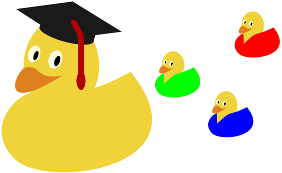
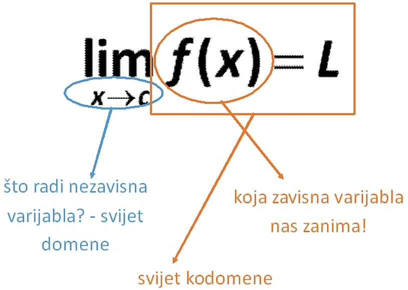
9. tjedan nastave: Limesi, asimptote i neprekidnost.

Franka Miriam Brückler



Simbol limesa



Što je x bliži c (u domeni), to je $f(x)$ bliži L (kodomeni).

Uvod u limese

Što je množina tvari bliža 1 molu, to je njena masa bliža njenoj molarnoj masi:

$$\lim_{n \to 1\,\mathrm{mol}} m = M.$$

Uvod u limese

Što je množina tvari bliža 1 molu, to je njena masa bliža njenoj molarnoj masi:

$$\lim_{n \to 1\,\mathrm{mol}} m = M.$$

Tijekom kemijske reakcija koncentracija c svakog njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s (neograničeno rastućim) vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti c_∞:

$$\lim_{t \to \infty} c = c_\infty.$$

Uvod u limese

Što je množina tvari bliža 1 molu, to je njena masa bliža njenoj molarnoj masi:

$$\lim_{n \to 1\,\mathrm{mol}} m = M.$$

Tijekom kemijske reakcija koncentracija c svakog njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s (neograničeno rastućim) vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti c_∞:

$$\lim_{t \to \infty} c = c_\infty.$$

Što je volumen idealnog plina bliži nuli (i pozitivan je), to je tlak

Uvod u limese

Što je množina tvari bliža 1 molu, to je njena masa bliža njenoj molarnoj masi:

$$\lim_{n \to 1\,\mathrm{mol}} m = M.$$

Tijekom kemijske reakcija koncentracija c svakog njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s (neograničeno rastućim) vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti c_∞:

$$\lim_{t \to \infty} c = c_\infty.$$

Što je volumen idealnog plina bliži nuli (i pozitivan je), to je tlak veći. Možemo li ograničiti koliko velik tlak možemo dobiti smanjivanjem volumena, uz pretpostavku da možemo volumen učiniti proizvoljno malim?

Uvod u limese

Što je množina tvari bliža 1 molu, to je njena masa bliža njenoj molarnoj masi:

$$\lim_{n \to 1\,\mathrm{mol}} m = M.$$

Tijekom kemijske reakcija koncentracija c svakog njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s (neograničeno rastućim) vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti c_∞:

$$\lim_{t \to \infty} c = c_\infty.$$

Što je volumen idealnog plina bliži nuli (i pozitivan je), to je tlak veći. Možemo li ograničiti koliko velik tlak možemo dobiti smanjivanjem volumena, uz pretpostavku da možemo volumen učiniti proizvoljno malim?

$$\lim_{V \to 0+} \frac{nRT}{V} = +\infty.$$

Prava definicija derivacije

Kako smo „definirali” derivaciju funkcije f u nekoj točki c njezine domene?

Prava definicija derivacije

Kako smo „definirali” derivaciju funkcije f u nekoj točki c njezine domene? Sekanta je pravac koji prolazi dvjema točkama krivulje. Kako glase koordinate dviju točaka na grafu, od kojih jedna ima apscisu c, a druga x? Koji je koeficijent smjera k te sekante?

