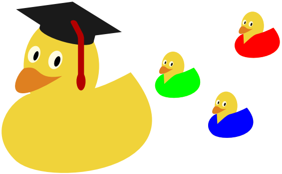
6. tjedan nastave: Uvod u diferencijalne jednadžbe. Konveksnost i konkavnost. Lokalni ekstremi.

Franka Miriam Brückler



Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_\mathrm{R}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_\mathrm{R}}{\mathrm{d}t} = kc_\mathrm{R}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne? Koja je nezavisna, a koja zavisna varijabla?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne? Koja je nezavisna, a koja zavisna varijabla? Što smatrate nepoznanicom u gornjoj jednadžbi? Zašto?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne? Koja je nezavisna, a koja zavisna varijabla? Što smatrate nepoznanicom u gornjoj jednadžbi? Zašto? Može li c_{R} afino ovisiti o t ako zadovoljava gornju jednadžbu? Zašto?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne? Koja je nezavisna, a koja zavisna varijabla? Što smatrate nepoznanicom u gornjoj jednadžbi? Zašto? Može li c_{R} afino ovisiti o t ako zadovoljava gornju jednadžbu? Zašto? Je li c_{R} zadana s $c_{\mathrm{R}} = \frac{C}{1 - C\nu_{\mathrm{R}}kt}$ rješenje gornje jednadžbe (C je pozitivna konstanta)?

Uvod u diferencijalne jednadžbe

Kako biste formulom zapisali rečenicu „brzina reakcije 2. reda je u svakom trenutku proporcionalna kvadratu trenutne koncentracije reaktanta R"? $v = kc_{\mathrm{R}}^2$. Ako znate da se trenutna brzina reakcije v može izraziti kao derivacija koncentracije bilo kojeg reaktanta po vremenu, podijeljena s pripadnim stehiometrijskim koeficijentom, koji oblik poprima prethodna jednadžba?

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \frac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$$

Koje veličine u gornjoj jednadžbi su varijabilne? Koja je nezavisna, a koja zavisna varijabla? Što smatrate nepoznanicom u gornjoj jednadžbi? Zašto? Može li c_{R} afino ovisiti o t ako zadovoljava gornju jednadžbu? Zašto? Je li c_{R} zadana s $c_{\mathrm{R}} = \frac{C}{1 - C\nu_{\mathrm{R}}kt}$ rješenje gornje jednadžbe (C je pozitivna konstanta)? Kada biste neku funkciju c_{R} prihvatili kao rješenje?

Diferencijalne jednadžbe opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njene nezavisne varijable i njenih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable.

Zadatak

Je li ikoja od logaritamskih funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = 1$*?*

Diferencijalne jednadžbe opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njene nezavisne varijable i njenih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable.

Zadatak

Je li ikoja od logaritamskih funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = 1$?

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \Rightarrow xy'' + y' = 0.$$

Diferencijalne jednadžbe opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njene nezavisne varijable i njenih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable.

Zadatak

Je li ikoja od logaritamskih funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = 1$?

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \Rightarrow xy'' + y' = 0.$$

Zadatak

Kao diferencijalnu jednadžbu zapišite zadatak „Odredite realnu funkciju jedne varijable koja je derivirana proporcionalna samoj sebi"!

Diferencijalne jednadžbe opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njene nezavisne varijable i njenih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable.

Zadatak

Je li ikoja od logaritamskih funkcija rješenje diferencijalne jednadžbe $xy'' + y' = 1$*?*

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a} \Rightarrow xy'' + y' = 0.$$

Zadatak

Kao diferencijalnu jednadžbu zapišite zadatak „Odredite realnu funkciju jedne varijable koja je derivirana proporcionalna samoj sebi"! Odredite njena rješenja. Koliko ih ima?

Red diferencijalne jednadžbe je najviša derivacija koja se u njoj pojavljuje. Rješenja diferencijalnih jednadžbi 1. reda sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi 2. reda sadrže dvije.

Red diferencijalne jednadžbe je najviša derivacija koja se u njoj pojavljuje. Rješenja diferencijalnih jednadžbi 1. reda sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi 2. reda sadrže dvije.

Drugi Newtonov zakon

Ukupna sila na česticu u svakom je trenutku jednaka derivaciji umnoška njene mase i brzine po vremenu:

$$F(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv).$$

Zadatak

Diferencijalnom jednadžbom opišite ovisnost pozicije z o vremenu za objekt mase m koji vertikalno titra na opruzi s koeficijentom elastičnosti k.

Red diferencijalne jednadžbe je najviša derivacija koja se u njoj pojavljuje. Rješenja diferencijalnih jednadžbi 1. reda sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi 2. reda sadrže dvije.

