Matematika 1 za kemičare

rješenja petih zadataka prvog kolokvija, 23. studenog 2017.

Franka Miriam Brückler

Zadaci.

1. Van der Waalsova jednadžba stanja plina glasi

$$pV_\mathrm{m}^2(V_\mathrm{m}-b) = RTV_\mathrm{m}^2 - a(V_\mathrm{m}-b),$$

gdje je p tlak, V_m molarni volumen, T je termodinamička temperatura (u K), $R = 8{,}3145$ J K^{-1} mol^{-1} opća plinska konstanta, a a i b su van der Waalsovi koeficijenti (konstante ovisne o sastavu plina). Kritični molarni volumen V_mc je molarni volumen za koji je stacionarna točka od p kao funkcije molarnog volumena istovremeno i točka infleksije. Pripadni tlak p_c zove se kritični tlak, a odgovarajuća temperatura je kritična temperatura T_c. Izrazite sve tri van der Waalsove kritične konstante V_mc, p_c i T_c preko R, a i b.

2. Dietericijeva jednadžba stanja plina glasi

$$p(V_\mathrm{m}-b) = RT\exp(-a/(RTV_\mathrm{m}),$$

gdje je p tlak, V_m molarni volumen, T je termodinamička temperatura (u K), $R = 8{,}3145$ J K^{-1} mol^{-1} opća plinska konstanta, a a i b su Dietericijevi koeficijenti (konstante ovisne o sastavu plina). Kritični molarni volumen V_mc je molarni volumen za koji je stacionarna točka od p kao funkcije molarnog volumena istovremeno i točka infleksije. Pripadni tlak p_c zove se kritični tlak, a odgovarajuća temperatura je kritična temperatura T_c. Izrazite sve tri Dietericijeve kritične konstante V_mc, p_c i T_c preko R, a i b.

3. Dva automobila nalaze se na istoj paraleli, tj. jedan je točno istočno od drugog. U istom trenutku oni se pokrenu, istočni auto prema zapadu, a zapadni auto prema sjeveru. Ako je poznat njihov početni razmak D te ako uzmemo da se oba kreću konstantnim brzinama (istočni brzinom v_E, a zapadni brzinom v_W), nakon koliko vremena će razmak među njima biti najmanji i koliko će taj razmak iznositi? Argumentirajte da se stvarno radi o globalnom minimumu udaljenosti!

4. U rugby-ju vrijedi pravilo: momčad koja dade gol ima pravo na dodatni slobodni udarac. Pritom se taj udarac mora izvesti s pozicije koja se nalazi na okomici povučenoj na gol liniju kroz poziciju iz koje je dan gol. Ako znate da je razmak greda koje omeđuju gol 5,6 m te naravno uz pretpostavku da je poznata pozicija iz koje je postignut gol, odredite optimalnu dopuštenu poziciju za slobodni udarac, tj. poziciju iz koje se gol vidi pod najvećim mogućim kutom.

Rješenja.

1. Ako iz dane jednadžbe izrazimo p i dvaput deriviramo po V_m, dobijemo

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}} = \frac{2a}{V_\mathrm{m}^3} - \frac{RT}{(V_\mathrm{m}-b)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}^2} = \frac{2RT}{(V_\mathrm{m}-b)^3} - \frac{6a}{V_\mathrm{m}^4}.$$

Tražimo zajedničku nultočku V_mc obiju formula, pri čemu će odgovarajuća temperatura biti T_c, dakle rješavamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. Dobije se $V_\mathrm{mc} = 3b$ i $T_\mathrm{c} = \frac{8a}{27bR}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobije se i $p_\mathrm{c} = \frac{a}{27b^2}$.

2. Ako iz dane jednadžbe izrazimo p i dvaput deriviramo po V_m, dobijemo

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}} = \exp\left(-\frac{a}{RTV_\mathrm{m}}\right) \cdot \frac{a(V_\mathrm{m}-b) - RTV_\mathrm{m}^2}{V_\mathrm{m}^2(V_\mathrm{m}-b)^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}^2} = \exp\left(-\frac{a}{RTV_\mathrm{m}}\right) \cdot \left[\frac{a}{RTV_\mathrm{m}^2} \cdot \frac{a(V_\mathrm{m}-b) - RTV_\mathrm{m}^2}{V_\mathrm{m}^2(V_\mathrm{m}-b)^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}}\left(\frac{a(V_\mathrm{m}-b) - RTV_\mathrm{m}^2}{V_\mathrm{m}^2(V_\mathrm{m}-b)^2}\right)\right].$$

Tražimo zajedničku nultočku V_mc obiju formula, pri čemu će odgovarajuća temperatura biti T_c, dakle rješavamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice. To ide najlakše tako da iz uvjeta za stacionarnu točku izrazimo T_c, te uočimo da zbog oblika prve derivacije stacionarna točka poništava i prvi dio druge derivacije te nam tamo kao uvjet za nultočku preostane određivanje nultočke brojnika od

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V_\mathrm{m}}\left(\frac{a(V_\mathrm{m}-b) - RTV_\mathrm{m}^2}{V_\mathrm{m}^2(V_\mathrm{m}-b)^2}\right) = 0.$$

Dobije se $V_\mathrm{mc} = 2b$ i $T_\mathrm{c} = \frac{a}{4bR}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobije se i $p_\mathrm{c} = \frac{a}{4e^2b^2}$.

3. U vremenu t zapadni auto prijeđe udaljenost $v_W t$ prema sjeveru, a istočni $v_E t$ prema zapadu. Stoga je u svakom trenutku t njihova udaljenost jednaka $\sqrt{v_W^2 t^2 + (D - v_E t)^2}$. Ona je minimalna kad je izraz pod korijenom minimalan, a taj je kvadratna funkcija od t, s formulom $(v_E^2 + v_W^2)t^2 - 2Dv_E t + D^2$. Kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom poprima (globalni!) minimum u tjemenu, dakle će auti biti najbliži nakon vremena $\frac{Dv_E}{v_E^2+v_W^2}$ i tad će biti razmaknuti za $\frac{Dv_W}{\sqrt{v_E^2+v_W^2}}$.

4. Prema tekstu zadatka, možemo uzeti da znamo udaljenost g između sjecišta u zadatku opisane okomice s gol-linijom i bliže vratnice. Skicom se lako provjeri da je kut pod kojim igrač vidi gol, ako je na udaljenosti x od gol-linije, dan formulom

$$\alpha(x) = \mathrm{arctg}\frac{g + 5{,}6\,\mathrm{m}}{x} - \mathrm{arctg}\frac{g}{x}.$$

Tražimo maksimum funkcije α za $x \geq 0$. Imamo

$$\alpha'(x) = \frac{g}{g^2+x^2} - \frac{g+5{,}6\,\mathrm{m}}{(g+5{,}6\,\mathrm{m})^2+x^2} = 5{,}6\,\mathrm{m}\frac{(g+5{,}6\,\mathrm{m})g - x^2}{(g^2+x^2)((g+5{,}6\,\mathrm{m})^2+x^2)},$$

pa dobijemo stacionarnu (i očito jedinu kritičnu) točku

$$x^* = +\sqrt{g(g + 5{,}6\,\mathrm{m})},$$

a iz sređenog oblika za $\alpha'(x)$ lako se vidi da je $\alpha'(x) > 0$ za $x < x^*$ i $\alpha'(x) < 0$ za $x > x^*$. Dakle, optimalna pozicija je na dozvoljenoj okomici biti udaljen za $\sqrt{g(g + 5{,}6\,\mathrm{m})}$ od gol-linije.