Prava definicija derivacije

Kako smo „definirali" derivaciju funkcije f u nekoj točki c njezine domene? Sekanta je pravac koji prolazi dvjema točkama krivulje. Kako glase koordinate dviju točaka na grafu, od kojih jedna ima apscisu c, a druga x? Koji je koeficijent smjera k te sekante?

$$k = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Što je drugo sjecište sekante s krivuljom bliže točki u kojoj tražimo tangentu, to će sekanta biti bliža tome da „postane" tangenta, odnosno koeficijent k smjera sekante bit će to bliži koeficijentu $f'(c)$ smjera tangente što je druga točka bliža prvoj (što je x bliži c):

animacija

Prava definicija derivacije

Kako smo „definirali” derivaciju funkcije f u nekoj točki c njezine domene? Sekanta je pravac koji prolazi dvjema točkama krivulje. Kako glase koordinate dviju točaka na grafu, od kojih jedna ima apscisu c, a druga x? Koji je koeficijent smjera k te sekante?

$$k = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Što je drugo sjecište sekante s krivuljom bliže točki u kojoj tražimo tangentu, to će sekanta biti bliža tome da „postane” tangenta, odnosno koeficijent k smjera sekante bit će to bliži koeficijentu $f'(c)$ smjera tangente što je druga točka bliža prvoj (što je x bliži c):

animacija

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:
(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3;

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:

(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2;

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:
(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.
(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
(3) što je varijabla bliža -1, to je vrijednost manja i postaje neograničeno mala;

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:
(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.
(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$.
(3) što je varijabla bliža -1, to je vrijednost manja i postaje neograničeno mala; $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$.
(4) što je varijabla bliža 0 i pritom negativna, to je vrijednost funkcije bliža 0, a što je varijabla bliža 0 i pritom pozitivna, to je vrijednost funkcije bliža 1;

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:

(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

(3) što je varijabla bliža -1, to je vrijednost manja i postaje neograničeno mala; $\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

(4) što je varijabla bliža 0 i pritom negativna, to je vrijednost funkcije bliža 0, a što je varijabla bliža 0 i pritom pozitivna, to je vrijednost funkcije bliža 1; $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$.

(5) što je varijabla bliža 2, to je vrijednost funkcije bliža 0, ali funkcija nije definirana u 2;

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:

(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$.

(3) što je varijabla bliža -1, to je vrijednost manja i postaje neograničeno mala; $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$.

(4) što je varijabla bliža 0 i pritom negativna, to je vrijednost funkcije bliža 0, a što je varijabla bliža 0 i pritom pozitivna, to je vrijednost funkcije bliža 1; $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.

(5) što je varijabla bliža 2, to je vrijednost funkcije bliža 0, ali funkcija nije definirana u 2; $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, $2 \notin D_f$.

(6) što je varijabla bliža -2, to je vrijednost funkcije bliža 1, funkcija je definirana u -2 i vrijednost funkcije u -2 je 0.

Zadatak

Simbolički zapišite sljedeća svojstva:

(1) što je varijabla bliža 1, to je vrijednost funkcije bliža 3; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

(2) što je varijabla manja (negativnija), to je vrijednost funkcije bliža -2; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$.

(3) što je varijabla bliža -1, to je vrijednost manja i postaje neograničeno mala; $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$.

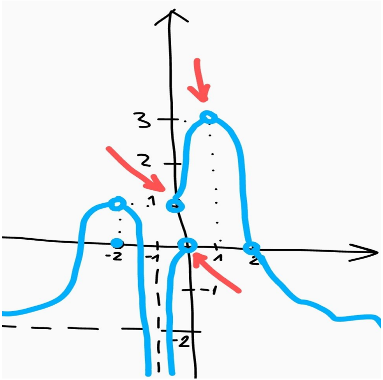
(4) što je varijabla bliža 0 i pritom negativna, to je vrijednost funkcije bliža 0, a što je varijabla bliža 0 i pritom pozitivna, to je vrijednost funkcije bliža 1; $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1$.

(5) što je varijabla bliža 2, to je vrijednost funkcije bliža 0, ali funkcija nije definirana u 2; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$, $2 \notin D_f$.

(6) što je varijabla bliža -2, to je vrijednost funkcije bliža 1, funkcija je definirana u -2 i vrijednost funkcije u -2 je 0. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1$, $f(-2) = 0$.