Drugi Newtonov zakon

Ukupna sila na česticu u svakom je trenutku jednaka derivaciji umnoška njene mase i brzine po vremenu:

$$F(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv).$$

Zadatak

Diferencijalnom jednadžbom opišite ovisnost pozicije z o vremenu za objekt mase m koji vertikalno titra na opruzi s koeficijentom elastičnosti k. $m\ddot{z} = -kz$.

Svaka funkcija zadana formulom $c_\mathrm{R} = \dfrac{C}{1 - C\nu_\mathrm{R} kt}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{1}{\nu_\mathrm{R}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}c_\mathrm{R}}{\mathrm{d}t} = kc_\mathrm{R}^2$. Koji je smisao konstante C?

Svaka funkcija zadana formulom $c_{\mathrm{R}} = \dfrac{C}{1 - C\nu_{\mathrm{R}}kt}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{1}{\nu_{\mathrm{R}}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}c_{\mathrm{R}}}{\mathrm{d}t} = kc_{\mathrm{R}}^2$. Koji je smisao konstante C? U ovom slučaju C je početna koncentracija od R.

Svaka funkcija zadana formulom

$z = C_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $m\ddot{z} = -kz$. Koji je smisao konstanti C_1 i C_2?

Svaka funkcija zadana formulom $c_\mathrm{R} = \dfrac{C}{1 - C\nu_\mathrm{R} kt}$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{1}{\nu_\mathrm{R}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}c_\mathrm{R}}{\mathrm{d}t} = kc_\mathrm{R}^2$. Koji je smisao konstante C? U ovom slučaju C je početna koncentracija od R.

Svaka funkcija zadana formulom

$z = C_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t\right)$ je rješenje diferencijalne jednadžbe $m\ddot{z} = -kz$. Koji je smisao konstanti C_1 i C_2? C_1 je početni pomak čestice koja vertikalno titra, a C_2 je razmjeran početnoj brzini.

Da bi diferencijalna jednadžba jednoznačno opisivala nepoznatu funkciju potrebni su i tzv. početni uvjeti: za DJ 1. reda, početni uvjet je zadan iznos tražene funkcije za jednu vrijednost njene nezavisne varijable, ako je DJ 2. reda, početni uvjet sastoji se od zadanih iznosa tražene funkcije i njene derivacije za istu (jednu) vrijednost njene nezavisne varijable.

Primjer

Brzina promjene temperature sustava ϑ (u $^\circ$C) u svakom trenutku proporcionalna je razlici temperatura okoline i sustava.

Primjer

Brzina promjene temperature sustava ϑ (u $^\circ$C) u svakom trenutku proporcionalna je razlici temperatura okoline i sustava.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta).$$

Želimo u pećnici koja je zagrijana na 200°C ispeći patku.

Primjer

Brzina promjene temperature sustava ϑ (u °C) u svakom trenutku proporcionalna je razlici temperatura okoline i sustava.

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta).$$

Želimo u pećnici koja je zagrijana na 200°C ispeći patku.

Provjerite da je ovisnost temperature patke o vremenu opisana s

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - Ce^{-kt},$$

gdje su k i C neke konstante.

Ako je patka na početku izvađena iz hladnjaka, recimo da je $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2^\circ\mathrm{C}$ — to je početni uvjet za naš problem. Kako biste ga iskoristili za određivanje jedne od nepoznatih konstanti?

Ako je patka na početku izvađena iz hladnjaka, recimo da je $\vartheta(0\,\text{min}) = 2^\circ\text{C}$ — to je početni uvjet za naš problem. Kako biste ga iskoristili za određivanje jedne od nepoznatih konstanti?
Uvrstimo $t = 0$ u rješenje DJ:

$$C = 198^\circ\text{C}, \text{tj. } \vartheta(t) = 200^\circ\text{C} - 198^\circ\text{C}e^{-kt}.$$

Što bi nam trebalo da bismo mogli odrediti k?

Ako je patka na početku izvađena iz hladnjaka, recimo da je $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2^\circ\mathrm{C}$ — to je početni uvjet za naš problem. Kako biste ga iskoristili za određivanje jedne od nepoznatih konstanti? Uvrstimo $t = 0$ u rješenje DJ:

$$C = 198^\circ\mathrm{C}, \text{tj. } \vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - 198^\circ\mathrm{C}e^{-kt}.$$

Što bi nam trebalo da bismo mogli odrediti k? Ta konstanta ne potječe od rješavanja dierencijalne jednadžbe, nego od njena postavljanja. Treba nam još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo joj temperaturu i dobili da je tada bila na $16^\circ\mathrm{C}$, iznos k je

Ako je patka na početku izvađena iz hladnjaka, recimo da je $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2°\mathrm{C}$ — to je početni uvjet za naš problem. Kako biste ga iskoristili za određivanje jedne od nepoznatih konstanti? Uvrstimo $t = 0$ u rješenje DJ:

$$C = 198°\mathrm{C}, \text{tj. } \vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-kt}.$$

Što bi nam trebalo da bismo mogli odrediti k? Ta konstanta ne potječe od rješavanja dierencijalne jednadžbe, nego od njena postavljanja. Treba nam još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo joj temperaturu i dobili da je tada bila na 16°C, iznos k je $k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\,\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}00244438\,\mathrm{min}^{-1}$. Kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperarara biti $\vartheta(t) = 80°\mathrm{C}$?

