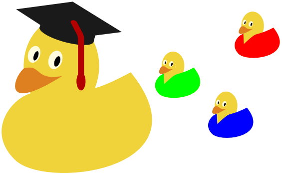
8. tjedan nastave: Polarne koordinate. Kompleksni brojevi.

Franka Miriam Brückler



Polarni koordinatni sustav

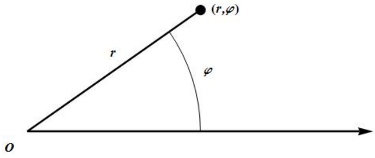
U pravokutnom koordinatnom sustavu položaj točke opisujemo s dva realna broja (apscisom x i ordinatom y), koji su (orijentirane) udaljenosti točke do dva međusobno okomita brojevna pravca (koordinatne osi). Najjednostavnije jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu imaju pravci paralelni koordinatnim osima: $x = c$ odnosno $y = L$.

Polarni koordinatni sustav

U pravokutnom koordinatnom sustavu položaj točke opisujemo s dva realna broja (apscisom x i ordinatom y), koji su (orijentirane) udaljenosti točke do dva međusobno okomita brojevna pravca (koordinatne osi). Najjednostavnije jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu imaju pravci paralelni koordinatnim osima: $x = c$ odnosno $y = L$.

U polarnom koordinatnom sustavu položaj točke također opisujemo s dva realna broja, ali im je smisao drugačiji:

$$(r, \varphi); r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

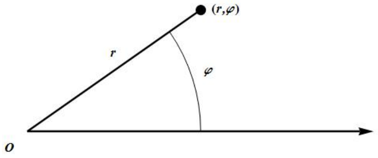


Polarni koordinatni sustav

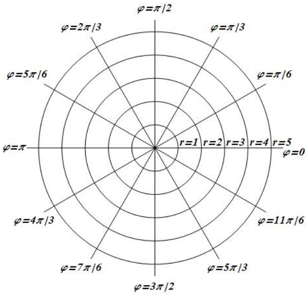
U pravokutnom koordinatnom sustavu položaj točke opisujemo s dva realna broja (apscisom x i ordinatom y), koji su (orijentirane) udaljenosti točke do dva međusobno okomita brojevna pravca (koordinatne osi). Najjednostavnije jednadžbe u pravokutnom koordinatnom sustavu imaju pravci paralelni koordinatnim osima: $x = c$ odnosno $y = L$.

U polarnom koordinatnom sustavu položaj točke također opisujemo s dva realna broja, ali im je smisao drugačiji:

$$(r, \varphi); r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

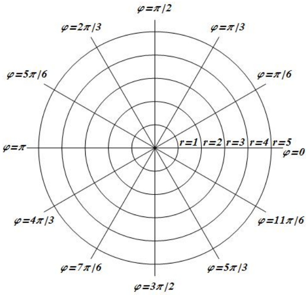


Što u polarnom koordinantom sustavu predstavlja jednadžba $r = 2{,}5$? $\varphi = 3\pi/2$?



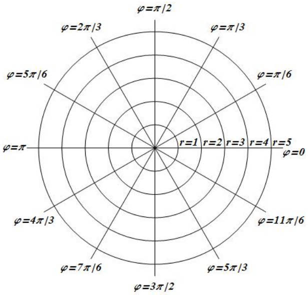
Zadatak

Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$? $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$?



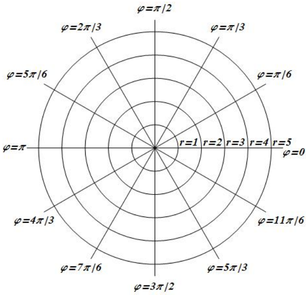
Zadatak

Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$? $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$?