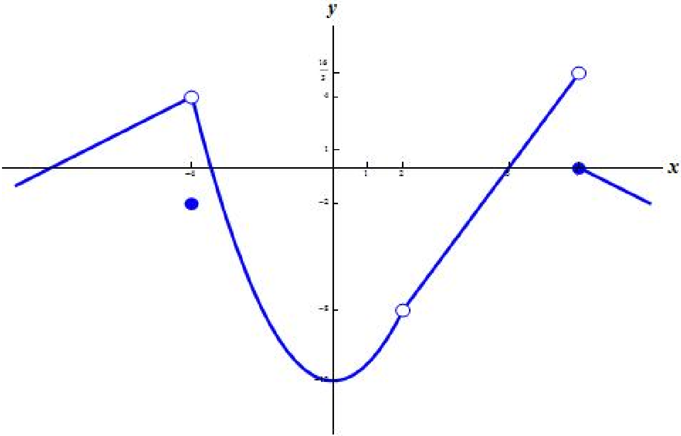
Skicirajte graf funkcije sa svojstvima $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, $2 \notin D_f$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$, $f(-2) = 0$.

Skicirajte graf funkcije sa svojstvima $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$, $2 \notin D_f$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$, $f(-2) = 0$.



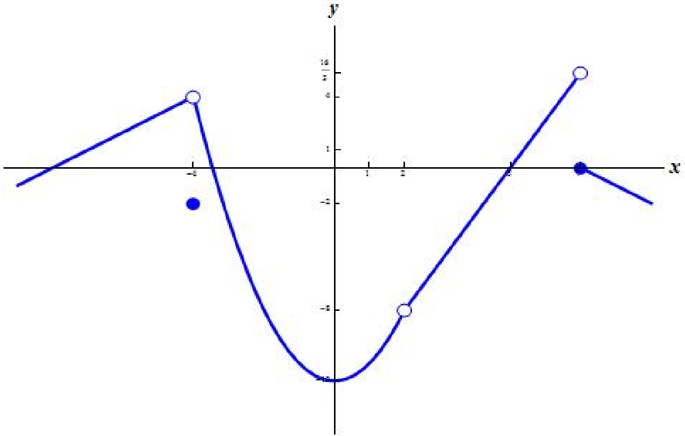
Još jedan zadatak

Što biste rekli o $\lim_{x \to c} f(x)$ ako za $c = -4$, $c = 0$, $c = 2$, $c = 7$ ako je graf funkcije f prikazan donjom slikom:



Još jedan zadatak

Što biste rekli o $\lim_{x \to c} f(x)$ ako za $c = -4$, $c = 0$, $c = 2$, $c = 7$ ako je graf funkcije f prikazan donjom slikom:



Zadatak

Kako biste računski provjerili iznos $\lim_{x\to 0} x^x$*?*

Zadatak

Kako biste računski provjerili iznos $\lim_{x \to 0} x^x$*?*

x	x na x
1	1
0,5	0,707107
0,25	0,707107
0,125	0,771105
0,0625	0,840896
0,03125	0,897355
0,015625	0,937084
0,0078125	0,962803
0,00390625	0,978572
0,001953125	0,98789
0,000976563	0,993254
0,000488281	0,996284
0,000244141	0,997971
0,00012207	0,998901
6,10352E-05	0,999408
3,05176E-05	0,999683
1,52588E-05	0,999831
7,62939E-06	0,99991
3,8147E-06	0,999952
1,90735E-06	0,999975
9,53674E-07	0,999987

Limes $\lim_{x\to c} f(x)$ opisuje ponašanje funkcije f u blizini c. Pritom c može biti

- realan broj (u tom slučaju f *ne mora* biti definirana u c, ali mora biti definirana na nekoj uniji intervala oblika $\langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle$) ili
- $c = \pm\infty$, pod čime se misli da varijabla x postaje proizvoljno velika, odnosno mala (naravno, uz uvjet da je f definirana za sve takve varijable).

Limes $\lim_{x \to c} f(x)$ opisuje ponašanje funkcije f u blizini c. Pritom c može biti

- realan broj (u tom slučaju f *ne mora* biti definirana u c, ali mora biti definirana na nekoj uniji intervala oblika $\langle a, c\rangle \cup \langle c, b\rangle$) ili
- $c = \pm\infty$, pod čime se misli da varijabla x postaje proizvoljno velika, odnosno mala (naravno, uz uvjet da je f definirana za sve takve varijable).

Par pitanja

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \to 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$?

Limes $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ opisuje ponašanje funkcije f u blizini c. Pritom c može biti

- realan broj (u tom slučaju f *ne mora* biti definirana u c, ali mora biti definirana na nekoj uniji intervala oblika $\langle a, c \rangle \cup \langle c, b \rangle$) ili
- $c = \pm\infty$, pod čime se misli da varijabla x postaje proizvoljno velika, odnosno mala (naravno, uz uvjet da je f definirana za sve takve varijable).

