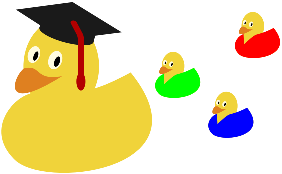
5. tjedan nastave: Uvod u diferencijalni račun.

Franka Miriam Brückler

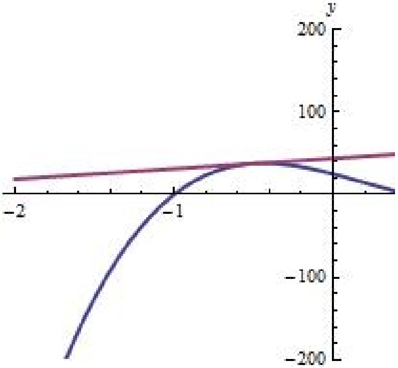


Problem tangente

Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta?

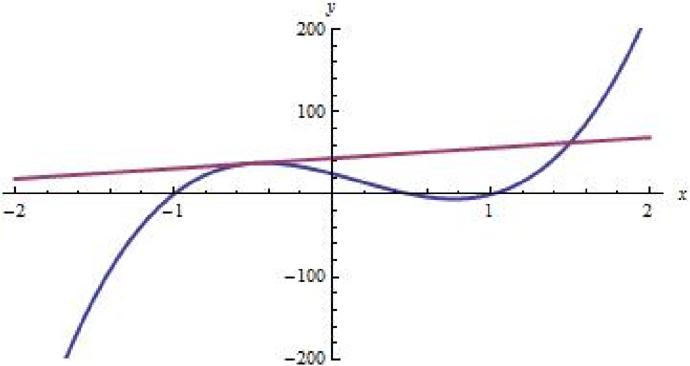
Problem tangente

Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta? Tangenta je pravac



Problem tangente

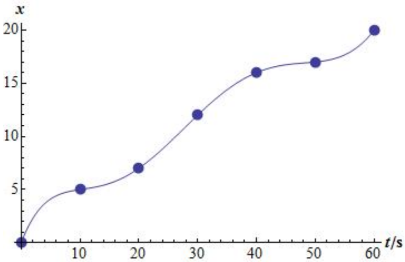
Ako je zadana neka krivulja i odabrana točka na njoj, kako konstruirati tangentu na tu krivulju u toj točki? I što je to uopće tangenta? Tangenta je pravac koji se od svih pravaca koji prolaze kroz diralište najbolje priljubljuje uz krivulju oko dirališta.



Problem brzine

U različitim trenutcima bilježene su udaljenosti točke koja se giba po pravcu od njene početne pozicije:

t/s	0	10	20	30	40	50	60
d/cm	0	5	7	12	17	18	20



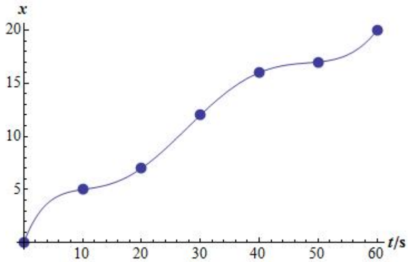
Problem brzine

U različitim trenutcima bilježene su udaljenosti točke koja se giba po pravcu od njene početne pozicije:

t/s	0	10	20	30	40	50	60
d/cm	0	5	7	12	17	18	20

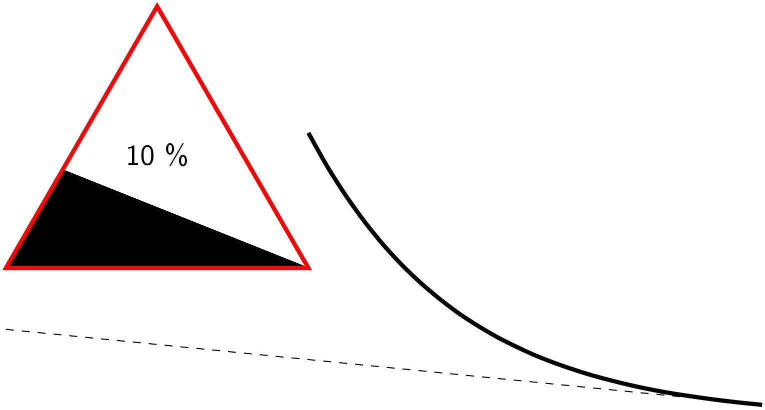
Slijedi da su (prosječne) brzine u pojedinim vremenskim intervalima

