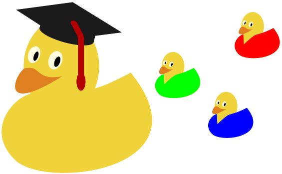
11. tjedan nastave: Metode integriranja i primjene integrala.

Franka Miriam Brückler



Parcijalna integracija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$$

Parcijalna integracija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$$

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v \Rightarrow$$

Parcijalna integracija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$$

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v \Rightarrow$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\left(\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Parcijalna integracija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow$$

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v \Rightarrow$$

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\left(\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Najtipičniji slučajevi primjene ovog pravila su sljedeća tri.

Ako podintegralna funkcija u ima derivaciju jednostavniju za integriranje nego u, uzimamo $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x =$$

Ako podintegralna funkcija u ima derivaciju jednostavniju za integriranje nego u, uzimamo $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v(x) = x \right\} =$$

Ako podintegralna funkcija u ima derivaciju jednostavniju za integriranje nego u, uzimamo $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x, \ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v(x) = x \right\} =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

Ako podintegralna funkcija u ima derivaciju jednostavniju za integriranje nego u, uzimamo $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x, \ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v(x) = x \right\} =$$

$$= x \ln x - \int x \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.$$

Ako je funkcija u potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a $\mathrm{d}v$ je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s $\mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x =$$

Ako je funkcija u potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a $\mathrm{d}v$ je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s $\mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = x^2,\, \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x \right\} =$$

Ako je funkcija u potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a dv je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s dx:

Primjer

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x \right\} =$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x =$$

Ako je funkcija u potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a $\mathrm{d}v$ je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s $\mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = x^2, \, \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x; \; \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, v(x) = e^x \right\} =$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \{ u(x) = x, \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \; \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, v(x) = e^x \} =$$

Ako je funkcija u potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a $\mathrm{d}v$ je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija pomnožena s $\mathrm{d}x$:

Primjer

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = x^2, \, \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x; \; \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, v(x) = e^x \right\} =$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \{ u(x) = x, \, \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \; \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, v(x) = e^x \} =$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

Ako je u neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$:

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

Ako je u neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$:

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1} \right\} =$$

Ako je u neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$:

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

Ako je u neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$:

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$

Ako je u neka logaritamska funkcija, a $\mathrm{d}v$ je oblika $x^n\,\mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{R}$:

Primjer

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Metoda supstitucije

Lančano pravilo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

Neka je $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = f(y)$ pri čemu je $y = y(x)$.

Metoda supstitucije

Lančano pravilo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

Neka je $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = f(y)$ pri čemu je $y = y(x)$. Slijedi $\mathrm{d}F = f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$ odnosno (jer $\mathrm{d}F = f(y)\,\mathrm{d}y$) $\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$, dakle:

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Metoda supstitucije

Lančano pravilo:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x};$$

Neka je $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = f(y)$ pri čemu je $y = y(x)$. Slijedi $\mathrm{d}F = f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$ odnosno (jer $\mathrm{d}F = f(y)\,\mathrm{d}y$) $\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$, dakle:

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Primjer

$$\int 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \{y = x^2,\ \mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x\} =$$

$$= \int \cos y\,\mathrm{d}y = \sin y + C = \sin(x^2) + C.$$

Primjer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} =$$

Primjer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} =$$

$$= \left\{ y = ax + b \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \Rightarrow \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \right\} =$$

Primjer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} =$$

$$= \left\{ y = ax+b \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a \Rightarrow \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y}{y} =$$

$$= \frac{1}{a}\int y^{-1}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{a}\ln|y| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Primjer

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ?$$

Gdje bi ovdje bio y i y'?

Primjer

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ?$$

Gdje bi ovdje bio y i y'? No, očito parcijalna integracija ovdje ne bi funkcionirala (zašto?),

Primjer

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ?$$

Gdje bi ovdje bio y i y'? No, očito parcijalna integracija ovdje ne bi funkcionirala (zašto?), pa probajmo supstituirati jedino što se da: $y = \sqrt{x}$

Primjer

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ?$$

Gdje bi ovdje bio y i y'? No, očito parcijalna integracija ovdje ne bi funkcionirala (zašto?), pa probajmo supstituirati jedino što se da: $y = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Primjer

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = ?$$

Gdje bi ovdje bio y *i* y'*? No, očito parcijalna integracija ovdje ne bi funkcionirala (zašto?), pa probajmo supstituirati jedino što se da:* $y = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}y \Rightarrow$

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int 2y \sin y\,\mathrm{d}y,$$

a to se dade izračunati parcijalnom integracijom ($u = y$*,* $\mathrm{d}v = \sin y\,\mathrm{d}y$*).*

Integriranje racionalnih funkcija

Primjer

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Integriranje racionalnih funkcija

Primjer

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Prvo dijelimo: $x^3 : (x^2-1) = x$ *i ostatak je* x*, dakle*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}.$$

Integriranje racionalnih funkcija

Primjer

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Prvo dijelimo: $x^3 : (x^2-1) = x$ *i ostatak je* x, *dakle*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}.$$

Slijedi

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Integriranje racionalnih funkcija

Primjer

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

Prvo dijelimo: $x^3 : (x^2-1) = x$ *i ostatak je* x*, dakle*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}.$$

Slijedi

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ako je podintegralna funkcija racionalna s brojnikom stupnja većeg ili jednakog stupnju nazivnika, prvi korak je dijeljenje brojnika s nazivnikom da bismo izdvojili polinomijalni dio.

