

# Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 23. studenog 2017.

Franka Miriam Brückler, Slaven Kožić, Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **2.**
- rješenja zadataka **3.** – **4.**
- rješenje zadatka **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(20)** Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\ln(4 - 2^{x^2-2})}{\operatorname{tg}(x) \cdot \sqrt[4]{x^2 + 5x + 4}}.$$

**2.(10 + 10)** Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) := \ln((\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))^3 + 3)$

(b)  $f(x) := 2^{2x+2} \cdot \sin(\sqrt{x}) \cdot \operatorname{ctg}(x^2).$

**3.(20)** Zadane su funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$f(x) = \frac{16^x}{\ln 16} - \frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - x \quad \text{i} \quad g(x) = \frac{3}{4} (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x).$$

Neka je  $T$  točka presjeka grafa od  $g$  s osi  $x$ . Neka je  $t$  tangenta na graf od  $g$  u točki  $T$ . Pronađite jednadžbu tangente na graf funkcije  $f$  koja je paralelna  $t$ .

**4.(20)** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije  $f$  zadane s

$$f(x) = (1 - 6x)e^x.$$

Okrenite!

5.(20) Van der Waalsova jednadžba stanja plina glasi

$$pV_m^2(V_m - b) = RTV_m^2 - a(V_m - b),$$

gdje je  $p$  tlak,  $V_m$  molarni volumen,  $T$  je termodinamička temperatura (u K),  $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  opća plinska konstanta, a  $a$  i  $b$  su van der Waalsovi koeficijenti (konstante ovisne o sastavu plina). Kritični molarni volumen  $V_{mc}$  je molarni volumen za koji je stacionarna točka od  $p$  kao funkcije molarnog volumena istovremeno i točka infleksije. Pripadni tlak  $p_c$  zove se kritični tlak, a odgovarajuća temperatura je kritična temperatura  $T_c$ . Izrazite sve tri van der Waalsove kritične konstante  $V_{mc}$ ,  $p_c$  i  $T_c$  preko  $R$ ,  $a$  i  $b$ .

# Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 23. studenog 2017.

Franka Miriam Brückler, Slaven Kožić, Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **2.**
- rješenja zadataka **3.** – **4.**
- rješenje zadatka **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(20)** Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{\sqrt{1 - 2x^{2-4}} \cdot \operatorname{tg} x}.$$

**2.(10 + 10)** Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) := 5^{-\frac{1}{x}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{x^5}{5}\right) \cdot \cos(5x)$

(b)  $f(x) := e^{\ln(\operatorname{arctg}(x^4+1)+1)}.$

**3.(20)** Zadane su funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$f(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} - 5x \quad \text{i} \quad g(x) = -\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}.$$

Neka je  $T$  točka presjeka grafa od  $g$  s osi  $x$ . Neka je  $t$  tangenta na graf od  $g$  u točki  $T$ . Pronađite jednadžbu tangente na graf funkcije  $f$  koja je paralelna  $t$ .

**4.(20)** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije  $f$  zadane s

$$f(x) = (4x + 3)e^{-x}.$$

Okrenite!

**5.(20)** Dva automobila nalaze se na istoj paraleli, tj. jedan je točno istočno od drugog. U istom trenutku oni se pokrenu, istočni auto prema zapadu, a zapadni auto prema sjeveru. Ako je poznat njihov početni razmak  $D$  te ako uzmemo da se oba kreću konstantnim brzinama (istočni brzinom  $v_E$ , a zapadni brzinom  $v_W$ ), nakon koliko vremena će razmak među njima biti najmanji i koliko će taj razmak iznositi? Argumentirajte da se stvarno radi o globalnom minimumu udaljenosti!

# Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 23. studenog 2017.

Franka Miriam Brückler, Slaven Kožić, Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **2.**
- rješenja zadataka **3.** – **4.**
- rješenje zadatka **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(20)** Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\sqrt[10]{5^4 - 5^{x^2-5}}}{\operatorname{ctg}(x) \cdot \ln(x^2 + 6x + 5)}.$$

**2.(10 + 10)** Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) := e^{\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg}(x^2+4))+1}$

(b)  $f(x) := \operatorname{tg}(x^3) \cdot 3^{\frac{3}{x}} \cdot \cos(3x).$

**3.(20)** Zadane su funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: \langle \pi, \frac{3\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$f(x) = \frac{25^x}{\ln 25} - \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - 14x \quad \text{i} \quad g(x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x.$$

Neka je  $T$  točka presjeka grafa od  $g$  s osi  $x$ . Neka je  $t$  tangenta na graf od  $g$  u točki  $T$ . Pronađite jednadžbu tangente na graf funkcije  $f$  koja je paralelna  $t$ .

**4.(20)** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije  $f$  zadane s

$$f(x) = (7 + 4x)e^x.$$

Okrenite!

