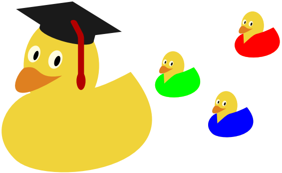
10. tjedan nastave: Općenito o integralima.

Franka Miriam Brückler



Dva pitanja, jedan odgovor

Zadatak

Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = 2x$*?*

Dva pitanja, jedan odgovor

Zadatak

Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = 2x$*?*

$f'(x) = F(x) \Rightarrow f(x) = x^2$

Dva pitanja, jedan odgovor

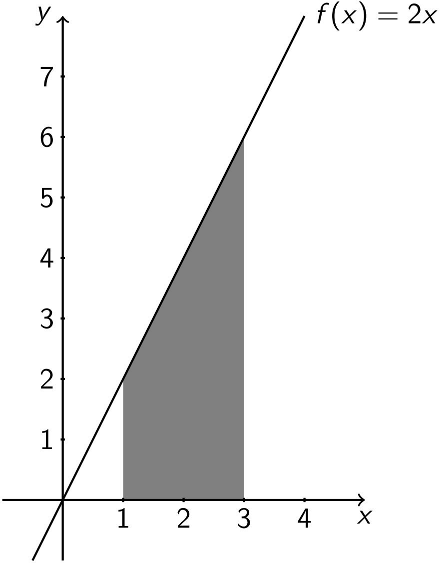
Zadatak

Koja funkcija derivirana daje funkciju $F(x) = 2x$*?*
$f'(x) = F(x) \Rightarrow f(x) = x^2 + C$:

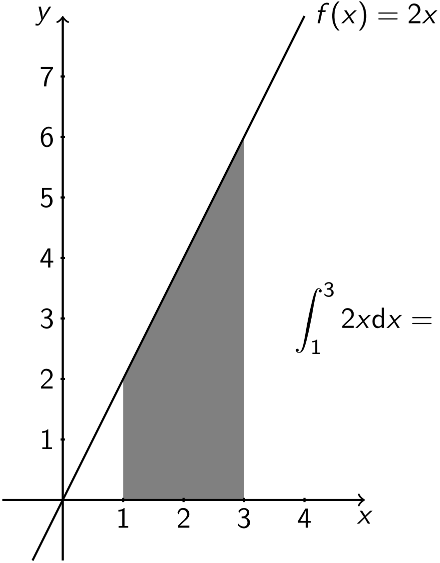
$$\int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C$$

Zadatak

Kolika je površina „ispod" pravca $y = 2x$ *između* $x = 1$ *i* $x = 3$*?*



y
$f(x) = 2x$
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
x



$$\int_1^3 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$$

Antiderivacije

Definicija

Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ *(gdje je* I *otvoren interval) je svaka funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *sa svojstvom* $f'(x) = F(x)$ *za sve* $x \in I$.

Antiderivacije

Definicija

Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$.

Nema svaka funkcija svoju antiderivaciju. Ako ju ima, je li jedinstvena? Kako ju naći?

Antiderivacije

Definicija

Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$.

Nema svaka funkcija svoju antiderivaciju. Ako ju ima, je li jedinstvena? Kako ju naći?
Neka je f antiderivacija od F, tj. neka je $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Označimo $f_C(x) = f(x) + C$.

Antiderivacije

Definicija

Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$.

Nema svaka funkcija svoju antiderivaciju. Ako ju ima, je li jedinstvena? Kako ju naći?
Neka je f antiderivacija od F, tj. neka je $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Označimo $f_C(x) = f(x) + C$. Tada je

$$f_C'(x) = (f(x) + C)' = f'(x) + C' = f'(x) = F(x)$$

za sve $x \in I$.

Antiderivacije

Definicija

Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$.

Nema svaka funkcija svoju antiderivaciju. Ako ju ima, je li jedinstvena? Kako ju naći?
Neka je f antiderivacija od F, tj. neka je $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Označimo $f_C(x) = f(x) + C$. Tada je

$$f_C'(x) = (f(x) + C)' = f'(x) + C' = f'(x) = F(x)$$

za sve $x \in I$. Dakle, ako F ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo.

Neka su f i g dvije antiderivacije od F, dakle $f'(x) = F(x)$ i $g'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Oduzmimo posljednje dvije jednakosti:

$$0 = F(x) - F(x) = f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x), \quad x \in I$$

dakle je derivacija od $f - g$ na intervalu I svuda 0.

Neka su f i g dvije antiderivacije od F, dakle $f'(x) = F(x)$ i $g'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Oduzmimo posljednje dvije jednakosti:

$$0 = F(x) - F(x) = f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x), \quad x \in I$$

dakle je derivacija od $f - g$ na intervalu I svuda 0. Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti iz toga se može dokazati da je $f - g$ konstantna funkcija, odnosno da se f i g razlikuju samo za neku konstantu.

Neka su f i g dvije antiderivacije od F, dakle $f'(x) = F(x)$ i $g'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$. Oduzmimo posljednje dvije jednakosti:

$$0 = F(x) - F(x) = f'(x) - g'(x) = (f - g)'(x), \quad x \in I$$

dakle je derivacija od $f - g$ na intervalu I svuda 0. Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti iz toga se može dokazati da je $f - g$ konstantna funkcija, odnosno da se f i g razlikuju samo za neku konstantu. Dakle:

Teorem

Ako funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ posjeduje antiderivaciju, te ako je f jedna antiderivacija od F, onda je za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$ funkcija f_C zadana s $f_C(x) = f(x) + C$ također antiderivacija od F i sve antiderivacije od F su tog oblika.