Integriranje pravih racionalnih funkcija

Za integriranje pravih racionalnih funkcija (onih čiji brojnik je stupnja manjeg nego nazivnik), koristi se rastav na parcijalne razlomke, u kombinaciji s metodom supstitucije i tabličnim integriranjem.

Integriranje pravih racionalnih funkcija

Za integriranje pravih racionalnih funkcija (onih čiji brojnik je stupnja manjeg nego nazivnik), koristi se rastav na parcijalne razlomke, u kombinaciji s metodom supstitucije i tabličnim integriranjem.

Rastav na parcijalne razlomke racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ je njezin zapis u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ ili } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Integriranje pravih racionalnih funkcija

Za integriranje pravih racionalnih funkcija (onih čiji brojnik je stupnja manjeg nego nazivnik), koristi se rastav na parcijalne razlomke, u kombinaciji s metodom supstitucije i tabličnim integriranjem.

Rastav na parcijalne razlomke racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ je njezin zapis u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ ili } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Koji parcijalni razlomci su nam potrebni i koliko ih je ovisi o nultočkama nazivnika i njihovoj kratnosti te je prvi korak rastava na parcijalne razlomke faktorizacija nazivnika:

$$q(x) = (a_1x+b_1)^{k_1} \cdot (a_2x+b_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (p_1x^2+q_1x+r_1)^{l_1} \cdot \ldots.$$

Integriranje pravih racionalnih funkcija

Za integriranje pravih racionalnih funkcija (onih čiji brojnik je stupnja manjeg nego nazivnik), koristi se rastav na parcijalne razlomke, u kombinaciji s metodom supstitucije i tabličnim integriranjem.
Rastav na parcijalne razlomke racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ je njezin zapis u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \text{ ili } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}.$$

Koji parcijalni razlomci su nam potrebni i koliko ih je ovisi o nultočkama nazivnika i njihovoj kratnosti te je prvi korak rastava na parcijalne razlomke faktorizacija nazivnika:

$$q(x) = (a_1x+b_1)^{k_1} \cdot (a_2x+b_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (p_1x^2+q_1x+r_1)^{l_1} \cdot \ldots.$$

Dakle, realne nultočke su redom $-\frac{b_i}{a_i}$ (kratnosti k_i), a faktori $p_ix^2+q_ix+r_i$ nemaju realnih nultočaka ($q_i^2-4p_ir_i<0$).

Isključivo jednostruke realne nultočke nazivnika

Najjednostavniji slučaj: $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj. U tom je rastav $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcijalne razlomke ovakav:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i}.$$

Tu su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$.

Isključivo jednostruke realne nultočke nazivnika

Najjednostavniji slučaj: $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj. U tom je rastav $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcijalne razlomke ovakav:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i}.$$

Tu su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$.

Primjer

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow$$

Isključivo jednostruke realne nultočke nazivnika

Najjednostavniji slučaj: $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj. U tom je rastav $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcijalne razlomke ovakav:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i}.$$

Tu su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$.

Primjer

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow$$

$$x = A\,(x+1) + B\,(x-1) =$$

Isključivo jednostruke realne nultočke nazivnika

Najjednostavniji slučaj: $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj. U tom je rastav $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcijalne razlomke ovakav:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i}.$$

Tu su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$.

Primjer

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow$$

$$x = A\,(x+1) + B\,(x-1) = (A+B)\,x + (A-B).$$

Metoda 1: $A + B = 1$, $A - B = 0$

Isključivo jednostruke realne nultočke nazivnika

Najjednostavniji slučaj: $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj. U tom je rastav $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcijalne razlomke ovakav:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i}.$$

Tu su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$.

Primjer

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow$$

$$x = A\,(x+1) + B\,(x-1) = (A+B)\,x + (A-B).$$

Metoda 1: $A + B = 1$, $A - B = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$.
Metoda 2: *Uvrstimo* $x = 1$ *i* $x = -1 \Rightarrow 1 = 2A$, $-1 = -2B$.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} =$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C = \frac{x^2}{2} + \ln\sqrt{|x^2-1|} + C.$$

Isključivo realne nultočke nazivnika

Ako se u $q(x)$ neki faktor $ax+b$ pojavljuje s potencijom $k>1$ (nultočka $-\frac{b}{a}$ ima kratnost $k>1$), tom faktoru odgovara k parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}}+\frac{A_k}{(ax+b)^k}.$$

