve da se njihovim parovima određeni vektori poklapaju s normalama mrežnih ravnina u direktnom prostoru, a duljine vektora budu recipročne vrijednosti udaljenosti odgovarajućih ravnina u realnom prostoru. Zapravo se iz praktičnih razloga vezanih za Fourierovu transformaciju često uzima da su te duljine jednake $\frac{2\pi}{d_{hkl}}$.

$$\mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^* \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{b}^* \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^* \cdot \mathfrak{b} = 0.$$

Iz uvjeta $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^*\mathfrak{c} = 0$ slijedi da $\mathfrak{a}^*$ mora biti okomit na $\mathfrak{b}$ i $\mathfrak{c}$, dakle proporcionalan s $\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}$. Uvjet $\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = 1$ onda povlači da konstanta proporcionalnosti mora biti $\pm 1/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, pa odaberemo $1/|(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})|$. Analogno se pokaže da $\mathfrak{b}^*$ i $\mathfrak{c}^*$ mogu biti definirani kako slijedi:

Definicija 29 (Baza recipročne rešetke)**.** *Neka je odabrana kristalografska baza direktnog prostora* $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$. *Pripadna baza recipročnog prostora definira se s*

$$\mathfrak{a}^* = \frac{1}{V}\mathfrak{b} \times \mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{b}^* = \frac{1}{V}\mathfrak{c} \times \mathfrak{a},$$

$$\mathfrak{c}^* = \frac{1}{V}\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

Utvrdili smo dakle da je bazni vektor recipročnog prostora koji odgovara jednom od baznih vektora direktnog prostora okomit na druga dva bazna vektora direktnog prostora; npr. $\mathfrak{b}^*$ je okomit na $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{c}$. Drugim riječima: vektori baze recipročnog prostora su okomiti na koordinatne ravnine direktnog prostora. Ako je baza direktnog prostora bila ortogonalna, onda je stoga očito i odgovarajuća baza recipročnog prostora ortogonalna.

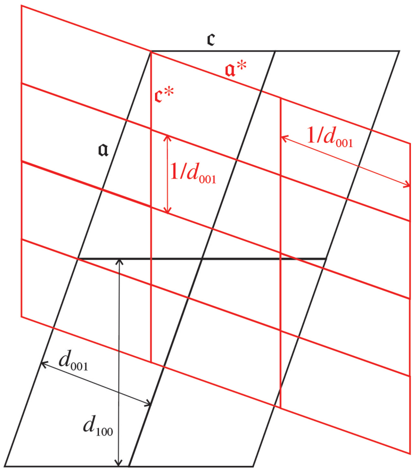
Duljine baznih vektora recipročnog prostora jednake su recipročnim duljinama visina jedinične ćelije tj.

$$|\mathfrak{a}^*| = \frac{1}{d_{100}}, \quad |\mathfrak{b}^*| = \frac{1}{d_{010}}, \quad |\mathfrak{c}^*| = \frac{1}{d_{001}}.$$

Ako vektor $\vec{r}^* \in L^*$ zapišemo u gore opisanoj bazi, tj. kao $\vec{r}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$, da mora vrijediti $\vec{r}^* \cdot \vec{r} = hm + kn + lp \in \mathbb{Z}$ (za sve $m, n, p \in \mathbb{Z}$). Stoga svaki vektor recipročne rešetke ima cjelobrojne koordinate h, k, l obzirom a bazu $\{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$, tj. $L^* = \{\vec{r}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^* : h, k, l \in \mathbb{Z}\}$. Drugim riječima, pokazali smo:

Propozicija 4. *Recipročna rešetka je skup svih točaka prostora* $\mathbb{R}^3$ *koje obzirom na koordinantni sustav određen bazom* $\{\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*\}$ *(i istim ishodištem kao i za direktni prostor) imaju cjelobrojne koordinate.*

Ukratko, možemo reći da prostor $\mathbb{R}^3$ s koordinatnim sustavom određenim kristalografskom bazom zovemo direktnim prostorom, a s koordinatnim sustavo određenim pripadnom „recipročnom" bazom recipročnim prostorom. Kako je fizikalna dimenzija iznosa vektorskog produkta dvaju vektora površina, a vektori „recipročne" baze su definirani množenjem vektorskih produkata recipročnim volumenom, zaključujemo da je fizikalna dimenzija iznosa vektora recipročne rešetke recipročna duljina, tj. da se „udaljenosti" u recipročnom prostoru mjere u jedinici recipročnoj jedinici duljine u direktnom prostoru — odatle naziv recipročni prostor/rešetka. Primjerice, ako udaljenosti u direktnom prostoru mjerimo u Å, udaljenosti u recipročnom prostoru mjerimo u Å^{-1}. Slično, volumen jedinične ćelije u recipročnom prostoru (tj. prizme razapete s $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$) je $1/V$.



Slika 7.12: Jedinična ćelija direktne (crno) i recipročne rešetke (crveno).

Primjer 176. *Pretpostavimo da promatramo kristal kubičnog sustava (podrazumijevamo primitivnu kristalografsku bazu tj. primitivnu kubičnu rešetku). Neka je baza* $\mathfrak{a} = a\overrightarrow{i}$, $\mathfrak{b} = a\overrightarrow{j}$, $\mathfrak{c} = a\overrightarrow{k}$. *Tada je* $\mathfrak{a}^* = \frac{1}{a}\overrightarrow{i}$, $\mathfrak{b}^* = \frac{1}{a}\overrightarrow{j}$, $\mathfrak{c}^* = \frac{1}{a}\overrightarrow{k}$, *tj. jedinična ćelija recipročne rešetke je također kocka, ali s duljinom brida recipročnim duljini brida jedinične ćelije u direktnom prostoru.*

Može se pokazati da su samo za kubični, tetragonski i rompski sustav vektori baze recipročnog prostora paralelni vektorima pripadne baze direktnog prostora. Vrijedi i

Propozicija 5. *Recipročna rešetka direktne rešetke nekog kristalnog sustava je rešetka istog kristalnog sustava.*

Napomenimo još jednom: točke recipročne rešetke predstavljaju smjerove mrežnih ravnina u direktnoj rešetki: ravnina (hkl) direktnog prostora je u recipročnom prostoru predstavljena točkom s radij-vektorom $h\mathfrak{a}^* + k\mathfrak{b}^* + l\mathfrak{c}^*$.

Primjer 177. *Promotrimo dvodimenzionalni analog direktne i recipročne rešetke*[23] *prikazan na slici 7.12. Direktna rešetka određena je vektorima* $\mathfrak{a}$ *i* $\mathfrak{b}$ *koji zatvaraju kut* γ. *Razmak* d_{100} *između dvije* (100) *ravnine (tj. dvije susjedne mrežne ravnine paralelne vektorima* $\mathfrak{b}$ *i* $\mathfrak{c}$*) jednak je visini paralelograma (jedinične ćelije) okomite na* $\mathfrak{b}$. *Razmak* d_{010} *dvije* (010) *ravnine jednak je visini paralelograma (jedinične ćelije) okomite na* $\mathfrak{a}$.