Primjer

Za

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

lako se pogodi

$$f_C(x) = \ln x + C.$$

No, ln *je definiran samo za* $x > 0$*, a* f *za* $x \neq 0$*?!*

Primjer

Za

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

lako se pogodi

$$f_C(x) = \ln x + C.$$

No, ln *je definiran samo za* $x > 0$, *a* f *za* $x \neq 0$*?!*
Problem je što je domena od F *unija dva disjunktna otvorena intervala, a antiderivacije su definirane samo na pojedinačnim intervalima!*
Ako bismo uzeli $f_C(x) = \ln(-x) + C$ *za* $x < 0$, *onda je* $f_C'(x) = F(x)$.

Primjer

Za

$$F(x) = \frac{1}{x}$$

lako se pogodi

$$f_C(x) = \ln x + C.$$

No, ln *je definiran samo za* $x > 0$*, a* f *za* $x \neq 0$*?!*
Problem je što je domena od F *unija dva disjunktna otvorena intervala, a antiderivacije su definirane samo na pojedinačnim intervalima!*
Ako bismo uzeli $f_C(x) = \ln(-x) + C$ *za* $x < 0$*, onda je* $f_C'(x) = F(x)$*.*
Kratko:

$$f_C(x) = \ln|x| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Neodređeni integral

Definicija

Neodređeni integral funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ je skup svih njenih antiderivacija. Oznaka neodređenog integrala funkcije F s nezavisnom varijablom x je

$$\int F(x)\, \mathrm{d}x$$

Funkcija F zove se podintegralna funkcija.

Iz praktičnih razloga umjesto $\int F(x)\, \mathrm{d}x = \{f_C : C \in \mathbb{R}\}$ pišemo

$$\int F(x)\, \mathrm{d}x = f(x) + C,$$

gdje se konstanta C zove se konstanta integracije.

Tablično integriranje

To je integriranje temeljem osnovne tablice integrala (što je *de facto* tablica derivacija sa zamijenjenim stupcima) uz eventualno korištenje transformacija podintegralne funkcije formulama iz elementarnije matematike i linearnosti:

Teorem (Linearnost neodređenog integrala)

Neka su funkcije F i G zadane na istom intervalu I te neka je K neka konstanta. Tada vrijedi:

$$\int (F(x) + G(x))\,\mathrm{d}x = \int F(x)\,\mathrm{d}x + \int G(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int K\,G(x)\,\mathrm{d}x = K \int G(x)\,\mathrm{d}x.$$

(posljedica linearnosti deriviranja)

Primjer

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right)\,\mathrm{d}x =$$

Primjer

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

Primjer

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

Uočimo:

$$\begin{array}{ccc} s(t) & \leftrightarrow & f(t) \\ \downarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} & & \uparrow \int .\,\mathrm{d}t \\ v(t) & \leftrightarrow & F(t) \end{array}$$

Određeni integrali

Definicija određenog integrala *neprekidne* funkcije

Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna i neprekidna, onda je određeni (Riemannov) integral funkcije F u granicama od a do b, u oznaci

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

isto što i površina omeđena s osi apscisa, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te grafom $y = F(x)$.

Određeni integrali

Definicija određenog integrala *neprekidne* funkcije

Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna i neprekidna, onda je određeni (Riemannov) integral funkcije F u granicama od a do b, u oznaci

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x,$$

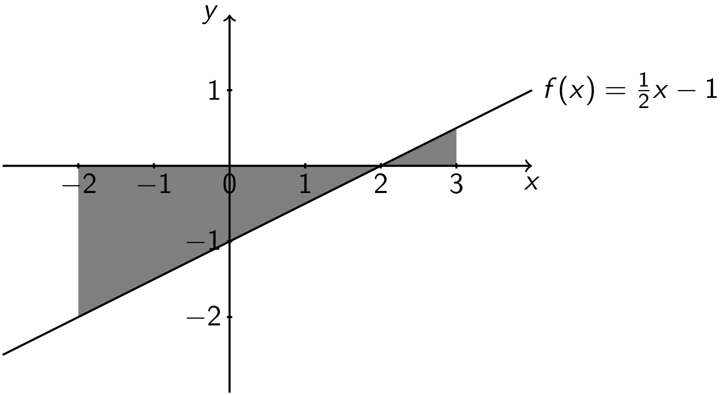
isto što i površina omeđena s osi apscisa, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te grafom $y = F(x)$. Ako je F neprekidna, ali dijelom negativna na $[a, b]$, površine dijelova ispod osi apscisa u određeni integral se pribrajaju s negativnim predznakom.

Napomena

U slučaju da zavisna i nezavisna varijabla imaju mjerne jedinice, kao što je jedinica od $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ kvocijent jedinica od $f(x)$ i x, tako je i jedinica od $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$ umnožak jedinica od x i $F(x)$.