Isključivo realne nultočke nazivnika

Ako se u $q(x)$ neki faktor $ax + b$ pojavljuje s potencijom $k > 1$ (nultočka $-\frac{b}{a}$ ima kratnost $k > 1$), tom faktoru odgovara k parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}} + \frac{A_k}{(ax+b)^k}.$$

Primjer

$$\int \frac{x}{(2x+3)\,(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Isključivo realne nultočke nazivnika

Ako se u $q(x)$ neki faktor $ax+b$ pojavljuje s potencijom $k>1$ (nultočka $-\frac{b}{a}$ ima kratnost $k>1$), tom faktoru odgovara k parcijalnih razlomaka

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}}+\frac{A_k}{(ax+b)^k}.$$

Primjer

$$\int \frac{x}{(2x+3)\,(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\frac{x}{(2x-3)\,(x-3)^2}=\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}.$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2} =$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln|2x-3|$$

$$x = A\left(x-3\right)^2 + B\left(2x-3\right)\left(x-3\right) + C\left(2x-3\right)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{\left(2x+3\right)\left(x-3\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-3\right)^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln\left|2x-3\right| - \frac{21}{2}\ln\left|x-3\right|$$

$$x = A\left(x-3\right)^2 + B\left(2x-3\right)\left(x-3\right) + C\left(2x-3\right)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{\left(2x+3\right)\left(x-3\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-3\right)^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln\left|2x-3\right| - \frac{21}{2}\ln\left|x-3\right| - \frac{1}{x-3} + C.$$

$$x = A(x-3)^2 + B(2x-3)(x-3) + C(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln|2x-3| - \frac{21}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{x-3} + C.$$

Vidimo: Ako nazivnik ima samo realne nultočke, imat ćemo onoliko parcijalnih razlomaka koliki je zbroj njihovih kratnosti

$$x = A\,(x-3)^2 + B\,(2x-3)\,(x-3) + C\,(2x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 3 = 3C \Rightarrow C = 1, \quad x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{9}{4}A \Rightarrow A = \frac{3}{2},$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = 9A + 9B - 3C = \frac{27}{2} + 9B - 3 \Rightarrow C = -\frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{(2x+3)\,(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-3} - \frac{21}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{9}{4}\ln|2x-3| - \frac{21}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{x-3} + C.$$

Vidimo: Ako nazivnik ima samo realne nultočke, imat ćemo onoliko parcijalnih razlomaka koliki je zbroj njihovih kratnosti i u tom se slučaju integriranje racionalne funkcije svodi na integriranje funkcija oblika $(ax+b)^{-n}\,\mathrm{d}x$ koje je lako integrirati supstitucijom $y = ax + b$.

Kompleksne nultočke nazivnika

U slučaju da $q(x)$ nema samo realne nultočke u rastavu se po sličnom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici afine funkcije, a nazivnici potencije promatranog faktora.

Primjer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+3)^2\,(x-1)^3} = ?$$

Kompleksne nultočke nazivnika

U slučaju da $q(x)$ nema samo realne nultočke u rastavu se po sličnom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici afine funkcije, a nazivnici potencije promatranog faktora.

Primjer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+3)^2\,(x-1)^3} = ?$$

$$\frac{25}{(2x^2+3)^2\,(x-1)^3} = \frac{Ax+B}{2x^2+3} + \frac{Cx+D}{(2x^2+3)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{(x-1)^2} + \frac{G}{(x-1)^3}$$

Iz brzine do onog što se mijenja

Brzina i put

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \int v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s(t) + C.$$

Iz brzine do onog što se mijenja

Brzina i put

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \int v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s(t) + C.$$

Općenitije ...

Ako znamo funkciju brzine promjene neke funkcije F ovisne o vremenu t, tj. znamo $v(t) = \dot{F}(t)$, i početni iznos $F(0)$ promatrane funkcije F, onda je $F(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$, a konstanta integriranja se može odrediti iz početnog uvjeta, odnosno ako je v neprekidna, onda je $F(t) = F(0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Primjer

Ako tijelo mase m pada slobodno s pozicije 0, koji je put prešlo do trenutka T?

Primjer

Ako tijelo mase m pada slobodno s pozicije 0, *koji je put prešlo do trenutka T?*

$$m\,g = m\,\dot{v} \Rightarrow v(t) = \int_0^t g\ \mathrm{d}\tau = g\,\tau\big|_0^t = g\,t$$

Primjer

Ako tijelo mase m pada slobodno s pozicije 0, *koji je put prešlo do trenutka* T*?*

$$m\,g = m\,\dot{v} \Rightarrow v(t) = \int_0^t g\ \mathrm{d}\tau = g\,\tau\Big|_0^t = g\,t$$

$$\Rightarrow$$

$$s(T) = \int_0^T v(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T g\,\tau\ \mathrm{d}\tau =$$

$$= g\,\frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^T = \frac{g}{2}\,T^2.$$