Pripadnu bazu recipročnog prostora čine $\mathfrak{a}^*$ *i* $\mathfrak{b}^*$. *Pritom je* $\mathfrak{a}^*$ *okomit na* (100) *ravnine i ima duljinu* $1/d_{100}$, *a* $\mathfrak{b}^*$ *okomit na* (010) *ravnine i ima duljinu* $1/d_{010}$.

Iz međusobne ortogonalnosti baznih vektora direktnog i recipročnog prostora slijedi: vektorski produkt dva radij-vektora točke direktne rešetke je radij-vektor točke recipročne rešetke (i obrnuto):

$$\mathfrak{r}_1 \times \mathfrak{r}_2 = (u_1\mathfrak{a} + v_1\mathfrak{b} + w_1\mathfrak{c}) \times (u_2\mathfrak{a} + v_2\mathfrak{b} + w_2\mathfrak{c}) =$$

[23]Možemo zamisliti i da se radi o rešetki monoklinskog sustava gledanoj „odozgo” tj. uzduž c-osi.

$$= V(v_1w_2 - v_2w_1)\mathfrak{a}^* + V(w_1u_2 - w_2u_1)\mathfrak{b}^* + V(u_1v_2 - u_2v_1)\mathfrak{c}^*.$$

Iz istog svojstva slijedi i: skalarni produkt vektora $\mathfrak{r}$ s koordinatama $[u, v, w]$ u direktnom prostoru i vektora $\mathfrak{r}^*$ s koordinatama $[h, k, l]$ u recipročnom prostoru iznosi

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}^* = uh + vk + wl.$$

Ako je $T(h, k, l)$ točka recipročne rešetke s cjelobrojnim i međusobno relativno prostim koordinatama, njoj je pridružen smjer (hkl) ravnina u direktnoj rešetci. Ako uzmemo da je $\mathfrak{r}^*$ radij-vektor od T i promatramo skup svih točaka $P = (x, y, z)$ u direktnoj rešetci takvih da za njihove radij-vektore $\mathfrak{r}$ vrijedi

$$\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}^* = hx + ky + lz = n$$

(gdje je $n \in \mathbb{Z}$ neka konstanta[24]), vidimo da se radi o jednadžbi ravnine u direktnom prostoru kojoj je vektor normale $\mathfrak{n} = h\mathfrak{a} + k\mathfrak{b} + l\mathfrak{c}$. Stoga je skup svih točaka P za koje je $\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}^*$ konstantno jednak skupu svih ravnina direktnog prostora s vektorom normale $\mathfrak{n}$. Označimo sad s $\mathcal{N}_{hkl}$ stvarnu[25] duljinu vektora $\mathfrak{r}^*$, koji je normalan na ravninu $hx + ky + lz - n = 0$. Udaljenost ravnine $hx + ky + lz = n$ do ishodišta je $\frac{|h\cdot 0 + k\cdot 0 + l\cdot 0 - n|}{|\mathfrak{r}^*|} = \frac{|n|}{\mathcal{N}_{hkl}}$. Ishodištu najbliža ravnina $hx + ky + lz = n$ se dobije za $n = 1$ pa je $d_{hkl} = \frac{1}{\mathcal{N}_{hkl}}$ tj.

$$d_{hkl}\mathcal{N}_{hkl} = 1.$$

Posljednja jednakost zove se temeljnim zakonom recipročne rešetke. Gledamo li sve ravnine $hx + ky + lz = n$ (tj. sve n), udaljenosti ishodišta su im nd_{hkl}. Kako je $\frac{1}{n}d_{hkl} \cdot n\mathcal{N}_{hkl} = 1$, vidimo da točki $T = (h, k, l)$ iz recipročne rešetke odgovara skup mrežnih ravnina direktnog prostora kojima je razmak n puta manji od stvarnog razmaka među odgovarajućim ravninama kroz točke rešetke.

☼ **Ponovimo bitno**... Za danu kristalnu (direktnu) rešetku definira se njoj recipročna, određena vektorima baze tzv. recipročnog prostora $\mathfrak{a}^* = \frac{\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}}{V}$, $\mathfrak{b}^* = \frac{\mathfrak{c}\times\mathfrak{a}}{V}$ i $\mathfrak{c}^* = \frac{\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}}{V}$, gdje je V volumen jedinične ćelije direktnog prostora. I direktni i recipročni prostor su prostor $\mathbb{R}^3$, koordinatiziran bazama povezanim prethodnim formulama. Vektori baze recipročnog prostora su okomiti na koordinante ravnine baze direktnog prostora. Smjeru ravnina (hkl) u direktnom prostoru odgovara točka s koordinatama (h, k, l) u recipročnom prostoru. Direktna i recipročna rešetka pripadaju istom kristalnom sustavu. Jedinica duljine u recipročnom prostoru je recipročna jedinici duljine u direktnom prostoru. ☺

7.5 Zadaci za vježbu

1. Zadani su vektori $\vec{a} = [2, -1, 3]$, $\vec{b} = [1, -3, 2]$ i $\vec{c} = [3, 2, -4]$.

   (a) Pokažite da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ linearno nezavisni.

[24] Ako baza direktnog prostora nije primitivna, onda $n \in \mathbb{Q}$.

[25] Misli se: duljinu izraženu u recipročnoj jedinici duljine onoj jedinici koju koristimo u direktnom prostoru.

(b) Napišite vektor $\vec{x} = [2, -7, 4]$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

R: (a) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. (b) $\vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

2. Neka je $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ i $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$, $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$ i $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. Izračunajte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.
R: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$, $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{6}{\sqrt{111}}$.

3. Zadani su vektori $\vec{a} = [2, -1, 3]$ i $\vec{b} = [1, -2, 4]$. Izračunajte površinu paralelograma razapetog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
R: $P = \sqrt{35}$.

4. Zadane su točke $A(2, 0, 1)$, $B(-1, \alpha, 0)$ i $C(0, 1, 3)$. Odredite vrijednost parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da površina trokuta ABC iznosi $\frac{\sqrt{74}}{2}$.
R: $\alpha = 1$.

5. Zadani su vektori $\vec{a} = [-1, 0, 1]$, $\vec{b} = [\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}]$ i $\vec{c} = [1, -1, 2]$.

   (a) Jesu li vektori $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ komplanarni?

   (b) Izračunajte volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$.

   R: (a) Ne. (b) $V = 1$.

6. Zadane su točke $A(2, 3, -1)$, $B(1, 0, 2)$, $C(-1, 2, 3)$ i $D(2, -1, \alpha)$. Odredite sve vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da volumen tetraedra $ABCD$ bude jednak $\frac{10}{3}$.
R: $\alpha \in \{-1, 4\}$.