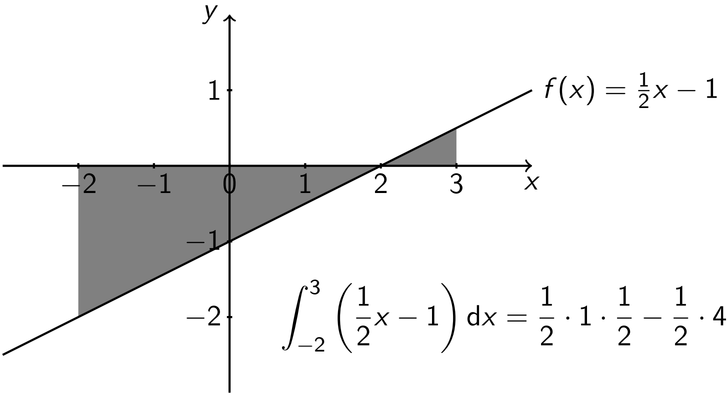
Primjer

$$\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\,\mathrm{d}x=?$$



Primjer

$$\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\,\mathrm{d}x = ?$$



$$\int_{-2}^{3}\left(\frac{1}{2}x-1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = -\frac{15}{4}$$

Određeni integral $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ ima smisla i za mnoge funkcije F koje nisu neprekidne na području integriranja.

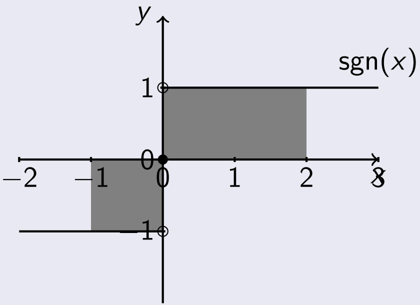
Primjer

Funkcija signum, oznaka sgn, *je neelementarna funkcija definirana kao* 1 *za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable,* -1 *za negativne, a u* 0 *iznosi* 0.

Određeni integral $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ ima smisla i za mnoge funkcije F koje nisu neprekidne na području integriranja.

Primjer

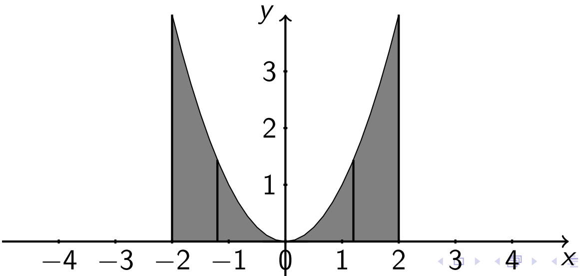
Funkcija signum, oznaka sgn*, je neelementarna funkcija definirana kao* 1 *za pozitivne vrijednosti nezavisne varijable,* -1 *za negativne, a u* 0 *iznosi* 0.



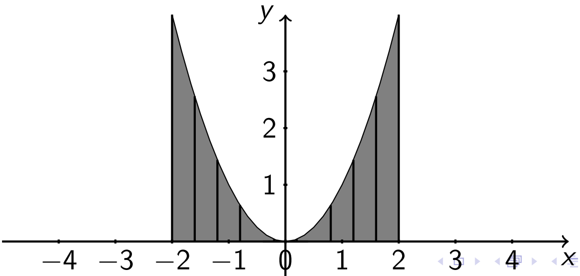
$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x = 1$$

Uočimo i da prethodna „definicija” određenog integrala ima isti problem kao „definicija” derivacije kao koeficijenta smjera tangente: Kaže nam smisao dobivenog rezultata, ali u općem slučaju ne pomaže za njegovo izračunavanje.

Uočimo i da prethodna „definicija" određenog integrala ima isti problem kao „definicija" derivacije kao koeficijenta smjera tangente: Kaže nam smisao dobivenog rezultata, ali u općem slučaju ne pomaže za njegovo izračunavanje. Ideja je postići da se iz prave definicije može za opisane slučajeve dobiti interpretacija preko površine. Pritom, budući da općenito ne znamo računati površine zakrivljenih likova, rastavljamo ih na manje (uže) dijelove — što su ti dijelovi uži, zbroj njihovih površina manje se razlikuje od tražene površine, ali se oni sve manje razlikuju od pravokutnika:



Uočimo i da prethodna „definicija" određenog integrala ima isti problem kao „definicija" derivacije kao koeficijenta smjera tangente: Kaže nam smisao dobivenog rezultata, ali u općem slučaju ne pomaže za njegovo izračunavanje. Ideja je postići da se iz prave definicije može za opisane slučajeve dobiti interpretacija preko površine. Pritom, budući da općenito ne znamo računati površine zakrivljenih likova, rastavljamo ih na manje (uže) dijelove — što su ti dijelovi uži, zbroj njihovih površina manje se razlikuje od tražene površine, ali se oni sve manje razlikuju od pravokutnika:

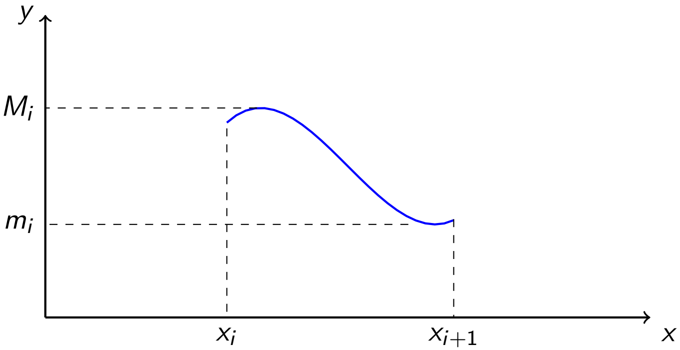


Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika).

