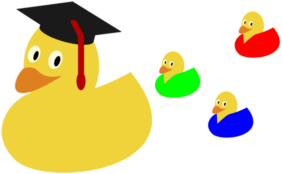
4. tjedan nastave: Još malo o realnim funkcijama jedne varijable.

Franka Miriam Brückler



Neelementarne funkcije

Sve realne funkcije jedne varijable koje se iz dosad nabrojanih ne mogu dobiti s konačno mnogo osnovnih računskih operacija i komponiranja spadaju u neelementarne funkcije. Među njima posebno česte su one koje su na različitim dijelovima domene zadane putem različitih elementarnih funkcija.

Neelementarne funkcije

Sve realne funkcije jedne varijable koje se iz dosad nabrojanih ne mogu dobiti s konačno mnogo osnovnih računskih operacija i komponiranja spadaju u neelementarne funkcije. Među njima posebno česte su one koje su na različitim dijelovima domene zadane putem različitih elementarnih funkcija.

Primjer (Funkcija apsolutne vrijednosti)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Koja je domena te funkcije? Skicirajte joj graf!

Funkcije zadane po dijelovima

Definicija (Funkcija zadana po dijelovima)

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne varijable. Ako joj je domenu D moguće rastaviti na disjunktne[a] *dijelove A, B, $\ldots$, tako da se elementi od A preslikavaju po pravilu elementarne funkcije f_A, elementi od B po pravilu druge elementarne funkcije f_B itd., kažemo da je f zadana po dijelovima.*

[a] Dva skupa su disjunktna ako nemaju zajedničkih dijelova.

Pišemo:

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in A \\ f_B(x), & x \in B \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ \frac{x}{e} & e < x < 2e \end{cases}$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & 1 < x \leq e \\ \frac{x}{e} & e < x < 2e \end{cases}$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{2}{1-x}, & x > 1 \\ 2\log(1-x) - 10, & x < 1 \end{cases}$$

Linearizacija neafinih funkcija

Često se u primjenama neafina ovisnost $Y = f(X)$ svodi na afinu ovisnost $y = ax + b$, gdje su nove varijable y i x ne neki, u pravilu što jednostavniji, način izvedene iz starih varijabli Y i X. Takav postupak zove se linearizacijom funkcije f.

Linearizacija neafinih funkcija

Često se u primjenama neafina ovisnost $Y = f(X)$ svodi na afinu ovisnost $y = ax + b$, gdje su nove varijable y i x ne neki, u pravilu što jednostavniji, način izvedene iz starih varijabli Y i X. Takav postupak zove se linearizacijom funkcije f.
Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y, a x samo o konstantama i X.

Linearizacija neafinih funkcija

Često se u primjenama neafina ovisnost $Y = f(X)$ svodi na afinu ovisnost $y = ax + b$, gdje su nove varijable y i x ne neki, u pravilu što jednostavniji, način izvedene iz starih varijabli Y i X. Takav postupak zove se linearizacijom funkcije f.
Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y, a x samo o konstantama i X.
Važnije je: iz nacrtanog ili izračunatog para (x, y) treba biti lako odrediti izvorni par (X, Y). To naravno znači i da na razmatranom skupu funkcije koje povezuju x i X, odnosno y i Y, moraju biti bijektivne.

Linearizacija neafinih funkcija

Često se u primjenama neafina ovisnost $Y = f(X)$ svodi na afinu ovisnost $y = ax + b$, gdje su nove varijable y i x ne neki, u pravilu što jednostavniji, način izvedene iz starih varijabli Y i X. Takav postupak zove se linearizacijom funkcije f.
Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y, a x samo o konstantama i X.
Važnije je: iz nacrtanog ili izračunatog para (x, y) treba biti lako odrediti izvorni par (X, Y). To naravno znači i da na razmatranom skupu funkcije koje povezuju x i X, odnosno y i Y, moraju biti bijektivne.
Također, u slučaju prikaza linearizirane funkcije osobito je važno paziti i na prikladne oznake osi i raspone brojeva na osima.

Linearizacija neafinih funkcija

Često se u primjenama neafina ovisnost $Y = f(X)$ svodi na afinu ovisnost $y = ax + b$, gdje su nove varijable y i x ne neki, u pravilu što jednostavniji, način izvedene iz starih varijabli Y i X. Takav postupak zove se linearizacijom funkcije f.
Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y, a x samo o konstantama i X.
Važnije je: iz nacrtanog ili izračunatog para (x, y) treba biti lako odrediti izvorni par (X, Y). To naravno znači i da na razmatranom skupu funkcije koje povezuju x i X, odnosno y i Y, moraju biti bijektivne.
Također, u slučaju prikaza linearizirane funkcije osobito je važno paziti i na prikladne oznake osi i raspone brojeva na osima.

Primjer: Arrheniusova jednadžba

Stvarna ovisnost $k(T)$:

$$k = A \exp\left(-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}\right),$$

gdje je T u K i $R = 8{,}3145$ J/(K mol). Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?