7. Koristeći vektore, dokažite da su dijagonale romba međusobno okomite te da se raspolavljaju.

8. Neka su A, B, C i D vrhovi tetraedra. Dokažite da vrijedi
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 .$$

9. Odredite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $M(3, -1, 1)$ i okomita je na ravnine
$$\Pi_1 \ ... \ 2x - y + 3z = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \ ... \ x + 2y + z - 1 = 0 .$$
R: $-7x + y + 5z + 17 = 0$.

10. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac
$$p \ ... \ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$
i okomita je na ravninu Π ... $2x + 3y - z - 4 = 0$.
R: $8x - 5y + z - 11 = 0$.

11. Odredite međusobni položaj pravaca

$$p_1 \ ... \ \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \quad (t \in \mathbf{R}) \\ z = 1 - 6t \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 \ ... \ \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \ . \end{cases}$$

R: $p_1 \perp p_2$.

12. Zadana je ravnina $\Pi \ ... \ x + z - 1 = 0$ i pravci

$$p_1 \ ... \ \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{i} \quad p_2 \ ... \ \frac{x}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \ .$$

(a) Pokažite da pravac p_1 leži u ravnini Π.
(b) Odredite kut između pravaca p_1 i p_2.
(c) Odredite presjek pravca p_2 i ravnine Π.

R: (b) $\cos \sphericalangle (p_1, p_2) = \frac{4}{\sqrt{30}}$. (c) $T(0, \frac{1}{2}, 1)$.

13. Zadani su pravci

$$p_1 \ ... \ \frac{x+2}{6} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1} \quad \text{i} \quad p_2 \ ... \ \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{\alpha} = \frac{z-1}{-1} \ .$$

(a) Odredite vrijednost parametra $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da se pravci p_1 i p_2 sijeku.
(b) Napišite jednadžbu ravnine u kojoj leže pravci p_1 i p_2.

R: (a) $\alpha = -1$. (b) $x + 2y + 2z - 8 = 0$.

14. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(0, 1, 0)$ i okomit je na pravac određen ravninama

$$\Pi_1 \ ... \ 3x + y - 5z + 1 = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \ ... \ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \ .$$

R: $x = 1 - y = z$.

15. Napišite jednadžbu ravnine koja prolazi točkom $A(-1, 4, 3)$ i paralelna je pravcima

$$p_1 \ ... \ \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{i} \quad p_2 \ ... \ \frac{x-6}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-2} \ .$$

R: $4x - y + 5z - 7 = 0$.

16. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(-4, -5, 3)$ te siječe pravce

$$p_1 \ ... \ \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{i} \quad p_2 \ ... \ \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5} \ .$$

R: $\frac{x-5}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$.

17. Odredite točku simetričnu točki $T(1,2,-3)$ u odnosu na ravninu $x+y+4z=9$.
R: $T(3,4,5)$.

18. Odredite udaljenost točke $T(1,2,2)$ od pravca koji prolazi točkama $A(2,-1,0)$ i $B(2,2,3)$.
R: $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

19. Zadani su pravci

$$p_1 \ \dots \ \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1} \quad \text{i} \quad p_2 \ \dots \ \frac{x}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{-2}$$

te ravnina Π ... $x+y=\alpha$. Odredite sve vrijednosti parametra $\alpha\in\mathbf{R}$ tako da pravci p_1 i p_2 sijeku ravninu Π u točkama čija je udaljenost 3.
R: $\alpha\in\{\frac{19}{9},3\}$.

20. Odredite ortogonalnu projekciju pravca

$$p \ \dots \ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-1}$$

na ravninu Π ... $x+2y-5z+3=0$.
R: $\frac{x-3}{47}=\frac{y-2}{64}=\frac{z-2}{35}$.

21. Nađite opću jednadžbu mrežne ravnine najbliže ishodištu (koja ne prolazi kroz ishodište) koja ima Millerove indekse (230).
Rješenje: $2x+3y=6$.

22. Ako je u kristalografskom koordinatnom sustavu jednadžba mrežne ravnine $2x-y=5$, izrazite njen smjer Millerovim indeksima.
Rješenje: $(2\bar{1}0)$.

23. Kristalu koji kristalizira u kubičnom sustavu iz Braggova zakona utvrđen je parametar jedinične ćelije $a=687$ pm. Kolika je duljina brida jedinične ćelije u recipročne kristalne rešetke?
Rješenje: $1{,}46\cdot10^{-3}$ pm^{-1}.

24. Ako je kristalografska baza opisana u Cartesiusovom koordinatnom sustavu kao $\overrightarrow{a}=0{,}5\overrightarrow{i}+0{,}8\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b}=0{,}3\overrightarrow{j}+0{,}9\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c}=0{,}1\overrightarrow{i}-0{,}5\overrightarrow{j}+0{,}4\overrightarrow{k}$ (jedinica duljine je Å), odredite volumen jedinične ćelije u recipročnom prostoru.
Rješenje: $V^*=1/V=2{,}8$ Å^{-3}.

Standardne oznake

$\in$	„je element”
$\notin$	„nije element”
$\Leftrightarrow$	„ekvivalentno je” („svejedno je”)
$\Rightarrow$	„povlači” („ako – onda”)
$A \cup B$	unija skupova A i B
$A \cap B$	presjek skupova A i B
$A \setminus B$	razlika skupova A i B („A bez B”)
$\langle a, b \rangle$	otvoreni interval od a do b
	(skup svih brojeva x takvih da je $a < x < b$)
$[a, b\rangle$	poluotvoreni interval od a (uključivo) do b
	(skup svih brojeva x takvih da je $a \leq x < b$)
$\langle a, b]$	poluotvoreni interval od a do b(uključivo)
	(skup svih brojeva x takvih da je $a < x \leq b$)
$[a, b]$	zatvoreni interval (segment) od a do b
	(skup svih brojeva x takvih da je $a \leq x \leq b$)
$+\infty$	pozitivna beskonačnost (neodređeno i proizvoljno velik broj)
$-\infty$	negativna beskonačnost (neodređeno i proizvoljno mali broj)
$\lvert x \rvert$	apsolutna vrijednost broja x
$f : D \to K$	funkcija f s domenom D i kodomenom K
$f(x)$	vrijednost funkcije f u varijabli x
$x, y, z, \ldots$	uobičajene oznake varijabli
$a, b, c, \ldots$	uobičajene oznake konstanti
$g \circ f$	kompozicija funkcija g i f (djeluje po pravilu $g \circ f(x) = g(f(x))$)
f^{-1}	inverzna funkcija funkcije f
$f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	(prva) derivacija funkcije f s varijablom x
$x \to c$	brojevi x postaju sve bliži broju c
$\lim\limits_{x \to c} f(x)$	limes od f kad x teži u c
$\lim\limits_{x \to c-} f(x)$	lijevi limes od f kad x teži u c
$\lim\limits_{x \to c+} f(x)$	desni limes od f kad x teži u c
$x \to -\infty$, $x \to +\infty$	brojevi x postaju proizvoljno mali odnosno veliki
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	neodređeni integral funkcije f
$F(x)\rvert_a^b$	razlika $F(b) - F(a)$
i	imaginarna jedinica
$z = x + yi$	kompleksan broj s realnim dijelom x i imaginarnim dijelom y
$\overline{z}$	kompleksno konjugirani broj od z
$\lvert z \rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$	trigonometrijski oblik kompleksnog broja z
$\lvert z \rvert e^{i\theta}$	eksponencijalni oblik kompleksnog broja