Ako je patka na početku izvađena iz hladnjaka, recimo da je $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2°\mathrm{C}$ — to je početni uvjet za naš problem. Kako biste ga iskoristili za određivanje jedne od nepoznatih konstanti? Uvrstimo $t = 0$ u rješenje DJ:

$$C = 198°\mathrm{C}, \text{tj. } \vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-kt}.$$

Što bi nam trebalo da bismo mogli odrediti k? Ta konstanta ne potječe od rješavanja dierencijalne jednadžbe, nego od njena postavljanja. Treba nam još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu. Recimo, nakon 30 minuta izmjerili smo joj temperaturu i dobili da je tada bila na $16°\mathrm{C}$, iznos k je $k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\,\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}00244438\,\mathrm{min}^{-1}$. Kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperara biti $\vartheta(t) = 80°\mathrm{C}$? Iz $\vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-0{,}00244438t\,\mathrm{min}^{-1}}$ dobijemo da patku treba peći 204,868 minuta, tj. otprilike 3 sata i 25 minuta.

Zadatak

Prema drugom Kirchhoffovom zakonu, zbroj svih napona u strujnoj petlji jednak je nuli. Provjerite da je ovisnosti jakosti struje I o vremenu t u LR-strujnom krugu (s jednim otpornikom konstantnog otpora R[a] i zavojnicom konstantnog induktiviteta L[b]) koji se napaja konstantnim naponom E dana formulom

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp(-Rt/L)\right).$$

Skicirajte tu ovisnost!

[a] To dovodi do pada napona RI.
[b] To dovodi do pada napona $L\dot{I}$.

Zadatak

Prema drugom Kirchhoffovom zakonu, zbroj svih napona u strujnoj petlji jednak je nuli. Provjerite da je ovisnosti jakosti struje I o vremenu t u LR-strujnom krugu (s jednim otpornikom konstantnog otpora R[a] i zavojnicom konstantnog induktiviteta L[b]) koji se napaja konstantnim naponom E dana formulom

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp(-Rt/L)\right).$$

Skicirajte tu ovisnost!

[a] To dovodi do pada napona RI.
[b] To dovodi do pada napona $L\dot{I}$.

$$L\dot{I} + RI = E, \quad I = I(t),$$

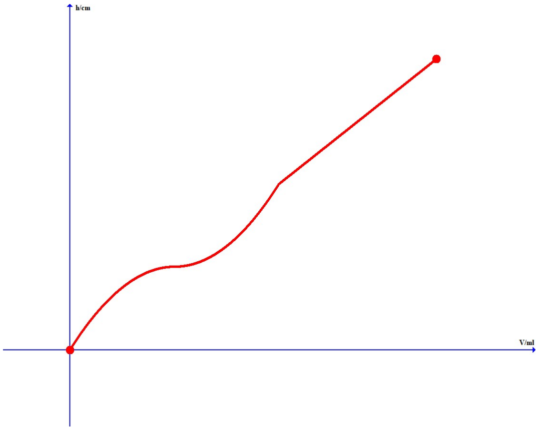
$$I(0) = 0.$$

Primjer

Okruglu tikvicu punite nekom tekućinom. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte graf ovisnosti razine vode (visine u odnosu na dno posude) o dodanom volumenu tekućine.

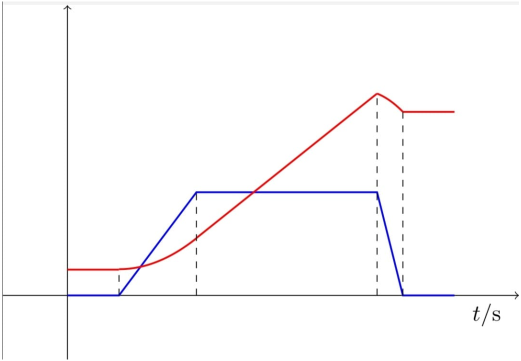
Primjer

Okruglu tikvicu punite nekom tekućinom. U pravokutnom koordinatnom sustavu skicirajte graf ovisnosti razine vode (visine u odnosu na dno posude) o dodanom volumenu tekućine.



