

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 31. siječnja 2017.

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prvih triju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja četvrtog i petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte integrale:

(a)  $\int x^2 e^{-2x} dx$

(b)  $\int_1^e \frac{(\ln x)^2 + 2}{x} dx$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2 + 4} dx.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen grafovima funkcija

$$f(x) := (x + 2)^2 \quad \text{i} \quad g(x) := 2 - (x + 2)^2.$$

Izračunajte njegovu površinu.

**3.(20)** Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca  $p$  koji je paralelan s ravninama

$$\pi_1 \dots y - z = 1$$

i

$$\pi_2 \dots x - z = 0$$

i prolazi točkom  $(1, 0, 0)$ .

**Okrenite!**

**4.(15)** Izohorni i adiabatni tlačni koeficijent  $\beta$  definira se kao derivacija tlaka  $p$  po temperaturi  $T$  (u K), uzimajući sve ostale parametre sustava kao konstantne. Za realne plinove se kao jednadžba stanja povremeno koristi Clausiusova jednadžba

$$RT = \left( p + \frac{a}{T(V_m + c)^2} \right) (V_m - b),$$

u kojoj je  $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  opća plinska konstanta,  $V_m$  je molarni volumen plina, a  $a$ ,  $b$  i  $c$  su konstantni parametri ovisni o plinu. Odredite prosječnu vrijednost koeficijenta  $\beta$  za ugljikov dioksid molarnog volumena  $0,366 \text{ L/mol}$ , unutar raspona temperatura od  $400 \text{ K}$  do  $600 \text{ K}$ , ako je poznato da je  $a = 111,2 \text{ J K m}^3 \text{ mol}^{-2}$ ,  $b = 8,34 \text{ mL mol}^{-1}$ ,  $c = 34,5 \text{ mL mol}^{-1}$ .

**5.(15)** Natrijev nitrat kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu, odnosno za opis njegove strukture koristi se kristalografska baza parametara  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Konkretno, za natrijev nitrat je  $a = 1692,9 \text{ pm}$  i  $c = 506,96 \text{ pm}$ . U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na kristalografsku bazu.

- (a) **(1)** Napišite jednadžbu  $(2\bar{1}0)$  ravnine najbliže ishodištu.
- (b) **(3)** Odredite stvarnu udaljenost svih parova njezinih sjecišta s koordinatnim osima.
- (c) **(5)** Koliko iznosi međumrežni razmak  $d_{2\bar{1}0}$ ?
- (d) **(6)** Koji kut s  $a$ -osi zatvara normala na smjer  $(2\bar{1}0)$ ?

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 31. siječnja 2017.

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prvih triju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja četvrtog i petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte integrale:

(a)  $\int x^2 e^x dx$

(b)  $\int_1^e \frac{(\ln x)^5 - 5}{x} dx$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{5}{25 + x^2} dx.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen grafovima funkcija

$$f(x) := (x - 1)^2 \quad \text{i} \quad g(x) := 2 - (x - 1)^2.$$

Izračunajte njegovu površinu.

**3.(20)** Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca  $p$  koji je paralelan s ravninama

$$\pi_1 \dots x - z = 1$$

i

$$\pi_2 \dots x - y = 0$$

i prolazi točkom  $(0, 1, 0)$ .

**Okrenite!**

**4.(15)** Za elektrone atoma s atomskim brojem  $Z$ , valna funkcija  $1s$ -orbitale je dana formulom

$$\psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{Z^3}{a_0^3\pi}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right).$$

Pritom je  $a_0 = 52,9$  pm Bohrov radijus. Funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom  $\psi$  na udaljenosti  $r$  od jezgre je radijalna funkcija gustoće dana formulom

$$\phi(r) = 4r^2\pi|\psi|^2.$$

Koji je najveći atomski broj  $Z$  za koji će očekivana udaljenost  $1s$ -elektrona do jezgre još biti veća od  $a_0/2$ ? Napomena: Očekivana vrijednost  $r$  slučajne varijable opisane funkcijom gustoće  $f(r)$  računa se formulom  $\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r f(r) dr$ .

**5.(15)** Jedna modifikacija selenija kristalizira u monoklinskom kristalnom sustavu, odnosno za opis njegove strukture koristi se kristalografska baza parametara s kutem  $\beta \neq 90^\circ$  (ali  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ). Vrijednosti parametara jedinične ćelije, tj. kristalografske baze, su  $a = 9,05 \text{ \AA}$ ,  $b = 9,07 \text{ \AA}$ ,  $c = 11,61 \text{ \AA}$ ,  $\beta = 90,8^\circ$ . U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na kristalografsku bazu.

- (a) **(1)** Napišite jednadžbu (302) ravnine najbliže ishodištu.
- (b) **(3)** Odredite stvarnu udaljenost svih parova njezinih sjecišta s koordinatnim osima.
- (c) **(5)** Koliko iznosi međumrežni razmak  $d_{302}$ ?
- (d) **(6)** Koji kut s  $a$ -osi zatvara normala na smjer (302)?

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 31. siječnja 2017.

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prvih triju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja četvrtog i petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte integrale:

(a)  $\int x^2 e^{-x} dx$

(b)  $\int_1^e \frac{(\ln x)^4 + 4}{x} dx$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{4}{16 + x^2} dx.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen grafovima funkcija

$$f(x) := (x - 2)^2 \quad \text{i} \quad g(x) := 2 - (x - 2)^2.$$

Izračunajte njegovu površinu.