V^2, V^3	vektorski prostor svih vektora u ravnini odnosno prostoru koji su karakterizirani svojom duljinom, smjerom i orijentacijom
$V^2(O)$, $V^3(O)$	vektorski prostor svih radij-vektora u ravnini tj. svih orijentiranih dužina koje spajaju ishodište s točkama ravnine odnosno prostora
$\overrightarrow{v}$	vektor u jednom od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$
$\overrightarrow{0}$	nulvektor u jednom od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$
$\lvert\overrightarrow{v}\rvert$, v	duljina vektora $\overrightarrow{v}$ u jednom od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	skalari (u kontekstu vektorskih prostora)
$[x, y]$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	koordinatni prikaz vektora u dvodimenzionalnom prostoru
$[x, y, z]$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	koordinatni prikaz vektora u trodimenzionalnom prostoru
$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$	skalarni produkt vektora u jednom od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$
$\perp$	ortogonalnost, okomitost
$\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$	vektori standardne ortonormirane baze za prostore V^3 i $V^3(O)$
$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$	vektorski produkt u V^3 i $V^3(O)$
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$	mješoviti produkt u V^3 i $V^3(O)$
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$	kanonska baza za $\mathbb{R}^n$
$\overrightarrow{n} = [A, B, C]$	vektor normale ravnine u prostoru
$\overrightarrow{s} = [a, b, c]$	vektor smjera pravca u prostoru
x_j	j-ta nepoznanica u sustavu
a_{ij}	koeficijent i-te jednadžbe sustava linearnih jednadžbi uz j-tu nepoznanicu ili element matrice A koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu
b_i	slobodni član u i-toj jednadžbi sustava linearnih jednadžbi
A, B, C, ...	matrice
$M_{m,n}$	skup svih matrica s m redaka i n stupaca
$0_{m,n}$	nulmatrica s m redaka i n stupaca
M_n	skup svih kvadratnih matrica s po n redaka i stupaca
I_n	jedinična matrica u M_n
A^t	matrici A transponirana matrica
A^*	kompleksnoj matrici A hermitski konjugirana matrica
A^{-1}	matrici A inverzna matrica
$\det A$	determinanta matrice A
$\operatorname{tr} A$	trag kvadratne matrice A
$\mathbb{R}^n$	skup odnosno vektorski prostor uređenih n-torki realnih brojeva
$\mathbb{C}^n$	skup odnosno vektorski prostor uređenih n-torki kompleksnih brojeva
$\hat{A}$, $\hat{\Omega}$, ...	linearan operator
$k_A(\lambda)$	karakteristični polinom operatora prikazanog matricom A

ν_{J}	stehiometrijski koeficijent sudionika J neke reakcije
c_{J}, [J]	množinska koncentracija sudionika J neke reakcije
ξ	doseg reakcije
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	parcijalna derivacija prvog reda skalarne funkcije f po varijabli x_i
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$	parcijalna derivacija drugog reda skalarne funkcije f, prvo po x_i, pa onda po x_j
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$	parcijalna derivacija drugog reda skalarne funkcije f, dvaput po istoj varijabli x_i
$\operatorname{grad} f = \nabla f$	gradijent skalarne funkcije f
$Hf(X)$	Hesseova matrica skalarne funkcije f u točki X
$\iint_A f\,\mathrm{d}A$	dvostruki integral funkcije dviju varijabli f po području A
$\iiint_V f\,\mathrm{d}V$	trostruki integral funkcije triju varijabli f po području V
(r, ϕ, θ)	sferne koordinate
JF, $\left\lvert \frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \right\rvert$	Jakobijan vektorske funkcije $F = (F_1, \ldots, F_n)$ od n varijabli $x_1, \ldots, x_n$
∇	nabla-operator
$\nabla \cdot F = \operatorname{div} F$	divergencija vektorske funkcije F
$\nabla \times F = \operatorname{rot} F$	rotacija vektorskog polja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\mathrm{d}f(X)$	diferencijal funkcije f u točki X
$\omega = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + \ldots$	diferencijal
$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$	krivuljni integral prve vrste skalarne funkcije f po krivulji γ
$\int_\gamma M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + \ldots$	krivuljni integral druge vrste vektorskog polja $F = (M, N, \ldots)$ po krivulji γ
$\oint$	krivuljni integral po zatvorenoj krivulji
U	unutrašnja energija
S	entropija
H	entalpija
A	Helmholtzova energija
G	Gibbsova energija
a_n	opći član niza
(a_n), $(a_n)_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	niz
$\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_n a_n$, $\lim a_n$	limes niza
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum a_n$	red određen nizom (a_n)
$\sum_n c_n(x-c)^n$	red potencija oko točke c
$\mathcal{F}(f)$	Fourierov transformat funkcije f

Formule

Jednadžba pravca u ravnini kroz točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Jednadžba pravca u ravnini kroz točku (x_0, y_0) kojemu je koeficijent smjera a

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tjeme kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima koordinate

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Standardne oznake za logaritamske funkcije

$$\ln x = \log_e x, \quad \log x = \log_{10} x$$

$$(e \approx 2,71)$$

Formule za eksponencijalnu i logaritamsku funkciju

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$$

$$a^x = b^{x \log_b a}, \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Opća potencija

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

Hiperbolne funkcije

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Formule za trigonometrijske funkcije

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x, \quad \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

Pravila deriviranja

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x), \quad (Cf(x))'=Cf'(x)$$

$$(f(x)g(x))'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $(c, f(c))$

$$y-f(c)=f'(c)\cdot(x-c)$$

Jednadžbe kružnice polumjera R sa središtem u ishodištu:
- u Cartesiusovim koordinatama: $x^2+y^2=R^2$
- parametarske jednadžbe: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$
- u polarnim koordinatama: $r=R$

Formule za prijelaz iz polarnih u Cartesiusove koordinate u ravnini i obrnuto

$$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \vartheta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Definicija neprekidnosti funkcije f u točki c

$$f(c)=\lim_{x\to c} f(x)$$

Definicija derivacije funkcije f u točki c

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Pravac $y = L$ je horizontalna asimptota funkcije f ako

