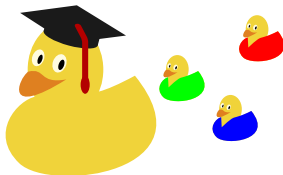


### 3. tjedan nastave: Transcendentne funkcije.

*Franka Miriam Brückler*

---



# Kompozicija funkcija

Algebarske funkcije su funkcije čije se pravilo može iskazati s konačno mnogo primjena četiri osnovne računске operacije, potenciranja, korjenovanja i kompozicija takvih operacija na nezavisnu varijablu. Popularnije, to su one u koje „znaju baratati s fizikalnim jedinicama”.

**Kompozicija?!**

# Kompozicija funkcija

Algebarske funkcije su funkcije čije se pravilo može iskazati s konačno mnogo primjena četiri osnovne računске operacije, potenciranja, korjenovanja i kompozicija takvih operacija na nezavisnu varijablu. Popularnije, to su one u koje „znaju baratati s fizikalnim jedinicama”.

## Kompozicija?!

### Primjer

$f = \text{mikser}; g = \text{pećnica}$

$x = \text{sastojci za kolač};$

$f(x) = \text{izmiksani sastojci}, g(f(x)) = \text{pečeni kolač}$

$g(x) = \text{spečeni sastojci}, f(g(x)) = \text{izmiksani pečeni sastojci}$

## Primjer

*Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?*

(1)  $c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$

(2)  $c, V \rightsquigarrow m = cMV$

## Primjer

*Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?*

*(1)  $c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$*

*(2)  $c, V \rightsquigarrow m = cMV$*

## Primjer

$$x \mapsto x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

## Primjer

Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?

$$(1) c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$$

$$(2) c, V \rightsquigarrow m = cMV$$

## Primjer

$$x \mapsto x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

## Primjer



## Primjer

Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?

$$(1) c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$$

$$(2) c, V \rightsquigarrow m = cMV$$

## Primjer

$$x \mapsto x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

## Primjer



## Primjer

Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?

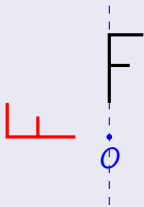
$$(1) c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$$

$$(2) c, V \rightsquigarrow m = cMV$$

## Primjer

$$x \mapsto x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

## Primjer





## Primjer

Otopina ima poznatu koncentraciju  $c$  i volumen  $V$ . Kako odrediti masu otopljene tvari poznatog sastava (poznate molarne mase  $M$ )?

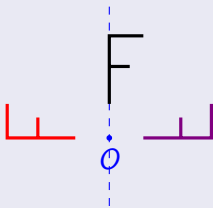
$$(1) c, V \rightsquigarrow n = cV \rightsquigarrow m = nM$$

$$(2) c, V \rightsquigarrow m = cMV$$

## Primjer

$$x \mapsto x^2 \mapsto \frac{x^2}{2}$$

## Primjer



## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Uz koje uvjete na  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  definicija ima smisla?

## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Uz koje uvjete na  $A, B, C, D$  definicija ima smisla?

$$f \circ g \neq g \circ f$$

## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Uz koje uvjete na  $A, B, C, D$  definicija ima smisla?

$$f \circ g \neq g \circ f$$

## Zadatak

*Što je kompozicija kubiranja i trećeg korijena?*

## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Uz koje uvjete na  $A, B, C, D$  definicija ima smisla?

$$f \circ g \neq g \circ f$$

## Zadatak

*Što je kompozicija kubiranja i trećeg korijena? A osne simetrije sa samom sobom?*

## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Kompozicija funkcija  $f : A \rightarrow B$  i  $g : C \rightarrow D$  je funkcija  $f \circ g$  čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Uz koje uvjete na  $A, B, C, D$  definicija ima smisla?

$$f \circ g \neq g \circ f$$

## Zadatak

*Što je kompozicija kubiranja i trećeg korijena? A osne simetrije sa samom sobom?*

**Identiteta** je funkcija koja „ne radi nita“ ( $id : D \rightarrow D, id(x) = x$ ).

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju?



## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Bijekcija)

*Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija. Funkcija je injekcija ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, a surjekcija ako svaki element kodomene ima original u domeni.*

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Bijekcija)

*Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija. Funkcija je injekcija ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, a surjekcija ako svaki element kodomene ima original u domeni.*

Kako iz grafa prepoznamo injektivnost?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Bijekcija)

*Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija. Funkcija je injekcija ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, a surjekcija ako svaki element kodomene ima original u domeni.*

Kako iz grafa prepoznamo injektivnost? Surjektivnost?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Bijekcija)

*Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija. Funkcija je injekcija ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, a surjekcija ako svaki element kodomene ima original u domeni.*

Kako iz grafa prepoznamo injektivnost? Surjektivnost? Kakva je veza grafova bijekcije i njoj inverzne funkcije?

## Definicija (Inverzna funkcija)

*Za funkciju  $f : A \rightarrow B$  njena inverzna funkcija je, ako postoji, funkcija  $g : B \rightarrow A$  sa svojstvom  $f \circ g = g \circ f = id$ .*

Ima li kvadriranje inverznu funkciju? Koja je inverzna funkcija identitete? Možete li osim identitete naći primjer funkcije koja je sama sebi inverzna? Uz koje uvjete funkcija  $f$  ima inverz?

## Definicija (Bijekcija)

*Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija. Funkcija je injekcija ako različitim elementima domene pridružuje različite elemente kodomene, a surjekcija ako svaki element kodomene ima original u domeni.*

Kako iz grafa prepoznamo injektivnost? Surjektivnost? Kakva je veza grafova bijekcije i njoj inverzne funkcije? Može li inverz rastuće funkcije biti padajuća funkcija?



## Zadatak

*Populacija neke životinjske vrste u određenom nacionalnom parku prije 5 godina bila je 325 jedinki, a danas je 450. Ako se zna da se ta vrsta razmnožava jednom godišnje, kolika je godišnja stopa rasta te vrste?*

## Zadatak

*Populacija neke životinjske vrste u određenom nacionalnom parku prije 5 godina bila je 325 jedinki, a danas je 450. Ako se zna da se ta vrsta razmnožava jednom godišnje, kolika je godišnja stopa rasta te vrste? Prema istraživanjima park ima dovoljno resursa za 750 jedinki. Za koliko godina će ih biti toliko ako nastave s istom stopom rasta?*

## Zadatak

*Populacija neke životinjske vrste u određenom nacionalnom parku prije 5 godina bila je 325 jedinki, a danas je 450. Ako se zna da se ta vrsta razmnožava jednom godišnje, kolika je godišnja stopa rasta te vrste? Prema istraživanjima park ima dovoljno resursa za 750 jedinki. Za koliko godina će ih biti toliko ako nastave s istom stopom rasta?*

## Zadatak

*Otopina početne množinske koncentracije  $c_0 = 0,2$  mol/L uzastopno se deseterostruko razrjeđuje vodom. Kolika je koncentracija nakon 3 razrjeđenja? Nakon koliko razrjeđenja će koncentracija pasti na manje od  $10^{-6}$  mol/L?*

# Eksponencijalne funkcije

U prethodna dva zadatka imali smo pravila tipa  $x \mapsto a^x$ , pri čemu je  $x$  bio isključivo prirodan, eventualno pozitivan racionalan broj. Ako bismo takvo pravilo proširili na sve  $x \in \mathbb{Q}$  (kako?)

# Eksponencijalne funkcije

U prethodna dva zadatka imali smo pravila tipa  $x \mapsto a^x$ , pri čemu je  $x$  bio isključivo prirodan, eventualno pozitivan racionalan broj. Ako bismo takvo pravilo proširili na sve  $x \in \mathbb{Q}$  (kako?) i zatim povezali točke grafa u jednu krivulju, dobili bismo graf funkcije s prirodnom domenom  $\mathbb{R}$ . Za kakve baze  $a$  je takvo proširenje smisljeno?

# Eksponecijalne funkcije

U prethodna dva zadatka imali smo pravila tipa  $x \mapsto a^x$ , pri čemu je  $x$  bio isključivo prirodan, eventualno pozitivan racionalan broj. Ako bismo takvo pravilo proširili na sve  $x \in \mathbb{Q}$  (kako?) i zatim povezali točke grafa u jednu krivulju, dobili bismo graf funkcije s prirodnom domenom  $\mathbb{R}$ . Za kakve baze  $a$  je takvo proširenje smisljeno?

## Definicija (Eksponecijalne funkcije)

*Za konstantnu bazu  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  funkcija definirana pravilom*

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

*naziva se eksponecijalnom funkcijom s bazom  $a$ .*

Što možemo reći o svojstvima eksponecijalnih funkcija i njihovih grafova?