5.(20) Dietericijeva jednadžba stanja plina glasi

$$p(V_m - b) = RT \exp(-a/(RTV_m)),$$

gdje je  $p$  tlak,  $V_m$  molarni volumen,  $T$  je termodinamička temperatura (u K),  $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  opća plinska konstanta, a  $a$  i  $b$  su Dietericijevi koeficijenti (konstante ovisne o sastavu plina). Kritični molarni volumen  $V_{mc}$  je molarni volumen za koji je stacionarna točka od  $p$  kao funkcije molarnog volumena istovremeno i točka infleksije. Pripadni tlak  $p_c$  zove se kritični tlak, a odgovarajuća temperatura je kritična temperatura  $T_c$ . Izrazite sve tri Dietericijeve kritične konstante  $V_{mc}$ ,  $p_c$  i  $T_c$  preko  $R$ ,  $a$  i  $b$ .

# Matematika 1 za kemičare

prvi kolokvij, 23. studenog 2017.

Franka Miriam Brückler, Slaven Kožić, Sonja Žunar

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dopuštene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa. U slučaju utvrđenog prepisivanja, ostvareni se bodovi pripisuju s negativnim predznakom.

**Odvojeno predajte:**

- rješenja zadataka **1.** – **2.**
- rješenja zadataka **3.** – **4.**
- rješenje zadatka **5.**

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(20)** Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) := \frac{\ln(1 - 3^{x^2-9})}{\operatorname{tg}(x) \cdot \sqrt[6]{x^2 + 5x + 4}}.$$

**2.(10 + 10)** Izračunajte prvu derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) := \operatorname{ctg}\left(\frac{4}{x}\right) \cdot \sin(x^4) \cdot 4^{-4x}$

(b)  $f(x) := \ln\left(e^{\arcsin(1-x^5)+1}\right).$

**3.(20)** Zadane su funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$f(x) = \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} - x \quad \text{i} \quad g(x) = \sqrt{2}(\sin x - \cos x).$$

Neka je  $T$  točka presjeka grafa od  $g$  s osi  $x$ . Neka je  $t$  tangenta na graf od  $g$  u točki  $T$ . Pronađite jednadžbu tangente na graf funkcije  $f$  koja je paralelna  $t$ .

**4.(20)** Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije  $f$  zadane s

$$f(x) = (5x + 2)e^{-x}.$$

Okrenite!

**5.(20)** U rugby-ju vrijedi pravilo: momčad koja daje gol ima pravo na dodatni slobodni udarac. Pritom se taj udarac mora izvesti s pozicije koja se nalazi na okomici povučenoj na gol liniju kroz poziciju iz koje je dan gol. Ako znate da je razmak greda koje omeđuju gol 5,6 m te naravno uz pretpostavku da je poznata pozicija iz koje je postignut gol, odredite optimalnu dopuštenu poziciju za slobodni udarac, tj. poziciju iz koje se gol vidi pod najvećim mogućim kutom.



# Matematika 1 za kemičare

1<sup>st</sup> midterm exam, 23 November 2017

Franka Miriam Brückler, Slaven Kožić, Sonja Žunar

**Instructions.** You can use a calculator, a typeset or hand-written formulae sheet (booklets and logarithmic tables are not allowed), and writing utensils. The graders will ignore any illegible parts of the test. In case of detected cheating the corresponding score is added with negative sign.

**Please write on separate sheets of paper:**

- your solution to Problems 1–2
- your solution to Problems 3–4
- your solution to Problem 5.

Please write your first name, surname, and identification code of the form K17\*\*\* on each sheet of paper that you turn in.

**1.(20)** Determine the domain of the function

$$f(x) := \frac{\ln(4 - 2^{x^2-2})}{\operatorname{tg}(x) \cdot \sqrt[4]{x^2 + 5x + 4}}.$$

**2.(10 + 10)** Compute the first derivative of the following functions:

(a)  $f(x) := \ln((\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x))^3 + 3)$

(b)  $f(x) := 2^{2x+2} \cdot \sin(\sqrt{x}) \cdot \operatorname{ctg}(x^2).$

**3.(20)** Consider the functions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $g: \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  given by

$$f(x) = \frac{16^x}{\ln 16} - \frac{3 \cdot 4^x}{\ln 4} - x \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{3}{4}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x).$$

Let  $T$  be the point of intersection of the graph of  $g$  with the  $x$ -axis. Let  $t$  be the tangent line to the graph of  $g$  at the point  $T$ . Find the equation of the tangent line to the graph of the function  $f$  which is parallel to  $t$ .

**4.(20)** Analyze and sketch a graph of the function  $f$  given by

$$f(x) = (1 - 6x)e^x.$$

Flip the paper over!

**5.(20)** The Van der Waals equation of state relates the pressure  $p$ , molar volume  $V_m$  and temperature  $T$  (in Kelvin) of a gas:

$$pV_m^2(V_m - b) = RTV_m^2 - a(V_m - b).$$

The gas constant has value  $R = 8.3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ , and  $a$  and  $b$  are van der Waals' coefficients (constants which depend on the composition of the gas). The critical molar volume  $V_{mc}$  is the molar volume which is at the same time a stationary point and a point of inflexion for  $p$  considered as function of molar volume. The corresponding pressure  $p_c$  is called the critical pressure, and the corresponding temperature is the critical temperature  $T_c$ . Give all three critical constants  $V_{mc}$ ,  $p_c$  and  $T_c$  in terms of  $R$ ,  $a$  and  $b$ .