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota funkcije f ako

$$\lim_{x \to c\pm} f(x) = \pm\infty$$

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota funkcije f ako

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = l$$

Tablica neodređenih integrala

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
K	$Kx + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Linearnost integriranja (za neodređene integrale)

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int K f(x)\,\mathrm{d}x = K \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Newton-Leibnizova formula (F je neka antiderivacija od f)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b$$

Linearnost integriranja (za određene integrale)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K f(x)\,\mathrm{d}x = K \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Svojstva određenih integrala

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Formula parcijalne integracije za neodređene i određene integrale

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

Metoda supstitucije za neodređene i određene integrale

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \{y = g(x)\} = \int f(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \{y = g(x)\} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y$$

Nepravi integrali se neograničenim područjem integriranja

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Brzina reakcije v i koncentracija izvedenih pretvorbi x

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t},$$

$$c = c_0 + \nu x$$

(pritom je c_0 početna i c trenutna koncentracija bilo kojeg sudionika reakcije, čiji stehiometrijski koeficijent je ν).

Formule za račun s kompleksnim brojevima

$$i^2 = -1$$

$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x + x') \pm (y + y')i$$

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

$$\overline{x + yi} = x - yi$$

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Formule za račun s kompleksnim brojevima u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x},$$

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')) = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')) = \frac{|z|}{|z'|}e^{i(\theta-\theta')}$$
$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = |z|^n e^{in\theta}$$
$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{z}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) : k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\} =$$
$$= \left\{ \sqrt[n]{z}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} : k = 0,1,2,\ldots,n-1 \right\}$$

Pravila vektorskog računa u prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = -\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$
$$\alpha \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$
$$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$$
$$(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$$
$$(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$$

Skalarni produkt u prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ (φ je kut između vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\cos\varphi$$
$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0},$$
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v},$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w},$$
$$(\alpha\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$
$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$
$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}|$$

Vektorski produkt u prostorima V^3 i $V^3(O)$ (φ je kut između vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$; smjer od $\vec{v} \times \vec{w}$ je okomit na oba vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a orijentacija mu je određena pravilom desne ruke)

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}|\,|\vec{w}|\sin\varphi$$
$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u}$$
$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u}$$
$$\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$$
$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$
$$\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$$

$$(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}=(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}-(\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{v}$$
$$(\vec{v}\times\vec{v'})\cdot(\vec{w}\times\vec{w'})=(\vec{v}\cdot\vec{w})\cdot(\vec{v'}\cdot\vec{w'})-(\vec{v}\cdot\vec{w'})\cdot(\vec{v'}\cdot\vec{w})$$
$$|\vec{v}\times\vec{w}|^2=|\vec{v}|^2\,|\vec{w}|^2-(\vec{v}\cdot\vec{w})^2$$

Mješoviti produkt u prostorima V^3 i $V^3(O)$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}).$$
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{v},\vec{w},\vec{u})=(\vec{w},\vec{u},\vec{v}).$$

Pravila računa s vektorima u koordinatnom obliku

$$[x_1,x_2,\ldots]+[y_1,y_2,\ldots]=[x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots]$$
$$\alpha[x_1,x_2,\ldots]=[\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots]$$
$$[x_1,x_2,\ldots]\cdot[y_1,y_2,\ldots]=x_1y_1+x_2y_2+\ldots$$
$$|[x_1,x_2,\ldots]|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots}$$
$$[x,y,z]\times[x',y',z']=[yz'-y'z,\, x'z-xz',\, xy'-x'y]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x&y&z\\ x'&y'&z'\end{vmatrix}$$

(posljednje tri formule vrijede samo ako su koordinate birane obzirom na ortonormiranu bazu)
Udaljenost dvije točke u prostoru (ako je koordinatni sustav ortonormiran)

$$d(T,T')=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

Opća jednadžba ravnine u prostoru

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Segmentni oblik jednadžbe ravnine u prostoru

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$$

Parametarski oblik jednadžbe ravnine u prostoru

$$x=x_0+v_1t+w_1s,$$
$$y=y_0+v_2t+w_2s,$$
$$z=z_0+v_3t+w_3s,$$
$$t,s\in\mathbb{R}$$

Jednadžba ravnine u prostoru koja prolazi točkom (x_0,y_0,z_0) i ima vektor normale $\vec{n}=[A,B,C]$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Uvjet paralelnosti ravnina

$$\vec{n}\times\vec{n'}=\vec{0}$$
$$A:A'=B:B'=C:C'$$

Uvjet okomitosti ravnina

$$\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$$
$$AA'+BB'+CC'=0$$

(druga formula vrijedi samo ako je koordinatni sustav ortonormiran)
Parametarski oblik jednadžbe pravca u prostoru (s vektorom smjera $\overrightarrow{s}=[a,b,c]$ koji prolazi točkom (x_0,y_0,z_0))

$$x=x_0+at,$$
$$y=y_0+bt,$$
$$z=z_0+ct,$$
$$t\in\mathbb{R}.$$

Kanonski oblik jednadžbe pravca u prostoru

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Jednadžba pravca u prostoru koji prolazi točkama (x_0,y_0,z_0) i (x_1,y_1,z_1)

$$x=x_0+(x_1-x_0)t,$$
$$y=y_0+(y_1-y_0)t,$$
$$z=z_0+(z_1-z_0)t,$$
$$t\in\mathbb{R}.$$

Uvjet paralelnosti pravaca

$$\overrightarrow{s}\times\overrightarrow{s'}=\overrightarrow{0}$$
$$a:a'=b:b'=c:c'$$

Uvjet okomitosti pravaca

$$\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{s'}=0$$
$$aa'+bb'+cc'=0$$

(druga formula vrijedi samo ako je koordinatni sustav ortonormiran)
Uvjet okomitosti pravca na ravninu

$$\overrightarrow{s}\times\overrightarrow{n}=\overrightarrow{0}$$
$$a:A=b:B=c:C$$

Uvjet paralelnosti pravca s ravninom

$$\overrightarrow{s}\cdot\overrightarrow{n}=0$$
$$aA+bB+cC=0$$

(druga formula vrijedi samo ako je koordinatni sustav ortonormiran)
Udaljenost točke (x_0,y_0,z_0) do ravnine $Ax+By+Cz+D=0$

$$d(T,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Laplaceov razvoj determinante po i-tom retku:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij},$$

Laplaceov razvoj determinante po j-tom stupcu:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}.$$

