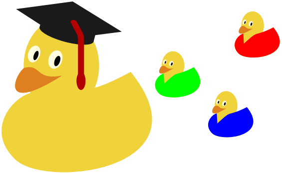
14. tjedan nastave: Analitička geometrija prostora.

Franka Miriam Brückler



U analitičkog geometriji u ravnini se pomoću koordinata (uređenih parova realnih brojeva) proučavaju točke jedne ravnine i njihovi jednodimenzionalni skupovi: pravci, krivulje drugog reda, ... U trodimenzionalnom prostoru pojavljuju se i dvodimenzionalni podskupovi — plohe. Najvažnije plohe u prostoru zovu se ravnine. Objekti u prostoru opisuju se s jednom ili više jednadžbi s tri nepoznanice, koje predstavljaju koordinate točaka pojedinog objekta.
Da bismo se mogli baviti analitičkom geometrijom prostora, potrebno je prvo odabrati koordinatni sustav, tj. ishodište i bazu prostora. Koordinatne osi su brojevni pravci kroz O kojima se smjerovi redom podudaraju sa smjerovima vektora odabrane baze. Koordinatne ravnine su ravnine određene s po dvije koordinatne osi. Ako je kao baza odabrana desna ortonormirana baza govorimo o Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru.

Udaljenost dviju točaka i polovište dužine

Za dvije točke $T(x, y, z)$ i $T'(x'y', z')$ njihova udaljenost $d(T, T')$ jednaka je duljini vektora $\overrightarrow{TT'}$, a ona je prema prethodnom jednaka $\sqrt{\overrightarrow{TT'} \cdot \overrightarrow{TT'}}$.
Ako je odabrani koordinatni sustav Kartezijev, dobiva se:

$$d(T, T') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Polovište dužine $\overline{TT'}$ ima koordinate

$$\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2}, \frac{z + z'}{2} \right).$$

Jedna linearna jednadžba

Standardne oznake: x – apscisa, y – ordinata, z – aplikata. Jednadžba $x = 0$ opisuje sve točke kojima je apscisa 0, dakle u ravnini predstavlja os ordinata, ali u prostoru predstavlja (y, z)-ravninu. Analogno, jednadžba $y = 0$ u ravnini predstavlja os apscisa, a u prostoru (x, z)-ravninu. Jednadžba $z = 0$ u prostoru predstavlja (x, y)-ravninu. Što u prostornom koordinatnom sustavu predstavlja jednadžba $x = -2$?

Jedna linearna jednadžba

Standardne oznake: x – apscisa, y – ordinata, z – aplikata.
Jednadžba $x = 0$ opisuje sve točke kojima je apscisa 0, dakle u ravnini predstavlja os ordinata, ali u prostoru predstavlja (y, z)-ravninu. Analogno, jednadžba $y = 0$ u ravnini predstavlja os apscisa, a u prostoru (x, z)-ravninu. Jednadžba $z = 0$ u prostoru predstavlja (x, y)-ravninu. Što u prostornom koordinatnom sustavu predstavlja jednadžba $x = -2$?
Pogledajmo sad jednadžbu $2x - y = 0$ u prostornom kontekstu. Nju naravno zadovoljavaju sve točke (x, y)-ravnine koje su na pravcu $y = 2x$ (u ravninskom koordinantom sustavu), ali za svaku takvu točku $(x, y, 0)$ i svaka točka (x, y, z) zadvoljava $2x - y = 0$. Dakle, u prostoru ta jednadžba ne predstavlja pravac, nego ravninu (koja prolazi kroz pravac iste jednadžbe unutar (x, y)-ravnine, tj. pravac na presjeku ravnina $2x - y = 0$ i $z = 0$.

Opća jednadžba ravnine u prostoru

Svaka linearna jednadžba s tri nepoznanice x, y, z opisuje neku ravninu u prostoru, kao što svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice x, y opisuje neki pravac u ravnini.
Stoga jednadžbu oblika

$$Ax + By + Cz = D$$

nazivamo općom jednadžbom ravnine.
U ravnini se nalaze točno one točke čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu ravnine.
Sve jednadžbe koje se iz jednadžbe ravnine mogu dobiti njenim množenjem s brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu.
Koeficijenti A, B i C povezani su s nagibom ravnine prema koordinatnim osima, a D s udaljenosti ravnine od ishodišta.