## Zadatak

Skicirajte grafove funkcija zadanih pravilima  $f(x) = 0,21 \cdot 3^{-2x}$  i  $g(x) = 1 - 2 \cdot 10^{x-5}$ .

## Zadatak

Skicirajte grafove funkcija zadanih pravilima  $f(x) = 0,21 \cdot 3^{-2x}$  i  $g(x) = 1 - 2 \cdot 10^{x-5}$ .

## Zadatak

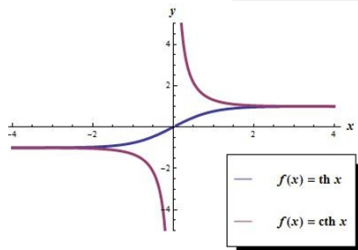
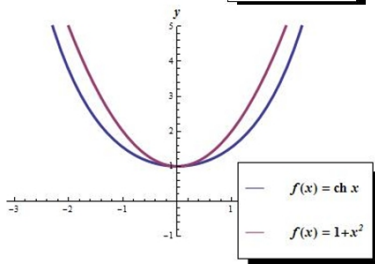
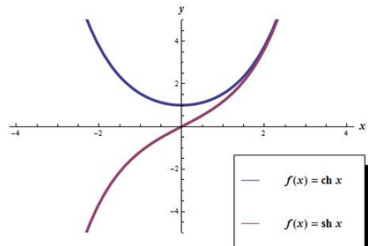
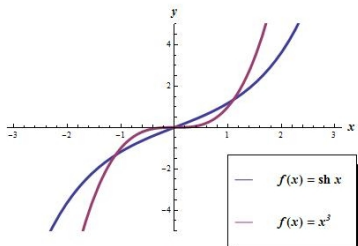
Atomska 1s-orbitala je funkcija koja točki prostora (poziciji elektrona) pridružuje iznos

$$\sqrt{\frac{Z^3}{a_0^3 \pi}} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right),$$

gdje je  $r$  udaljenost elektrona do jezgre. Skicirajte ovisnost 1s-orbitale o  $r$ .



# Hiperbolične funkcije



# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ .



# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ . Za broj zapisan u znanstvenoj notaciji imamo:

$$\log(m \cdot 10^k) = k + \log m \in [k, k + 1)$$

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ . Za broj zapisan u znanstvenoj notaciji imamo:

$$\log(m \cdot 10^k) = k + \log m \in [k, k + 1)$$

Koliki je  $x$  ako je  $\log x$  jednak  $-0,5$ ?

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ . Za broj zapisan u znanstvenoj notaciji imamo:

$$\log(m \cdot 10^k) = k + \log m \in [k, k + 1)$$

Koliki je  $x$  ako je  $\log x$  jednak  $-0,5$ ? Između 3 i 4?

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ . Za broj zapisan u znanstvenoj notaciji imamo:

$$\log(m \cdot 10^k) = k + \log m \in [k, k + 1)$$

Koliki je  $x$  ako je  $\log x$  jednak  $-0,5$ ? Između 3 i 4? Između koja dva cijela broja je  $\ln 25$ ?

# Logaritamske funkcije

**Logaritamska funkcija s bazom  $a$**  definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s  $\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Koja svojstva ona ima?

Svaki račun s potencijama uključuje tri, ne nužno različita, broja:  $a^b = c$ . Broj  $c$  je iznos potencije, broj  $a$  je  $b$ -ti korijen te potencije, a broj  $b$  je logaritam (po bazi  $a$ ) te potencije.

Bez kalkulatora što točnije odredite:  $\log(1/\sqrt{1000})$ ,  $\log 0,1$ ,  $\log 2,5$ ,  $\log 324$ ,  $\log 83011739$ . Za broj zapisan u znanstvenoj notaciji imamo:

$$\log(m \cdot 10^k) = k + \log m \in [k, k + 1)$$

Koliki je  $x$  ako je  $\log x$  jednak  $-0,5$ ? Između 3 i 4? Između koja dva cijela broja je  $\ln 25$ ? Ako znate da je  $\ln 2 \approx 0,7$ , koliko je  $\ln 8$ ?