Karakteristični polinom operatora prikazanog matricom A:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Homogene diferencijalne jednadžbe $y' = f(y/t)$ se na jednadžbu sa separiranim varijablama svode supstitucijom

$$y = tu, \; y' = tu' + u.$$

Rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda $y' + f(t)y = g(t)$ se iz rješenja $y_H = Ce^{-F(t)}$ (F je neka antiderivacija od f) pripadne homogene jednadžbe $y' + f(t)y = 0$ dobiva metodom varijacije konstante: C shvatimo kao funkciju varijable t te $y(t) = C(t)e^{-F(t)}$ i $y'(t) = C'(t)e^{-F(t)} + C(t)e^{-F(t)}(-f(t))$ uvrstimo u polaznu jednažbu $y' + f(t)y = g(t)$ čime dobivamo jednažbu $C'(t) = g(t)e^{F(t)}$ iz koje se C određuje integriranjem.
Homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ rješava se pomoću njene karakteristične jednadžbe $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Ovisno o diskriminanti $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ imamo sljedeće oblike općeg rješenja jednadžbe $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$:

$D > 0$	dva realna rj. kar. j. x_1, x_2	$y(t) = C_1e^{x_1t} + C_2e^{x_2t}$,
$D = 0$	jedno realno rj. kar. j. x	$y(t) = C_1e^{xt} + C_2xe^{xt}$,
$D < 0$	dva kompl. rj. kar. j. $a \pm bi$	$y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$.

Određivanje partikularnog rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$ metodom neodređenih koeficijenata:

- Ako je $f(t)$ polinom[26] stupnja n pretpostavlja se da je y_P polinom istog stupnja, ali s neodređenim koeficijentima.
- Ako je $f(t)$ oblika e^{at}, pretpostavlja se da je y_P oblika Ae^{at} s nepoznatim A.
- Ako je $f(t)$ oblika e^{at} pomnožen s polinomom stupnja n, pretpostavlja se da je y_P oblika Ae^{at} pomnožen s polinomom stupnja n s nepoznatim A i koeficijentima polinoma.
- Ako je $f(t)$ oblika $e^{at}(\alpha\sin(bt) + \beta\sin(bt))$ (što uključuje oblike $\sin(bt)$, $\cos(bt)$, $e^{at}\sin(bt)$ i $e^{at}\cos(bt)$), pretpostavlja se da je $y_P = e^{at}(A\sin(bt) + B\sin(bt))$ s neodređenim A i B.

Određivanje partikularnog rješenja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$ metodom varijacije konstanti: u homogenom rješenju $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ se pretpostavi da su C_1 i C_2 funkcije od t; C_1' i C_2' određuju iz sustava

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0,$$

$$a_2(C_1'y_1' + C_2'y_2') = f(t).$$

Zakon brzine reakcije reda n sa samo jednim reaktantom A:

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{A}}} \cdot \frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k_n[\mathrm{A}]^n.$$

Lančano pravilo za parcijalne derivacije — slučaj kompozicije skalarne funkcije f koja ovisi o n varijabli s vektorskom funkcijom $(x_1, \ldots, x_n)$, gdje su $x_i = x_i(t)$ realne funkcije jedne varijable t

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}.$$

Lančano pravilo za parcijalne derivacije — slučaj kompozicije skalarne funkcije f dviju varijabli s vektorskom funkcijom dviju varijabli $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

[26]Konstantnu funkciju smatramo polinomom stupnja nula.

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Eulerovo cikličko pravilo

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Hesseova matrica skalarne funkcije f u točki X:

$$Hf(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(X) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(X) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X) \end{pmatrix}$$

Gradijent skalarne funkcije f:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t.$$

Postupak određivanja lokalnih ekstrema skalarne funkcije f:

- Prvo se odrede stacionarne točke, tj. elementi X iz domene od f takvi da je $\nabla f(X)$ nulvektor.
- Ako je X stacionarna točka, ona je točka lokalnog minimuma ako su sve glavne minore od $Hf(X)$ pozitivne.
- Ako je X stacionarna točka, ona je točka lokalnog maksimuma ako predznaci minora Hesseove matrice $H(f)(X_0)$ alterniraju počevši s negativnim.

Fubinijev teorem:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Formule za prijelaz iz sfernih u Cartesiusove koordinate:

$$x = r\cos\phi\sin\theta,$$

$$y = r\sin\phi\sin\theta,$$

$$z = r\cos\theta.$$

Jakobijan vektorske funkcije $F = (F_1, \dots, F_n)$ od n varijabli $x_1, \dots, x_n$:

$$JF = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right).$$

Zamjena varijabli u višestrukim integralima:

$$x = u(x', y'), y = v(x', y'), F = (u, v) \Rightarrow \iint\limits_S f(x', y') \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x', y')} \right| \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' = \iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$x = u(x', y', z'), y = v(x', y', z'), z = w(x', y', z'), F = (u, v, w) \Rightarrow$$

$$\iiint\limits_W f(x', y', z') \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x', y', z')} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Nabla-operator: gradijent, divergencija, rotacija

$$\operatorname{grad} f(X) = \nabla f(X) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t,$$

$$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g,$$

$$\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla f,$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(X),$$

$$\nabla \cdot (F+G) = \nabla \cdot F + \nabla \cdot G,$$

$$\nabla \cdot (\alpha F) = \alpha \nabla \cdot F,$$

$$\nabla \cdot (fF) = (\nabla f) \cdot F + f(\nabla \cdot F),$$

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

$$\nabla \times (F+G) = \nabla \times F + \nabla \times G,$$

$$\nabla \times (\alpha F) = \alpha \nabla \times F,$$

$$\nabla \times (fF) = (\nabla f) \times F + f(\nabla \times F),$$

$$\nabla \times (F \times G) = (\nabla \cdot G)F + (G \cdot \nabla)F - (\nabla \cdot F)G - (F \cdot \nabla)G,$$

$$\nabla \cdot (F \times G) = (\nabla \times F) \cdot G - F \cdot (\nabla \times G),$$

$$\nabla(F \cdot G) = F \times (\nabla \times G) + G \times (\nabla \times F) + (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F.$$

Djelovanje Laplaceovog operatora na skalarnu funkciju

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Gradijent, divergencija, rotacija i Laplaceov operator u sfernim koordinatama (za funkcije triju varijabli)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \right),$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi^2},$$

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi},$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}(\sin\phi F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) \right)\hat{\phi} +$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi) - \frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right)\hat{\theta}$$

Diferencijal funkcije

$$\mathrm{d}f(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot \mathrm{d}x_i,$$

$$\mathrm{d}x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_i$$

Krivuljni integrali prve vrste skalarne funkcije f

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\gamma} f\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f\,\mathrm{d}s$$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}s$$

Duljina krivulje $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$l(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}s$$

Krivuljni integrali druge vrste vektorskog polja $F = (F_1, \ldots, F_n)$

$$\int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i\,\mathrm{d}x_i = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega$$

$$\oint \mathrm{d}f = \oint \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \mathrm{d}x_i = 0$$

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot \mathrm{d}x_i = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Prvi i drugi glavni stavak termodinamike