Zadatak

Jednadžbom $x + y - 2z = 5$ *zadana je ravnina. Leži li u njoj ishodište? A točka* $(1, 8, 2)$*?*

Zadatak

Koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti A, B, C, D *u općoj jednadžbi ravnine da bi se radilo o općoj ravnini koja prolazi kroz ishodište? O općoj ravnini koja je paralelna s osi ordinata? O općoj ravnini koja je paralelna s* (x, z)*-ravninom? Ovise li vaši odgovori o tipu koordinatnog sustava?*

Zadatak

Jednadžbom $x + y - 2z = 5$ zadana je ravnina. Leži li u njoj ishodište? A točka $(1, 8, 2)$?

Zadatak

Koji uvjet moraju zadovoljavati koeficijenti A, B, C, D u općoj jednadžbi ravnine da bi se radilo o općoj ravnini koja prolazi kroz ishodište? O općoj ravnini koja je paralelna s osi ordinata? O općoj ravnini koja je paralelna s (x, z)-ravninom? Ovise li vaši odgovori o tipu koordinatnog sustava?

Skalarni produkt vektora $\vec{r} = [u, v, w]$ u direktnom prostoru i vektora $\vec{s}^* = [h, k, l]^*$ u recipročnom prostoru iznosi

$$\vec{r} \cdot \vec{s}^* = uh + vk + wl.$$

Smjer normale

Neka je dana ravnina s jednadžbom $Ax + By + Cz = D$. Ona siječe koordinatne osi[1] u točkama $P = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $Q = \left(0, \frac{D}{B}, 0\right)$, $R = \left(0, 0, \frac{D}{C}\right)$. Stoga vektor $\overrightarrow{PQ} = \left[-\frac{D}{A}, \frac{D}{B}, 0\right]$ i $\overrightarrow{PR} = \left[-\frac{D}{A}, 0, \frac{D}{C}\right]$ leže u ravnini. Prema gornjem je

$$\overrightarrow{PQ} \cdot [A, B, C]^* = \overrightarrow{PR} \cdot [A, B, C]^* = 0.$$

Dakle, $[A, B, C]^*$ je okomit na dva nekolinearna vektora ravnine $Ax + By + Cz = D$ pa smo dokazali:

Teorem

Jedan od vektora normale na ravninu zadanu jednadžbom $Ax + By + Cz = D$ je $\vec{n} = A\vec{a}^* + B\vec{b}^* + C\vec{c}^* = [A, B, C]^*$.

Posebno, u Kartezijevom koordinatnom sustavu je $\vec{n} = [A, B, C]$.

[1] Nećemo dokazivati za slučaj da je ravnina paralelna nekoj od njih.

Zadavanje ravnine

Jedan način zadavanja ravnine je trojkom $[A, B, C]$ (tj. s $\overrightarrow{n} = [A, B, C]^*$) i jednom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Zadatak

Odredite jednadžbu ravnine kojoj vektor normale ima smjer $[2, 3, 4]^*$ i koja sadrži točku $(1, 1, 1)$.

Ravninu možemo zadati i jednom točkom (x_0, y_0, z_0) te s dva njoj paralelna (međusobno nekolinearna) vektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2, w_3]$. U tom slučaju izračunamo $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ i tako problem svodimo na prethodni.
Kako odrediti jednadžbu ravnine zadane trima (nekolinearnim) točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$?

Odnos dviju ravnina

Dvije ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su paralelne ako su im vektori normala kolinearni, tj. ako vrijedi

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Odnos dviju ravnina

Dvije ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su paralelne ako su im vektori normala kolinearni, tj. ako vrijedi

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Dvije ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su okomite ako su im vektori normala okomiti, tj. ako je $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava to se svodi na uvjet

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Odnos dviju ravnina

Dvije ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su paralelne ako su im vektori normala kolinearni, tj. ako vrijedi

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Dvije ravnine s jednadžbama $Ax + By + Cz + D = 0$ i $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ su okomite ako su im vektori normala okomiti, tj. ako je $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'} = 0$. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava to se svodi na uvjet

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Općenito, kut između ravnina definira se kao kut φ između njihovih normala:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{\ldots}.$$

Zadatak

Odabran je Kartezijev koordinatni sustav. Nađimo ravninu okomitu na ravnine $x + y + z = 1$ *i* $x - y + z = 2$ *koja prolazi ishodištem. Koji kut ona zatvara s ravninom jednažbe* $x + y + z = 0$*?*

[2] Segmentni oblik jednadžbe ravnine nema smisla za ravnine koje prolaze ishodištem. U matematici se segmentni oblik ne koristi ni ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, no u primjenama u kristalografiji ga se uz malo proširenje simbolike koristiti i u tim slučajevima.

Zadatak

Odabran je Kartezijev koordinatni sustav. Nađimo ravninu okomitu na ravnine $x + y + z = 1$ i $x - y + z = 2$ koja prolazi ishodištem. Koji kut ona zatvara s ravninom jednažbe $x + y + z = 0$?