t/s	0	10	20	30	40	50	60
$v/(\mathrm{cm/s})$	0	1/2	1/5	1/2	2/5	1/10	3/10

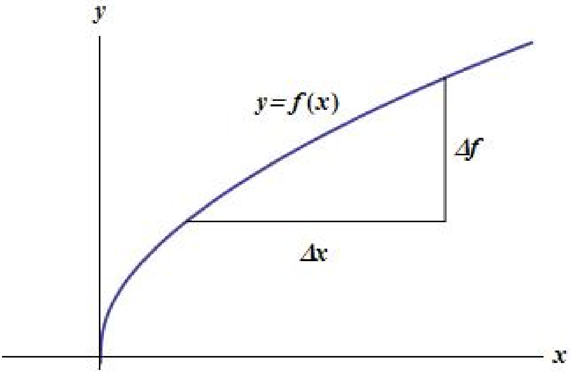


v/(cm/s)

Problem procjene promjene



U sva tri prethodna problema imamo različite realne funkcije jedne varijable za koje gledamo neprecizirano malu (blisku nuli) promjenu nezavisne varijable (Δx) u odnosu na neku njenu zadanu (fiksiranu) vrijednost i efekt te promjene na zavisnu varijablu.



Tri „definicije” derivacije

- Derivacija kao opis relativne promjene iznosa funkcije: Derivacija $f'(c)$ je procjena relativne promjene zavisne varijable f ako je promjena nezavisne varijable (Δx) približno jednaka 0:
$$\Delta x \approx 0 \Rightarrow f'(c) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
Koliko iznosi derivacija afine funkcije u zadanoj točki njene domene?

Tri „definicije” derivacije

- Derivacija kao opis relativne promjene iznosa funkcije: Derivacija $f'(c)$ je procjena relativne promjene zavisne varijable f ako je promjena nezavisne varijable (Δx) približno jednaka 0:
$$\Delta x \approx 0 \Rightarrow f'(c) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$
Koliko iznosi derivacija afine funkcije u zadanoj točki njene domene?
- Derivacija kao koeficijent smjera tangente Za mali razmak Δx omjer $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ neće biti bitno različit od koeficijenta smjera tangente povučene na graf funkcije f u točki s apscisom c, odnosno $f'(c)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f (prikazan u Kks-u) povučene u točki s apscisom c. Kakva je veza derivacije i rasta ili pada funkcije? Koja je jednadžba tangente na graf funkcije u zadanoj točki grafa?

- Derivacija kao trenutna brzina: Derivacija $f'(c)$ funkcije čija je nezavisna varijabla vrijeme je *trenutna* brzina promjene zavisne varijable u trenutku c.

- Derivacija kao trenutna brzina: Derivacija $f'(c)$ funkcije čija je nezavisna varijabla vrijeme je *trenutna* brzina promjene zavisne varijable u trenutku c.

Ukoliko na neki način uspijemo odrediti $f'(c)$-ove za sve c iz nekog intervala I, derivaciju možemo shvatiti kao novu funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ $(c \mapsto f'(c),\ c \in I)$.

- Derivacija kao trenutna brzina: Derivacija $f'(c)$ funkcije čija je nezavisna varijabla vrijeme je *trenutna* brzina promjene zavisne varijable u trenutku c.

Ukoliko na neki način uspijemo odrediti $f'(c)$-ove za sve c iz nekog intervala I, derivaciju možemo shvatiti kao novu funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ $(c \mapsto f'(c),\ c \in I)$.
Deriviranjem funkcije f' dobivamo drugu derivaciju f'', deriviranjem druge derivacije treću derivaciju itd. Oznake za prvu, drugu i treću derivaciju su redom f', f'', f'''. Daljnje derivacije (n-ta za $n > 3$) u pravilu se označavaju s $f^{(n)}$.