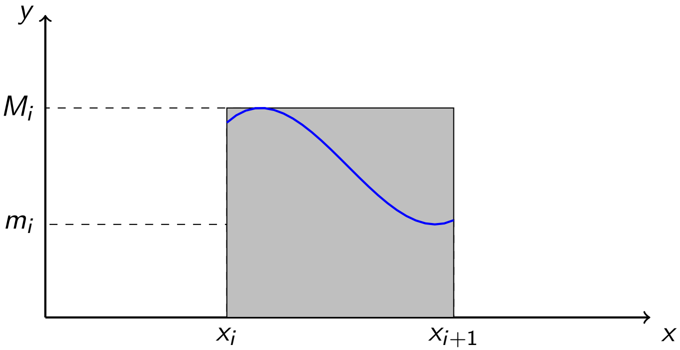
Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju:
$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$).

Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$). U pravoj definiciji određenog (Riemannovog) integrala razmaci između dva susjedna x_i-a ne trebaju biti jednaki, ali ćemo ovdje radi jednostavnosti notacije uzeti da jesu: $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ za sve indekse i.

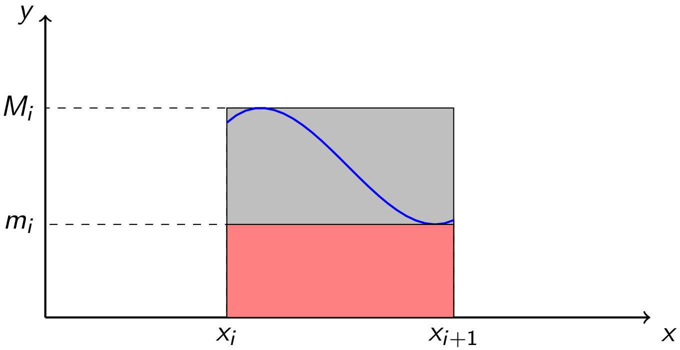
Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$). U pravoj definiciji određenog (Riemannovog) integrala razmaci između dva susjedna x_i-a ne trebaju biti jednaki, ali ćemo ovdje radi jednostavnosti notacije uzeti da jesu: $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ za sve indekse i.



Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju:
$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$). U pravoj definiciji određenog (Riemannovog) integrala razmaci između dva susjedna x_i-a ne trebaju biti jednaki, ali ćemo ovdje radi jednostavnosti notacije uzeti da jesu: $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ za sve indekse i.



Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija (tj. graf joj se može nacrtati unutar nekog pravokutnika). Podijelimo interval $[a, b]$ na puno dijelova (kaže se: napravimo subdiviziju: $a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b$). U pravoj definiciji određenog (Riemannovog) integrala razmaci između dva susjedna x_i-a ne trebaju biti jednaki, ali ćemo ovdje radi jednostavnosti notacije uzeti da jesu: $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ za sve indekse i.



Definiramo gornju i donju integralnu (Darbouxovu) sumu funkcije F za danu subdiviziju:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x.$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Definiramo gornju i donju integralnu (Darbouxovu) sumu funkcije F za danu subdiviziju:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x.$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Ideja je da što je manji Δx (što su pravokutnici uži), to će gornja i donja suma biti bliže točnoj „površini" između grafa funkcije i osi apscisa (onome što želimo da bude $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$), ostajući pritom

$$s \leq \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \leq S.$$

Definiramo gornju i donju integralnu (Darbouxovu) sumu funkcije F za danu subdiviziju:

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x.$$

$\boxed{\text{gornje sume}}$ i $\boxed{\text{donje sume}}$

Ideja je da što je manji Δx (što su pravokutnici uži), to će gornja i donja suma biti bliže točnoj „površini" između grafa funkcije i osi apscisa (onome što želimo da bude $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$), ostajući pritom

$$s \leq \int_a^b F(x)\mathrm{d}x \leq S.$$

Sve ovo ima smisla razmatrati (samo) za ograničene funkcije (a po Bolzano-Weierstraßovom teoremu funkcije neprekidne na segmentu su uvijek ograničene)!

Definicija (Određeni (Riemannov) integral)

Gornji/donji integral $\overline{I}/\underline{I}$ *ograničene funkcije* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limes gornjih/donjih integralnih suma kad* $\Delta x \to 0$ *(ako pojedini limes postoji).*

Definicija (Određeni (Riemannov) integral)

Gornji/donji integral $\overline{I}/\underline{I}$ *ograničene funkcije* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limes gornjih/donjih integralnih suma kad* $\Delta x \to 0$ *(ako pojedini limes postoji).*
Ako postoje i gornji i donji integral i jednaki su, onda se broj $I = \overline{I} = \underline{I}$ *zove* ***određenim (ili Riemannovim) integralom*** *funkcije* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i označava s* $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.
Tada kažemo da je F *(Riemann-)integrabilna na segmentu (području integriranja)* $[a, b]$. *Brojevi* a *i* b *zovu se granice (donja i gornja) određenog integrala* $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

Osnovna svojstva određenog integrala

- $\displaystyle\int_a^a F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju F definiranu u a (jer površina dužine iznosi 0);

[1] Radi se o sljedećem: u definiciji smo od a do b išli tako da je svaki sljedeći x_i bio veći, tj. uz pozitivan Δx. Ako pak trebamo ići od b do a moramo ići ulijevo, tj. dodavati *negativan* Δx.