Segmentni oblik jednadžbe ravnine je posebni slučaju općeg oblika jednadžbe ravnine u kojem slobodni član iznosi 1:[2]

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Iz tog se oblika direktno vide probodišta koordinatnih osi s ravninom (odsječci m, n, p).

[2] Segmentni oblik jednadžbe ravnine nema smisla za ravnine koje prolaze ishodištem. U matematici se segmentni oblik ne koristi ni ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, no u primjenama u kristalografiji ga se uz malo proširenje simbolike koristiti i u tim slučajevima.

Primjer

$$2x + 5y - 4z = 8 \Leftrightarrow \frac{2}{8}x + \frac{5}{8}y - \frac{4}{5}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{8/5} + \frac{z}{-2} = 1$$

Primjer

$$2x + 5y - 4z = 8 \Leftrightarrow \frac{2}{8}x + \frac{5}{8}y - \frac{4}{5}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{8/5} + \frac{z}{-2} = 1$$

Zadatak

Koliko iznose stvarne duljine odsječaka ravnine $2x - 5y + 3z = 15$ *na koordinatnim osima, ako je* $a = 1$ m, $b = 2$ m *i* $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$?

Općenito, stvarne duljine odsječaka ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

na osima jednake su $|m|\ a$, $|n|\ b$ odnosno $|p|\ c$.

Primjer

$$2x + 5y - 4z = 8 \Leftrightarrow \frac{2}{8}x + \frac{5}{8}y - \frac{4}{5}z = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{8/5} + \frac{z}{-2} = 1$$

Zadatak

Koliko iznose stvarne duljine odsječaka ravnine $2x - 5y + 3z = 15$ *na koordinatnim osima, ako je* $a = 1$ m, $b = 2$ m *i* $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$*?*

Općenito, stvarne duljine odsječaka ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

na osima jednake su $|m|\,a$, $|n|\,b$ odnosno $|p|\,c$.
Kako biste opisali x-os pomoću jedne ili više jednadžbi? y-os? z-os? Kako biste opisali pravac kroz ishodište koji leži u (y,z)-koordinatnoj ravnini?

Pravci u prostoru

Pravac u prostoru određen je svojim smjerom (tj. bilo kojim njemu paralelnim vektorom smjera i jednom točkom.
Parametarske jednadžbe pravca s vektorom smjera $\vec{s} = [u, v, w]$ koji prolazi točkom (x_0, y_0, z_0) su oblika

$$x = x_0 + ut,$$

$$y = y_0 + vt,$$

$$z = z_0 + wt,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

Umjesto točkom i vektorom smjera, pravac može biti zadan i s dvije točke. U tom slučaju mu je vektor smjera vektor koji spaja te dvije točke, a bilo koju od njih uzmemo kao (x_0, y_0, z_0).

Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar t i onda ih izjednačimo zove se kanonski oblik jednadžbe pravca u prostoru:

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w}.$$

Oprez s tim oblikom!

Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar t i onda ih izjednačimo zove se kanonski oblik jednadžbe pravca u prostoru:

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}.$$

Oprez s tim oblikom!
Pravac može biti zadan i kao presjek dvije (neparalelne) ravnine, tj. sustavom

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

$$A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Zadatak

Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x+y+z=1$ *i* $2x-y=5$.

Odnos dvaju pravaca

Pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. Uvjet paralelnosti pravaca je kolinearnost njihovih vektora smjera: ako su $\vec{s} = [u, v, w]$ i $\vec{s'} = [u', v', w']$ vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je $u : u' = v : v' = w : w'$. Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se mimoilazni (mimosmjerni) pravci.

Odnos dvaju pravaca

Pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. Uvjet paralelnosti pravaca je kolinearnost njihovih vektora smjera: ako su $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ i $\overrightarrow{s'} = [u', v', w']$ vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je $u : u' = v : v' = w : w'$. Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se mimoilazni (mimosmjerni) pravci.

Zadatak

Ispitajte međusobni položaj pravaca $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ *i* $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Odnos dvaju pravaca

Pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. Uvjet paralelnosti pravaca je kolinearnost njihovih vektora smjera: ako su $\vec{s} = [u, v, w]$ i $\vec{s'} = [u', v', w']$ vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je $u : u' = v : v' = w : w'$. Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se mimoilazni (mimosmjerni) pravci.

Zadatak

Ispitajte međusobni položaj pravaca $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ *i* $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

	$\vec{s} \parallel \vec{s'}$	$\vec{s} \nparallel \vec{s'}$
$p \cap p' = \emptyset$	paralelni (razl.)	mimoilazni
$p \cap p' \neq \emptyset$	podudarni	sijeku se

Kut dvaju pravaca

Zadatak

Kako iz kanonskog oblika jednadžbi pravca vidimo je li on paralelan osi aplikata?