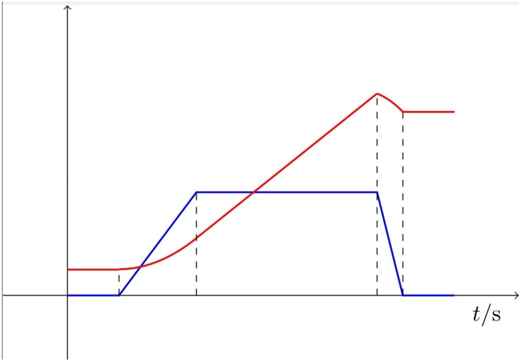
Zadatak

Jedan od ova dva grafa predstavlja (do na jedinice) prijeđeni put, a drugi brzinu u ovisnosti o vremenu (za jedan te isti objekt koji se giba pravocrtno). Koji je koji? Otkrijte grešku!



Zadatak

Jedan od ova dva grafa predstavlja (do na jedinice) prijeđeni put, a drugi brzinu u ovisnosti o vremenu (za jedan te isti objekt koji se giba pravocrtno). Koji je koji? Otkrijte grešku!



Ovisnost prijeđenog puta o vremenu sigurno je rastuća. Ako je akceleracija pozitivna, graf je „udubljen", ako je akceleracija 0, graf je ravan (dio pravca), a ako je akceleracija negativna, graf je

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1 \rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?

- Kakvi su nagibi tangenti (slijeva udesno) na graf funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ ako je druga derivacija funkcije negativna na I? Implicira li to išta o rastu/padu ili predznaku funkcije f?
- Skicirajte primjere rastuće, padajuće te funkcije s promjenom rast/pad kojoj je druga derivacija pozitivna/negativna!
- Kako izgleda graf funkcije f s domenom $\langle 0, 1\rangle$ ako je za sve x iz domene $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ i $f''(x) > 0$?
- Nadopunite tablicu skicama koje sugeriraju pravila:

na I	$+$	$-$
f		
f'		
f''		

Konveksnost i konkavnost

Definicija

Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

.

Konveksnost i konkavnost

Definicija

Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

.

Teorem

Ako je f dvaput derivabilna[a] *na I, konveksnost je ekvivalentna s $f''(x) > 0$ za $x \in I$, konkavnost s $f''(x) < 0$ za $x \in I$.*

[a] Zapravo, dodano druga derivacija mora biti neprekidna.

Konveksnost i konkavnost

Definicija

Funkcija f je na intervalu I konveksna odnosno konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

odnosno

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

.

Teorem

Ako je f dvaput derivabilna[a] na I, konveksnost je ekvivalentna s $f''(x) > 0$ za $x \in I$, konkavnost s $f''(x) < 0$ za $x \in I$.

[a] Zapravo, dodano druga derivacija mora biti neprekidna.

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Kako smo ono definirali stacionarne točke funkcije?

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Kako smo ono definirali stacionarne točke funkcije? Ako je c stacionarna točka za f, što znamo o grafu od f?

Zadatak

Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

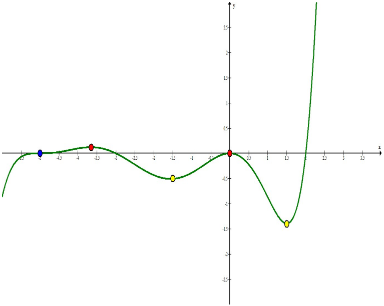
Kako smo ono definirali stacionarne točke funkcije? Ako je c stacionarna točka za f, što znamo o grafu od f? Mora li u stacionarnoj točki doći do promjene predznaka prve derivacije?

Zadatak

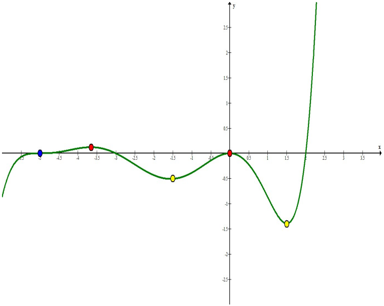
Navedite neke primjere elementarnih funkcija koje poznajete, a koje su na cijeloj domeni konveksne odnosno konkavne.

Kako smo ono definirali stacionarne točke funkcije? Ako je c stacionarna točka za f, što znamo o grafu od f? Mora li u stacionarnoj točki doći do promjene predznaka prve derivacije? A kako graf izgleda ako u stacionarnoj točki dolazi do promjene predznaka prve derivacije?

Lokalni ekstremi



Lokalni ekstremi



Definicija

Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ i $c \in D$, kažemo da je c točka lokalnog minimuma odnosno točka lokalnog maksimuma ako za sve x iz nekog intervala oko c (sadržanog u D) vrijedi $f(c) \leq f(x)$ odnosno $f(c) \geq f(x)$. Vrijednost $f(c)$ se tad zove lokalnim minimumom odnosno lokalnim maksimumom funkcije f.

