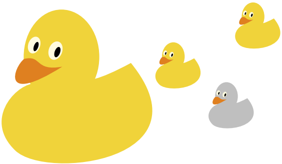
Klasična algebra vektora

Franka Miriam Brückler



Skalarni produkt

Ako znamo koordinate nekog vektora s obzirom na danu bazu, razumno je pitanje: Kako odrediti iznos tog vektora?
Također, ako znamo koordinate dvaju vektora s obzirom na istu bazu, možemo se pitati: Kako odrediti kut između tih vektora?

Skalarni produkt

Ako znamo koordinate nekog vektora s obzirom na danu bazu, razumno je pitanje: Kako odrediti iznos tog vektora?
Također, ako znamo koordinate dvaju vektora s obzirom na istu bazu, možemo se pitati: Kako odrediti kut između tih vektora?
U tome nam pomaže operacija poznata kao skalarni produkt vektora.

Definicija (Skalarni produkt)

Skalarni produkt dva geometrijska vektora definiran je s

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v \cdot w \cdot \cos\varphi,$$

gdje je φ kut kojeg zatvaraju vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ (uzima se manji od dva moguća kuta).

Svojstva skalarnog produkta

Z sve vektore i skalare koji se u sljedećim izrazima pojavljuju vrijedi:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}; \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

Svojstva skalarnog produkta

Z sve vektore i skalare koji se u sljedećim izrazima pojavljuju vrijedi:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0; \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}; \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

Ako iz koordinata znamo izračunati skalarni produkt vektora sa samim sobom, onda znamo izračunati i njegov iznos:

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Također, ako iz koordinata znamo izračunati skalarni produkt dva vektora, onda znamo izračunati i kut između njih:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{v \cdot w}.$$

Koordinatno skalarno množenje vektora

Neka je fiksirana baza prostora, dakle podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani: Znamo im duljine a, b i c te kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Koordinatno skalarno množenje vektora

Neka je fiksirana baza prostora, dakle podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani: Znamo im duljine a, b i c te kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{v} = [x, y, z]$, $\vec{w} = [x', y', z']$

Koordinatno skalarno množenje vektora

Neka je fiksirana baza prostora, dakle podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani: Znamo im duljine a, b i c te kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{v} = [x, y, z]$, $\vec{w} = [x', y', z'] \Rightarrow \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$,
$\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$

Koordinatno skalarno množenje vektora

Neka je fiksirana baza prostora, dakle podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani: Znamo im duljine a, b i c te kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{v} = [x, y, z]$, $\vec{w} = [x', y', z'] \Rightarrow \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$,
$\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \cdot (x'\overrightarrow{a} + y'\overrightarrow{b} + z'\overrightarrow{c}) =$$

$$= xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2 +$$

$$+(xy' + x'y)ab\cos\gamma + (xz' + x'z)ac\cos\beta + (zy' + z'y)ab\cos\alpha.$$

Koordinatno skalarno množenje vektora

Neka je fiksirana baza prostora, dakle podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani: Znamo im duljine a, b i c te kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{v} = [x, y, z]$, $\vec{w} = [x', y', z'] \Rightarrow \vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$,
$\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \cdot (x'\overrightarrow{a} + y'\overrightarrow{b} + z'\overrightarrow{c}) =$$
$$= xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2 +$$
$$+(xy' + x'y)ab\cos\gamma + (xz' + x'z)ac\cos\beta + (zy' + z'y)ab\cos\alpha.$$

Ako je *baza ortogonalna*: $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2$.
Ako je *baza ortonormirana* $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = xx' + yy' + zz'$.

$$v = +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 + 2xyab\cos\gamma + 2xyac\cos\beta + 2zyab\cos\alpha}.$$

Ako je *baza ortogonalna*, $v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2}$.
Ako je *baza ortonormirana*,

$$v = \sqrt{x^2a + y^2 + z^2}.$$

Zadatak

Neka je $\vec{p} = [3, -1]$ *i* $\vec{q} = [2, 1]$, $a = 2$ cm, $b = 3$ cm *i* $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$. *Izračunajte* $\vec{p} \cdot \vec{q}$ *i* $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q})$.