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}q}{T}$$

Entalpija, Helmholtzova i Gibbsova energija

$$H = U + pV$$

$$A = H - TS$$

$$G = H - TS$$

Metoda najmanjih kvadrata — aproksimacija afinom funkcijom

$$s_{x^2} = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad s_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad s_y = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{x^2} - s_x^2}$$

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{ns_{x^2} - s_x^2}$$

Limesi nizova

$$\lim aq^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1,\ a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1,\ a_0 < 0, \\ \text{neodređen}, & q \leq -1 \end{cases},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad \text{za } k > 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Suma geometrijskog reda (za $|q| < 1$):

$$\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

Taylorov red funkcije f:

$$T(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Greška aproksimacije funkcije f oko točke c Taylorovim polinomom $T_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},$$

za neki t između c i x.
Važniji Maclaurinovi redovi:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1]$$

Fourierov red funkcije f zadane na $[-L, L]$:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n f_n(x) + B_n g_n(x)\right),$$

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n \rangle,$$

$$B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n \rangle, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right),$$

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(x),$$

$$\phi_n(x) = e^{in\pi x/L}$$

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2}$$

Fourierov transformat funkcije f

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

Bibliografija

[1] P. Atkins, J. De Paula, Physical Chemistry, *Oxford University Press*, 2006.

[2] T. Cvitaš, materijali iz fizikalne kemije, `ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz_Kem/`

[3] S. Kurepa, Matematička analiza 2, *Tehnička knjiga*, Zagreb, 1971.

[4] R. G. Mortimer, Mathematics for Physical Chemistry, 3rd ed., *Elsevier*, 2005.

[5] E. A. Reinsch, Mathematik für Chemiker, *Teubner*, 2004.

[6] V. Simeon, Kemijska termodinamika, 1. poglavlje, primjerak za studentsku uporabu, Zagreb, 2004.

[7] `http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html`

[8] Paul's Online Math Notes, `http://tutorial.math.lamar.edu/`

[9] `http://betterexplained.com/articles/category/math/vector-calculus/`

[10] `http://www.ma.utexas.edu/users/hausel/m408k/wyles-stergio-anderson/calculus/problem.html`

[11] `http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/`

Kazalo

e, 40, 126

afina funkcija, 21
akceleracija, 168
algebarske funkcije, 20, 36
antiderivacija, 143
aplikata, 212
apscisa, 11, 212
apsolutna vrijednost, 9, 52, 133
apsolutna vrijednost kompleksnog broja, 183
argument kompleksnog broja, 188
Arhimedova spirala, 99
arkus-funkcije, 47
arkus-kosinus, 48
arkus-kotangens, 48
arkus-sinus, 48
arkus-tangens, 48
Arrheniusov zakon, 52
asimptota, 28
asocijativnost, 7

baza prostora, 203, 211
Bernoullijeva lemniskata, 99
beskonačni limesi, 116
bijekcija, 18, 35
bitni prekid, 131
Bolzano-Weierstrass-ov teorem, 131
Bornova interpretacija valne funkcije, 171
brzina, 69
brzina reakcije, 69, 88, 167

ciklometrijske funkcije, 47

de Moivre-ova formula, 190
decimalni zapis, 8
derivabilne funkcije, 132
derivacija, 67, 68, 132
derivacija inverzne funkcije, 75, 76
derivacija kompozicije funkcija, 75
derivacija kompozicije funkcije, 76
derivacija kvocijenta funkcija, 74
derivacija produkta funkcija, 74, 154
diferencijalna jednadžba drugog reda, 87
diferencijalna jednadžba prvog reda, 87
dimenzija prostora, 203
direktna rešetka, 229
direktni prostor, 229
diskretne varijable, 5
domena, 13
donja Darbouxova suma, 148
donja integralna suma, 148
doseg reakcije, 88
druga derivacija, 72, 80
duljina vektora, 200, 206, 210

eksponencijalne funkcije, 37
eksponencijalni oblik kompleksnog broja, 193
ekstremi, 77
električni rad, 168
entalpija, 170
Eulerova formula, 193

funkcija, 13
funkcija gustoće vjerojatnosti, 171

gama-funkcija, 163
geometrijska sredina, 93
glatke funkcije, 133
globalni maksimum, 77
globalni minimum, 77
gornja Darbouxova suma, 148
gornja integralna suma, 148
graf funkcije, 14
granice određenog integrala, 149

heksagonski kristalni sustav, 223
Henderson-Hasselbachova jednadžba, 41
Hiperbolna spirala, 99
hiperbolne funkcije, 42
horizontalna asimptota, 28, 37, 47
horizontalne asimptote, 120

identiteta, 13, 21
imaginarna jedinica, 181
imaginarna os, 182
imaginarni dio kompleksnog broja, 181
implicitno deriviranje, 95
infinitezimalni račun, 67
injekcija, 18
integrabilna funkcija, 149
integrirani zakon brzine reakcije, 90
integriranje racionalnih funkcija, 158

inverzna funkcija, 35
ishodište, 11
ispitivanje toka funkcije, 84

jedinična ćelija, 222
jednadžba pravca, 213
jednadžba stanja idealnog plina, 5, 15, 23, 30
jednadžba tangente na graf funkcije, 68
jednostrani beskonačni limesi, 117
jednostrani limesi, 114

kanonska baza, 211
kanonski oblik jednadžbe pravca, 219
Kartezijev koordinatni sustav, 11, 212
kemijska kinetika, 88
kemijski rad, 168
kodomena, 13
koeficijent brzine reakcije, 90
koeficijent smjera, 21
koeficijenti polinoma, 26
Kohlrauschov zakon, 33
kolinearni vektori, 202
komplanarni vektori, 202
kompleksne funkcije, 187
kompleksno konjugirani broj, 185
kompozicija funkcija, 34
komutativnost, 7
konkavna funkcija, 80
konstanta integriranja, 145
konstante, 5
konstantna funkcija, 21
kontinuirane varijable, 5
konveksna funkcija, 80
koordinate, 11, 204
koordinate osi, 220
koordinatne osi, 10, 212
koordinatne ravnine, 212, 213
koordinatni sustav, 203, 212
korijeni, 32, 35
korjenovanje, 8
kose asimptote, 122, 123
kosinus, 44, 45
kosinus hiperbolni, 42
kotangens, 47
kotangens hiperbolni, 42
kristalna rešetka, 222
kristalni sustav, 205, 223, 231
kristalni sustavi, 223
kristalografska baza, 205, 222
kritična točka, 78
kritične točke, 133
krivulja u prostoru, 217
krivulje u ravnini, 94
kubični kristalni sustav, 207, 223, 231
kvadranti, 11
kvadratna funkcija, 24
kvadratna jednadžba, 24, 182, 185