**3.(20)** Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca  $p$  koji je paralelan s ravninama

$$\pi_1 \dots x - y = 0$$

i

$$\pi_2 \dots y - z = 1$$

i prolazi točkom  $(2, 2, 2)$ .

**Okrenite!**

**4.(15)** Izotermna i adiabatna stlačivost  $\kappa$  definira se kao suprotna recipročna vrijednost volumena  $V$  pomnožena s derivacijom volumena  $V$  po tlaku  $p$ , uzimajući pri deriviranju sve ostale parametre sustava kao konstantne. Za realne plinove kao jednadžba stanja ponekad koristi aproksimacija virijalne jednadžbe stanja

$$RT = p \frac{V_m^2}{V_m + B'}$$

u kojoj je  $R = 8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  opća plinska konstanta,  $V_m = \frac{V}{n}$  je molarni volumen plina, a  $B'$  je tzv. drugi virijalni koeficijent, ovisan sastavu pline i temperaturi. Odredite prosječnu vrijednost koeficijenta  $\kappa$  za 2,00 mola helija unutar raspona tlakova od 10000 Pa do 20000 Pa, pri temperaturi od 600 K, ako je poznato da je pri toj temperaturi iznos  $B'$  jednak  $10,4 \text{ cm}^3 \text{ mol}^{-1}$ .

**5.(15)** Natrijev nitrat kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu, odnosno za opis njegove strukture koristi se kristalografska baza parametara  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Konkretno, za natrijev nitrat je  $a = 1692,9 \text{ pm}$  i  $c = 506,96 \text{ pm}$ . U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na kristalografsku bazu.

- (a) **(1)** Napišite jednadžbu (320) ravnine najbliže ishodištu.
- (b) **(3)** Odredite stvarnu udaljenost svih parova njezinih sjecišta s koordinatnim osima.
- (c) **(5)** Koliko iznosi međumrežni razmak  $d_{320}$ ?
- (d) **(6)** Koji kut s  $a$ -osi zatvara normala na smjer (320)?

# Matematika 1 za kemičare

drugi kolokvij, 31. siječnja 2017.

**Napomene.** Dopuštena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama (nisu dozvoljene logaritamske tablice ni druge zbirke formula oblika knjižica), pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Rješenja prvih triju zadataka pišite i predajte odvojeno od rješenja četvrtog i petog zadatka.

Kako bi se mogla definirati funkcija koja svim studentima pridružuje postignute bodove na kolokviju, poželjno je da se na predanim papirima nalazi Vaše ime i prezime i Vaša šifra!

**1.(10 + 10 + 10)** Izračunajte integrale:

(a)  $\int x^2 e^{2x} dx$

(b)  $\int_1^e \frac{(\ln x)^3 - 3}{x} dx$

(c)  $\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2 + 9} dx.$

**2.(20)** Skicirajte dio ravnine omeđen grafovima funkcija

$$f(x) := (x + 1)^2 \quad \text{i} \quad g(x) := 2 - (x + 1)^2.$$

Izračunajte njegovu površinu.

**3.(20)** Odredite kanonski oblik jednadžbe pravca  $p$  koji je paralelan s ravninama

$$\pi_1 \dots x - y = 0$$

i

$$\pi_2 \dots x - z = 0$$

i prolazi točkom  $(0, 0, 1)$ .

**Okrenite!**

**4.(15)** Za elektrone atoma s atomskim brojem  $Z$ , valna funkcija  $1s$ -orbitale je dana formulom

$$\psi_{1,0,0} = \sqrt{\frac{Z^3}{a_0^3\pi}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right).$$

Pritom je  $a_0 = 52,9$  pm Bohrov radijus. Funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom  $\psi$  na udaljenosti  $r$  od jezgre je radijalna funkcija gustoće dana formulom

$$\phi(r) = 4r^2\pi|\psi|^2.$$

Koji je najmanji atomski broj  $Z$  za koji će očekivana udaljenost  $1s$ -elektrona do jezgre biti manja od  $a_0/3$ ? Napomena: Očekivana vrijednost  $r$  slučajne varijable opisane funkcijom gustoće  $f(r)$  računa se formulom  $\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r f(r) dr$ .

**5.(15)** Jedna modifikacija selenija kristalizira u monoklinskom kristalnom sustavu, odnosno za opis njegove strukture koristi se kristalografska baza parametara s kutem  $\beta \neq 90^\circ$  (ali  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ ). Vrijednosti parametara jedinične ćelije, tj. kristalografske baze, su  $a = 9,05 \text{ \AA}$ ,  $b = 9,07 \text{ \AA}$ ,  $c = 11,61 \text{ \AA}$ ,  $\beta = 90,8^\circ$ . U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na kristalografsku bazu.

- (a) **(1)** Napišite jednadžbu  $(20\bar{1})$  ravnine najbliže ishodištu.
- (b) **(3)** Odredite stvarnu udaljenost svih parova njezinih sjecišta s koordinatnim osima.
- (c) **(5)** Koliko iznosi međumrežni razmak  $d_{20\bar{1}}$ ?
- (d) **(6)** Koji kut s  $a$ -osi zatvara normala na smjer  $(20\bar{1})$ ?