Par pitanja

Ima li smisla govoriti o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$? A ako je domena $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 5 \rangle$?

Limes $\lim_{x \to c} f(x)$ opisuje ponašanje funkcije f u blizini c. Pritom c može biti

- realan broj (u tom slučaju f *ne mora* biti definirana u c, ali mora biti definirana na nekoj uniji intervala oblika $\langle a, c \rangle \cup \langle c, b \rangle$) ili
- $c = \pm\infty$, pod čime se misli da varijabla x postaje proizvoljno velika, odnosno mala (naravno, uz uvjet da je f definirana za sve takve varijable).

Par pitanja

Ima li smisla govoriti o $\lim_{x \to 0} f(x)$ kad je domena od f jednaka $[1, 2]$? A ako je domena $\langle -1, 0 \rangle \cup \langle 0, 5 \rangle$? A ima li smisla govoriti o $\lim_{x \to -\infty} \ln x$?

Limesi funkcija u konačnosti

Neformalna definicija limesa u $c \in \mathbb{R}$

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i f definirana na nekom intervalu oko c, osim možda u samoj točki c. Ako postoji realan broj L sa svojstvom: „Što je x bliži c, bez da je pritom $x = c$, to je $f(x)$ bliži L", kažemo da limes $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ postoji i pišemo $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

Limesi funkcija u konačnosti

Neformalna definicija limesa u $c \in \mathbb{R}$

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i f definirana na nekom intervalu oko c, osim možda u samoj točki c. Ako postoji realan broj L sa svojstvom: „Što je x bliži c, bez da je pritom $x = c$, to je $f(x)$ bliži L”, kažemo da limes $\lim_{x \to c} f(x)$ postoji i pišemo $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Za $c \in \mathbb{R}$, jednostrani limesi $\lim_{x \to c+} f(x)$ i $\lim_{x \to c-} f(x)$ definiraju se analogno, samo se ograničavamo na to da je x veći odnosno manji od c.

Limesi funkcija u konačnosti

Neformalna definicija limesa u $c \in \mathbb{R}$

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i f definirana na nekom intervalu oko c, osim možda u samoj točki c. Ako postoji realan broj L sa svojstvom: „Što je x bliži c, bez da je pritom $x = c$, to je $f(x)$ bliži L", kažemo da limes $\lim_{x \to c} f(x)$ postoji i pišemo $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Za $c \in \mathbb{R}$, jednostrani limesi $\lim_{x \to c+} f(x)$ i $\lim_{x \to c-} f(x)$ definiraju se analogno, samo se ograničavamo na to da je x veći odnosno manji od c.

(Obostrani) limes $\lim_{x \to c} f(x)$ postoji točo ako postoje oba jednostrana limesa $\lim_{x \to c+} f(x)$ i $\lim_{x \to c-} f(x)$ i jednaki su (i onda i obostrani limes ima istu tu vrijednost).

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

Što zaključujemo o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x+2, & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0;$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

Što zaključujemo o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1} (x+2) = 1;$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 = 1.$$

Što zaključujemo o $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0;$$

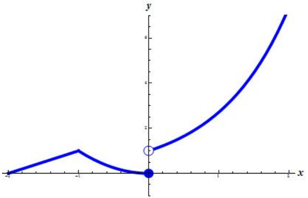
$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} e^x = 1.$$

Što zaključujemo o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1} (x + 2) = 1;$$

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1} x^2 = 1.$$

Što zaključujemo o $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$?



Limesi funkcija u beskonačnosti

Neformalna definicija limesa u beskonačnosti

Neka domena funkcije f sadrži neki interval tipa $\langle a, +\infty\rangle$. Ako postoji realan broj L sa svojstvom: „što je x veći, pri čemu nema ograničenja na povećanje x, to je $f(x)$ bliži L”, kažemo da limes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ postoji i pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Kako biste definirali $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$?

Limesi funkcija u beskonačnosti

Neformalna definicija limesa u beskonačnosti

Neka domena funkcije f sadrži neki interval tipa $\langle a, +\infty\rangle$. Ako postoji realan broj L sa svojstvom: „što je x veći, pri čemu nema ograničenja na povećanje x, to je $f(x)$ bliži L", kažemo da limes $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ postoji i pišemo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Kako biste definirali $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$?