- Derivacija kao trenutna brzina: Derivacija $f'(c)$ funkcije čija je nezavisna varijabla vrijeme je *trenutna* brzina promjene zavisne varijable u trenutku c.

Ukoliko na neki način uspijemo odrediti $f'(c)$-ove za sve c iz nekog intervala I, derivaciju možemo shvatiti kao novu funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$ $(c \mapsto f'(c),\ c \in I)$.
Deriviranjem funkcije f' dobivamo drugu derivaciju f'', deriviranjem druge derivacije treću derivaciju itd. Oznake za prvu, drugu i treću derivaciju su redom f', f'', f'''. Daljnje derivacije (n-ta za $n > 3$) u pravilu se označavaju s $f^{(n)}$.

Napomena

U fizikalnom kontekstu, prva derivacija je trenutna brzina promjene veličine f u vremenu, a druga derivacija je ubrzanje te promjene. Također, kad je nezavisna varijabla vrijeme uobičajenija je notacija $\dot{f}$ od notacije f'.

Tablica derivacija

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	$-$
$\sqrt{x}$		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	$-$
$\sqrt{x}$	$x^{-1/2}/2\ (x \neq 0)$	$-$
$x^{\sqrt{2}}$		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	$-$
$\sqrt{x}$	$x^{-1/2}/2 \ (x \neq 0)$	$-$
$x^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$	0
e^x		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	—
$\sqrt{x}$	$x^{-1/2}/2\ (x \neq 0)$	—
$x^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$	0
e^x	e^x	1
$\ln x$		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	$-$
$\sqrt{x}$	$x^{-1/2}/2\ (x \neq 0)$	$-$
$x^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$	0
e^x	e^x	1
$\ln x$	$1/x$	$-$
$\ln 2$		

$f(x)$	$f'(x)$	koef. smjera tangente u $(0, f(0))$
x	1	1
$\frac{1}{x^3}$	$-3x^{-4}$	$-$
$\sqrt{x}$	$x^{-1/2}/2 \ (x \neq 0)$	$-$
$x^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$	0
e^x	e^x	1
$\ln x$	$1/x$	$-$
$\ln 2$	0	0

Stacionarne točke

Primjer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *vidjeli smo da je* $f'(c) = 2c$ *za svaki* $c \in \mathbb{R}$. *Dakle je* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana formulom* $f'(x) = 2x$. *Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je* $f''(x) = 2$ *za sve* x.

Stacionarne točke

Primjer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *vidjeli smo da je* $f'(c) = 2c$ *za svaki* $c \in \mathbb{R}$. *Dakle je* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana formulom* $f'(x) = 2x$. *Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je* $f''(x) = 2$ *za sve* x. *Što možete reći o* f'''*?*

Stacionarne točke

Primjer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *vidjeli smo da je* $f'(c) = 2c$ *za svaki* $c \in \mathbb{R}$. *Dakle je* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana formulom* $f'(x) = 2x$. *Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je* $f''(x) = 2$ *za sve* x. *Što možete reći o* f'''*? A o* $f'(0)$*?*

Stacionarne točke

Primjer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *vidjeli smo da je* $f'(c) = 2c$ *za svaki* $c \in \mathbb{R}$. *Dakle je* $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana formulom* $f'(x) = 2x$. *Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je* $f''(x) = 2$ *za sve* x. *Što možete reći o* f'''*? A o* $f'(0)$*? Postoji li tangenta na graf funkcije* f *u točki s apscisom* 0*? Koji je koeficijent smjera te tangente?*

Stacionarne točke

Primjer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, vidjeli smo da je $f'(c) = 2c$ za svaki $c \in \mathbb{R}$. Dakle je $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom $f'(x) = 2x$. Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je $f''(x) = 2$ za sve x. Što možete reći o f'''? A o $f'(0)$? Postoji li tangenta na graf funkcije f u točki s apscisom 0? Koji je koeficijent smjera te tangente?