# p[H] i log

U kemiji se posebno često pojavljuje dekadski logaritam:<sup>1</sup>  
p[H] otopine se definira kao

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol L}^{-1}}.$$

---

<sup>1</sup>Preciznije, oznaka p u kemiji odgovara  $-\log$  u matematici.

# p[H] i log

U kemiji se posebno često pojavljuje dekadski logaritam:<sup>1</sup>  
p[H] otopine se definira kao

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol L}^{-1}}.$$

Ako se  $c(H^+)$  smanji 100 puta, kako će se promijeniti p[H]?

---

<sup>1</sup>Preciznije, oznaka p u kemiji odgovara  $-\log$  u matematici.

# p[H] i log

U kemiji se posebno često pojavljuje dekadski logaritam:<sup>1</sup>  
p[H] otopine se definira kao

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol L}^{-1}}.$$

Ako se  $c(H^+)$  smanji 100 puta, kako će se promijeniti p[H]? Ako se  $[H^+]$  prepolovi?

---

<sup>1</sup>Preciznije, oznaka p u kemiji odgovara  $-\log$  u matematici.



# p[H] i log

U kemiji se posebno često pojavljuje dekadski logaritam:<sup>1</sup>  
p[H] otopine se definira kao

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol L}^{-1}}.$$

Ako se  $c(H^+)$  smanji 100 puta, kako će se promijeniti p[H]? Ako se  $[H^+]$  prepolovi? Kakav je odnos  $c(H^+)$  u dvije otopine s p[H] 2,5 odnosno 3?

---

<sup>1</sup>Preciznije, oznaka p u kemiji odgovara  $-\log$  u matematici. 

# p[H] i log

U kemiji se posebno često pojavljuje dekadski logaritam:<sup>1</sup>  
p[H] otopine se definira kao

$$p[H] = -\log \frac{c(H^+)}{\text{mol L}^{-1}}.$$

Ako se  $c(H^+)$  smanji 100 puta, kako će se promijeniti p[H]? Ako se  $[H^+]$  prepolovi? Kakav je odnos  $c(H^+)$  u dvije otopine s p[H] 2,5 odnosno 3?

## Zadatak

*Odredite pravilnu formulu za p[H] vodene otopine klorovodične kiseline HCl(aq) u ovisnosti o njezinoj koncentraciji c!*

<sup>1</sup>Preciznije, oznaka p u kemiji odgovara  $-\log$  u matematici.

Označimo:  $c = c(\text{HCl}) = c(\text{Cl}^-)$ .

Prvi pokušaj bio bi:

$$p[\text{H}] = -\log \frac{c}{\text{molL}^{-1}}.$$

No, ako bi nam otopina imala koncentraciju primjerice  $1,33 \cdot 10^{-8}$  mol/L, to bi nam dalo  $p[\text{H}] = 7,88$ ?!

Označimo:  $c = c(\text{HCl}) = c(\text{Cl}^-)$ .

Prvi pokušaj bio bi:

$$\text{p}[\text{H}] = -\log \frac{c}{\text{molL}^{-1}}.$$

No, ako bi nam otopina imala koncentraciju primjerice  $1,33 \cdot 10^{-8}$  mol/L, to bi nam dalo  $\text{p}[\text{H}] = 7,88$ ?! Moramo uzeti u obzir dva uvjeta:

- električka neutralnost:  $c(\text{H}^+) = c(\text{Cl}^-) + c(\text{OH}^-)$
- pri konstantnoj temperaturi ionski produkt vode je konstantan; npr. pri sobnoj temperaturi je  $c(\text{H}^+)c(\text{OH}^-) = K_w \approx 10^{-14} \text{ mol}^2 \text{ L}^{-2}$

Označimo:  $c = c(\text{HCl}) = c(\text{Cl}^-)$ .

Prvi pokušaj bio bi:

$$\text{p}[\text{H}] = -\log \frac{c}{\text{molL}^{-1}}.$$

No, ako bi nam otopina imala koncentraciju primjerice  $1,33 \cdot 10^{-8}$  mol/L, to bi nam dalo  $\text{p}[\text{H}] = 7,88$ ?! Moramo uzeti u obzir dva uvjeta:

- električka neutralnost:  $c(\text{H}^+) = c(\text{Cl}^-) + c(\text{OH}^-)$
- pri konstantnoj temperaturi ionski produkt vode je konstantan; npr. pri sobnoj temperaturi je  $c(\text{H}^+)c(\text{OH}^-) = K_w \approx 10^{-14} \text{ mol}^2 \text{ L}^{-2}$

Uz  $x = c(\text{H}^+)$  dobivamo  $x = \frac{K_w}{x-c}$ .