Zadatak

Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$? $(1, 0)$? $(0, 1)$? $(-1, 0)$? $(1, \pi/2)$? $(2, \pi/3)$? $(1, -\pi/3)$? $(\pi, 45^\circ)$? *Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između* 0 *i* 1*!*



Zadatak

Gdje se u polarnom koordinatnom sustavu nalaze točke s koordinatama $(r, \varphi) = (0, 0)$*?* $(1, 0)$*?* $(0, 1)$*?* $(-1, 0)$*?* $(1, \pi/2)$*?* $(2, \pi/3)$*?* $(1, -\pi/3)$*?* $(\pi, 45^\circ)$*? Šrafirajte dio ravnine koji u polarnom koordinatnom sustavu ima obje koordinate između* 0 *i* 1*!*

Uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i polarne osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa imamo sljedeću vezu između Kartezijevih i polarnih koordinata u ravnini:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Zadatak

Koje su polarne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-2, 2)$?

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Zadatak

Koje su polarne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-2, 2)$*?*

$x = -2, y = 2 \Rightarrow r = \sqrt{8}, \operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -45^\circ$?!

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

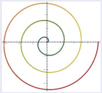
Zadatak

Koje su polarne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-2, 2)$?

$x = -2, y = 2 \Rightarrow r = \sqrt{8}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -45°$?! Ne, nego $\varphi = 135°$.

Primjer

Zadan je polupravac o s početkom u ishodištu O. Točka se od O jednoliko giba po o dok o jednoliko rotira oko O. Putanja te točke je Arhimedova spirala jednadžbe $r = a\varphi$.



Zadatak

Skicirajte nekoliko točaka hiperbolične spirale zadane jednadžbom $r = 1/\varphi$. *Možete li naslutiti njen oblik?*

Zadatak

Skicirajte nekoliko točaka hiperbolične spirale zadane jednadžbom $r = 1/\varphi$. Možete li naslutiti njen oblik?

Kako skicirati krivulju zadanu jednadžbom $r = f(\varphi)$ u polarnim koordinatama? (dakle, kako prikazati graf realne funkcije jedne varijable u polarnom umjesto Kartezijevog koordinatnog sustava?)

Zadatak

Skicirajte nekoliko točaka hiperbolične spirale zadane jednadžbom $r = 1/\varphi$. Možete li naslutiti njen oblik?

Kako skicirati krivulju zadanu jednadžbom $r = f(\varphi)$ u polarnim koordinatama? (dakle, kako prikazati graf realne funkcije jedne varijable u polarnom umjesto Kartezijevog koordinatnog sustava?)

Primjer

$$r = 1 + 2\cos(3\varphi).$$

Prvo: U polarnom koordinatnom sustavu dobivamo samo točke s $r \geq 0$*:*

$$1 + 2\cos(3\varphi) \geq 0 \Rightarrow \cos(3\varphi) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\varphi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

f je periodična s periodom $\frac{2\pi}{3}$ koji je cjelobrojni dio (trećina) punog kruga. Takve krivulje su zatvorene (nakon što φ prođe jedan temeljni period dobijemo polaznu točku). Stoga je za takve krivulje dovoljno crtanje unutar jednog punog kruga ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$-\frac{2\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{14\pi}{9}$$

f je periodična s periodom $\frac{2\pi}{3}$ koji je cjelobrojni dio (trećina) punog kruga. Takve krivulje su zatvorene (nakon što φ prođe jedan temeljni period dobijemo polaznu točku). Stoga je za takve krivulje dovoljno crtanje unutar jednog punog kruga ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ili $0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$-\frac{2\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{14\pi}{9}$$

Zbog periodičnosti dijelovi krivulje u ta tri podintervala polarnog kuta su sukladni (rotacijski simetrični) pa je dovoljno nacrtati jedan.

f je periodična s periodom $\frac{2\pi}{3}$ koji je cjelobrojni dio (trećina) punog kruga. Takve krivulje su zatvorene (nakon što φ prođe jedan temeljni period dobijemo polaznu točku). Stoga je za takve krivulje dovoljno crtanje unutar jednog punog kruga ($-\pi \le \varphi \le \pi$ ili $0 \le \varphi \le 2\pi$):

$$-\frac{2\pi}{9} \le \varphi \le \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9} \le \varphi \le \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9} \le \varphi \le \frac{14\pi}{9}$$

Zbog periodičnosti dijelovi krivulje u ta tri podintervala polarnog kuta su sukladni (rotacijski simetrični) pa je dovoljno nacrtati jedan.