Ako je derivacija jednaka 0 ona
a) ne postoji,
b) postoji.
Je li a) ili b) točno? Zašto?

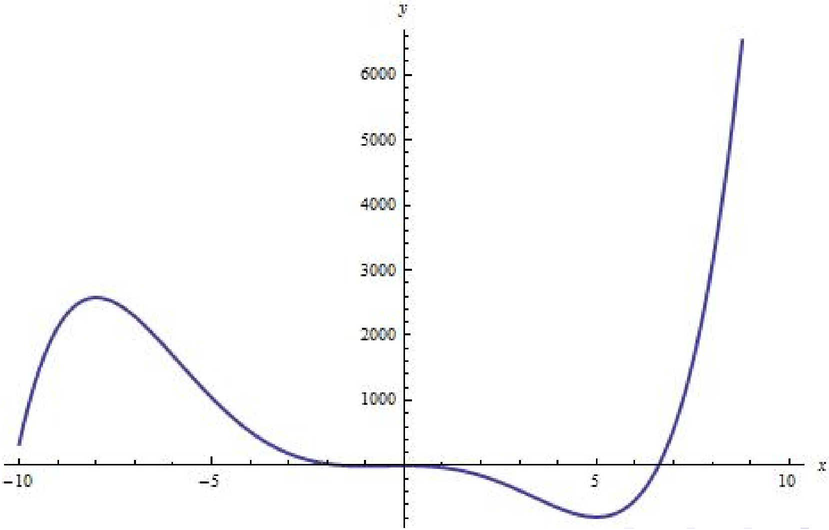
Stacionarne točke

Primjer

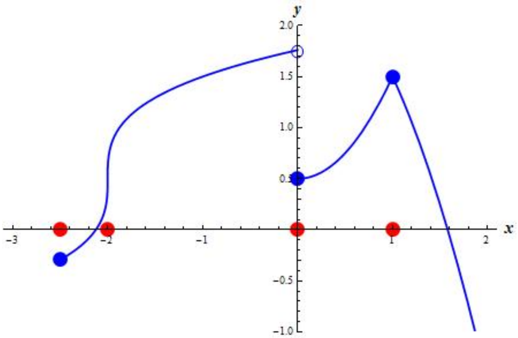
Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, vidjeli smo da je $f'(c) = 2c$ za svaki $c \in \mathbb{R}$. Dakle je $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana formulom $f'(x) = 2x$. Temeljem proizvoljno odabrane među danim „definicijama" derivacije argumentirajte zašto je $f''(x) = 2$ za sve x. Što možete reći o f'''? A o $f'(0)$? Postoji li tangenta na graf funkcije f u točki s apscisom 0? Koji je koeficijent smjera te tangente?

Ako je derivacija jednaka 0 ona
a) ne postoji,
b) postoji.
Je li a) ili b) točno? Zašto?
Nultočke prve derivacije funkcije nazivaju se njezinim stacionarnim točkama. Kako interpretiramo stacionarne točke u kontekstu naših triju „definicija" derivacije?

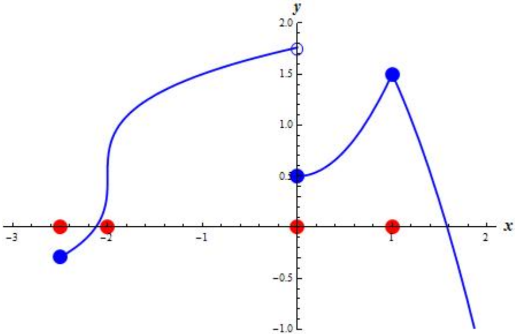
Koje su stacionarne točke funkcije f čiji graf je prikazan na slici? Na kojim intervalima je $f'(x) < 0$?



Što biste rekli o $f'(-5/2)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ i $f'(1)$ za funkciju f čiji je graf prikazan sljedećom slikom? Argumentirajte!