Kut dvaju pravaca definira se kao kut njihovih vektora smjera. Posebno, uvjet okomitosti pravaca je $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{s'} = 0$. U slučaju Kartezijevog koordinatnog sustava to se svodi na

$$u\,u' + v\,v' + w\,w' = 0.$$

Zadatak

Nađite pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na x-os i sa z-osi zatvara kut od 45°, ako su parametri koordinatnog sustava $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Rješenje. Imamo zadano $T_0 = (0, 0, 0)$ i kutove koje vektor smjera $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ traženog pravca zatvara s x-osi (dakle, s vektorom $\overrightarrow{a}$) i sa z-osi (dakle s vektorom $\overrightarrow{c}$).
Imamo dakle

$$0 = (u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b} + w\overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = u\,a^2 \Rightarrow u = 0.$$

Dakle, $s = [0, v, w]$. Dalje imamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{c}}{s\,c} = \frac{w\,c^2}{\sqrt{v^2 + w^2}\,\mathrm{cm} \cdot c} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{16w^2}{v^2 + w^2} \Rightarrow 32w^2 = v^2 + w^2 \Rightarrow v = \pm w\sqrt{31}.$$

Dakle, imamo dva rješenja:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{\pm\sqrt{31}} = \frac{z}{1}.$$

Odnos pravca i ravnine

Pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ je paralelan ravnini s vektorom normale $\overrightarrow{n} = [A, B, C]^*$ako je njegov vektor smjera okomit na vektor normale ravnine. Stoga je uvjet paralelnosti $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Zbog već izvedene formule $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}^* = uh + vk + wl$ uvjet okomitosti pravca i ravnine iskazan je formulom

$$u\,A + v\,B + w\,C = 0.$$

Odnos pravca i ravnine

Pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ je paralelan ravnini s vektorom normale $\overrightarrow{n} = [A, B, C]^*$ako je njegov vektor smjera okomit na vektor normale ravnine. Stoga je uvjet paralelnosti $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Zbog već izvedene formule $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{r}^* = uh + vk + wl$ uvjet okomitosti pravca i ravnine iskazan je formulom

$$u\,A + v\,B + w\,C = 0.$$

Pravac je okomit na ravninu ako su ti vektori paralelni. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava to daje uvjet okomitosti $u : A = v : B = w : C$.
Ako pravac nije paralelan ravnini, on ju siječe u jednoj točki koja se zove probodište pravca i ravnine.

Zadatak

Odredite probodište pravca $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$ *i ravnine* $2x + 3y + 4z = 1$.

Zadatak

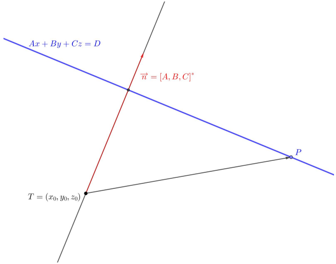
Odredite probodište pravca $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$ *i ravnine* $2x + 3y + 4z = 1$.

Udaljenost točke do ravnine definira se kao udaljenost točke do njezine ortogonalne projekcije na ravninu, odnosno do probodišta pravca koji je okomit na ravninu i prolazi zadanom točkom.

Zadatak

Odredite probodište pravca $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$ *i ravnine* $2x + 3y + 4z = 1$.

Udaljenost točke do ravnine definira se kao udaljenost točke do njezine ortogonalne projekcije na ravninu, odnosno do probodišta pravca koji je okomit na ravninu i prolazi zadanom točkom.



S prethodne slike vidimo: Duljina projekcije vektora $\overrightarrow{TP}$ na $\overrightarrow{n}$ je točno tražena udaljenost točke T do ravnine. Neka je P sjecište ravnine s x-osi, $P = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ (ako je ravnina paralelna s x-osi za P uzimamo sjecište s jednom od druge dvije koordinatne osi).

S prethodne slike vidimo: Duljina projekcije vektora $\overrightarrow{TP}$ na $\overrightarrow{n}$ je točno tražena udaljenost točke T do ravnine. Neka je P sjecište ravnine s x-osi, $P = \left(\frac{D}{A}, 0, 0\right)$ (ako je ravnina paralelna s x-osi za P uzimamo sjecište s jednom od druge dvije koordinatne osi).

$$d(T, \Pi) = \left| \frac{[A, B, C]^* \cdot \left[\frac{D}{A} - x_0, -y_0, -z_0\right]}{|\overrightarrow{n}|} \right| = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C\,z_0 - D|}{|\overrightarrow{n}|}.$$

Ako je koordinatni sustav Kartezijev, dobijemo:

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$