Raspon r nam kaže unutar kojih kružnica se (ako takve postoje) nalazi krivulja:

$$1 + 2\cos(3\varphi) \in [1 + 2\cdot(-1), 1 + 2\cdot 1] = [-1, 3] \Rightarrow 0 \le r \le 3$$

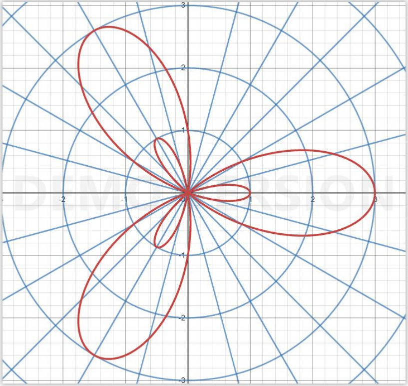
Maksimalni r: $\cos(3\varphi) = 1$, $\varphi = 0, \pm\frac{2\pi}{3}$. Minimalni r: $\cos(3\varphi) = -\frac{1}{2}$, $\varphi = \pm\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Ako je f parna onda je

Ako je f parna onda je krivulja simetrična s obzirom na pravac $\varphi = k\pi$ (horizonalna os simetrije). To je slučaj za našu krivulju.

Ako je f parna onda je krivulja simetrična s obzirom na pravac $\varphi = k\pi$ (horizonalna os simetrije). To je slučaj za našu krivulju. Za $-\frac{2\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}$: $r(\pm\frac{2\pi}{9}) = 0$, $r(\pm\frac{\pi}{9}) = 2$, $r(0) = 3$.

Ako je f parna onda je krivulja simetrična s obzirom na pravac $\varphi = k\pi$ (horizonalna os simetrije). To je slučaj za našu krivulju. Za $-\frac{2\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}$: $r(\pm\frac{2\pi}{9}) = 0$, $r(\pm\frac{\pi}{9}) = 2$, $r(0) = 3$.



Koeficijent smjera tangente

Ako deriviramo jednadžbu krivulje $r = f(\varphi)$ po φ, to je obično deriviranje funkcije jedne varijable, ali iznos derivacije ovdje ne odgovara nagibu tangente na promatranu krivulju gledanu u Kks-u, već opisuje relativnu promjenu udaljenosti od ishodišta u odnosu na promjenu polarnog kuta.

Koeficijent smjera tangente

Ako deriviramo jednadžbu krivulje $r = f(\varphi)$ po φ, to je obično deriviranje funkcije jedne varijable, ali iznos derivacije ovdje ne odgovara nagibu tangente na promatranu krivulju gledanu u Kks-u, već opisuje relativnu promjenu udaljenosti od ishodišta u odnosu na promjenu polarnog kuta.
Želimo li odrediti koeficijent smjera tangente na krivulju $r = f(\varphi)$ u točki (r_0, ϑ_0), dobijemo ga ovako:

$$k = y'(x_0) = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} =$$

$$= \frac{r'(\varphi_0)\sin(\varphi_0) + r_0\cos(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)\cos(\varphi_0) - r_0\sin(\varphi_0)} : \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)} =$$

$$\frac{r_0 + r'(\varphi_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0\mathrm{tg}\,\varphi_0}.$$

Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica i se definira kao jedno od dva rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 1 = 0.$$

Koje je drugo rješenje?

Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica i se definira kao jedno od dva rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 1 = 0.$$

Koje je drugo rješenje?

$$i^2 = (-i)^2 = -1$$

Kompleksni brojevi se definiraju kao brojevi koji se mogu zapisati u obliku

$$z = x + yi$$

s $x, y \in R$. Broj x se zove realni dio, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z (dakle: i realni i imaginarni dio kompleksnog broja su *realni* brojevi). Kako vidimo da je $\mathbb{R}$ podskup od $\mathbb{C}$?

Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica i se definira kao jedno od dva rješenja kvadratne jednadžbe

$$x^2 + 1 = 0.$$

Koje je drugo rješenje?

$$i^2 = (-i)^2 = -1$$

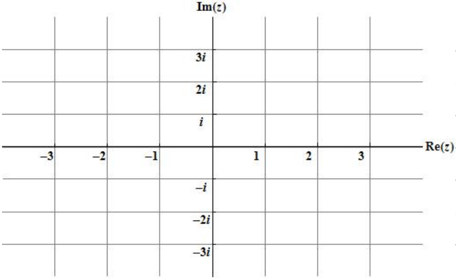
Kompleksni brojevi se definiraju kao brojevi koji se mogu zapisati u obliku

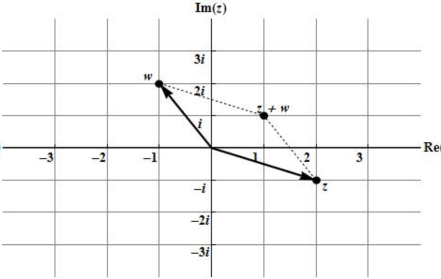
$$z = x + yi$$

s $x, y \in R$. Broj x se zove realni dio, a broj y imaginarni dio kompleksnog broja z (dakle: i realni i imaginarni dio kompleksnog broja su *realni* brojevi). Kako vidimo da je $\mathbb{R}$ podskup od $\mathbb{C}$? Brojeve kojima je realni dio nula zovemo čisto imaginarnima.

Kompleksna ravnina i zbrajanje/oduzimanje kompleksnih brojeva

$$z = x + iy \leftrightarrow z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$





$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i.$$

Suprotni broj od $x + yi$ je $-x - yi$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove suprotne brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije[1] zadane s

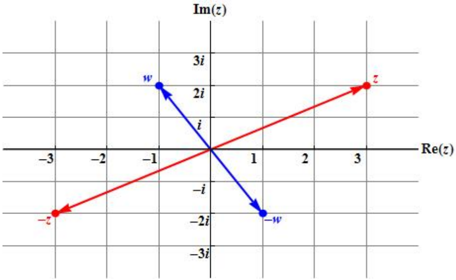
$$f(z) = -z?$$

[1] Kompleksna funkcija je funkcija koja poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{C}$.

Suprotni broj od $x + yi$ je $-x - yi$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove suprotne brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije[1] zadane s

$$f(z) = -z?$$

U kompleksnoj ravnini ova funkcija je centralna simetrija s obzirom na ishodište.



[1] Kompleksna funkcija je funkcija koja poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{C}$.

Nacrtajte točke koje u kompleksnoj ravnini predstavljaju četiri proizvoljno odabrana kompleksna broja. Zatim nacrtajte rezultat pribrajanja broja 1 tim brojevima.

Nacrtajte točke koje u kompleksnoj ravnini predstavljaju četiri proizvoljno odabrana kompleksna broja. Zatim nacrtajte rezultat pribrajanja broja 1 tim brojevima. Sad nacrtajte rezultat pribrajanja broja $-i$ tim brojevima.

Nacrtajte točke koje u kompleksnoj ravnini predstavljaju četiri proizvoljno odabrana kompleksna broja. Zatim nacrtajte rezultat pribrajanja broja 1 tim brojevima. Sad nacrtajte rezultat pribrajanja broja $-i$ tim brojevima. Na kraju nacrtajte rezultat pribrajanja broja $3+2i$ tim brojevima. Možete li zaključiti koji je efekt kompleksne funkcije zadane s

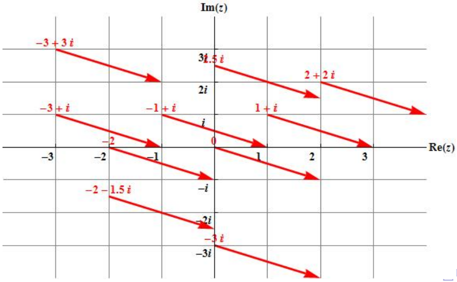
$$f(z) = z + z_0,$$

za fiksan z_0?