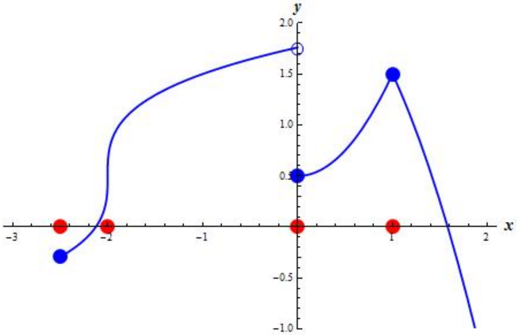
Što biste rekli o $f'(-5/2)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ i $f'(1)$ za funkciju f čiji je graf prikazan sljedećom slikom? Argumentirajte!



Primjer

Uzmimo funkciju trećeg korijena. Kako izgleda njen graf? Što je njena prirodna domena?

Što biste rekli o $f'(-5/2)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ i $f'(1)$ za funkciju f čiji je graf prikazan sljedećom slikom? Argumentirajte!



Primjer

Uzmimo funkciju trećeg korijena. Kako izgleda njen graf? Što je njena prirodna domena? Izračunajte derivaciju te funkcije. Što primjećujete?

Točke u kojima derivacija ne postoji

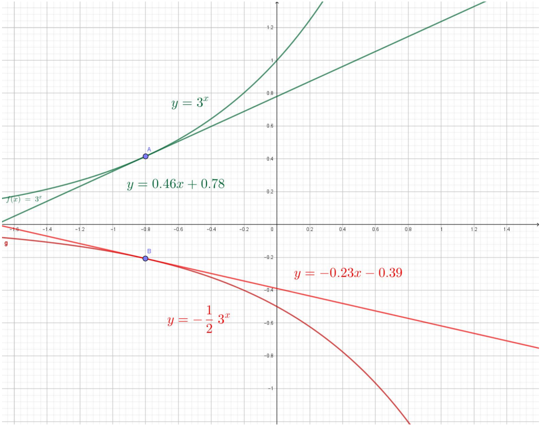
Ako je c element domene funkcije f, onda $f'(c)$ ne postoji u sljedećim slučajevima:

- U c graf ima „špicu";
- U c se graf razdvaja;
- U c je tangenta vertikalna;
- c je rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji čine domenu.

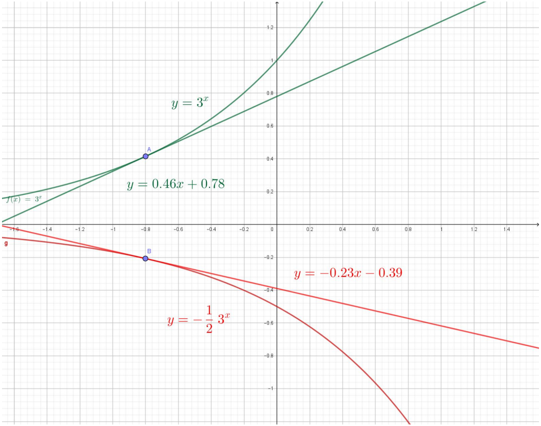
Zadatak

Nacrtajte graf funkcije za koju je $f'(1) = 0$, $f'(0) = 1$, a $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ne postoji.