Malo kemijske kinetike

Trenutna koncentracija $c(t)$ bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je ν[1] i početna koncentracija c_0) je dana formulom

$$c(t) = c_0 + \nu x(t),$$

gdje je x pomoćna veličina povezana s brzinom v reakcije:

$$v = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad x(0) = 0.$$

Primjer

Ako je reakcija stehiometrije $A + B \longrightarrow P$ drugog reda, prvog s obzirom na svaki od dva reaktanta, onda je $v = kc_\mathrm{A}c_\mathrm{B}$, gdje je k koeficijent brzine reakcije. Označimo li s a i b početne koncentracije od A i B, iz gornjih formula (uz $\nu_\mathrm{A} = \nu_\mathrm{B} = -1$) dobijemo:

[1] Za reaktante se stehiometrijski koeficijenti uzimaju s negativnim predznakom.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x)(b - x).$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x).$$

Zadnju jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$k\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(a-x)(b-x)}.$$

Rastavimo desnu stranu na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x},$$

$$1 = A(b-x) + B(a-x).$$

$$x = a, b \Rightarrow A = -B = \frac{1}{b-a} \Rightarrow$$

$$k\,(b-a)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \quad \Big/ \int \mathrm{d}x$$

$$k\,(b-a)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \quad \Big/ \int \mathrm{d}x$$

$$k\,(b-a)\,t = -\ln|a-x| + \ln|b-x| = \ln\frac{b-x}{a-x}$$

$$k\,(b-a)\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a-x} - \frac{1}{b-x} \quad \Big/ \int \mathrm{d}x$$

$$k\,(b-a)\,t = -\ln|a-x| + \ln|b-x| = \ln\frac{b-x}{a-x}$$

Uvrštavanjem $a-x=c_{\mathrm{A}}$ i $b-x=c_{\mathrm{B}}$ dobivamo tzv. integrirani oblik zakona brzine reakcije

$$k\,t = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a\,c_{\mathrm{B}}}{b\,c_{\mathrm{A}}}.$$

Rad, rad, rad i rad ☺

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane preko integrala.

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,dx$;

Rad, rad, rad i rad ☺

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane preko integrala.

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);

Rad, rad, rad i rad ☺

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane preko integrala.

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);
- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);

Rad, rad, rad i rad ☺

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane preko integrala.

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;
- Volumni rad $w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu volumena od V_1 do V_2; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);
- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);
- Električni rad $w = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r$ (rad izvršen za pomicanje naboja q_1 od udaljenosti $r = a$ do udaljenosti $r = b$ u odnosu na naboj q_2; $k_e = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$ je Coulombova konstanta).

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_\mathrm{k}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathrm{k}}.$$

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m \int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m \int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\, v\ \mathrm{d}t = m \int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathrm{k}}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F,

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_\mathrm{k}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_\mathrm{k}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F, tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela.

O mehaničkom radu

$w = \Delta E_{\mathrm{k}}$

Po 2. Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\ \mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\ \mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathrm{k}}.$$

$w = -\Delta V$

Ako F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F, tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju
$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -V(b) - (-V(a)) = -\Delta V$.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila $(V(x) = -Fx + C)$

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila $(V(x) = -F\,x + C)$ i sila elastične opruge $F(x) = -k\,x$ $(V(x) = \frac{k\,x^2}{2} + C)$.

Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzerativnim silama. U konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -F\,x + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -k\,x$ ($V(x) = \frac{k\,x^2}{2} + C$).
Za takve sile kombinacija prethodna dva primjera daje

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.
Uočimo da se ne može definirati apsolutna ljestvica za potencijalnu energiju!

O volumnom radu pri reverzibilnoj ekspanziji/kompresiji

Idealni plin uz konstantnu temperaturu i množinu

$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se recimo nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta, $w = -nRT\ln 8$.

O volumnom radu pri reverzibilnoj ekspanziji/kompresiji

Idealni plin uz konstantnu temperaturu i množinu

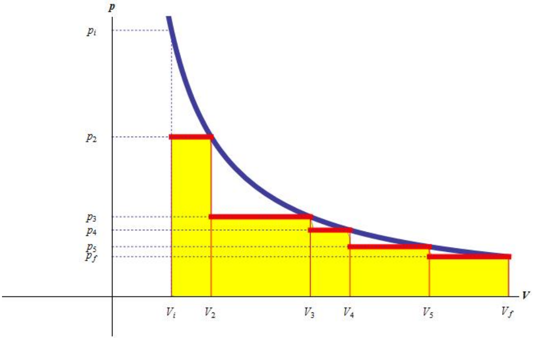
$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se recimo nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta, $w = -nRT \ln 8$.

Primjer

Ako je tlak konstantan, izvršeni volumni rad je $w = p\Delta V$.

Reverzibilna ekspanzija/kompresija može se zamisliti kao niz ireverzibilnih ekspanzija/kompresija, kod kojih su promjene volumena infinitezimalno male. Kako se kod ireverzibilne promjene volumena izvršeni rad dobiva kao umnožak konačnog tlaka i iznosa promjene volumena, formula za reverzibilnu ekspanziju/kompresiju može se shvatiti kao specijalni slučaj definicije određenog integrala.