Veza s prvom derivacijom

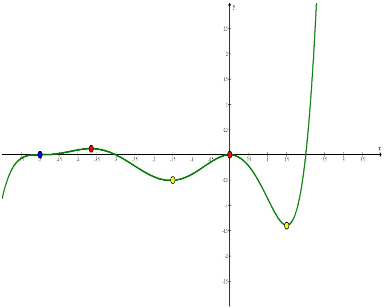
Teorem

Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f i ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c) = 0$. Ekvivalentno: Ako $f'(c)$ postoji i $f'(c) \neq 0$, onda c sigurno nije točka lokalnog ekstrema.

Veza s prvom derivacijom

Teorem

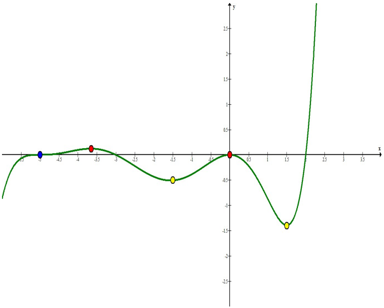
Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f i ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c) = 0$. Ekvivalentno: Ako $f'(c)$ postoji i $f'(c) \neq 0$, onda c sigurno nije točka lokalnog ekstrema.



Veza s prvom derivacijom

Teorem

Ako je c točka lokalnog ekstrema funkcije f i ako postoji $f'(c)$, onda je $f'(c) = 0$. Ekvivalentno: Ako $f'(c)$ postoji i $f'(c) \neq 0$, onda c sigurno nije točka lokalnog ekstrema.



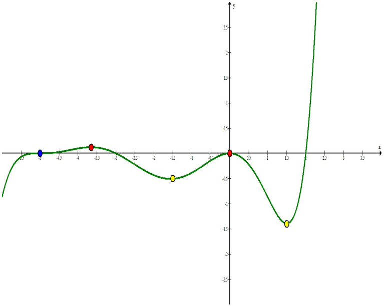
Ako je f derivabilna i $f'(c) = 0$, onda je c točka lokalnog ekstrema točno ako u njoj dolazi do promjene predznaka od f'.

Veza s drugom derivacijom

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?

Veza s drugom derivacijom

Kako će izgledati graf funkcije oko njene stacionarne točke ako je u njoj druga derivacija pozitivna odnosno negativna?



Teorem

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f. Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

- Nezavisna varijabla: r ($x = r/\text{pm}$, domena $\langle 0, +\infty\rangle$);
- $V(r) = \varepsilon\left(\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}\right)$ je derivabilna na cijeloj domeni (zašto?)

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

- Nezavisna varijabla: r ($x = r/\mathrm{pm}$, domena $\langle 0, +\infty\rangle$);
- $V(r) = \varepsilon\left(\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}\right)$ je derivabilna na cijeloj domeni (zašto?)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \varepsilon\left(-12\frac{r_{\min}^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_{\min}^{6}}{r^{7}}\right) = 12\varepsilon\, r_{\min}^{6}\cdot\frac{r^6 - r_{\min}^6}{r^{13}}.$$

Zadatak

Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti $r > 0$:

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}.$$

Pokažite da je Lennard-Jonesov potencijal najmanji kad je $r = r_{\min}$ i da mu minimum iznosi $-\varepsilon$.

- Nezavisna varijabla: r ($x = r/\mathrm{pm}$, domena $\langle 0, +\infty\rangle$);
- $V(r) = \varepsilon\left(\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6}\right)$ je derivabilna na cijeloj domeni (zašto?)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \varepsilon\left(-12\frac{r_{\min}^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_{\min}^{6}}{r^{7}}\right) = 12\varepsilon\, r_{\min}^{6} \cdot \frac{r^6 - r_{\min}^6}{r^{13}}.$$

- $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0 \Leftrightarrow r = r_{\min}$; $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} > 0 \Leftrightarrow r > r_{\min}$

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

f	$+$	$+$	$+$	-

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

f	$+$	$+$	$+$	-
f'	$+$	$+$	-	-

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

f	+	+	+	-
f'	+	+	-	-
f''	+	-	-	-

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

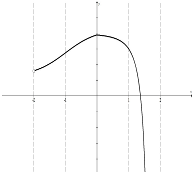
f	$+$	$+$	$+$	-
f'	$+$	$+$	-	-
f''	$+$	-	-	-
f	$+$,raste,konveksna	$+$,raste,konkavna	$+$,pada,konkavna	-,pada,konkavna

Zadatak

Skicirajte graf neke funkcije $f : \langle -2, 2\rangle \to \mathbb{R}$ *koja zadovoljava sljedeće uvjete:*

- $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ *za* $x < 1$, $f(x) < 0$ *za* $x > 1$;
- $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ *za* $x < 0$, $f'(x) < 0$ *za* $x > 0$;
- $f''(-1) = 0$, $f''(x) > 0$ *za* $x < -1$, $f''(x) < 0$ *za* $x > -1$.

f	+	+	+	-
f'	+	+	-	-
f''	+	-	-	-
f	+,raste,konveksna	+,raste,konkavna	+,pada,konkavna	-,pada,konkavna



Točke infleksije

Definicija

Točka infleksije funkcije f je element njezine domene u kojem dolazi do promjene iz konkavnosti u konveksnost ili obrnuto (tj. to je točka lokalnog ekstrema od f').

