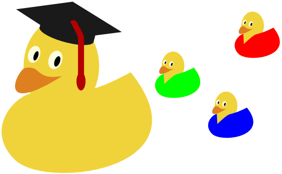
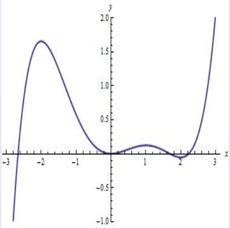
7. tjedan nastave: Globalni ekstremi. Implicitno i parametarski zadane krivulje u ravnini.

Franka Miriam Brückler



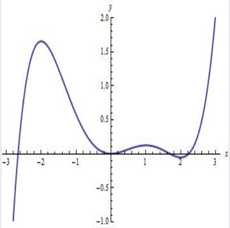
Zadatak

Pogledajte sljedeći graf neke funkcije f. Koje točke domene biste zvali točkama minimuma za f?



Zadatak

Pogledajte sljedeći graf neke funkcije f. Koje točke domene biste zvali točkama minimuma za f?



D.Z. Ako znate da joj je formula $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{15}x^3 - \frac{1}{10}x^4 + \frac{2}{25}x^5$, odredite točne vrijednosti točaka ekstrema.

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$*.Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?*

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$.*Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?*

Funkcija je polinom stupnja 4, dakle ima najviše 4 realne nultočke i najviše 3 točke lokalnih ekstrema.

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$*.Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?*

Funkcija je polinom stupnja 4, dakle ima najviše 4 realne nultočke i najviše 3 točke lokalnih ekstrema.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 2x^{-}2\right)$$

Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$. Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?

Funkcija je polinom stupnja 4, dakle ima najviše 4 realne nultočke i najviše 3 točke lokalnih ekstrema.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 2x^{-}2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2\left(x - (1+\sqrt{3})\right)\left(x - (1-\sqrt{3})\right)$$

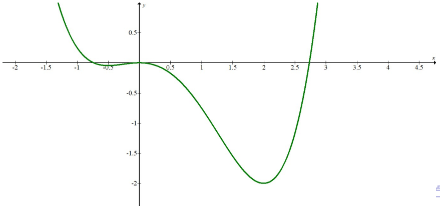
Zadatak

Skicirajte graf funkcije zadane formulom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$*.Što možete reći o njezinim točkama ekstrema?*

Funkcija je polinom stupnja 4, dakle ima najviše 4 realne nultočke i najviše 3 točke lokalnih ekstrema.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}x^2\left(x^2 - 2x^{-}2\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2\left(x - (1+\sqrt{3})\right)\left(x - (1-\sqrt{3})\right)$$



Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma?

Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma? A globalnih?

Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma? A globalnih? Moraju li iznosi lokalnih minimuma biti jednaki?

Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma? A globalnih? Moraju li iznosi lokalnih minimuma biti jednaki? A globalnih?

Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma? A globalnih?
Moraju li iznosi lokalnih minimuma biti jednaki? A globalnih?
Ako funkcija ima više od jedne točke globalnog minimuma (maksimuma), pripadni iznosi globalnih minimuma (maksimuma) su jednaki.
Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne?

Globalni ekstremi

Definicija

Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (odnosno $f(c) \leq f(x)$) za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Može li funkcija imati više točaka lokalnih minimuma? A globalnih? Moraju li iznosi lokalnih minimuma biti jednaki? A globalnih? Ako funkcija ima više od jedne točke globalnog minimuma (maksimuma), pripadni iznosi globalnih minimuma (maksimuma) su jednaki.

Ako imamo samo jednu točku lokalnog minimuma/maksimuma, ona je ujedno i točka globalnog minimuma/maksimuma — točno ili ne? Globalni minimum/maksimum je najmanji/najveći od svih lokalnih — točno ili ne?

Zadatak

U statističkoj termodinamici je vjerojatnost da se, pri temperaturi T, molekula plina mase m kreće brzinom iznosa v opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Pritom je $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ *Boltzmannova konstanta. Za svaku brzinu v iznos $p(v)\Delta v$ $(\Delta v \approx 0)$ procjenjuje vjerojatnost da je brzina molekule plina blizu v.*
Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi $20^\circ\mathrm{C}$?

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.
Postavljeno pitanje treba glasiti ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije P za dušikovu molekulu pri $20°C$.

Iznos v^* će biti brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana dušikova molekula ima brzinu *blizu* v^*.

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.
Postavljeno pitanje treba glasiti ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije P za dušikovu molekulu pri 20°C.