Primjene integrala u (kemijskoj) termodinamici

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa raznih termodinamičkih funkcija stanja (entalpije H, entropije S, ...). Funkcije stanja su funkcije čije promjene tijekom bilo kojeg procesa ovise samo o početnom i konačnom stanju, a ne i o samom procesu, tj. međustanjima.

Primjene integrala u (kemijskoj) termodinamici

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa raznih termodinamičkih funkcija stanja (entalpije H, entropije S, ...). Funkcije stanja su funkcije čije promjene tijekom bilo kojeg procesa ovise samo o početnom i konačnom stanju, a ne i o samom procesu, tj. međustanjima.
Primjerice, promjena entalpije H se *za izobarne procese* računa kao

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_p(T)\,\mathrm{d}T,$$

a veza između promjene entalpije i unutrašnje energije *za izobarne procese* dana je s

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V$$

(ΔV je razlika konačnog i početnog volumena).

Jedno izobarno zagrijavanje

Odredimo ΔH i ΔU ako se 1,00 mol dušika izobarno (pri tlaku $p = 1{,}00$ atm) zagrije od 25°C do 100°C, uz pretpostavku da se pritom N_2 ponaša kao idealan plin i da za to zagrijavanje molarni toplinski kapacitet $C_{p,\mathrm{m}} = \frac{C_p}{n}$ može aproksimirati funkcijom

$$C_{p,\mathrm{m}}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Pritom empirijski parametri a, b, c ne ovise o T i za dušik iznose $a = 28{,}58\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $b = 3{,}77 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J\,K^{-2}\,mol^{-1}}$ i $c = -0{,}50 \cdot 10^{5}\,\mathrm{J\,K\,mol^{-1}}$.

Jedno izobarno zagrijavanje

Odredimo ΔH i ΔU ako se 1,00 mol dušika izobarno (pri tlaku $p = 1{,}00$ atm) zagrije od 25°C do 100°C, uz pretpostavku da se pritom N_2 ponaša kao idealan plin i da za to zagrijavanje molarni toplinski kapacitet $C_{p,\mathrm{m}} = \frac{C_p}{n}$ može aproksimirati funkcijom

$$C_{p,\mathrm{m}}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Pritom empirijski parametri a, b, c ne ovise o T i za dušik iznose $a = 28{,}58\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$, $b = 3{,}77 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J\,K^{-2}\,mol^{-1}}$ i $c = -0{,}50 \cdot 10^{5}\,\mathrm{J\,K\,mol^{-1}}$.

$$C_p(T) = n \cdot C_{p,\mathrm{m}}(T) =$$

$$= n\,a + n\,b\,T + \frac{n\,c}{T^2} \Rightarrow$$

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,\mathrm{m}}(T)\,\mathrm{d}T =$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \left(n\,a + n\,b\,T + \frac{n\,c}{T^2}\right)\,\mathrm{d}T =$$

$$= n\,a\,(T_2 - T_1) + n\,b\,(T_2^2 - T_1^2) - n\,c\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,\mathrm{m}}(T)\,\mathrm{d}T =$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \left(n\,a + n\,b\,T + \frac{n\,c}{T^2} \right)\,\mathrm{d}T =$$

$$= n\,a\,(T_2 - T_1) + n\,b\,(T_2^2 - T_1^2) - n\,c \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right).$$

Nakon uvrštavanja poznatih podataka dobijemo $\Delta H = 2{,}2 \cdot 10^3$ J, dakle je u opisanom procesu entalpija porasla (promatrani proces je endoterman).
Budući da je $p\,V = n\,R\,T$, slijedi da je pri izobarnoj promjeni (uz konstantnu množinu) $p\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} C_{p,\mathrm{m}}(T)\,\mathrm{d}T =$$

$$= \int_{T_1}^{T_2} \left(n\,a + n\,b\,T + \frac{n\,c}{T^2}\right)\,\mathrm{d}T =$$

$$= n\,a\,(T_2 - T_1) + n\,b\,(T_2^2 - T_1^2) - n\,c\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

Nakon uvrštavanja poznatih podataka dobijemo $\Delta H = 2{,}2 \cdot 10^3$ J, dakle je u opisanom procesu entalpija porasla (promatrani proces je endoterman).
Budući da je $p\,V = n\,R\,T$, slijedi da je pri izobarnoj promjeni (uz konstantnu množinu) $p\,\Delta V = n\,R\,\Delta T$ i stoga je

$$\Delta U = \Delta H - p\,\Delta V = \Delta H - n\,R\,\Delta T$$

te zbog $\Delta T = 75{,}0$ K dobivamo $\Delta U = 1{,}6 \cdot 10^3$ J.

Primjena teorema srednje vrijednosti za integrale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjena teorema srednje vrijednosti za integrale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kolika je prosječna temperatura  tijekom pečenja?