Ako je f dvaput derivabilna, točka infleksije je element domene u kojem dolazi do promjene predznaka f''.

Točke infleksije

Definicija

Točka infleksije funkcije f je element njezine domene u kojem dolazi do promjene iz konkavnosti u konveksnost ili obrnuto (tj. to je točka lokalnog ekstrema od f').

Ako je f dvaput derivabilna, točka infleksije je element domene u kojem dolazi do promjene predznaka f''. Važno! U nultočki od f ne mora doći do promjene predznaka od f, u nultočki od f' ne mora doći do promjene predznaka od f', u nultočki od f'' ne mora doći do promjene predznaka od f''.

Točke infleksije

Definicija

Točka infleksije funkcije f je element njezine domene u kojem dolazi do promjene iz konkavnosti u konveksnost ili obrnuto (tj. to je točka lokalnog ekstrema od f').

Ako je f dvaput derivabilna, točka infleksije je element domene u kojem dolazi do promjene predznaka f''. Važno! U nultočki od f ne mora doći do promjene predznaka od f, u nultočki od f' ne mora doći do promjene predznaka od f', u nultočki od f'' ne mora doći do promjene predznaka od f''.

Zadatak

Koliko najviše točaka infleksije ima radijalna gustoće vjerojatnosti vodikove 2s-orbitale

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right) \quad (r > 0)?$$

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3}\left(4r^2 - \frac{4}{a_0}r^3 + \frac{1}{a_0^2}r^4\right)\exp\left(-\frac{1}{a_0}r\right)$$

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3}\left(4r^2 - \frac{4}{a_0}r^3 + \frac{1}{a_0^2}r^4\right)\exp\left(-\frac{1}{a_0}\,r\right)$$

$$\varphi_{2s}'(r) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_0}\,r\right)}{8a_0^3}\left(8r - \frac{16}{a_0}r^2 + \frac{8}{a_0^2}r^3 + \frac{1}{a_0^3}r^4\right)$$

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3}\left(4r^2 - \frac{4}{a_0}r^3 + \frac{1}{a_0^2}r^4\right)\exp\left(-\frac{1}{a_0}\,r\right)$$

$$\varphi_{2s}'(r) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_0}\,r\right)}{8a_0^3}\left(8r - \frac{16}{a_0}r^2 + \frac{8}{a_0^2}r^3 + \frac{1}{a_0^3}r^4\right)$$

$$\varphi_{2s}''(r) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_0}\,r\right)}{8a_0^7}\left(8a_0^4 - 40a_0^3 r + 40a_0^2 r^2 - 4a_0 r^3 - r^4\right)$$

Funkcija je dvaput derivabilna na cijeloj domeni! Ima najviše četiri točke infleksije.

$$\varphi_{2s}(r) = \frac{1}{8a_0^3}\left(4r^2 - \frac{4}{a_0}r^3 + \frac{1}{a_0^2}r^4\right)\exp\left(-\frac{1}{a_0}r\right)$$

$$\varphi_{2s}'(r) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_0}r\right)}{8a_0^3}\left(8r - \frac{16}{a_0}r^2 + \frac{8}{a_0^2}r^3 + \frac{1}{a_0^3}r^4\right)$$

$$\varphi_{2s}''(r) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_0}r\right)}{8a_0^7}\left(8a_0^4 - 40a_0^3 r + 40a_0^2 r^2 - 4a_0 r^3 - r^4\right)$$

Funkcija je dvaput derivabilna na cijeloj domeni! Ima najviše četiri točke infleksije.

Descartesovo pravilo predznaka. Polinom (zapisan redoslijedom padajućih potencija) ima najviše onoliko pozitivnih nultočaka koliko je promjena predznaka koeficijenata i po parnosti mu je jednak.

$- - + - +$ ima 3 promjene predznaka, dakle imamo 1 ili 3 pozitivne nultočke.

Zamjena x s $-x$ ($x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$): $- + + + +$ ima 1 promjenu predznaka, dakle imamo 1 negativnu nultočku.

Ukupno dakle imamo ili 2 ili 4 realne nultočke. Ako su 4, onda su sigurno točke infleksije (zašto?).