L'Hôpital-ovo pravilo, 127, 128
L'Hospital-ovo pravilo, 127, 128
Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti, 144
Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, 134
lančano pravilo, 75, 76, 156
limes funkcije u točki, 111, 112
limes kompozicije funkcija, 125
limes kvocijenta funkcija, 125
limes produkta funkcija, 125
limes razlike funkcija, 125
limes slijeva, 114
limes zbroja funkcija, 125
limes zdesna, 114
limesi u beskonačnosti, 120
linearna algebra, 199
linearna kombinacija, 181
linearna kombinacija vektora, 202, 211
linearna supstitucija, 156, 160
linearne funkcije, 21
linearno nezavisan skup, 203, 211
linearno zavisan skup, 203, 211
linearnost deriviranja, 73, 145
linearnost integriranja, 146, 153
ln, 40
log, 40
logaritamske funkcije, 38
logaritamsko deriviranje, 75
lokalni maksimum, 77
lokalni minimum, 77

Maxwellova raspodjela, 90
metoda supstitucije za integrale, 156, 157
Millerovi indeksi, 226
mimoilazni pravci, 220
mješoviti produkt vektora, 209
množenje vektora skalarom, 201, 204
molarni toplinski kapacitet, 170
monoklinski kristalni sustav, 223
monomi, 25
mrežne ravnine, 225

nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog, 208
nejednakost trokuta, 185
neodređeni integral, 145, 150
neodređeni izrazi, 127
neodređeni izrazi kod limesa, 118
neparna funkcija, 17
nepravi integrali, 161, 162, 164, 170
neprekidna funkcija, 83, 129
neprekidnost u točki, 129
neutralni element, 7
Newton-Leibnizova formula, 152

nezavisne i zavisne varijable, 5
nultočke funkcije, 14
nulvektor, 201

očekivana vrijednost slučajne varijable, 171
obrnuta proporcionalnost, 27
određeni integral, 147, 148, 150
određivanje globalnih ekstrema, 82, 83
određivanje lokalnih ekstrema, 78, 81
oduzimanje vektora, 201
ograničena funkcija, 147
okomitost praca na ravninu, 221
okomitost pravaca, 220
okomitost ravnina, 215
opáa potencija, 41
opća jednadžba ravnine, 213
orbitala, 170
ordinata, 11, 212
orijentacija vektora, 200
orijentirana dužina, 199
ortogonalna projekcija, 207
ortogonalni vektori, 206, 210
ortogonalnost funkcija, 171
ortonormirana baza, 206
osnovni teorem infinitezimalnog računa, 152
Ostwaldov zakon, 50

padajuća funkcija, 17, 68
paralelnost pravaca, 220
paralelnost pravca i ravnine, 221
paralelnost ravnina, 215
parametarske jednadžbe pravca, 217, 218
parametarske jednadžbe ravnine, 216
parametarski zadane funkcije, 97
parcijalna integracija, 154
parna funkcija, 17
periodičnost, 44
ploha, 212, 218
po dijelovima neprekidna funkcija, 132
početni uvjeti, 86
podintegralna funkcija, 145
polarne koordinate u ravnini, 98
polinomi, 25
polovište dužine, 213
potenciranje, 8
pravokutni koordinatni sustav, 10
prekid druge vrste, 131
prekid prve vrste, 131
prikaz vektora u bazi, 203
primitivna funkcija, 143
prirodna domena, 14
problem površine, 147
proporcionalnost, 21
prosječna vrijednost funkcije, 166
prosječna vrijednost slučajne varijable, 171

računske operacije, 7
racionalne funkcije, 28, 118, 121, 158
rad, 168
radijalna gustoća vjerojatnosti, 171
radijan, 45
rastav na parcijalne razlomke, 158, 159
rastuća funkcija, 17, 68
ravnotežna koncentracija, 121
reakcija drugog reda, 129, 167
reakcija nultog reda, 22
reakcija prvog reda, 23, 69
realna os, 182
realne funkcije, 14
realne funkcije jedne varijable, 14
realni dio kompleksnog broja, 181
realni vektorski prostor, 199
recipročna rešetka, 229, 230
recipročni prostor, 229
red reakcije, 90
red veličine, 10
reprezentant vektora, 200
restrikcija funkcije, 35
reverzibilna ekspanzija, 169
reverzibilna kompresija, 169
Riemann-integrabilna funkcija, 149
Riemannov integral, 149
rješenje diferencijalne jednadžbe, 86
rompski kristalni sustav, 223, 227

segmentni oblik jednadžbe ravnine, 213
sinus, 44, 45
sinus hiperbolni, 42
skalar, 199
skalarni produkt vektora, 205, 206
skok, 131, 132
skup, 6
skup cijelih brojeva, 7
skup kompleksnih brojeva, 181
skup prirodnih brojeva, 7
skup racionalnih brojeva, 7
skup realnih brojeva, 7
slika funkcije, 14
slobodni član, 21, 24, 26
smjer vektora, 200
spirala, 218
stacionarna točka, 78
stehiometrijski koeficijent, 88
stupanj polinoma, 25
stupanj slobode, 213
subdivizija intervala, 147
suprotni vektor, 201
surjekcija, 18
svojstva određenog integrala, 150

tablično integriranje, 146

tablica derivacija, 72
tangens, 47
tangens hiperbolni, 42
tangenta, 68, 71
temeljni period, 44
temeljni zakon recipročne rešetke, 232
teorem o implicitnoj funkciji, 95
teorem srednje vrijednosti za integrale, 166
tetragonski kristalni sustav, 223
točka infleksije, 81
točka prekida, 129
torus, 218
transcendentne funkcije, 20, 36
transformacije grafova, 18
trigonometrijske funkcije, 44
trigonometrijski oblik kompleksnog broja, 188
trigonski kristalni sustav, 223
triklinski kristalni sustav, 205, 223

ubrzanje, 168
udaljenost dvije točke u prostoru, 212
udaljenost točke od ravnine, 221
uklonjivi prekid, 131
unitarni prostor, 205
unutrašnja energija, 170
uređeni par, 10
uvjet normiranja, 171

valna duljina, 44
valna funkcija, 170
van der Waalsova jednadžba, 169
varijable, 5
vektor, 199
vektor normale ravnine, 214
vektor smjera pravca, 217
vektorski produkt vektora, 208, 209
vektorski prostor, 210, 211
vertikalna asimptota, 29, 47, 116
veza derivabilnosti i integrabilnosti, 151
veza derivabilnosti i neprekidnosti, 133
višestruka nultočka polinoma, 26, 159
vodeći koeficijent (kvadratna f.), 24
vodeći koeficijent (polinoma), 26
volumni rad, 168

Weissovi parametri, 225

zaokruživanje, 10
zavisne i nezavisne varijable, 5
zbrajanje vektora, 200, 204
značajne znamenke, 9
znanstvena notacija, 9