Homogenost deriviranja



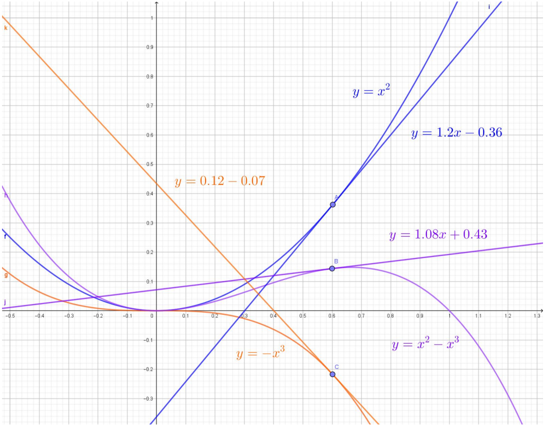
Homogenost deriviranja



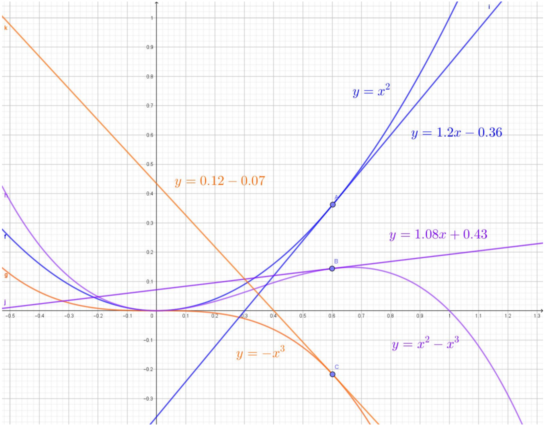
Homogenost deriviranja: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Slijedi li iz toga da je $(x \cdot e^x)' = x \cdot (e^x)' = x \cdot e^x$? Zašto?

Aditivnost deriviranja



Aditivnost deriviranja



Aditivnost deriviranja: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Linearnost deriviranja

Linearnost deriviranja je zajedničko ime za aditivnost i homogenost deriviranja.

Zadatak

Komentirajte sljedeći zadatak i njegovo predloženo rješenje:
Derivirajte $f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}$.
$f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5} = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Linearnost deriviranja

Linearnost deriviranja je zajedničko ime za aditivnost i homogenost deriviranja.

Zadatak

Komentirajte sljedeći zadatak i njegovo predloženo rješenje:
Derivirajte $f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}$.
$f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5} = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zadatak

Što biste rekli o 4. derivaciji polinoma stupnja 1? 2? 3? 4? 5?

Linearnost deriviranja

Linearnost deriviranja je zajedničko ime za aditivnost i homogenost deriviranja.

Zadatak

Komentirajte sljedeći zadatak i njegovo predloženo rješenje:
Derivirajte $f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}$.
$f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5} = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' =$
$5x^4 - \pi \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zadatak

Što biste rekli o 4. derivaciji polinoma stupnja 1? 2? 3? 4? 5?
Možete li donijeti kakav zaključak o višim derivacijama polinomâ?

Linearnost deriviranja

Linearnost deriviranja je zajedničko ime za aditivnost i homogenost deriviranja.

Zadatak

Komentirajte sljedeći zadatak i njegovo predloženo rješenje: Derivirajte $f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}$.

$f(x) = x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5} = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Zadatak

Što biste rekli o 4. derivaciji polinoma stupnja 1? 2? 3? 4? 5? Možete li donijeti kakav zaključak o višim derivacijama polinomâ?

Zadatak

Dokažite da je derivacija razlike funkcija jednaka je razlici njihovih derivacija.

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

Derivirajte x^2, x^3 i $x^2 \cdot x^3$.

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

Derivirajte x^2, x^3 i $x^2 \cdot x^3$.Je li istinita tvrdnja: Derivacija produkta funkcija jednaka je produktu njihovih derivacija?

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

Derivirajte x^2, x^3 i $x^2 \cdot x^3$.Je li istinita tvrdnja: Derivacija produkta funkcija jednaka je produktu njihovih derivacija? Osmislite primjer kojim se vidi da derivacija kvocijenta funkcija općenito nije jednaka kvocijentu derivacija.

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

Derivirajte x^2, x^3 i $x^2 \cdot x^3$.Je li istinita tvrdnja: Derivacija produkta funkcija jednaka je produktu njihovih derivacija? Osmislite primjer kojim se vidi da derivacija kvocijenta funkcija općenito nije jednaka kvocijentu derivacija.

Formula za derivaciju produkta funkcija glasi

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

a za derivaciju kvocijenta funkcija

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Derivacija produkta i kvocijenta funkcija

Derivirajte x^2, x^3 i $x^2 \cdot x^3$.Je li istinita tvrdnja: Derivacija produkta funkcija jednaka je produktu njihovih derivacija? Osmislite primjer kojim se vidi da derivacija kvocijenta funkcija općenito nije jednaka kvocijentu derivacija.