Označimo:  $c = c(\text{HCl}) = c(\text{Cl}^-)$ .

Prvi pokušaj bio bi:

$$\text{p}[\text{H}] = -\log \frac{c}{\text{molL}^{-1}}.$$

No, ako bi nam otopina imala koncentraciju primjerice  $1,33 \cdot 10^{-8}$  mol/L, to bi nam dalo  $\text{p}[\text{H}] = 7,88$ ?! Moramo uzeti u obzir dva uvjeta:

- električka neutralnost:  $c(\text{H}^+) = c(\text{Cl}^-) + c(\text{OH}^-)$
- pri konstantnoj temperaturi ionski produkt vode je konstantan; npr. pri sobnoj temperaturi je  $c(\text{H}^+)c(\text{OH}^-) = K_w \approx 10^{-14} \text{ mol}^2 \text{ L}^{-2}$

Uz  $x = c(\text{H}^+)$  dobivamo  $x = \frac{K_w}{x-c}$ .

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4K_w}}{2}.$$

Zašto otpada rješenje s minusom?

Označimo:  $c = c(\text{HCl}) = c(\text{Cl}^-)$ .

Prvi pokušaj bio bi:

$$p[\text{H}] = -\log \frac{c}{\text{molL}^{-1}}.$$

No, ako bi nam otopina imala koncentraciju primjerice  $1,33 \cdot 10^{-8}$  mol/L, to bi nam dalo  $p[\text{H}] = 7,88$ ?! Moramo uzeti u obzir dva uvjeta:

- električka neutralnost:  $c(\text{H}^+) = c(\text{Cl}^-) + c(\text{OH}^-)$
- pri konstantnoj temperaturi ionski produkt vode je

konstantan; npr. pri sobnoj temperaturi je  
 $c(\text{H}^+)c(\text{OH}^-) = K_w \approx 10^{-14} \text{ mol}^2 \text{ L}^{-2}$

Uz  $x = c(\text{H}^+)$  dobivamo  $x = \frac{K_w}{x-c}$ .

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4K_w}}{2}.$$

Zašto otpada rješenje s minusom? Dakle, pravilna formula za  $p[\text{H}]$  vodene otopine klorovodične kiseline u ovisnosti o njezinoj koncentraciji  $c$  je

$$p[H] = \log 2 - \log \frac{c + \sqrt{c^2 + 4K_w}}{\text{mol/L}}.$$

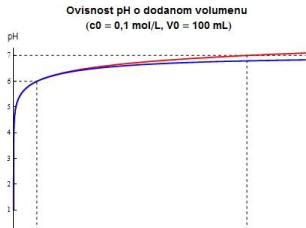


$$p[H] = \log 2 - \log \frac{c + \sqrt{c^2 + 4K_w}}{\text{mol/L}}.$$

## Zadatak

Ako je početna koncentracija  $c_0$  i početni volumen  $V_0$ , a dodamo volumen  $V$  vode, pokažite da pri razrjeđivanju ovisnost  $p[H]$  o dodanom volumenu  $V$  ima formulu

$$p[H] = \log 2 - \log \left( \frac{c_0 V_0}{(V_0 + V) \text{mol/L}} + \sqrt{\left( \frac{c_0 V_0}{(V_0 + V) \text{mol/L}} \right)^2 + \frac{4K_w}{(\text{mol/L})^2}} \right).$$



# Opća potencija

Eksponecijalne se funkcije često svode na bazu e:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

# Opća potencija

Eksponecijalne se funkcije često svode na bazu e:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

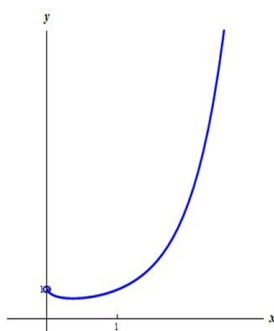
Što je  $x^x$  kao funkcija?

# Opća potencija

Eksponecijalne se funkcije često svode na bazu e:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Što je  $x^x$  kao funkcija?