Osnovna svojstva određenog integrala

- $\int_a^a F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju F definiranu u a (jer površina dužine iznosi 0);
- $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za $c \in [a, b]$ (površinu možemo razbiti na dva dijela vertikalom $x = c$);

[1] Radi se o sljedećem: u definiciji smo od a do b išli tako da je svaki sljedeći x_i bio veći, tj. uz pozitivan Δx. Ako pak trebamo ići od b do a moramo ići ulijevo, tj. dodavati *negativan* Δx.

Osnovna svojstva određenog integrala

- $\displaystyle\int_a^a F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju F definiranu u a (jer površina dužine iznosi 0);
- $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za $c \in [a, b]$ (površinu možemo razbiti na dva dijela vertikalom $x = c$);
- ne sasvim očito, ali također direktno iz definicije[1] slijedi i $\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a F(x)\,\mathrm{d}x$ (zamjena granica integrala mijenja predznak određenog integrala).

[1] Radi se o sljedećem: u definiciji smo od a do b išli tako da je svaki sljedeći x_i bio veći, tj. uz pozitivan Δx. Ako pak trebamo ići od b do a moramo ići ulijevo, tj. dodavati *negativan* Δx.

I određeni integral ima svojstvo linearnosti:

$$\int_a^b (F(x) + G(x))\, \mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K\, F(x)\, \mathrm{d}x = K \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}x.$$

I određeni integral ima svojstvo linearnosti:

$$\int_a^b (F(x) + G(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K\,F(x)\,\mathrm{d}x = K\,\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima najviše konačno mnogo točaka prekida u segmentu $[a, b]$, onda je ona integrabilna na $[a, b]$, tj. može se izračunati $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$. Ako su sve točke prekida $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (nabrojane po veličini, tj. $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$), onda je

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} F(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_m}^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

I određeni integral ima svojstvo linearnosti:

$$\int_a^b (F(x) + G(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b G(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K\,F(x)\,\mathrm{d}x = K\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima najviše konačno mnogo točaka prekida u segmentu $[a, b]$, onda je ona integrabilna na $[a, b]$, tj. može se izračunati $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$. Ako su sve točke prekida $c_1, c_2, \ldots, c_m$ (nabrojane po veličini, tj. $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b$), onda je

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} F(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_m}^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

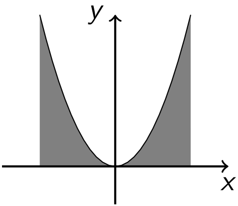
Iz derivabilnosti slijedi neprekidnost, a iz neprekidnosti integrabilnost, a obrati ne vrijede!

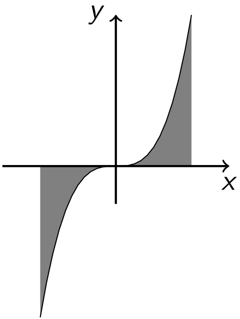
Ako je $F : [-c, c] \to \mathbb{R}$ parna integrabilna funkcija, onda je

$$\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{c} F(x)\mathrm{d}x,$$

a ako je $F : [-c, c] \to \mathbb{R}$ neparna integrabilna funkcija, onda je

$$\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$





Newton-Leibnizova formula

Teorem (Osnovni teorem infinitezimalnog računa)

Neka je realna funkcija F neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je formulom

$$f(x) = \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]$$

definirana funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i ona je antiderivacija za F na $\langle a, b\rangle$.

Newton-Leibnizova formula

Teorem (Osnovni teorem infinitezimalnog računa)

Neka je realna funkcija F neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je formulom

$$f(x) = \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]$$

definirana funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i ona je antiderivacija za F na $\langle a, b\rangle$.

Nadalje, za svaku antiderivaciju f od F vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Zapravo je samo jedan integral

Korolar

Za realnu funkciju F neprekidnu na $[a, b]$ i njenu antiderivaciju f vrijedi:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

$$F(x) = \left(\int_a^x F(t)\,\mathrm{d}t\right)'.$$

U terminima neodređenih integrala:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Primijetimo da Newton-Leibnizova formula vrijedi samo za neprekidne funkcije, no može se iskoristit i za funkcije s konačno mnogo točaka prekida $c_1, c_2, \dots, c_m \in [a, b]$.
Uz oznake $c_0 = a$ i $c_{m+1} = b$ dobivamo formulu

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m} \int_{c_i}^{c_{i+1}} F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_i f_i(x)\Big|_{c_i}^{c_{i+1}},$$

gdje su f_i antiderivacije od F na pojedinim podintervalima.