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrama funkcije bile

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrama funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrema funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?
Može li c biti točka lokalnog ekstrema od f ako $f'(c)$ postoji i nije jednaka nuli?

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrema funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?
Može li c biti točka lokalnog ekstrema od f ako $f'(c)$ postoji i nije jednaka nuli?

Primjer

Ima li funkcija apsolutne vrijednosti točaka lokalnih ekstrema?

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrema funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?
Može li c biti točka lokalnog ekstrema od f ako $f'(c)$ postoji i nije jednaka nuli?

Primjer

Ima li funkcija apsolutne vrijednosti točaka lokalnih ekstrema?
Ima, 0 je točka lokalnog minimuma. Kakva je derivacija funkcije apsolutne vrijednosti u 0*?*

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrema funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?
Može li c biti točka lokalnog ekstrema od f ako $f'(c)$ postoji i nije jednaka nuli?

Primjer

Ima li funkcija apsolutne vrijednosti točaka lokalnih ekstrema?
Ima, 0 je točka lokalnog minimuma. Kakva je derivacija funkcije apsolutne vrijednosti u 0*?*
Zaključite: Mora li točka lokalnog ekstrema funkcije biti njena stacionarna točka?

Još o lokalnim ekstremima

Dosad su nam 'kandidati' za točke lokalnih ekstrema funkcije bile njene stacionarne točke, tj. nultočke njene prve derivacije.
Mora li stacionarna točka funkcije biti njena točka lokalnog ekstrema?
Može li c biti točka lokalnog ekstrema od f ako $f'(c)$ postoji i nije jednaka nuli?

Primjer

Ima li funkcija apsolutne vrijednosti točaka lokalnih ekstrema?
Ima, 0 je točka lokalnog minimuma. Kakva je derivacija funkcije apsolutne vrijednosti u 0?
Zaključite: Mora li točka lokalnog ekstrema funkcije biti njena stacionarna točka?

Realna funkcija jedne varijable može, osim u stacionarnim točkama, lokalne ekstreme postizati i u točkama u kojima nema derivacije.

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

Definicija

Kritične točke *realne funkcije jedne varijable* f *su elementi* c *njezine domene takvi da je* $f'(c) = 0$ *ili* $f'(c)$ *ne postoji.*

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

Definicija

Kritične točke *realne funkcije jedne varijable* f *su elementi* c *njezine domene takvi da je* $f'(c) = 0$ *ili* $f'(c)$ *ne postoji.*

Dakle, ako tražimo lokalne ekstreme od f, postupak je:

1. Odredimo sve njezine kritične točke.

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

Definicija

Kritične točke *realne funkcije jedne varijable* f *su elementi* c *njezine domene takvi da je* $f'(c) = 0$ *ili* $f'(c)$ *ne postoji.*

Dakle, ako tražimo lokalne ekstreme od f, postupak je:

1. Odredimo sve njezine kritične točke.
2. Za svaku kritičnu točku c zasebno provjeravamo radi li se o točki lokalnog ekstrema:
   - Provjerimo dolazi li u toj točki do promjene „smjera" rast/pad (tj. do promjene predznaka prve derivacije), ili

Postupak određivanja lokalnih ekstrema

Definicija

Kritične točke *realne funkcije jedne varijable* f *su elementi* c *njezine domene takvi da je* $f'(c) = 0$ *ili* $f'(c)$ *ne postoji.*

Dakle, ako tražimo lokalne ekstreme od f, postupak je:

1. Odredimo sve njezine kritične točke.
2. Za svaku kritičnu točku c zasebno provjeravamo radi li se o točki lokalnog ekstrema:
    - Provjerimo dolazi li u toj točki do promjene „smjera" rast/pad (tj. do promjene predznaka prve derivacije), ili
    - pomoću druge $f''(c)$ (primjenjivo samo ako $f'(c) = 0$ i $f''(c)$ postoji i nije 0).

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kritične točke ove funkcije su kritične točke od f_1 na $\langle -\infty, -3\rangle$, od f_2 na $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, 0\rangle$ i od f_3 na $\langle 0, +\infty\rangle$.

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kritične točke ove funkcije su kritične točke od f_1 na $\langle -\infty, -3\rangle$, od f_2 na $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, 0\rangle$ i od f_3 na $\langle 0, +\infty\rangle$. Uz to, -3, -2 i 0 su *možda* kritične točke.

- $f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31$, $f_1 : \langle -\infty, -3\rangle to \mathbb{R}$,
  $f_1'(x) = 20 + 9x + x^2 = (x+4)(x+5)$.