Formula za derivaciju produkta funkcija glasi

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

a za derivaciju kvocijenta funkcija

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Zadatak

Izvedite formule za derivacije funkcija tangens i kotangens!

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna?*

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna? S kojom bazom?*

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna? S kojom bazom?*

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna? S kojom bazom?*

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

$$a'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ eksponencijalna? S kojom bazom?

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

$$a'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ koristeći pravilo za derivaciju produkta:

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna? S kojom bazom?*

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

$$a'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ *koristeći pravilo za derivaciju produkta:*

$$b'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ eksponencijalna? S kojom bazom?

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

$$a'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ koristeći pravilo za derivaciju produkta:

$$b'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $c(x) = \ln x^3$!

Primjer

Je li funkcija zadana formulom $a(x) = (e^x)^3$ *eksponencijalna? S kojom bazom?*

$$a(x) = \left(e^3\right)^x$$

Derivirajte ju!

$$a'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ *koristeći pravilo za derivaciju produkta:*

$$b'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

Primjer

Derivirajte funkciju zadanu formulom $c(x) = \ln x^3$*!*

Lančano pravilo

Opišite funkcije zadane formulama $a(x) = (e^x)^3$, $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$, $c(x) = \ln x^3$ i $d(x) = (\cos x)^\pi$ kao kompozicije po dviju funkcija!

Lančano pravilo

Opišite funkcije zadane formulama $a(x) = (e^x)^3$, $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$, $c(x) = \ln x^3$ i $d(x) = (\cos x)^\pi$ kao kompozicije po dviju funkcija!
Općenito, pravilo za deriviranje kompozicije funkcija glasi $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$, gdje je $y = f(x)$, tj.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Zadatak

Odredite derivaciju od Λ_m *po* c *ako je* $\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}$*, tj.*

Lančano pravilo

Opišite funkcije zadane formulama $a(x) = (e^x)^3$, $b(x) = (\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$, $c(x) = \ln x^3$ i $d(x) = (\cos x)^\pi$ kao kompozicije po dviju funkcija!
Općenito, pravilo za deriviranje kompozicije funkcija glasi $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$, gdje je $y = f(x)$, tj.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Zadatak

Odredite derivaciju od Λ_m po c ako je $\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}$, tj.

$$\Lambda_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{1+4c}-1}{2c/\Lambda_\mathrm{m}^\circ}.$$

Koja je jedinica te derivacije?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada? Kako biste ju derivirali pomoću lančanog pravila?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada? Kako biste ju derivirali pomoću lančanog pravila?

$$(x^{1/x})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ako prvo logaritmiramo f, što dobijemo?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada? Kako biste ju derivirali pomoću lančanog pravila?

$$(x^{1/x})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ako prvo logaritmiramo f, što dobijemo? $\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Koliko iznosi derivacija od $\ln f(x)$?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada? Kako biste ju derivirali pomoću lančanog pravila?

$$(x^{1/x})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ako prvo logaritmiramo f, što dobijemo? $\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Koliko iznosi derivacija od $\ln f(x)$?

$$(\ln f(x))' = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Kakva je veza te derivacije s derivacijom funkcije f?

Logaritamsko deriviranje

U poglavlju o općoj potenciji susreli smo se s funkcijom zadanom formulom $f(x) = x^{1/x}$. U koji tip elementarnih funkcija ona spada? Kako biste ju derivirali pomoću lančanog pravila?

$$(x^{1/x})' = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{1/x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Ako prvo logaritmiramo f, što dobijemo? $\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Koliko iznosi derivacija od $\ln f(x)$?

$$(\ln f(x))' = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Kakva je veza te derivacije s derivacijom funkcije f?

$$f'(x) = f(x) \cdot (\ln f(x))'.$$

Određivanje derivacije funkcije tako da ju prvo logaritmiramo, pa onda deriviramo logaritmiranu funkciju, zove se logaritamsko deriviranje.

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija!