Zadatak

Ako se dva atoma neke monoklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $A = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ *i* $B = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$, *kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalne rešetke dani kao* $a = 100{,}0$ pm, $b = 200{,}0$ pm, $c = 150{,}0$ pm, $\alpha = \gamma = 90{,}00^\circ$, $\beta = 75{,}00^\circ$.

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{r_B} - \vec{r_A}| = \left|\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right| = \spadesuit$$

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] \cdot \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}b^2 + \frac{1}{9}c^2 - \frac{1}{3}a\,c\,\cos\beta = 6205{,}90477\,\text{pm}^2 \ldots \Rightarrow$$

$$\spadesuit = 78{,}78\,\text{pm}.$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan,

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

Primjer

U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina 1 m, 2 m *i* 3 m, *vektori* $[-4, 1, 0]$ *i* $[1, 1, 0]$ *su međusobno okomiti, ali da je baza bila ortonormirana, ta dva vektora ne bi bila okomita.*

Zadatak

Koji kut trebaju zatvarati vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *baze prostora* V^2 *ako znate da je* $a = b$ *i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate* $[-2, 1]$ *i* $[0, 3]$ *okomiti?*

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$$

Ako je skalarni produkt dva vektora pozitivan / nula / negativan, ta dva vektora zatvaraju šiljasti / pravi / tupi kut.

Primjer

U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina 1 m, 2 m *i* 3 m, *vektori* $[-4, 1, 0]$ *i* $[1, 1, 0]$ *su međusobno okomiti, ali da je baza bila ortonormirana, ta dva vektora ne bi bila okomita.*

Zadatak

Koji kut trebaju zatvarati vektori $\overrightarrow{a}$ *i* $\overrightarrow{b}$ *baze prostora* V^2 *ako znate da je* $a = b$ *i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate* $[-2, 1]$ *i* $[0, 3]$ *okomiti?* $\gamma = 60^\circ$.

Zadatak

Za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom.[a] *Ako su u jediničnoj ćeliji tri atoma na pozicijama* $A = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $C = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ *te ako su atomi vezani tako da je* C *vezan s* A *i* B, *odredite kut veze* $\varphi = \angle ACB$*! (Rješenje:* $\varphi = 108°25'$*).*

Riješite isti zadatak ako se radi o kristalu rompskog sustava s bridovima jedinične ćelije duljina redom 300 pm, 500 pm, 800 pm*?*

[a] Duljinu brida a jedinične ćelije proglasimo jediničnom duljinom.

Napomena

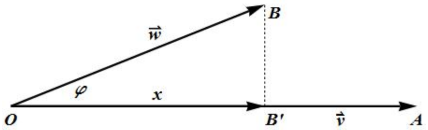
Vrijedi $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$.

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ *pri pomaku* $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ *je*

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta.$$



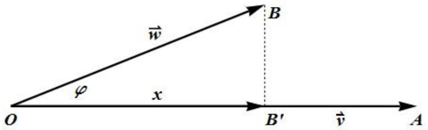
$$x = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|}, \overrightarrow{OB'} = \frac{x}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\overrightarrow{F}$ *pri pomaku* $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1$ *je*

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = Fd\cos\theta.$$



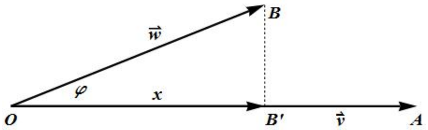
$$x = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}|}, \overrightarrow{OB'} = \frac{x}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\overrightarrow{v}|^2}\overrightarrow{v}$$

Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi

Primjer

Rad izvršen djelovanjem sile $\vec{F}$ *pri pomaku* $\vec{d} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ *je*

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\theta.$$



$$x = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|}, \overrightarrow{OB'} = \frac{x}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}$$

Zadatak

Ako su $\vec{v}$ *i* $\vec{w}$ *dva vektora, što predstavlja iznos* $v \cdot w \cdot \sin\varphi$*?*

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.
Ako su zadana dva kolinearna vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, postoji beskonačno mnogo na njih okomitih smjerova. A ako su nekolinearni?