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}\, e^{-kt\,\mathrm{min}^{-1}}, \quad k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\,\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}0024443$$

Patka je pečena nakon $T = \frac{\mathrm{min}^{-1}}{k}\ln\frac{198}{200-80} \approx 204{,}868$ min.

Primjena teorema srednje vrijednosti za integrale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kolika je prosječna temperatura  tijekom pečenja?

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}\, e^{-kt\,\mathrm{min}^{-1}}, \quad k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}002444$$

Patka je pečena nakon $T = \frac{\mathrm{min}^{-1}}{k}\ln\frac{198}{200-80} \approx 204{,}868$ min.

$$\overline{\theta} = \frac{1}{T-0}\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\cdot\left(200^\circ\mathrm{C}\cdot T + \frac{1}{k}198^\circ\mathrm{C}(e^{-kT\,\mathrm{min}^{-1}} - 1)\right) =$$

Primjena teorema srednje vrijednosti za integrale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kolika je prosječna temperatura  tijekom pečenja?

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}\, e^{-kt\,\mathrm{min}^{-1}}, \quad k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\ \mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}0024443$$

Patka je pečena nakon $T = \frac{\mathrm{min}^{-1}}{k}\ln\frac{198}{200-80} \approx 204{,}868$ min.

$$\overline{\theta} = \frac{1}{T-0}\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\cdot\left(200^\circ\mathrm{C}\cdot T + \frac{1}{k}198^\circ\mathrm{C}(e^{-kT\,\mathrm{min}^{-1}} - 1)\right) =$$

$$= 200^\circ\mathrm{C} + \frac{120^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}}{\ln\frac{198}{120}} \approx 44{,}2^\circ\mathrm{C}.$$

Primjena teorema srednje vrijednosti za integrale

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kolika je prosječna temperatura  tijekom pečenja?

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}\, e^{-kt\,\mathrm{min}^{-1}}, \quad k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\,\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}0024443$$

Patka je pečena nakon $T = \frac{\mathrm{min}^{-1}}{k}\ln\frac{198}{200-80} \approx 204{,}868$ min.

$$\overline{\theta} = \frac{1}{T-0}\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\cdot\left(200^\circ\mathrm{C}\cdot T + \frac{1}{k}198^\circ\mathrm{C}(e^{-kT\,\mathrm{min}^{-1}} - 1)\right) =$$

$$= 200^\circ\mathrm{C} + \frac{120^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}}{\ln\frac{198}{120}} \approx 44{,}2^\circ\mathrm{C}.$$

Osnove primjena u kvantnoj fizici i kemiji

U kvantnoj teoriji se elektroni opisuju valnim funkcijama koje zovemo orbitalama. One su *kompleksne* funkcije koje *indirektno* opisuju vjerojatnost p nalaženja elektrona u određenom dijelu prostora. S Ω označavamo skup svih mogućih vrijednosti (rezultata) u danoj situaciji. Za razmatrani slučajni događaj (događaj čiji ishod unaprijed ne možemo predvidjeti) A, s A^c označavamo suprotni događaj („ne-A“). Za slučajne događaje A i B, s $A \cap B$ označavamo događaj „i A i B“, a s $A \cup B$ događaj „bar jedno od A i B“.

Osnove primjena u kvantnoj fizici i kemiji

U kvantnoj teoriji se elektroni opisuju valnim funkcijama koje zovemo orbitalama. One su *kompleksne* funkcije koje *indirektno* opisuju vjerojatnost p nalaženja elektrona u određenom dijelu prostora. S Ω označavamo skup svih mogućih vrijednosti (rezultata) u danoj situaciji. Za razmatrani slučajni događaj (događaj čiji ishod unaprijed ne možemo predvidjeti) A, s A^c označavamo suprotni događaj („ne-A"). Za slučajne događaje A i B, s $A \cap B$ označavamo događaj „i A i B", a s $A \cup B$ događaj „bar jedno od A i B".

Primjer

Do na mjernu jedinicu, udaljenost r elektrona do jezgre atoma je slučajna vrijednost iz intervala $\Omega = [0, +\infty\rangle$, pa se možemo pitati, primjerice, kolike su vjerojatnosti $p(r = a_0)$, $p(r \leq 2a_0)$, ...
Za $A =$„$r > a_0$" i $B =$„$r \leq 3a_0$" je $A^c =$„$r \leq a_0$",
$A \cap B =$„$a_0 < r \leq 3a_0$", $A \cup B = \Omega$.

Osnovna svojstva vjerojatnosti

- $p(A) \geq 0$ za sve A;

Osnovna svojstva vjerojatnosti

- $p(A) \geq 0$ za sve A;
- $p(\Omega) = 1$;

Osnovna svojstva vjerojatnosti

- $p(A) \geq 0$ za sve A;
- $p(\Omega) = 1$;
- Ako se $A \cap B = \emptyset$, onda je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- $0 \leq p(A) \leq 1$ za sve događaje A;
- $p(A^c) = 1 - p(A)$.