Nacrtajte točke koje u kompleksnoj ravnini predstavljaju četiri proizvoljno odabrana kompleksna broja. Zatim nacrtajte rezultat pribrajanja broja 1 tim brojevima. Sad nacrtajte rezultat pribrajanja broja $-i$ tim brojevima. Na kraju nacrtajte rezultat pribrajanja broja $3+2i$ tim brojevima. Možete li zaključiti koji je efekt kompleksne funkcije zadane s

$$f(z) = z + z_0,$$

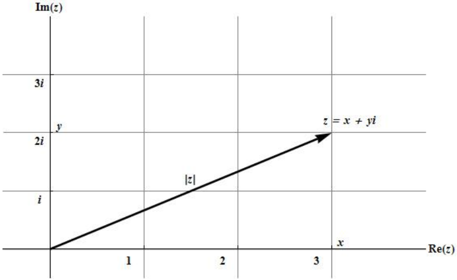
za fiksan z_0? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je translacija ravnine za radij-vektor broja z_0.



Apsulutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja z definira se kao udaljenost odgovarajuće točke do ishodišta. Vrijedi

$$|x + i\,y| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

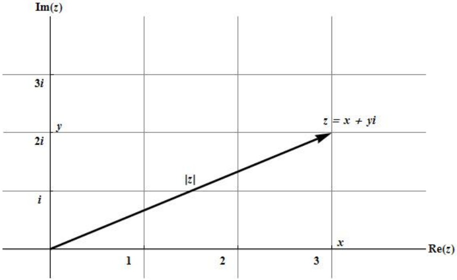


Gdje se nalaze kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1?

Apsulutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja z definira se kao udaljenost odgovarajuće točke do ishodišta. Vrijedi

$$|x + i\,y| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$

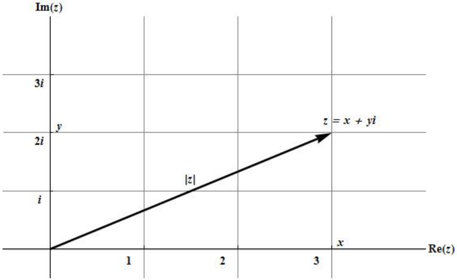


Gdje se nalaze kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1? Što predstavlja jednadžba $|z - 1 - i| = 5$?

Apsulutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja z definira se kao udaljenost odgovarajuće točke do ishodišta. Vrijedi

$$|x + i\,y| = +\sqrt{x^2 + y^2}.$$



Gdje se nalaze kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1? Što predstavlja jednadžba $|z - 1 - i| = 5$? Jednadžba $|z - z_0| = r$ u kompleksnoj ravnini predstavlja kružnicu polumjera r sa središtem u z_0.

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\bar{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \bar{z}$?

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.
$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\overline{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \overline{z}$? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na os apscisa (realnu os).

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.
$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\bar{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \bar{z}$? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na os apscisa (realnu os).
Kakva je veza para rješenjâ kvadratne jednadžbe?

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.
$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\bar{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \bar{z}$? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na os apscisa (realnu os).
Kakva je veza para rješenjâ kvadratne jednadžbe?
Koliko iznosi $\bar{\bar{z}}$?

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.
$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\bar{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \bar{z}$? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na os apscisa (realnu os).
Kakva je veza para rješenjâ kvadratne jednadžbe?
Koliko iznosi $\bar{\bar{z}}$? A $\overline{z_1 + z_2}$?
Ako je dana funkcija $\psi : D \to \mathbb{C}$, onda se s ψ^* označava kompleksna funkcija definirana s $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)}$. Odredite formulu za $\psi^*(z)$ ako je $\psi(z) = z + 2 - 5i$!

Konjugiranje

Zadatak

Odredite sva rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 = 0$.
$x_{1,2} = 2 \pm i$.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj $\overline{z} = x - iy$. Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove kompleksno konjugirane brojeve te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s $f(z) = \overline{z}$? U kompleksnoj ravnini ova funkcija je osna simetrija (zrcaljenje) s obzirom na os apscisa (realnu os).
Kakva je veza para rješenjâ kvadratne jednadžbe?
Koliko iznosi $\overline{\overline{z}}$? A $\overline{z_1 + z_2}$?
Ako je dana funkcija $\psi : D \to \mathbb{C}$, onda se s ψ^* označava kompleksna funkcija definirana s $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)}$. Odredite formulu za $\psi^*(z)$ ako je $\psi(z) = z + 2 - 5i$! $\psi^*(z) = \overline{z + 2 - 5i} = \overline{z} + 2 + 5i$.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

Koliko iznosi $z \cdot \overline{z}$?