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, postoji beskonačno mnogo na njih okomitih smjerova. A ako su nekolinearni?

Neka su sad $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (ako želimo da on ima iznos x, uzimamo $\pm\frac{x}{c} \cdot \vec{c}$).

Vektorski produkt

U trodimenzionalnom slučaju ponekad je potrebno algebarski opisati vektore koji su okomiti na neke zadane vektore.

Ako su zadana dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, postoji beskonačno mnogo na njih okomitih smjerova. A ako su nekolinearni?

Neka su sad $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Ako bismo znali neki vektor $\vec{c} \neq \vec{0}$ okomit na njih, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog na njih okomitog smjera (ako želimo da on ima iznos x, uzimamo $\pm\frac{x}{c} \cdot \vec{c}$).

Definicija (Vektorski produkt)

Vektorski produkt dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ koji je okomit na oba vektora, duljina od $\vec{v} \times \vec{w}$ jednaka je $v \cdot w \cdot \sin\varphi$, tj. jednaka je površini paralelograma razapetog s $\vec{v}$ i $\vec{w}$, a orijentiran je tako da $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ poštuju pravilo desne ruke. Po definiciji, produkt dva kolinearna vektora je nulvektor.

Primjer

Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, *a kutni moment mase m oko točke je* $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, *gdje je* $\vec{p} = m\vec{v}$ *linearni momoment.*

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Primjer

Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, *a kutni moment mase m oko točke je* $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, *gdje je* $\vec{p} = m\vec{v}$ *linearni momoment.*

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -4{,}1\vec{v}$, *koliko je* $\vec{v} \times \vec{w}$*?*

Zadatak

Kad su vektori $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ *komplanarni?*

Primjer

Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$*, a kutni moment mase m oko točke je* $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$*, gdje je* $\vec{p} = m\vec{v}$ *linearni momoment.*

Zadatak

Koji odnos među dvama vektorima je najlakše prepoznati iz rezultata njihova vektorskog produkta?

Zadatak

Ako je $\vec{w} = -4{,}1\vec{v}$*, koliko je* $\vec{v} \times \vec{w}$*?*

Zadatak

Kad su vektori $\vec{v}$*,* $\vec{w}$*,* $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ *komplanarni?*

Dakle, ako $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni, $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$ je uvijek baza prostora.

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin\varphi$*?*

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$
$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

Zadatak

Što je krivo u formuli $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = v \cdot w \cdot \sin\varphi$*?*

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u},$$

$$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\alpha\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$,

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin\varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$,ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin\varphi$?

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$,ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.

Zadatak

Što je krivo u formuli $\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin\varphi$*?*

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{u},$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha\vec{v}) \times \vec{w}$,ortogonalnost

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0, \quad (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0,$$

i antikomutativnost $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$. Vrijedi i

$$\vec{v} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \times \vec{v} = \vec{0},$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v},$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}|^2 = v^2 w^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2$$

Kako dobiti koordinate vektora $\vec{v} \times \vec{w}$ ako su poznate koordinate od $\vec{v}$ i $\vec{w}$? Općenito će nam za to trebati bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tzv. recipročna (dualna) baza $\{\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*\}$ (strpite se malo ;-)). Za slučaj kad je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ortonormirana, vrijedi

$$[x, y, z] \times [x', y', z'] = [yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Vektorski produkt može poslužiti za računanje površina poligona iz koordinata njihovih vrhova: Svaki poligon se može triangulirati (rastaviti na trokute), a površina svakog trokuta jednaka je polovici površine odgovarajućeg paralelograma, tj. polovici iznosa vektorskog produkta vektora koji određuju dvije stranice trokuta.

Zadatak

Kolika je površina trokuta čiji vrhovi u nekom Kartezijevom koordinatnom sustavu (s jedinicom duljine cm*) imaju koordinate* $(0, 0, 0)$, $(4, 2, -1)$ *i* $(3, 6, 4)$*?*

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom.

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre.

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre. Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela.
Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora: $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Definicija (Mješoviti produkt)

Mješoviti produkt triju vektora definiran je s:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Ako je $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su komplanarni. Ako je $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. desnu bazu, a u suprotnom tzv. lijevu bazu. U svim standardnim situacijama uzimaju se desne baze.