Osnovna svojstva vjerojatnosti

- $p(A) \geq 0$ za sve A;
- $p(\Omega) = 1$;
- Ako se $A \cap B = \emptyset$, onda je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- $0 \leq p(A) \leq 1$ za sve događaje A;
- $p(A^c) = 1 - p(A)$.

S integralima su povezane kontinuirane slučajne varijable, tj. zadaci vezani za vjerojatnost nekog slučajnog događaja koji može postići bilo koju vrijednost iz nekog intervala (ili unije intervala):
Većina kontinuiranih slučajnih varijabli X ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti. To je funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da vrijedi

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\, dx.$$

Osnovna svojstva vjerojatnosti

- $p(A) \geq 0$ za sve A;
- $p(\Omega) = 1$;
- Ako se $A \cap B = \emptyset$, onda je $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- $0 \leq p(A) \leq 1$ za sve događaje A;
- $p(A^c) = 1 - p(A)$.

S integralima su povezane kontinuirane slučajne varijable, tj. zadaci vezani za vjerojatnost nekog slučajnog događaja koji može postići bilo koju vrijednost iz nekog intervala (ili unije intervala):
Većina kontinuiranih slučajnih varijabli X ima svoju funkciju gustoće vjerojatnosti. To je funkcija $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle$ takva da vrijedi

$$p(X \leq b) = p(X < b) = \int_{-\infty}^{b} \varphi(x)\,dx.$$

Svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti

- Vrijedi normiranost funkcije gustoće

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti

- Vrijedi normiranost funkcije gustoće

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostanu HA.

Svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti

- Vrijedi normiranost funkcije gustoće

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostanu HA.

- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$

Svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti

- Vrijedi normiranost funkcije gustoće

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostanu HA.
- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$
- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$

Svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti

- Vrijedi normiranost funkcije gustoće

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

  Dakle, φ sigurno ima x-os kao obostranu HA.
- $p(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.
- $p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$.
- Za svaki $a \in \mathbb{R}$ je $p(X = a) = 0$.

Napomena. Vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla postiže vrijednosti u rasponu $x \pm \frac{1}{2}$ može se ugrubo procijeniti s $\varphi(x)$ (ali općenito $\varphi(x) \neq P(X = x)$)!

Gama-funkcija

Što su faktorijeli?

Gama-funkcija

Što su faktorijeli? $0! = 1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; ...

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n \cdot (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$$

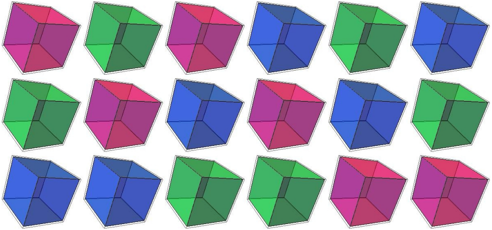
Gama-funkcija

Što su faktorijeli? $0! = 1! = 1;\ 2! = 2;\ 3! = 6;\ 4! = 24;\ \ldots$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n \cdot (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$$

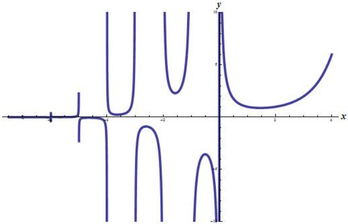
Interpretacija faktorijela

$n!$ je broj načina da poredamo n predmeta: 3 predmeta se mogu poredati na 6 načina.



No, pojavila se potreba n u $n!$ poopćiti na realan broj …

$$\Gamma : \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$



Za prirodne brojeve n ...

je $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = (n-1)!$. Supstitucijom dobivamo korisnu formulu

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} \, \mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neelementarni integrali

Postoje integrali koji imaju konkretne vrijednosti, ali se odgovarajuća antiderivacija ne može zapisati jednom formulom (nije elementarna funkcija). Najpoznatiji takav je

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$$

i često se pojavljuje u vjerojatnosti i statistici. Posebno se često pojavljuje njegova varijanta s $x = \infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Bornova interpretacija valne funkcije

Za valnu funkciju ψ je funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ uvijek realna.

Bornova interpretacija valne funkcije

Za valnu funkciju ψ je funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ uvijek realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, funkcija $|\psi|^2$ je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ negdje u prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable). Često se koristi radijalna gustoća vjerojatnosti

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ na udaljenosti r od jezgre.

Bornova interpretacija valne funkcije

Za valnu funkciju ψ je funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ uvijek realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, funkcija $|\psi|^2$ je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ negdje u prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable). Često se koristi radijalna gustoća vjerojatnosti

$$\phi(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2,$$

koja je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona opisanog valnom funkcijom ψ na udaljenosti r od jezgre.

Zadatak

2s-orbitala za vodikov atom je valna funkcija $\psi_{2,0,0}(r) = N\left(2 - \dfrac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}$. Koliko iznosi N?

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X se definira kao

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X se definira kao

$$\langle X\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Zadatak

1s-orbitala vodikova atoma je valna funkcija

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^3\pi}}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right).$$

Odredite očekivani (prosječni) polumjer vodikove 1s-orbitale!

Očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) kontinuirane slučajne varijable X se definira kao

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Zadatak

1s-orbitala vodikova atoma je valna funkcija

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right).$$

Odredite očekivani (prosječni) polumjer vodikove 1s-orbitale!

Uočite: Prosječna tj. očekivana udaljenost elektrona od jezgre je $\frac{3}{2}a_0$, dok je udaljenost r za koju je $\psi_{1,0,0}^2$ maksimalna („najvjerojatnija" udaljenost) jednaka a_0. Dakle: Očekivani rezultat ne mora biti isto što i „najvjerojatniji" rezultat (nije svaka distribucija vjerojatnosti normalna).

Primjer

Vjerojatnost da vodikov 1s-elektron nađemo točno na udaljenosti a_0 ili $\frac{3}{2}a_0$, ili bilo kojoj drugoj, je 0.
Vjerojatnost da vodikov elektron bude na udaljenosti između a_0 i $\frac{3}{2}a_0$ jednak je površini ispod grafa od $\phi_{1,0,0}$ i između navedenih apscisa (iznosi $\int_{a_0}^{3a_0/2} \phi_{1,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = (10e - 17)/(2e^3) \approx 25{,}3\%$.

Primjer

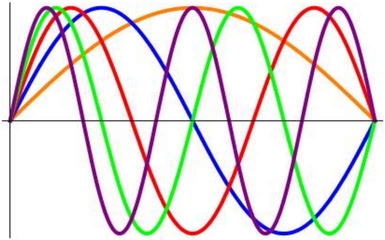
Vjerojatnost da vodikov 1s-elektron nađemo točno na udaljenosti a_0 ili $\frac{3}{2}a_0$, ili bilo kojoj drugoj, je 0.
Vjerojatnost da vodikov elektron bude na udaljenosti između a_0 i $\frac{3}{2}a_0$ jednak je površini ispod grafa od $\phi_{1,0,0}$ i između navedenih apscisa (iznosi $\int_{a_0}^{3a_0/2} \phi_{1,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = (10e - 17)/(2e^3) \approx 25{,}3\%$.

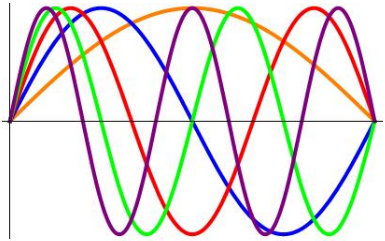
Zadatak

Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$. *Pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}_0$) formulom*

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \le x \le a.$$

Skicirajte ih!





Zadatak

Dokažite da su valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}$ međusobno ortogonalne, tj. da im je integral umnoška po cijeloj domeni jednak 0, te izračunajte vjerojatnost P da se čestica kvantnog broja n nađe u srednjoj trećini kutije!

DZ: Odredite konstante normiranja A_n i očekivanu vrijednost $\langle x \rangle$ položaja čestice

Ortogonalnost za $m \neq n$:

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A_m\,A_n\,\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x =$$

Ortogonalnost za $m \neq n$:

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A_m\,A_n\,\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\,\int_0^a \left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{a} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x =$$

Ortogonalnost za $m \neq n$:

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A_m\,A_n\,\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\,\int_0^a \left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{a} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{a}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\,\left(\frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{a}}{\frac{(n-m)\pi}{a}} - \frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{a}}{\frac{(n+m)\pi}{a}}\right)\Bigg|_0^a = 0.$$

Ortogonalnost za $m \neq n$:

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A_m\,A_n \int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\int_0^a \left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{a} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\left(\frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{a}}{\frac{(n-m)\pi}{a}} - \frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{a}}{\frac{(n+m)\pi}{a}}\right)\Bigg|_0^a = 0.$$

Vjerojatnost da je čestica u segmentu $\left[\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right]$:

$$P = \int_{a/3}^{2a/3}\left|A_n\sin\frac{n\pi x}{a}\right|^2\mathrm{d}x = A_n^2\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a}\right)\Bigg|_{a/3}^{2a/3} =$$

Ortogonalnost za $m \neq n$:

$$\int_0^a \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = A_m\,A_n\,\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\,\int_0^a \left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{a} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A_m\,A_n}{2}\,\left(\frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{a}}{\frac{(n-m)\pi}{a}} - \frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{a}}{\frac{(n+m)\pi}{a}}\right)\Bigg|_0^a = 0.$$

Vjerojatnost da je čestica u segmentu $\left[\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right]$:

$$P = \int_{a/3}^{2a/3} \left|A_n \sin\frac{n\pi x}{a}\right|^2 \mathrm{d}x = A_n^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{a}\right)\Bigg|_{a/3}^{2a/3} =$$

$$= \frac{A_n^2 a}{12\pi n}\left(2n\pi + 3\sin\frac{2\pi n}{3} - 3\sin\frac{4\pi n}{3}\right).$$