Zadatak

Za

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \le 0 \\ x+2, & x \le -1 \end{cases}.$$

izračunajte $\int_{-2}^{2} F(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} e^x\,\mathrm{d}x =$$

(Newton-Leibnizova formula & tablično integriranje)

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x+2)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} e^x\,\mathrm{d}x =$$

(Newton-Leibnizova formula & tablično integriranje)

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0} + e^x\big|_0^2 =$$

$$= (\frac{1}{2} - 2 - 2 + 4) + (0 + \frac{1}{3}) + (e^2 - e^0) =$$

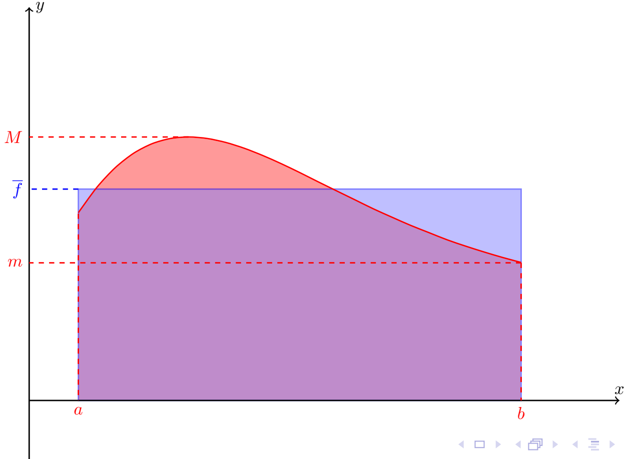
$$= e^2 - \frac{1}{6}.$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Osim računanja površina likova, oplošja i volumena tijela i duljina krivulja, jedna važna i česta primjena (određenih) integrala je računanje prosječne vrijednosti funkcije zadane na intervalu.

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Osim računanja površina likova, oplošja i volumena tijela i duljina krivulja, jedna važna i česta primjena (određenih) integrala je računanje prosječne vrijednosti funkcije zadane na intervalu.



Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M$, odnosno postoji ordinata $\overline{f} \in [m, M]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f} \cdot (b-a).$$

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M$, odnosno postoji ordinata $\overline{f} \in [m, M]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f} \cdot (b-a).$$

Spomenuti broj $\overline{f}$ naziva se prosječnom (srednjom) vrijednosti (neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ista formula vrijedi i za funkcije s konačno mnogo prekida.

Teorem srednje vrijednosti za integrale

Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je $(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M$, odnosno postoji ordinata $\overline{f} \in [m, M]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f} \cdot (b-a).$$

Spomenuti broj $\overline{f}$ naziva se prosječnom (srednjom) vrijednosti (neprekidne) funkcije f na intervalu $[a, b]$:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ista formula vrijedi i za funkcije s konačno mnogo prekida. Budući da $b-a$ predstavlja raspon varijable, možemo reći da $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ predstavlja ukupni iznos („zbroj svih vrijednosti") neprekidne funkcije f na $[a, b]$.

Primjer

Izračunajmo prosječnu brzinu kojom se kretao auto tijekom puta u trajanju od 2 sata ako je u svakom trenutku t tog puta brzina auta iznosila $v(t) = y\,\mathrm{km/h}$, *gdje je uz* $x = t/\mathrm{h}$

$$y = -120x^4 + 426\frac{2}{3}x^3 - 490x^2 + 233\frac{1}{3}x.$$

Primjer

Izračunajmo prosječnu brzinu kojom se kretao auto tijekom puta u trajanju od 2 sata ako je u svakom trenutku t tog puta brzina auta iznosila $v(t) = y\,\mathrm{km/h}$, gdje je uz $x = t/\mathrm{h}$

$$y = -120x^4 + 426\frac{2}{3}x^3 - 490x^2 + 233\frac{1}{3}x.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-24x^5 + 106\frac{2}{3}x^4 - 163\frac{1}{3}x^3 + 116\frac{2}{3}x^2\Big|_0^2\right) = \frac{148}{3};$$

$$\bar{v} = \frac{148}{3}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Veza s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti

Po Newton-Leibnizovoj formuli je (za neprekidne F, dakle derivabilne f)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Veza s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti

Po Newton-Leibnizovoj formuli je (za neprekidne F, dakle derivabilne f)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Dakle, prosječna vrijednost od F na $[a, b]$ je

$$\overline{F} = \frac{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

Veza s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti

Po Newton-Leibnizovoj formuli je (za neprekidne F, dakle derivabilne f)

$$f(b) - f(a) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

Dakle, prosječna vrijednost od F na $[a, b]$ je

$$\overline{F} = \frac{\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

a to je po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti za f jednako $f'(c) = F(c)$ za neki c između a i b.

Zadatak

$$\int_{-1}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{5} x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\Big|_{-1}^{5} = -\frac{6}{5}?!$$

Zadatak

$$\int_{-1}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{5} x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\Big|_{-1}^{5} = -\frac{6}{5}?!$$

Zadatak

$$\int_{1}^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Zadatak

$$\int_{-1}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^{5} x^{-2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\Big|_{-1}^{5} = -\frac{6}{5}?!$$

Zadatak

$$\int_{1}^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Određeni (Riemannov) integral definiran je samo za ograničene funkcije na ograničenom području integriranja.

Nepravi integrali . . .

. . . su integrali koji podsjećaju na određene integrale jer su im definirane granice integriranja, ali je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je interval integriranja neograničen.