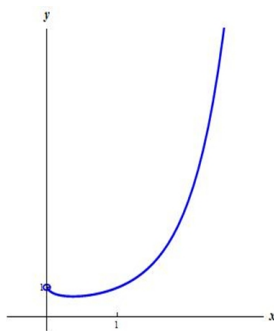


# Opća potencija

Eksponecijalne se funkcije često svode na bazu e:

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Što je  $x^x$  kao funkcija?



$$u(x)^{v(x)} = \exp(v(x) \ln u(x)).$$

# Periodičnost

Možete li navesti neke periodične pojave u svakodnevnom životu? U znanosti?

# Periodičnost

Možete li navesti neke periodične pojave u svakodnevnom životu? U znanosti? U čemu se sastoji njihova periodičnost?

# Periodičnost

Možete li navesti neke periodične pojave u svakodnevnom životu? U znanosti? U čemu se sastoji njihova periodičnost? Kako bi izgledao graf funkcije koja opisuje intenzitet monotonog zvuka koji traje po 5 s i ponavlja se u razmacima od 10 s?



# Periodičnost

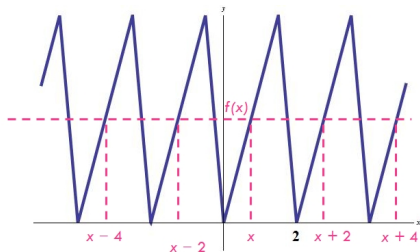
Možete li navesti neke periodične pojave u svakodnevnom životu? U znanosti? U čemu se sastoji njihova periodičnost? Kako bi izgledao graf funkcije koja opisuje intenzitet monotonog zvuka koji traje po 5 s i ponavlja se u razmacima od 10 s? A za zvučni signal koji svakih 10 s počinje od nul-intenziteta i jednoliko se pojačva tokom tih 10 sekundi?

# Periodičnost

Možete li navesti neke periodične pojave u svakodnevnom životu? U znanosti? U čemu se sastoji njihova periodičnost? Kako bi izgledao graf funkcije koja opisuje intenzitet monotonog zvuka koji traje po 5 s i ponavlja se u razmacima od 10 s? A za zvučni signal koji svakih 10 s počinje od nul-intenziteta i jednoliko se pojačva tokom tih 10 sekundi? Skicirajte primjer grafa periodične funkcije kojoj je period 2.

# Periodičnost

Možete li navesti neke periodiče pojave u svakodnevnom životu? U znanosti? U čemu se sastoji njihova periodičnost? Kako bi izgledao graf funkcije koja opisuje intenzitet monotonog zvuka koji traje po 5 s i ponavlja se u razmacima od 10 s? A za zvučni signal koji svakih 10 s počinje od nul-intenziteta i jednoliko se pojačava tokom tih 10 sekundi? Skicirajte primjer grafa periodične funkcije kojoj je period 2.



$$f(x) = f(x + T)$$

za neki  $T > 0$   
i sve  $x$  iz domena!

Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva?

Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva? Može li periodična funkcija imati horizontalnu asimptotu?

Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva? Može li periodična funkcija imati horizontalnu asimptotu? A vertikalnu?

Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva? Može li periodična funkcija imati horizontalnu asimptotu? A vertikalnu? Ako periodična funkcija ima vertikalnu asimptotu, koliko ih je?

Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva? Može li periodična funkcija imati horizontalnu asimptotu? A vertikalnu? Ako periodična funkcija ima vertikalnu asimptotu, koliko ih je?

Kut iznosa 1 (radijan) iznosi otprilike:

$1^\circ$ .

$60^\circ$ .

$180^\circ$ .

$314^\circ$ .



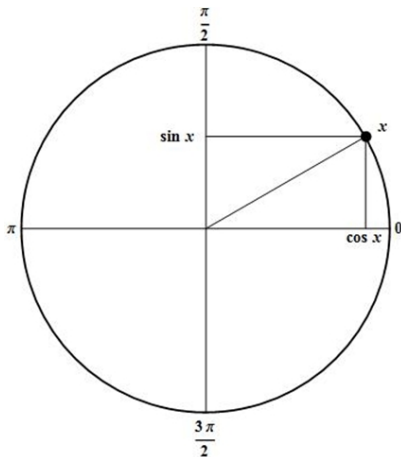
Mora li prirodna domena periodične funkcije biti cijeli skup realnih brojeva? Može li periodična funkcija imati horizontalnu asimptotu? A vertikalnu? Ako periodična funkcija ima vertikalnu asimptotu, koliko ih je?