Iznos v^* će biti brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana dušikova molekula ima brzinu *blizu* v^*.
Označimo ☺ $= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} > 0$, ☹ $= \frac{m}{2kT} > 0$. Sad naša funkcija ima pregledniji oblik $P(v) =$ ☺$v^2 e^{-☹ v^2}$.

$$P(v) = ☺ v^2 e^{-☹ v^2} \Rightarrow P'(v) = 2☺ v e^{-☹ v^2}(1 - ☹ v^2).$$

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$.

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frownie v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frownie v^2)$:

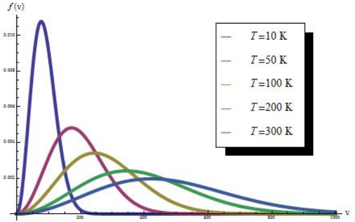
$$P(v) = \smile v^2 e^{-\frown v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smile v e^{-\frown v^2}(1 - \frown v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frown}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frown v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frown v^2)$: pozitivan za $0 < v < v_1$ i negativan za $v > v_1$. Stoga je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ točka globalnog maksimuma od P.

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frownie v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frownie v^2)$: pozitivan za $0 < v < v_1$ i negativan za $v > v_1$. Stoga je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ točka globalnog maksimuma od P. Za dušik pri zadanoj temperaturi ($M = 28{,}0134\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$) ona iznosi $v^* = 420{,}69\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Grafovi funkcije P za dušik pri nekoliko različitih temperatura:



Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije.

Primjer

Funkcija je zadana formulom $f(x) = (x-1)e^x$. *Dokažite da je* 0 *točka njenog globalnog minimuma. Koliko on iznosi?*

Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije.

Primjer

Funkcija je zadana formulom $f(x) = (x-1)e^x$. *Dokažite da je* 0 *točka njenog globalnog minimuma. Koliko on iznosi?*

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x\, e^x$$

Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije.

Primjer

Funkcija je zadana formulom $f(x) = (x-1)e^x$. *Dokažite da je* 0 *točka njenog globalnog minimuma. Koliko on iznosi?*

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x\, e^x$$

Jedina kritična točka je 0.

Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije.

Primjer

Funkcija je zadana formulom $f(x) = (x-1)e^x$. Dokažite da je 0 točka njenog globalnog minimuma. Koliko on iznosi?

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x\,e^x$$

Jedina kritična točka je 0.

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0; \quad x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Načelno, jedini način za određivanje globalnih ekstrema je analiza čitavog toka funkcije.

Primjer

Funkcija je zadana formulom $f(x) = (x-1)e^x$*. Dokažite da je* 0 *točka njenog globalnog minimuma. Koliko on iznosi?*

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x\, e^x$$

Jedina kritična točka je 0.

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0; \quad x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Dakle, f *pada svuda lijevo od 0 i raste svuda desno od 0, te je 0 točka globalnog minimuma. Globalni minimum iznosi* $f(0) = -1$.

Zadatak

U statističkoj termodinamici je vjerojatnost da se, pri temperaturi T, molekula plina mase m kreće brzinom iznosa v opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Pritom je $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38065 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$ *Boltzmannova konstanta. Za svaku brzinu v iznos $p(v)\Delta v$ ($\Delta v \approx 0$) procjenjuje vjerojatnost da je brzina molekule plina blizu v.*
Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi $20^\circ\mathrm{C}$?

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.

Postavljeno pitanje treba glasiti ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije P za dušikovu molekulu pri $20°$C.

Iznos v^* će biti brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana dušikova molekula ima brzinu *blizu* v^*.

To matematički nema smisla! Ako razmatramo vjerojatnost da neko opažanje poprimi bilo koji iznos unutar nekog intervala realnih brojeva (ovdje: $v \in [0, +\infty\rangle$), vjerojatnost bilo kojeg točno određenog iznosa je uvijek 0.

Postavljeno pitanje treba glasiti ovako:

Zadatak

Odredite točku (globalnog) maksimuma v^* funkcije P za dušikovu molekulu pri $20°$C.

Iznos v^* će biti brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno (nasumce) odabrana dušikova molekula ima brzinu *blizu* v^*.

Označimo $☺ = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} > 0$, $☹ = \frac{m}{2kT} > 0$. Sad naša funkcija ima pregledniji oblik $P(v) = ☺ v^2 e^{-☹ v^2}$.

$$P(v) = ☺ v^2 e^{-☹ v^2} \Rightarrow P'(v) = 2 ☺ v e^{-☹ v^2}(1 - ☹ v^2).$$

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$.