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kritične točke ove funkcije su kritične točke od f_1 na $\langle -\infty, -3\rangle$, od f_2 na $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, 0\rangle$ i od f_3 na $\langle 0, +\infty\rangle$. Uz to, -3, -2 i 0 su *možda* kritične točke.

- $f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31$, $f_1 : \langle -\infty, -3\rangle to\mathbb{R}$, $f_1'(x) = 20 + 9x + x^2 = (x+4)(x+5)$. Dakle, u $\langle -\infty, -3\rangle$ imamo kritične točke -5 i -4.
- Za $-3 < x < -2$ je $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ padajuća, a za $-2 < x < 0$ je $f_2(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ rastuća.

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kritične točke ove funkcije su kritične točke od f_1 na $\langle -\infty, -3\rangle$, od f_2 na $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, 0\rangle$ i od f_3 na $\langle 0, +\infty\rangle$. Uz to, -3, -2 i 0 su *možda* kritične točke.

- $f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31$, $f_1 : \langle -\infty, -3\rangle to \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 20 + 9x + x^2 = (x+4)(x+5)$. Dakle, u $\langle -\infty, -3\rangle$ imamo kritične točke -5 i -4.
- Za $-3 < x < -2$ je $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ padajuća, a za $-2 < x < 0$ je $f_2(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ rastuća.
- $f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ima jednu kritičnu točku i to je 1.

Zadatak

Odredite lokalne ekstreme funkcije zadane s

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31, & x \leq -3, \\ f_2(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2\right| & -3 < x < 0 \\ f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Kritične točke ove funkcije su kritične točke od f_1 na $\langle -\infty, -3\rangle$, od f_2 na $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -2, 0\rangle$ i od f_3 na $\langle 0, +\infty\rangle$. Uz to, -3, -2 i 0 su *možda* kritične točke.

- $f_1(x) = 20x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 31$, $f_1 : \langle -\infty, -3\rangle to \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 20 + 9x + x^2 = (x+4)(x+5)$. Dakle, u $\langle -\infty, -3\rangle$ imamo kritične točke -5 i -4.
- Za $-3 < x < -2$ je $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ padajuća, a za $-2 < x < 0$ je $f_2(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$ rastuća.
- $f_3(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ima jednu kritičnu točku i to je 1.

Dakle, kritične točke funkcije f su: -5, -4, (možda) -3, -2, (možda) 0 i 1.

Pritom, za f_3 znamo da je rastuća, pa 1 sigurno nije točka ekstrema, a za f_2 zbog promjene pad-rast u -2 znamo da postiže lokalni minimum 0 u točki -2, dakle treba samo za -5, -4, -3 i 0 provjeriti radi li se o točkama ekstrema.

Pritom, za f_3 znamo da je rastuća, pa 1 sigurno nije točka ekstrema, a za f_2 zbog promjene pad-rast u -2 znamo da postiže lokalni minimum 0 u točki -2, dakle treba samo za -5, -4, -3 i 0 provjeriti radi li se o točkama ekstrema.

- Za 0: malo lijevo imamo pravilo f_3 (rastuće), malo desno isto rastuće f_4, dakle 0 nije točka ekstrema.

Pritom, za f_3 znamo da je rastuća, pa 1 sigurno nije točka ekstrema, a za f_2 zbog promjene pad-rast u -2 znamo da postiže lokalni minimum 0 u točki -2, dakle treba samo za -5, -4, -3 i 0 provjeriti radi li se o točkama ekstrema.

- Za 0: malo lijevo imamo pravilo f_3 (rastuće), malo desno isto rastuće f_4, dakle 0 nije točka ekstrema.
- Za -3: $f_1'(x) = (x+4)(x+5)$ je pozitivno osim za $-5 < x < -4$, pa dakle malo lijevo od -3 funkcija f raste (po pravilu f_1), a malo desno pada (po pravilu f_2). Dakle, -3 je točka lokalnog maksimuma;

Pritom, za f_3 znamo da je rastuća, pa 1 sigurno nije točka ekstrema, a za f_2 zbog promjene pad-rast u -2 znamo da postiže lokalni minimum 0 u točki -2, dakle treba samo za -5, -4, -3 i 0 provjeriti radi li se o točkama ekstrema.

- Za 0: malo lijevo imamo pravilo f_3 (rastuće), malo desno isto rastuće f_4, dakle 0 nije točka ekstrema.
- Za -3: $f_1'(x) = (x+4)(x+5)$ je pozitivno osim za $-5 < x < -4$, pa dakle malo lijevo od -3 funkcija f raste (po pravilu f_1), a malo desno pada (po pravilu f_2). Dakle, -3 je točka lokalnog maksimuma;
- Za -4 i -5: $f_1''(x) = 2x + 9$ je pozitivno u -4, a negativno u -5 pa je -4 točka lokalnog minimuma, a 5 točka lokalnog maksimuma.