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre. Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela.
Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora: $V = |(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$.

Definicija (Mješoviti produkt)

Mješoviti produkt triju vektora definiran je s:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

Ako je $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$, vektori $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ su komplanarni. Ako je $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$, vektori $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ čine tzv. desnu bazu, a u suprotnom tzv. lijevu bazu. U svim standardnim situacijama uzimaju se desne baze.

Vrijedi tzv. ciklička invarijantnost:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Vrijedi tzv. ciklička invarijantnost:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}).$$

Primjer

Volumen jedinične ćelije je za sve kristalne sustave dan formulom

$$V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

(za kristalografsku bazu se podrazumijeva da je desna).

Uočimo:

- $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ je duljina dužine određene vektorom $\vec{v}$,
- $|\vec{v} \times \vec{w}|$ je površina paralelograma određenog vektorima $\vec{v}$ i $\vec{w}$,
- a $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ je volumen paralelepipeda određene vektorima $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Zadatak

Magnezij kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu. ($a = b = 3{,}21$ Å, $c = 5{,}21$ Å, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$). Ako uzmemo da je veza matematičkih s uobičajenim kristalografskim oznakama za heksagonski sustav dana s $\vec{a} = \vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{a}_2$, koje su koordinate vektora $\vec{a}_3$ obzirom na $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$? Izračunajte $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.

Općenito se za ortonormiranu bazu mješoviti produkt vektorâ s poznatim koordinatama $\vec{u} = [x, y, z]$, $\vec{v} = [x', y', z']$, $\vec{w} = [x'', y'', z'']$ računa formulom

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Dualna (recipročna) baza

Kako općenito izračunati vektorski produkt dvaju vektora zadanih koordinatama, npr. $[2, 4, 1] \times [0, -1, 2]$, ako baza nije ortonormirana? Za to nam treba:

Definicija

Za odabranu desnu bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, *pripadna recipročna ili dualna baza definirana je s*

$$\vec{a}^* = \frac{1}{V}\vec{b} \times \vec{c}, \ \vec{b}^* = \frac{1}{V}\vec{c} \times \vec{a}, \ \vec{c}^* = \frac{1}{V}\vec{a} \times \vec{b}.$$

Pritom je $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Zadatak

Koliko iznosi $\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{b}$ *? A* $\overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{b}$ *?*

Zadatak

Koliko iznosi $\vec{a}^* \cdot \vec{b}$? A $\vec{b}^* \cdot \vec{b}$?

Vektori $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ imaju sljedeća svojstva:

$$\vec{a}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{b} = \vec{c}^* \cdot \vec{c} = 1,$$

$$\vec{a}^* \cdot \vec{b} = \vec{a}^* \cdot \vec{c} = \vec{b}^* \cdot \vec{a} = \vec{b}^* \cdot \vec{c} = \vec{c}^* \cdot \vec{a} = \vec{c}^* \cdot \vec{b} = 0.$$

Zadatak

Ako je kristalografska baza ortogonalna, kakva je odgovarajuća baza recipročnog prostora? A ako je ortonormirana?

$$\{\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

U kristalografiji se direktna i recipročna baza u pravilu gledaju u paru. Pritom prostor koordinatiziran kristalografskom bazom nazivamo direktnim prostorom, a ako je koordinatiziran recipročnom, recipročnim prostorom.
Izračunajmo volumen V^* jedinične ćelije u recipročnom prostoru:

$$V^* = \overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{b}^* \times \overrightarrow{c}^* = \overrightarrow{a}^* \cdot \frac{1}{V^2}(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) =$$

$$= \frac{1}{V^2}\overrightarrow{a}^* \cdot \left(\left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{V^2}\overrightarrow{a}^* \cdot (V\overrightarrow{a}) = \frac{1}{V}\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{V}.$$

Primijetimo da smo tako dokazali i da ako je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ baza, onda je i $\{\overrightarrow{a}^*, \overrightarrow{b}^*, \overrightarrow{c}^*\}$ baza.