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frownie v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frownie v^2)$:

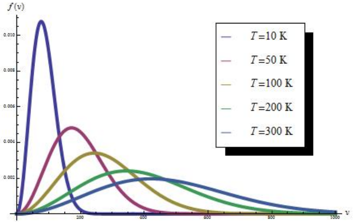
$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frownie v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frownie v^2)$: pozitivan za $0 < v < v_1$ i negativan za $v > v_1$. Stoga je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ točka globalnog maksimuma od P.

$$P(v) = \smiley v^2 e^{-\frownie v^2} \Rightarrow P'(v) = 2\smiley v e^{-\frownie v^2}(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 i $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Nadalje, $P'(v)$ je za $v > 0$ umnožak pozitivnih brojeva i $(1 - \frownie v^2)$, pa je predznak od $P'(v)$ isti kao i od $(1 - \frownie v^2)$: pozitivan za $0 < v < v_1$ i negativan za $v > v_1$. Stoga je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ točka globalnog maksimuma od P. Za dušik pri zadanoj temperaturi ($M = 28{,}0134\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$) ona iznosi $v^* = 420{,}69\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Grafovi funkcije P za dušik pri nekoliko različitih temperatura:



Globalni ekstremi neprekidnih funkcija kojima je domena segment

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

---

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija čija je *domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Globalni ekstremi neprekidnih funkcija kojima je domena segment

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija čija je *domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Budući da smo za neprekidne funkcije s domenom koja je segment sigurni da postižu i globalni minimum i globalni maksimum, dovoljno je samo odrediti njihove kritične točke i uspoređivanjem vrijednosti *funkcije* u njima utvrditi točke globalnog minimuma i maksimuma.

Globalni ekstremi neprekidnih funkcija kojima je domena segment

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija čija je *domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Budući da smo za neprekidne funkcije s domenom koja je segment sigurni da postižu i globalni minimum i globalni maksimum, dovoljno je samo odrediti njihove kritične točke i uspoređivanjem vrijednosti *funkcije* u njima utvrditi točke globalnog minimuma i maksimuma. Uočimo da su rubovi domene u ovom slučaju uvijek kritične točke.

Globalni ekstremi neprekidnih funkcija kojima je domena segment

Bolzano-Weierstraßov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna[a], onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum.

[a] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: funkcija čija je *domena segment* je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.

Budući da smo za neprekidne funkcije s domenom koja je segment sigurni da postižu i globalni minimum i globalni maksimum, dovoljno je samo odrediti njihove kritične točke i uspoređivanjem vrijednosti *funkcije* u njima utvrditi točke globalnog minimuma i maksimuma. Uočimo da su rubovi domene u ovom slučaju uvijek kritične točke.

Važno! Restrikcije elementarnih funkcija te njihovih zbrojeva, razlika, umnožaka, kvocijenata i kompozicija s funkcijom apsolutne

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x-4)(x+3)$$

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6\,(x - 4)\,(x + 3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3*, ako su u domeni.*

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x-4)(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6\,(x - 4)\,(x + 3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x-4)(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6\,(x-4)\,(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3-3x^2-72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1=[-5,5]$, $D_2=[0,5]$, $D_3=[-2,0]$.

$$f'(x)=6x^2-6x-72=6\,(x-4)\,(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5)=35$, $f(-3)=135$, $f(4)=-208$, $f(5)=-185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5. $f(0)=0$, $f(4)=-208$, $f(5)=-185$

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x-4)(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5. $f(0) = 0$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* 0.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6\,(x-4)\,(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5. $f(0) = 0$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* 0.
3. *Kritične točke:* -2, 0.

Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$, *ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6\,(x - 4)\,(x + 3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3, *ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5. $f(0) = 0$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4, *globalni maksimum u* 0.
3. *Kritične točke:* -2, 0. $f(-2) = 116$, $f(0) = 0$

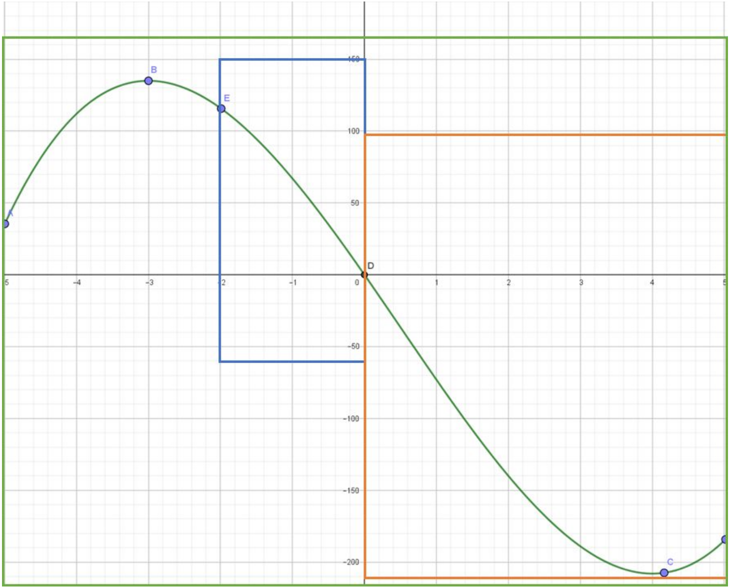
Primjer

Odredite globalne ekstreme triju funkcija zadanih istom formulom $f(x)2x^3 - 3x^2 - 72x$*, ali s trima različitim domenama* $D_1 = [-5, 5]$, $D_2 = [0, 5]$, $D_3 = [-2, 0]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72 = 6(x-4)(x+3)$$