Primjer: Arrheniusova jednadžba

Stvarna ovisnost $k(T)$:

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right),$$

gdje je T u K i $R = 8{,}3145$ J/(K mol). Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?Linearizirajte tu ovisnost za raspon T od 100 do 200 K, ako je $A = 2{,}1 \cdot 10^9$ s^{-1} i $E_a = 111$ kJ/mol.

Primjer: Arrheniusova jednadžba

Stvarna ovisnost $k(T)$:

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right),$$

gdje je T u K i $R = 8{,}3145$ J/(K mol). Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?Linearizirajte tu ovisnost za raspon T od 100 do 200 K, ako je $A = 2{,}1 \cdot 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$ i $E_a = 111$ kJ/mol.

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T},$$

$$a = -\frac{E_a}{R \cdot \mathrm{K}} = -13350{,}17139, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s}) = 21{,}4652.$$

Raspon za x:

Primjer: Arrheniusova jednadžba

Stvarna ovisnost $k(T)$:

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right),$$

gdje je T u K i $R = 8{,}3145$ J/(K mol). Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?Linearizirajte tu ovisnost za raspon T od 100 do 200 K, ako je $A = 2{,}1 \cdot 10^9$ s^{-1} i $E_a = 111$ kJ/mol.

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T},$$

$$a = -\frac{E_a}{R \cdot \mathrm{K}} = -13350{,}17139, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s}) = 21{,}4652.$$

Raspon za x: od $x_1 = 0{,}005$ do $x_2 = 0{,}01$. Raspon za y:

Primjer: Arrheniusova jednadžba

Stvarna ovisnost $k(T)$:

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right),$$

gdje je T u K i $R = 8{,}3145$ J/(K mol). Što možete reći o jedinicama od E_a, k i A?Linearizirajte tu ovisnost za raspon T od 100 do 200 K, ako je $A = 2{,}1 \cdot 10^9$ s^{-1} i $E_a = 111$ kJ/mol.

$$y = \ln(k \cdot \mathrm{s}), \quad x = \frac{\mathrm{K}}{T},$$

$$a = -\frac{E_a}{R \cdot \mathrm{K}} = -13350{,}17139, \quad b = \ln(A \cdot \mathrm{s}) = 21{,}4652.$$

Raspon za x: od $x_1 = 0{,}005$ do $x_2 = 0{,}01$. Raspon za y: od $y(x_1) = -45{,}286$ do $y(x_2) = -112{,}04$.

Primjer — Ostwaldov zakon

Molarna provodnost elektrolita ovisi o njegovoj koncentraciji. Ostwaldov zakon za slabe elektrolite glasi

$$\frac{1}{\Lambda_{\mathrm{m}}} = \frac{1}{\Lambda_{\mathrm{m}}^{\circ}} + \frac{c\Lambda_{\mathrm{m}}}{K(\Lambda_{\mathrm{m}}^{\circ})^2}.$$

Pritom je Λ_{m} molarna provodnost elektrolita (u S cm^2 mol^{-1}), $\Lambda_{\mathrm{m}}^{\circ}$ granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi), K je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u mol cm^{-3}), a c je koncentracija (u mol dm^{-3}). Osmislite bar dva načina interpretacije ovisnosti Λ_{m} o c kao afine.

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ} = \frac{c}{K(\Lambda_m^\circ)^2},$$

$$y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_m \Lambda_m^\circ}$$

$$x = c,$$

$$b = 0,$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2}$$

Zašto ovo nije „najsretniji odabir"?

Bolje:

$$y = \frac{1}{\Lambda_m} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}},$$

$$x = c\Lambda_m \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}},$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_m^\circ)^2} \cdot \frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}},$$

$$b = \frac{1}{\Lambda_m^\circ} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}.$$

Eksperimentom pri 25°C za octenu kiselinu utvrđene molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri 25°C: $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

Eksperimentom pri 25°C za octenu kiselinu utvrđene molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri 25°C: $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

Eksperimentom pri 25°C za octenu kiselinu utvrđene molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri 25°C: $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0{,}05263.$$

Eksperimentom pri 25°C za octenu kiselinu utvrđene molarne provodnosti u rasponu od 19 S cm^2 mol^{-1} do 47 S cm^2 mol^{-1} i poznate su teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri 25°C: $\Lambda_m^\circ = 390{,}7$ S cm^2 mol^{-1} i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}$ mol cm^{-3}:

$$a = 0{,}37435, \quad b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3},$$

$$y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128, \quad y_2 = \frac{1}{19} \approx 0{,}05263.$$

Kako je $y = ax + b$, znači da je $x = (y - b)/a$. Stoga je raspon x-eva između $x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0{,}05000$ i $x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0{,}13375$.


5,26
$\frac{10^2}{\Lambda_m} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}$
$10^2 c\Lambda_m \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}}$
2,13
5
13,4