Kut iznosa 1 (radian) iznosi otprilike:

- $1^\circ$ .                        $60^\circ$ .                        $180^\circ$ .                        $314^\circ$ .

Mjera kuta u radijanima je duljina luka kružnice polumjera 1 jedinice koji odgovara tom kutu sukladnom središnjem kutu, podijeljena s jedinicom. Koliki kut, u radijanima, prijeđe minutna kazaljka analognog sata u 5 minuta?

# Sinus i kosinus broja



Koja su osnovna svojstva funkcija sinus i kosinus vidljiva iz definicije?

## Zadatak

*Bez korištenja kalkulatora procijenite iznose od  $\sin 1$ ,  $\cos 2$ ,  $\sin(-7)$  i  $\cos 90$  na bar jednu značajnu znamenku.*

## Zadatak

*Bez korištenja kalkulatora procijenite iznose od  $\sin 1$ ,  $\cos 2$ ,  $\sin(-7)$  i  $\cos 90$  na bar jednu značajnu znamenku.*

<https://www.intmath.com/trigonometric-graphs/1-graphs-sine-cosine-amplitude.php>

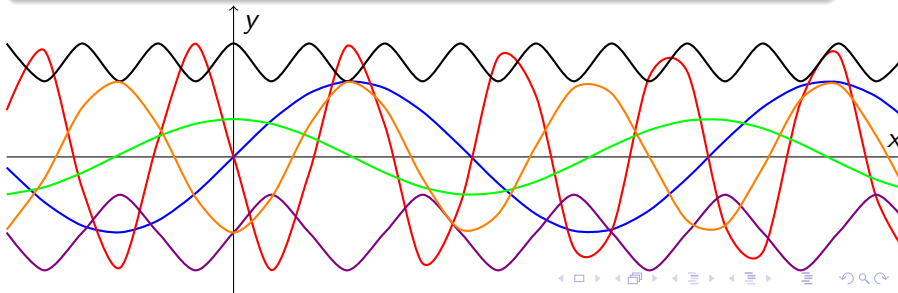
## Zadatak

*Bez korištenja kalkulatora procijenite iznose od  $\sin 1$ ,  $\cos 2$ ,  $\sin(-7)$  i  $\cos 90$  na bar jednu značajnu znamenku.*

<https://www.intmath.com/trigonometric-graphs/1-graphs-sine-cosine-amplitude.php>

## Zadatak

*Ako je plava krivulja prikaz grafa funkcije sinus, označite jedinice na osima i odredite formule ostalih krivulja na slici.*



# Tangens i kotangens

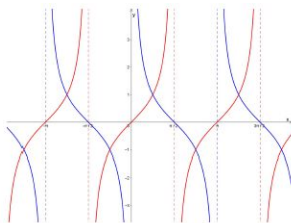
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Koji od sljedeća dva grafa (crveni i plavi) je graf koje od tih dviju funkcija?

# Tangens i kotangens

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Koji od sljedeća dva grafa (crveni i plavi) je graf koje od tih dviju funkcija?



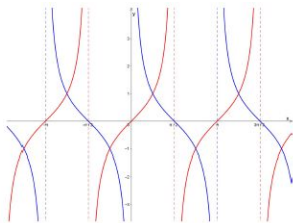
## Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom  $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(\pi x/2)$ .

# Tangens i kotangens

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Koji od sljedeća dva grafa (crveni i plavi) je graf koje od tih dviju funkcija?



## Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom  $f(x) = 1 - \operatorname{tg}(\pi x/2)$ .



## Ciklometrijske funkcije

Imaju li osnovne četiri trigonometrijske funkcije inverze? Zašto?

# Ciklometrijske funkcije

Imaju li osnovne četiri trigonometrijske funkcije inverze? Zašto?

**Ciklometrijske (arkus) funkcije** su inverzne funkcije restrikcija četiriju osnovnih trigonometrijskih funkcija na intervale na kojima su bijektivne: arcsin je inverz od  $\text{Sin} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ,

$\text{Sin } x = \sin x$ , arccos je inverz od  $\text{Cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ,

$\text{Cos } x = \cos x$ , arctg je inverz od  $\text{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Tg } x = \tan x$ ,

arcctg je inverz od  $\text{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Ctg } x = \cot x$ .