Stacionarne točke su 4 *i* -3*, ako su u domeni.*

1. *Kritične točke:* -5, -3, 4, 5. $f(-5) = 35$, $f(-3) = 135$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4*, globalni maksimum u* -3.
2. *Kritične točke:* 0, 4, 5. $f(0) = 0$, $f(4) = -208$, $f(5) = -185$ *Globalni minimum u* 4*, globalni maksimum u* 0.
3. *Kritične točke:* -2, 0. $f(-2) = 116$, $f(0) = 0$ *Globalni minimum u* 0*, globalni maksimum u* -2.


B
E
A
D
C
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5

Zadatak

Pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina rad je opisan formulom

$$w = nRT\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}+\left(\frac{p_2}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-2\right),$$

gdje je $\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} \in \langle 0,1\rangle$ *konstantni omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta,* $p_1 > p_2$ *su početni odnosno konačni tlak, a i* n, R, T *su konstante. Pri kojem je tlaku izvršeni rad minimalan?*

Zadatak

Pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina rad je opisan formulom

$$w = nRT\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}+\left(\frac{p_2}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-2\right),$$

gdje je $\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}} \in \langle 0,1\rangle$ *konstantni omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta,* $p_1 > p_2$ *su početni odnosno konačni tlak, a i* n, R, T *su konstante. Pri kojem je tlaku izvršeni rad minimalan?*

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right),$$

domena funkcije w je $[p_2, p_1]$ i w je neprekidna; $a = nRT > 0$ i $g = \frac{\gamma-1}{\gamma} < 0$ su konstante.

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{a}{g}\left(gp_1^{-g}p^{g-1} - gp_2^g p^{-g-1}\right) = a \cdot \frac{p^{2g} - (p_1 p_2)^g}{p_1^g p^{g+1}}$$

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{a}{g}\left(gp_1^{-g}p^{g-1} - gp_2^g p^{-g-1}\right) = a \cdot \frac{p^{2g} - (p_1p_2)^g}{p_1^g p^{g+1}}$$

$$p^{2g} - (p_1p_2)^g = (p^2)^g - (p_1p_2)^g = 0 \Rightarrow p^2 = p_1p_2 \Rightarrow p^* = +\sqrt{p_1p_2}$$

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g} p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{dp} = \frac{a}{g}\left(g p_1^{-g} p^{g-1} - g p_2^g p^{-g-1}\right) = a \cdot \frac{p^{2g} - (p_1 p_2)^g}{p_1^g p^{g+1}}$$

$$p^{2g} - (p_1 p_2)^g = (p^2)^g - (p_1 p_2)^g = 0 \Rightarrow p^2 = p_1 p_2 \Rightarrow p^* = +\sqrt{p_1 p_2}$$

To je jedina stacionarna točka funkcije w pa su ukupno kritične točke od w redom p_2, p^* i p_1.

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{a}{g}\left(gp_1^{-g}p^{g-1} - gp_2^g p^{-g-1}\right) = a \cdot \frac{p^{2g} - (p_1p_2)^g}{p_1^g p^{g+1}}$$

$$p^{2g} - (p_1p_2)^g = (p^2)^g - (p_1p_2)^g = 0 \Rightarrow p^2 = p_1p_2 \Rightarrow p^* = +\sqrt{p_1p_2}$$

To je jedina stacionarna točka funkcije w pa su ukupno kritične točke od w redom p_2, p^* i p_1. $w(p_2) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p_2^g - 1\right)$,
$w(p_1) = \frac{a}{g}\left(p_2^{-g}p_1^g - 1\right)$, $w(p^*) =$
$= \frac{a}{g}\left(p_1^{-g}p_1^{g/2}p_2^{g/2} + p_2^g p_1^{-g/2}p_2^{-g/2} - 2\right) = \frac{2a}{g}\left(p_1^{-g/2}p_2^{g/2} - 1\right)$,

...

Dvije kritične točke su očito p_1 i p_2, a ostale moraju biti stacionarne (zašto?) točke od w između ta dva tlaka.