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$$(x+yi)\cdot(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+yx')i.$$

Koliko iznosi $z\cdot\overline{z}$?

$$z\cdot\overline{z}=|z|^2$$

Bez formule za dijeljenje kompleksnih brojeva odredite $\dfrac{1}{i}$.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$$(x + yi) \cdot (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

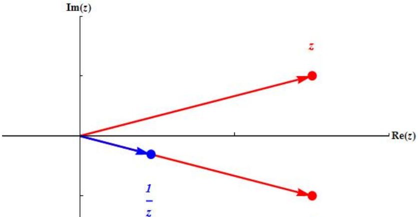
Koliko iznosi $z \cdot \overline{z}$?

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Bez formule za dijeljenje kompleksnih brojeva odredite $\dfrac{1}{i}$.

$i \cdot (-i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{i} = -i.$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad \frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{|z'|^2}$$



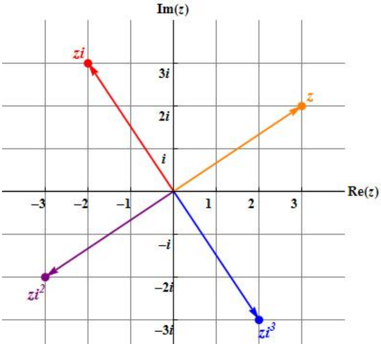
Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove umnoške s i te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s

$$f(z) = i\,z?$$

Nacrtajte nekoliko kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini i njihove umnoške s i te zaključite koji je efekt kompleksne funkcije zadane s

$$f(z) = i\,z?$$

Ova funkcija je u kompleksnoj ravnini rotacija za pravi kut oko ishodišta. Općenito, množenje s fiksnim brojem apsolutne vrijednosti 1 je u kompleksnoj ravnini rotacija oko O za njegov *argument*.



Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$. Koliko iznosi argument od 5?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$. Koliko iznosi argument od 5? Od i?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$. Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$. Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?
Argument čisto imaginarnog broja iznosi koliko?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?
Argument čisto imaginarnog broja iznosi koliko?
Kakav je argument od $1/z$ u odnosu na argument od z?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?
Argument čisto imaginarnog broja iznosi koliko?
Kakav je argument od $1/z$ u odnosu na argument od z? A od $\overline{z}$?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?
Argument čisto imaginarnog broja iznosi koliko?
Kakav je argument od $1/z$ u odnosu na argument od z? A od $\overline{z}$?
A od $|z|$?

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kao što točke ravnine možemo opisivati u pravokutnom ili u polarnom koordinatnom sustavu, tako i kompleksne brojeve možemo opisivati u Kartezijevom obliku $x + i\,y$ i u 'polarnom' preko udaljenosti do ishodišta ($r = |z|$) i 'polarnog' kuta, koji se sad zove argument kompleksnog broja. Argument od z je kut $\varphi = \arg(z)$ kojeg radij-vektor od z zatvara s realnom osi. Koja je njegova veza s realnim i imaginarnim dijelom broja z? $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.
Koliko iznosi argument od 5? Od i? Od $-e$? Od $-\pi i$?
Što je skup svih kompleksnih brojeva kojima je argument 0?
Argument čisto imaginarnog broja iznosi koliko?
Kakav je argument od $1/z$ u odnosu na argument od z? A od $\overline{z}$? A od $|z|$?
Vidimo: Prikazu $z = x + yi$ ekvivalentan je prikaz

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

koji se zove trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Izračunajte $(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\phi + i\sin\phi)$.

Izračunajte $(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\phi + i\sin\phi)$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$$

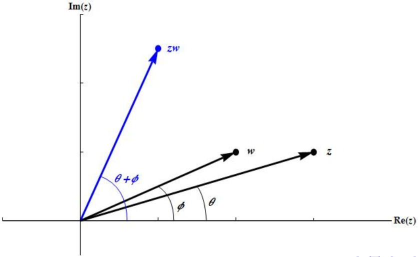
Zaključite kako se množe dva kompleksna broja dana u trigonometrijskom obliku! Koja je veza argumenta umnoška s argumentima faktora? A apsolutne vrijednosti umnoška s apsolutnim vrijednostima faktora?