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x,$$
$$g(y) = \ln y, \quad g'(y) = \frac{1}{y},$$

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x,$$

$$g(y) = \ln y, \quad g'(y) = \frac{1}{y},$$

$$g = f^{-1}, \quad g(f(x)) = x, \quad y = f(x),$$

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x,$$

$$g(y) = \ln y, \quad g'(y) = \frac{1}{y},$$

$$g = f^{-1}, \quad g(f(x)) = x, \quad y = f(x),$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x,$$

$$g(y) = \ln y, \quad g'(y) = \frac{1}{y},$$

$$g = f^{-1}, \quad g(f(x)) = x, \quad y = f(x),$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

$$1 = g'(y) \cdot f'(x),$$

Derivacija inverzne funkcije

Navedite par međusobno inverznih bijekcija! Varijablu jedne od njih označite s x, a druge s y. Sad derivirajte te funkcije. Možete li što zaključiti od vezi tih derivacija?

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x,$$

$$g(y) = \ln y, \quad g'(y) = \frac{1}{y},$$

$$g = f^{-1}, \quad g(f(x)) = x, \quad y = f(x),$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

$$1 = g'(y) \cdot f'(x),$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija?

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\mathrm{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$.

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\mathrm{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg?

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\operatorname{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg?

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\mathrm{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg ? Uvrstite te funkcije u formulu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ i zabilježite na koje x i y se ona odnosi.

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\operatorname{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg ? Uvrstite te funkcije u formulu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ i zabilježite na koje x i y se ona odnosi.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \mathbb{R}$$

Imate li ideju kako desnu stranu formule preoblikovati u oblik koji sadrži (samo) varijablu y?

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\operatorname{arctg} = \mathrm{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg? Uvrstite te funkcije u formulu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ i zabilježite na koje x i y se ona odnosi.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \mathbb{R}$$

Imate li ideju kako desnu stranu formule preoblikovati u oblik koji sadrži (samo) varijablu y?

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\operatorname{arctg} = \operatorname{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg ? Uvrstite te funkcije u formulu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ i zabilježite na koje x i y se ona odnosi.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \mathbb{R}$$

Imate li ideju kako desnu stranu formule preoblikovati u oblik koji sadrži (samo) varijablu y?

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Koji predznak treba uzeti u nazivniku?

Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-tangensa. Kojoj je on funkciji inverzna funkcija? $\operatorname{arctg} = \operatorname{Tg}^{-1}$. Koja je domena od Tg? A od arctg ? Uvrstite te funkcije u formulu $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ i zabilježite na koje x i y se ona odnosi.

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, y \in \mathbb{R}$$

Imate li ideju kako desnu stranu formule preoblikovati u oblik koji sadrži (samo) varijablu y?

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}, \quad \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Koji predznak treba uzeti u nazivniku?

$(\operatorname{arctg} y)' = \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}$ za sve $y \in \mathbb{R}$.

Diferencijalna notacija

Umjesto oznake $f'(c)$ često se, osobito u primjenama kad f i x imaju fizikalni kontekst, koristi oznaka $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$, kraće (kad god je jasno na koji c se misli ili pak kad je c varijabilan) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ponekad $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c}$.

Primjer

Umjesto da trenutnu brzinu gibanja v u trenutku T pišemo kao $s'(T)$ ili $\dot{s}(T)$, često ju označavamo s $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

Diferencijalna notacija

Umjesto oznake $f'(c)$ često se, osobito u primjenama kad f i x imaju fizikalni kontekst, koristi oznaka $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$, kraće (kad god je jasno na koji c se misli ili pak kad je c varijabilan) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, ponekad $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=c}$.

Primjer

Umjesto da trenutnu brzinu gibanja v u trenutku T pišemo kao $s'(T)$ ili $\dot{s}(T)$, često ju označavamo s $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

U ovoj notaciji osnovna svojstva deriviranja poprimaju oblike:

$$\frac{\mathrm{d}(y+z)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{z} = \frac{z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{z^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}(y+z)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{z} = \frac{z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{z^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Zadatak

Koliko iznosi

$$\frac{\mathrm{d}\,x^2}{\mathrm{d}\exp(x)}?$$