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g} p^g + p_2^g p^{-g} - 2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}p} = \frac{a}{g}\left(g p_1^{-g} p^{g-1} - g p_2^g p^{-g-1}\right) = a \cdot \frac{p^{2g} - (p_1 p_2)^g}{p_1^g p^{g+1}}$$

$$p^{2g} - (p_1 p_2)^g = (p^2)^g - (p_1 p_2)^g = 0 \Rightarrow p^2 = p_1 p_2 \Rightarrow p^* = +\sqrt{p_1 p_2}$$

To je jedina stacionarna točka funkcije w pa su ukupno kritične točke od w redom p_2, p^* i p_1. $w(p_2) = \frac{a}{g}\left(p_1^{-g} p_2^g - 1\right)$, $w(p_1) = \frac{a}{g}\left(p_2^{-g} p_1^g - 1\right)$, $w(p^*) =$
$= \frac{a}{g}\left(p_1^{-g} p_1^{g/2} p_2^{g/2} + p_2^g p_1^{-g/2} p_2^{-g/2} - 2\right) = \frac{2a}{g}\left(p_1^{-g/2} p_2^{g/2} - 1\right)$,
…Alternativni argument: Za $p < p^*$ je w' negativan, a za $p > p^*$ pozitivan pa je p^* točka globalnog minimuma za w.

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Primjer

Za koji a je točka $(1, 1)$ na Kartezijevom listu $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$?

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Primjer

Za koji a je točka $(1, 1)$ *na Kartezijevom listu* $x^3 + y^3 = 3axy$ *(*$a > 0$*)?* $1^3 + 1^3 = 3a$, $a = \frac{2}{3}$.

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Primjer

Za koji a je točka $(1, 1)$ *na Kartezijevom listu* $x^3 + y^3 = 3axy$ *(*$a > 0$*)?* $1^3 + 1^3 = 3a$, $a = \frac{2}{3}$.
Zamjena $x \leftrightarrow y$ *ne mijenja jednadžbu: Kartezijev list je simetričan s obzirom na pravac* $y = x$.

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Primjer

Za koji a je točka $(1, 1)$ *na Kartezijevom listu* $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$*?* $1^3 + 1^3 = 3a$, $a = \frac{2}{3}$.
Zamjena $x \leftrightarrow y$ *ne mijenja jednadžbu: Kartezijev list je simetričan s obzirom na pravac* $y = x$. *Zamjena* $x \leftrightarrow -x$ *odnosno* $y \leftrightarrow -y$ *mijenja jednadžbu: Kartezijev list nije simetričan s obzirom na koordinatne osi.*

Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

Primjer

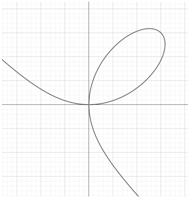
Za koji a je točka $(1, 1)$ na Kartezijevom listu $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$? $1^3 + 1^3 = 3a$, $a = \frac{2}{3}$.
Zamjena $x \leftrightarrow y$ ne mijenja jednadžbu: Kartezijev list je simetričan s obzirom na pravac $y = x$. Zamjena $x \leftrightarrow -x$ odnosno $y \leftrightarrow -y$ mijenja jednadžbu: Kartezijev list nije simetričan s obzirom na koordinatne osi. Ako $x, y < 0$, lijeva strana jednadžbe je negativna, a desna pozitivna: Kartezijev list nema točaka u III. kvadrantu.

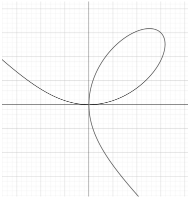
Implicitno zadane krivulje

Jednadžba općeg pravca u ravnini je $Ax + By = C$. Jednadžba logaritamske krivulje je $y = \log_a x$. Jednadžba kružnice u ravnini je $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Radi se o primjerima jednodimenzionalnih podskupova ravnine: krivuljama. Opći oblik tzv. implicitne jednadžbe krivulje u ravnini je $F(x, y) = 0$.

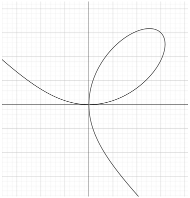
Primjer

Za koji a je točka $(1, 1)$ na Kartezijevom listu $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$? $1^3 + 1^3 = 3a$, $a = \frac{2}{3}$.
Zamjena $x \leftrightarrow y$ ne mijenja jednadžbu: Kartezijev list je simetričan s obzirom na pravac $y = x$. Zamjena $x \leftrightarrow -x$ odnosno $y \leftrightarrow -y$ mijenja jednadžbu: Kartezijev list nije simetričan s obzirom na koordinatne osi. Ako $x, y < 0$, lijeva strana jednadžbe je negativna, a desna pozitivna: Kartezijev list nema točaka u III. kvadrantu. Uvrštavanje $y = 0$, odnosno $x = 0$ daje nam sjecišta s koordinatnim osima: Jedino sjecište je ishodište.