Izračunajte $(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\phi + i\sin\phi)$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$$

Zaključite kako se množe dva kompleksna broja dana u trigonometrijskom obliku! Koja je veza argumenta umnoška s argumentima faktora? A apsolutne vrijednosti umnoška s apsolutnim vrijednostima faktora? Za $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ vrijedi

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\phi)+i\sin(\varphi+\phi)),\ \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\phi)+i\sin(\varphi-\phi)).$$



Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Koliko iznosi i^n za prirodan broj n?

Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Koliko iznosi i^n za prirodan broj n? Gdje se nalaze (prirodne) potencije broja i?

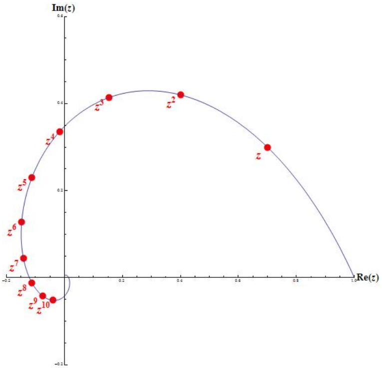
Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Koliko iznosi i^n za prirodan broj n? Gdje se nalaze (prirodne) potencije broja i? Izvedite formule za kvadriranje i kubiranje kompleksnog broja zapisanog trigonometrijski!

Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Koliko iznosi i^n za prirodan broj n? Gdje se nalaze (prirodne) potencije broja i? Izvedite formule za kvadriranje i kubiranje kompleksnog broja zapisanog trigonometrijski! Općenito, za *cijeli* broj n vrijedi de Moivre-ova formula

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$



Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?
Ako je w kubni korijen od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, onda je

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kolika je apsolutna vrijednosti broja u zagradama?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?
Ako je w kubni korijen od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, onda je

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kolika je apsolutna vrijednosti broja u zagradama? Koliko iznosi $|w|$? Je li ta vrijednost jednoznačna?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?
Ako je w kubni korijen od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, onda je

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kolika je apsolutna vrijednosti broja u zagradama? Koliko iznosi $|w|$? Je li ta vrijednost jednoznačna?
Nađite jedan kut φ koji zadovoljava
$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$.

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?
Ako je w kubni korijen od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, onda je

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kolika je apsolutna vrijednosti broja u zagradama? Koliko iznosi $|w|$? Je li ta vrijednost jednoznačna?
Nađite jedan kut φ koji zadovoljava
$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Je li to jedini takav kut? Zašto?

Kako biste definirali što je to n-ti korijen (kompleksnog) broja?

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n$$

Je li 1 četvrti korijen od 1? A -1? i? $-i$?
Koliko kubnih korijena u realnim brojevima ima 8?
Ako je w kubni korijen od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, onda je

$$|w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Kolika je apsolutna vrijednosti broja u zagradama? Koliko iznosi $|w|$? Je li ta vrijednost jednoznačna?
Nađite jedan kut φ koji zadovoljava $\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Je li to jedini takav kut? Zašto? Koji su svi kutovi φ koji to zadovoljavaju?

$\varphi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jesu li svi kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 2 i argumenta φ_k različiti?

$\varphi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jesu li svi kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 2 i argumenta φ_k različiti? Koliko ih ima različitih?

$\varphi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jesu li svi kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 2 i argumenta φ_k različiti? Koliko ih ima različitih? z ima tri kompleksna treća korijena:

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Kolika je razlika argumenata w_1 i w_0? w_2 i w_1? w_0 i w_2?

$\varphi_k = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Jesu li svi kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 2 i argumenta φ_k različiti? Koliko ih ima različitih? z ima tri kompleksna treća korijena:

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Kolika je razlika argumenata w_1 i w_0? w_2 i w_1? w_0 i w_2? Kako su dakle u kompleksnoj ravnini raspoređeni w_0, w_1 i w_2?