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \infty?!$$

Neograničeno $\neq$ beskonačno

Ako je $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$, za rastući $x > 0$ $P(x)$ ne postaje beskonačno velik iako s rastućim x i $P(x)$ raste: $\lim_{x\to+\infty} P(x) = 2$.

$$\int_1^5 \frac{dx}{x-2} = \infty?!$$

Neograničeno $\neq$ beskonačno

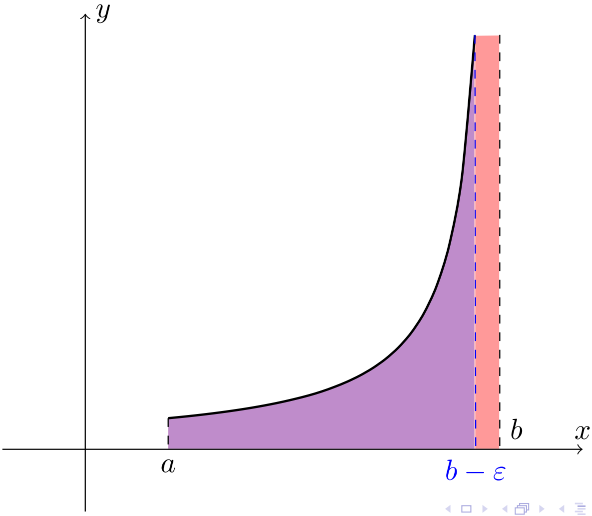
Ako je $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$, za rastući $x > 0$ $P(x)$ ne postaje beskonačno velik iako s rastućim x i $P(x)$ raste: $\lim_{x\to+\infty} P(x) = 2$.

Primjeri nepravih integrala

$$\int_0^1 \ln x\, dx, \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx, \int_0^3 \frac{dx}{x-1},$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \int_{-\infty}^5 \frac{dx}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Nepravi integrali s neograničenom podintegralnom funkcijom



$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za F koja unutar $[a, b]$ ima vertikalnu asimptotu se definira na sljedeći način:

- Ako je $x = a$ vertikalna asimptota za F,

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ako je $x = b$ vertikalna asimptota za F,

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za F koja unutar $[a,b]$ ima vertikalnu asimptotu se definira na sljedeći način:

- Ako je $x = a$ vertikalna asimptota za F,

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ako je $x = b$ vertikalna asimptota za F,

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Ako je za neki $c \in \langle a, b\rangle$ pravac $x = c$ vertikalna asimptota za F:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukoliko je konačni rezultat izračunavanja potrebnog (potrebnih) limesa realan broj, kažemo da nepravi integral $\int_a^b F(x)\,dx$ konvergira, a u suprotnom da divergira.

Primjer

$$\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$$

Ukoliko je konačni rezultat izračunavanja potrebnog (potrebnih) limesa realan broj, kažemo da nepravi integral $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, a u suprotnom da divergira.

Primjer

$$\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C;$$

Ukoliko je konačni rezultat izračunavanja potrebnog (potrebnih) limesa realan broj, kažemo da nepravi integral $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, a u suprotnom da divergira.

Primjer

$$\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C;$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-2}^{-\varepsilon} = \frac{3}{2}\cdot \lim_{\varepsilon\to 0+}(\sqrt[3]{\varepsilon^2} - \sqrt[3]{4}) = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{2};$$

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \frac{3}{2}\cdot \lim_{\varepsilon\to 0+}(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{\varepsilon^2}) = \frac{3}{2};$$

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$*?*

Ovo *nije* nepravi integral ako je $\alpha \leq 0$!

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira* $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$*?*

Ovo *nije* nepravi integral ako je $\alpha \leq 0$! Za $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^0 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x; \quad \int x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases};$$

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$*?*

Ovo *nije* nepravi integral ako je $\alpha \leq 0$! Za $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^0 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x; \quad \int x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases};$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$*?*

Ovo *nije* nepravi integral ako je $\alpha \leq 0$! Za $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^0 x^{-\alpha}\, \mathrm{d}x; \qquad \int x^{-\alpha}\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases};$$

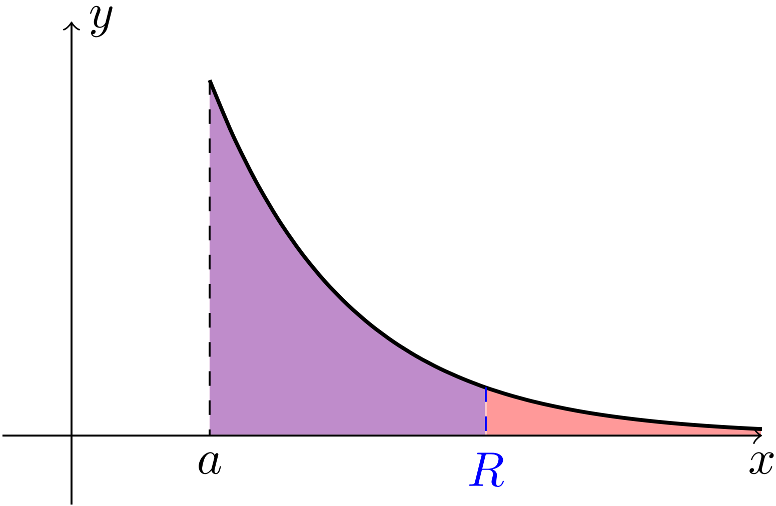
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty.$$

Za $\alpha \neq 1$ je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0+} (1 - \varepsilon^{1-\alpha});$$

ako je $0 < \alpha < 1$, $1 - \alpha > 0$ i limes je 1 (tj. integral konvergira u $\frac{1}{1-\alpha}$), a za $\alpha > 1$ je $1 - \alpha < 0$ pa integral divergira.

Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja



$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za slučajeve kad je $a = -\infty$ i/ili $b = +\infty$ se definira na sljedeći način:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x.$

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za slučajeve kad je $a = -\infty$ i/ili $b = +\infty$ se definira na sljedeći način:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^b F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^b F(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R fF(x)\,\mathrm{d}x.$

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za slučajeve kad je $a = -\infty$ i/ili $b = +\infty$ se definira na sljedeći način:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{a}^{R} fF(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x.$

$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za slučajeve kad je $a = -\infty$ i/ili $b = +\infty$ se definira na sljedeći način:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{b} F(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{a}^{R} fF(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x.$
- Ukoliko je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.

Primjer

$$\int_0^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} (e^{-1})^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}}\Big|_0^R = -\lim_{R\to+\infty}(e^{-R}-1) = 1.$$

Primjer

$$\int_0^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R (e^{-1})^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}}\Big|_0^R = -\lim_{R\to+\infty}(e^{-R}-1) = 1.$$

Primjer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\lim_{R\to+\infty}(\operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg} 0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Primjer

$$\int_0^{\infty} \exp(-x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{R} (e^{-1})^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{(e^{-1})^x}{\ln e^{-1}}\Big|_0^R = -\lim_{R\to+\infty} (e^{-R} - 1) = 1.$$

Primjer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\lim_{R\to+\infty} (\operatorname{arctg} R - \operatorname{arctg} 0) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Oprez: $\int_{-\infty}^{+\infty}$ neparne funkcije je 0 *samo* ako smo sigurni da konvergira.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}?$$

Ovaj integral očito divergira ako je $\alpha \leq 0$.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}?$$

Ovaj integral očito divergira ako je $\alpha \leq 0$. Za $\alpha < 0$ opet imamo dva slučaja, $\alpha = 1$ i $\alpha \neq 1$.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}?$$

Ovaj integral očito divergira ako je $\alpha \leq 0$. Za $\alpha < 0$ opet imamo dva slučaja, $\alpha = 1$ i $\alpha \neq 1$. Za $\alpha = 1$ dobit ćemo $\lim_{R \to +\infty} (\ln R - \ln 1) = +\infty$.

Zadatak

Za koje $\alpha \in \mathbb{R}$ *konvergira*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}?$$

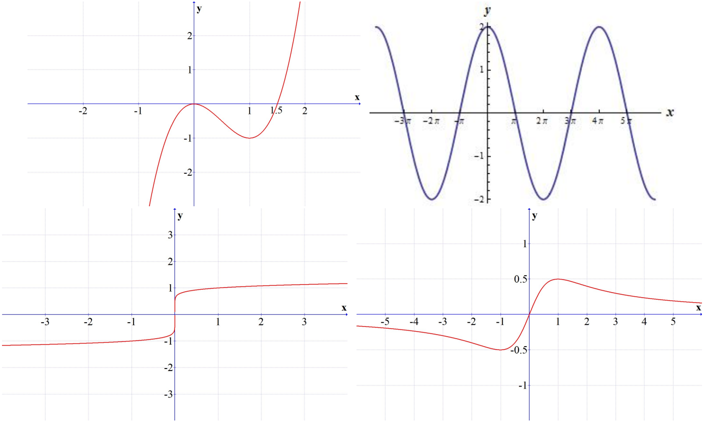
Ovaj integral očito divergira ako je $\alpha \leq 0$. Za $\alpha < 0$ opet imamo dva slučaja, $\alpha = 1$ i $\alpha \neq 1$. Za $\alpha = 1$ dobit ćemo $\lim_{R\to+\infty}(\ln R - \ln 1) = +\infty$. Za $\alpha \neq 1$ dobijemo da je integral jednak

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{R\to+\infty}(R^{1-\alpha} - 1),$$

a to je konačno samo ako je $1 - \alpha > 0$, tj. $0 < \alpha < 1$.

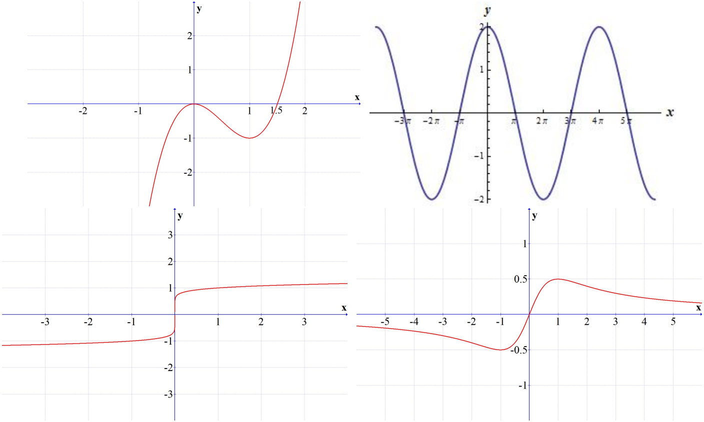
Kakva treba biti podintegralna funkcija ...

... da bi bilo šanse da njen integral od 0 do $+\infty$ konvergira?



Kakva treba biti podintegralna funkcija . . .

. . . da bi bilo šanse da njen integral od 0 do $+\infty$ konvergira?



Za konvergenciju integrala $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ nužno je (ali ne i dovoljno) da je $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, tj. da je x-os HA podintegralne funkcije f.