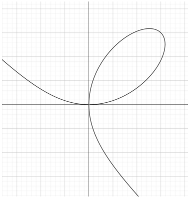
Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable.



Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable. No, u okolini većine točaka takve krivulje se dio krivulje (blizu promatrane točke) može shvatiti kao graf neke realne funkcije jedne varijable:

Teorem o implicitnoj funkciji (ne sasvim precizan)

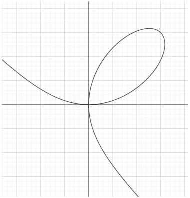
Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i (x_0, y_0) neka točka na toj krivulji,



Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable. No, u okolini većine točaka takve krivulje se dio krivulje (blizu promatrane točke) može shvatiti kao graf neke realne funkcije jedne varijable:

Teorem o implicitnoj funkciji (ne sasvim precizan)

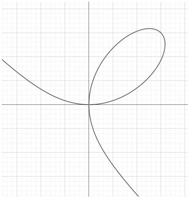
Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i (x_0, y_0) neka točka na toj krivulji, dakle je $F(x_0, y_0) = 0$. Promatramo funkciju $G(y) = F(x_0, y)$.



Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable. No, u okolini većine točaka takve krivulje se dio krivulje (blizu promatrane točke) može shvatiti kao graf neke realne funkcije jedne varijable:

Teorem o implicitnoj funkciji (ne sasvim precizan)

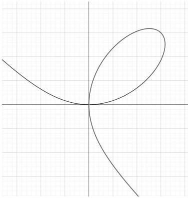
Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i (x_0, y_0) neka točka na toj krivulji, dakle je $F(x_0, y_0) = 0$. Promatramo funkciju $G(y) = F(x_0, y)$. Ako je $G'(y_0) \neq 0$



Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable. No, u okolini većine točaka takve krivulje se dio krivulje (blizu promatrane točke) može shvatiti kao graf neke realne funkcije jedne varijable:

Teorem o implicitnoj funkciji (ne sasvim precizan)

Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i (x_0, y_0) neka točka na toj krivulji, dakle je $F(x_0, y_0) = 0$. Promatramo funkciju $G(y) = F(x_0, y)$. Ako je $G'(y_0) \neq 0$ (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke (x_0, y_0) predstavlja graf neke funkcije $y = f(x)$.



Općenito se iz implicitne jednadžbe $F(x, y) = 0$ krivulje neće moći izraziti y u ovisnosti o x, odnosno krivulje zadane implicitno općenito nisu grafovi realnih funkcija jedne varijable. No, u okolini većine točaka takve krivulje se dio krivulje (blizu promatrane točke) može shvatiti kao graf neke realne funkcije jedne varijable:

Teorem o implicitnoj funkciji (ne sasvim precizan)

Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i (x_0, y_0) neka točka na toj krivulji, dakle je $F(x_0, y_0) = 0$. Promatramo funkciju $G(y) = F(x_0, y)$. Ako je $G'(y_0) \neq 0$ (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke (x_0, y_0) predstavlja graf neke funkcije $y = f(x)$.

Dakle, jednadžbom $F(x, y) = 0$ (oko bilo koje točke (x_0, y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) je implicitno zadana funkcija $y = f(x)$ s domenom koja je neki interval oko x_0.

Dakle, jednadžbom $F(x, y) = 0$ (oko bilo koje točke (x_0, y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) je implicitno zadana funkcija $y = f(x)$ s domenom koja je neki interval oko x_0.

Zadatak

Izvedite jednadžbu tangente na kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ (u njenoj točki (x_0, y_0))!

Dakle, jednadžbom $F(x,y)=0$ (oko bilo koje točke (x_0,y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) je implicitno zadana funkcija $y=f(x)$ s domenom koja je neki interval oko x_0.

Zadatak

Izvedite jednadžbu tangente na kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ (u njenoj točki (x_0,y_0))!

$$F(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2-r^2 \Rightarrow$$

$$G(y)=(x_0-p)^2+(y-q)^2-r^2=\text{const.}+(y-q)^2 \Rightarrow G'(y)=2(y-q)$$

Dakle, jednadžbom $F(x,y)=0$ (oko bilo koje točke (x_0,y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) je implicitno zadana funkcija $y=f(x)$ s domenom koja je neki interval oko x_0.