Svaki kompleksan broj z ima n kompleksnih n-tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

za $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta na kružnici radijusa $\sqrt[n]{|z|}$ (tu gledamo korijen u smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument $\frac{\theta}{n}$, a svaki sljedeći za $2\pi/n$ veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

Zadatak

Odredite $\sqrt[3]{i}$ *i* $\sqrt[6]{64}$.

Svaki kompleksan broj z ima n kompleksnih n-tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

za $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta na kružnici radijusa $\sqrt[n]{|z|}$ (tu gledamo korijen u smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument $\frac{\theta}{n}$, a svaki sljedeći za $2\pi/n$ veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

Zadatak

Odredite $\sqrt[3]{i}$ *i* $\sqrt[6]{64}$.

$\sqrt[3]{i}$ *su* $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i$;

Svaki kompleksan broj z ima n kompleksnih n-tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),$$

za $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta na kružnici radijusa $\sqrt[n]{|z|}$ (tu gledamo korijen u smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument $\frac{\theta}{n}$, a svaki sljedeći za $2\pi/n$ veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

Zadatak

Odredite $\sqrt[3]{i}$ *i* $\sqrt[6]{64}$.
$\sqrt[3]{i}$ *su* $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i$;
$\sqrt[6]{64}$ *su* ± 2, $\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

tzv. eskponencijalni oblik kompleksnog broja z.
Koliko iznosi $e^{i\pi}$?

Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

tzv. eskponencijalni oblik kompleksnog broja z.
Koliko iznosi $e^{i\pi}$? $e^{i\pi/2}$?

Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

tzv. eskponencijalni oblik kompleksnog broja z.
Koliko iznosi $e^{i\pi}$? $e^{i\pi/2}$? Koji je eksponencijalni oblik broja 10? $-e$? $-2i$?

Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

tzv. eskponencijalni oblik kompleksnog broja z.
Koliko iznosi $e^{i\pi}$? $e^{i\pi/2}$? Koji je eksponencijalni oblik broja 10? $-e$? $-2i$?
Ako je $|z|e^{i\varphi}$, koji je eksponencijalni oblik od $\overline{z}$? Od $1/z$?

Eulerova formula

Eulerova formula daje jednostavniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Stoga je

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

tzv. eskponencijalni oblik kompleksnog broja z.
Koliko iznosi $e^{i\pi}$? $e^{i\pi/2}$? Koji je eksponencijalni oblik broja 10? $-e$? $-2i$?
Ako je $|z|e^{i\varphi}$, koji je eksponencijalni oblik od $\overline{z}$? Od $1/z$?

$$\overline{z} = |z|e^{i\varphi}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$$

$$zw = |z||w|e^{i(\varphi+\phi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\varphi-\phi)},$$

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}.$$

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?
Koliko iznosi i^i?

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?
Koliko iznosi i^i?

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{(2k\pi-)\pi/2}.$$

Je li funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ bijekcija?

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?
Koliko iznosi i^i?

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{(2k\pi-)\pi/2}.$$

Je li funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ bijekcija?

$$e^{2k\pi i} = 1 \Rightarrow e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x e^{yi+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}$$

Kako biste definirali $\ln i$?

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?
Koliko iznosi i^i?

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{(2k\pi-)\pi/2}.$$

Je li funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z$ bijekcija?

$$e^{2k\pi i} = 1 \Rightarrow e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x e^{yi+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}$$

Kako biste definirali $\ln i$?

$$z = \ln i = \ln(1\cdot e^{i\pi/2}) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2}$$

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\varphi}$ i $e^{-i\varphi}$ dobijemo

$$\mathrm{Re}(e^{i\varphi}) = \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\varphi}) = \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Na što vas podsjećaju te formule?
Koliko iznosi i^i?

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{(2k\pi-)\pi/2}.$$

Je li funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ bijekcija?

$$e^{2k\pi i} = 1 \Rightarrow e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x e^{yi+2k\pi i} = e^{z+2k\pi i}$$

Kako biste definirali $\ln i$?

$$z = \ln i = \ln(1 \cdot e^{i\pi/2}) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{Ln}\, z = i \cdot \arg(z) + \ln|z|$$