Teorem

Recipročna baza recipročne baze je direktna (polazna) baza.

$$\vec{a}^{**} = \frac{1}{V^*}\vec{b}^* \times \vec{c}^* = V\frac{1}{V^2}(\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b}),$$

što je kao maločas jednako $\frac{1}{V}\left(\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{a} = \frac{V}{V}\vec{a} = \vec{a}$.

Analogno se vidi da je $\vec{b}^{**} = \vec{b}$ i $\vec{c}^{**} = \vec{c}$.

U poglavlju o primjenama ponovno ćemo se susresti s recipročnom bazom, a sad ju iskoristimo za dobivajne općih formula za računanje vektorskog i mješovitog produkta iz koordinata.

Recipročna baza i vektorski produkt

Uzmimo dva vektora $\overrightarrow{v} = [x, y, z]$ i $\overrightarrow{w} = [x', y', z']$ čije koordinate su dane s obzirom na istu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$. Tada je
$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \times (x'\overrightarrow{a} + y'\overrightarrow{b} + z'\overrightarrow{c})$.

Recipročna baza i vektorski produkt

Uzmimo dva vektora $\overrightarrow{v} = [x, y, z]$ i $\overrightarrow{w} = [x', y', z']$ čije koordinate su dane s obzirom na istu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$. Tada je
$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \times (x'\overrightarrow{a} + y'\overrightarrow{b} + z'\overrightarrow{c})$.
Iz svojstava vektorskog produkta dobijemo

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = (zx' - y'x)\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + (xy' - x'y)\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + (yz' - y'z)\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}.$$

Po definiciji recipročne baze je $\vec{a} \times \vec{b} = V\vec{c}^*$, $\vec{b} \times \vec{c} = V\vec{a}^*$, $\vec{c} \times \vec{a} = V\vec{b}^*$, te smo dobili opću formulu za računanje vektorskog produkta iz koordinata:

$$\vec{v} \times \vec{w} = V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - z'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$= V \begin{vmatrix} \vec{a}^* & \vec{b}^* & \vec{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Po definiciji recipročne baze je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = V\overrightarrow{c}^*$, $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = V\overrightarrow{a}^*$, $\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = V\overrightarrow{b}^*$, te smo dobili opću formulu za računanje vektorskog produkta iz koordinata:

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = V((yz' - y'z)\overrightarrow{a}^* + (zx' - z'x)\overrightarrow{b}^* + (xy' - x'y)\overrightarrow{c}^*) =$$

$$= V \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^* & \overrightarrow{b}^* & \overrightarrow{c}^* \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da u slučaju $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ imamo $V = 1$ pa je gornja formula samo poopćenje standardne.

Recipročna baza i mješoviti produkt

Neka su sad $\overrightarrow{u} = [x, y, z]$, $\overrightarrow{v} = [x', y', z']$ i $\overrightarrow{w} = [x'', y'', z'']$ vektori s koordinatama danim s obzirom na istu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$. Računamo:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot V((yz' - y'z)\overrightarrow{a}^* + (zx' - y'x)\overrightarrow{b}^* + (xy' - x'y)\overrightarrow{c}^*) =$$

$$= V(x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \cdot ((yz' - y'z)\overrightarrow{a}^* + (zx' - y'x)\overrightarrow{b}^* + (xy' - x'y)\overrightarrow{c}^*) =$$

$$= V(x(yz' - y'z) + y(zx' - y'x) + z(xy' - x'y)),$$

Recipročna baza i mješoviti produkt

Neka su sad $\vec{u} = [x, y, z]$, $\vec{v} = [x', y', z']$ i $\vec{w} = [x'', y'', z'']$ vektori s koordinatama danim s obzirom na istu bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Računamo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \cdot V((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - y'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$= V(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \cdot ((yz' - y'z)\vec{a}^* + (zx' - y'x)\vec{b}^* + (xy' - x'y)\vec{c}^*) =$$

$$= V(x(yz' - y'z) + y(zx' - y'x) + z(xy' - x'y)),$$

tj. dobili smo opću formulu za računanje mješovitog produkta iz koordinata

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = V \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$