Zadatak

Izvedite jednadžbu tangente na kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ *(u njenoj točki* (x_0,y_0)*)!*

$$F(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2-r^2 \Rightarrow$$

$$G(y)=(x_0-p)^2+(y-q)^2-r^2=\text{const.}+(y-q)^2 \Rightarrow G'(y)=2(y-q)$$

Dakle, problem nastupa ako je $y_0=q$, tj. u točkama $(p\pm r,q)$,

Dakle, jednadžbom $F(x, y) = 0$ (oko bilo koje točke (x_0, y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) je implicitno zadana funkcija $y = f(x)$ s domenom koja je neki interval oko x_0.

Zadatak

Izvedite jednadžbu tangente na kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ (u njenoj točki (x_0, y_0))!

$$F(x, y) = (x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 \Rightarrow$$

$$G(y) = (x_0-p)^2+(y-q)^2-r^2 = \text{const.}+(y-q)^2 \Rightarrow G'(y) = 2(y-q)$$

Dakle, problem nastupa ako je $y_0 = q$, tj. u točkama $(p \pm r, q)$, gdje je tangenta vertikalna. U tim točkama jednadžbe tangenti su $x = p \pm r$.

Za ostale točke kružnice vrijedi teorem o implicitnoj funkciji, dakle je $y = f(x)$. Stoga je naša jednadžba u okolini takvih točaka (x, y) oblika

$$(x-p)^2 + (f(x)-q)^2 = r^2$$

pa se može derivirati po x koristeći lančano pravilo:

$$2(x-p) + 2(f(x)-q)\, f'(x) = 0.$$

Za ostale točke kružnice vrijedi teorem o implicitnoj funkciji, dakle je $y = f(x)$. Stoga je naša jednadžba u okolini takvih točaka (x, y) oblika

$$(x-p)^2 + (f(x)-q)^2 = r^2$$

pa se može derivirati po x koristeći lančano pravilo:

$$2(x-p) + 2(f(x)-q)\,f'(x) = 0.$$

Kraće:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

Za ostale točke kružnice vrijedi teorem o implicitnoj funkciji, dakle je $y = f(x)$. Stoga je naša jednadžba u okolini takvih točaka (x, y) oblika

$$(x-p)^2 + (f(x)-q)^2 = r^2$$

pa se može derivirati po x koristeći lančano pravilo:

$$2(x-p) + 2(f(x)-q)\, f'(x) = 0.$$

Kraće:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

$$2(x-p) + 2(y-q)y' = 0,$$

$$y' =$$

Za ostale točke kružnice vrijedi teorem o implicitnoj funkciji, dakle je $y = f(x)$. Stoga je naša jednadžba u okolini takvih točaka (x, y) oblika

$$(x-p)^2 + (f(x)-q)^2 = r^2$$

pa se može derivirati po x koristeći lančano pravilo:

$$2(x-p) + 2(f(x)-q)\, f'(x) = 0.$$

Kraće:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

$$2(x-p) + 2(y-q)y' = 0,$$

$$y' = -\frac{y-q}{x-p}, \quad x \neq p.$$

Takvo deriviranje se naziva implicitnim deriviranjem. Slijedi da tražena jednadžba tangente za $x_0 \neq p$ glasi

Za ostale točke kružnice vrijedi teorem o implicitnoj funkciji, dakle je $y = f(x)$. Stoga je naša jednadžba u okolini takvih točaka (x, y) oblika

$$(x-p)^2 + (f(x)-q)^2 = r^2$$

pa se može derivirati po x koristeći lančano pravilo:

$$2(x-p) + 2(f(x)-q)\,f'(x) = 0.$$

Kraće:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 / \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

$$2(x-p) + 2(y-q)y' = 0,$$

$$y' = -\frac{y-q}{x-p}, \quad x \neq p.$$

Takvo deriviranje se naziva implicitnim deriviranjem. Slijedi da tražena jednadžba tangente za $x_0 \neq p$ glasi
$(x-p)(x_0-p) + (y-p)(y_0-q) = r^2$.

Zadatak

Odredite koeficijent smjera tangente na Kartezijev list u njegovoj točki (x_0, y_0)*?*

Zadatak

Odredite koeficijent smjera tangente na Kartezijev list u njegovoj točki (x_0, y_0)?

$$x^3 + y^3 = 3axy \text{ deriviramo po } x \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3ay + 3axy',$$

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}, \quad k = \frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0}, \quad x_0^3 + y_0^3 = 3ax_0y_0, y_0^2 \neq ax_0$$

$$k = \frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0}$$

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a.$$

U kojim točakama te krivulje tangente imaju koeficijent smjera -1*?*

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a.$$

U kojim točakama te krivulje tangente imaju koeficijent smjera -1*?*

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow$$

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a.$$

U kojim točakama te krivulje tangente imaju koeficijent smjera -1*?*

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = -1 \Rightarrow$$

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a.$$

U kojim točakama te krivulje tangente imaju koeficijent smjera -1?

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = -1 \Rightarrow$$

$$y = -x \& x^{2/3} + y^{2/3} = a \Rightarrow$$

Zadatak

Krivulja astroida opisana je jednadžbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a.$$

U kojim točakama te krivulje tangente imaju koeficijent smjera -1*?*

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = -1 \Rightarrow$$

$$y = -x \& x^{2/3} + y^{2/3} = a \Rightarrow$$

$$2x^{2/3} = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a^3}{8}}, y = \mp\sqrt{\frac{a^3}{8}}.$$

Parametarski zadane krivulje

Zadatak

Kakva je putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku apscisa jednaka (po iznosu) kosinusu tog trenutka, a ordinata sinusu?

Parametarski zadane krivulje

Zadatak

Kakva je putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku apscisa jednaka (po iznosu) kosinusu tog trenutka, a ordinata sinusu? To je jedinična kružnica: $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Zadatak

Kako izgleda krivulja cikloida koja je putanja točke na rubu kotača koji se kotrlja po pravcu?

Parametarski zadane krivulje

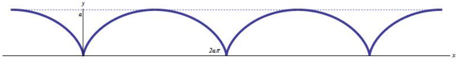
Zadatak

Kakva je putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku apscisa jednaka (po iznosu) kosinusu tog trenutka, a ordinata sinusu? To je jedinična kružnica: $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Zadatak

Kako izgleda krivulja cikloida koja je putanja točke na rubu kotača koji se kotrlja po pravcu?

`https://www.youtube.com/watch?v=u0gaKZlikmk`



$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

Parametarski zadana krivulja (u ravnini) je skup točaka $(x(t), y(t))$, gdje su x i y realne funkcije iste realne varijable $t \in I$ (I je neki zatvoren interval, tj. segment). Pišemo:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$t \in I.$$

Parametarski zadana krivulja (u ravnini) je skup točaka $(x(t), y(t))$, gdje su x i y realne funkcije iste realne varijable $t \in I$ (I je neki zatvoren interval, tj. segment). Pišemo:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$t \in I.$$

Dva važna para parametarskih jednadžbi krivulja u ravnini su

- **Kružnica** radijusa R sa središtem u (x_0, y_0): $x = x_0 + R\cos t$, $y = y_0 + R\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$;
- **Elipsa** s poluosima a i b i središtem u ishodištu: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$.

Parametarske derivacije

U fizikalnoj interpretaciji parametarski zadane krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi $x'(t)$ i $y'(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t. Uobičajeno je umjesto $x'(t)$ i $y'(t)$ pisati $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$.

Parametarske derivacije

U fizikalnoj interpretaciji parametarski zadane krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi $x'(t)$ i $y'(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t. Uobičajeno je umjesto $x'(t)$ i $y'(t)$ pisati $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$.

Uređeni par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ predstavlja brzinu (vektor brzine) u trenutku t ($\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{i} + \dot{y}(t)\overrightarrow{j}$). Iznos brzine u trenutku t je

$$v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

Parametarske derivacije

U fizikalnoj interpretaciji parametarski zadane krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi $x'(t)$ i $y'(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t. Uobičajeno je umjesto $x'(t)$ i $y'(t)$ pisati $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$.

Uređeni par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ predstavlja brzinu (vektor brzine) u trenutku t ($\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$). Iznos brzine u trenutku t je

$$v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}.$$

Koeficijent smjera tangente u točki krivulje u kojoj se nalazimo u trenutku t (a na toj tangenti leži vektor brzine) je $\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

Zadatak

Odredite iznos brzine i jednadžbu tangente u proizvoljnoj točki cikloide.

Zadatak

Odredite iznos brzine i jednadžbu tangente u proizvoljnoj točki cikloide.

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \dot{y}(t) = a \sin t$$

Zadatak

Odredite iznos brzine i jednadžbu tangente u proizvoljnoj točki cikloide.

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \dot{y}(t) = a \sin t$$

$$v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Zadatak

Odredite iznos brzine i jednadžbu tangente u proizvoljnoj točki cikloide.

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \dot{y}(t) = a \sin t$$

$$v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Zadatak

Može li se i, ako da, kako (a ako ne, zašto) svaki graf realne funkcije f jedne varijable zadane na segmentu opisati parametarski?

Zadatak

Odredite iznos brzine i jednadžbu tangente u proizvoljnoj točki cikloide.

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$
$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t), \dot{y}(t) = a \sin t$$

$$v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} =$$
$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Zadatak

Može li se i, ako da, kako (a ako ne, zašto) svaki graf realne funkcije f jedne varijable zadane na segmentu opisati parametarski?

Da. Najjednostavniji način: $x = t$, $y = f(t)$.