Limesi i horizontalne asimptote

Ako postoji $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, onda funkcija f ima horizontalnu asimptotu (desno), i to je pravac $y = L$.
Ako postoji $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \overline{L}$, onda funkcija f ima horizontalnu asimptotu (lijevo), i to je pravac $y = \overline{L}$.

Svojstva limesa

Ako postoje $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ ili $c = -\infty$, onda postoje i limesi $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \pm g(x))$ i $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \cdot g(x))$ te vrijedi:

$$\lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

Svojstva limesa

Ako postoje $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ ili $c = -\infty$, onda postoje i limesi $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \pm g(x))$ i $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \cdot g(x))$ te vrijedi:

$$\lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

Nadalje, ako je $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, postoji i $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ i jednak je $\dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

Kose asimptote

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, ako za jako velike (ili jako male) vrijednost varijable vrijedi

$$f(x) \approx kx + l \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x}.$$

Kose asimptote

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, ako za jako velike (ili jako male) vrijednost varijable vrijedi

$$f(x) \approx kx + l \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x}.$$

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (desno) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (lijevo) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Kose asimptote

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, ako za jako velike (ili jako male) vrijednost varijable vrijedi

$$f(x) \approx kx + l \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x}.$$

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (desno) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (lijevo) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Ima li kose asimptote ako se može izračunati k, a ne i l?

Kose asimptote

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, ako za jako velike (ili jako male) vrijednost varijable vrijedi

$$f(x) \approx kx + l \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x}.$$

Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (desno) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota (lijevo) za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Ima li kose asimptote ako se može izračunati k, a ne i l? A ako ima horizontalne asimptote?

Zadatak

Poznato je da je $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ *za sve* $a > 1$ (*rastuća eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije*). *Ima li funkcija zadana formulom* $f(x) = x^2 e^{-x} + x$ *horizontalne ili kose asimptote?*

Zadatak

Poznato je da je $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ *za sve* $a > 1$ (*rastuća eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije*). *Ima li funkcija zadana formulom* $f(x) = x^2 e^{-x} + x$ *horizontalne ili kose asimptote?*

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1\right) = 1$$

Dakle, desno nema horizontalne asimptote, ali moguća je kosa.

Zadatak

Poznato je da je $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$ *za sve* $a>1$ *(rastuća eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije). Ima li funkcija zadana formulom* $f(x)=x^2e^{-x}+x$ *horizontalne ili kose asimptote?*

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+1\right)=1$$

Dakle, desno nema horizontalne asimptote, ali moguća je kosa.

$$l_+=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$$

Dakle, desno je $y=x$ kosa asimptota.

Zadatak

Poznato je da je $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ *za sve* $a > 1$ *(rastuća eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije). Ima li funkcija zadana formulom* $f(x) = x^2 e^{-x} + x$ *horizontalne ili kose asimptote?*

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1\right) = 1$$

Dakle, desno nema horizontalne asimptote, ali moguća je kosa.

$$l_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Dakle, desno je $y = x$ kosa asimptota.

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1\right) \notin \mathbb{R}$$

Dakle, lijevo nema ni kose ni horizontalne asimptote.

Beskonačni limesi funkcija

U svim slučajevima kad ne postoji realan broj L takav da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ($c \in \mathbb{R}$ ili $c = \pm\infty$), kažemo da limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ne postoji.

Npr. $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ ne postoji, kao ni $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$.

Beskonačni limesi funkcija

U svim slučajevima kad ne postoji realan broj L takav da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ ($c \in \mathbb{R}$ ili $c = \pm\infty$), kažemo da limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ne postoji.

Npr. $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ ne postoji, kao ni $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$.

Ipak, u nekim slučajevima pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$:

- Ako što je x bliži c vrijednosti $f(x)$ postaju sve veće (neograničeno!!!), pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$.
- Ako što je x bliži c vrijednosti $f(x)$ postaju sve manje (neograničeno!!!), pišemo $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$.

Analogno se definiraju jednostrani beskonačni limesi.

Limesi i vertikalne asimptote

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ $(c \in \mathbb{R})$ ako je bar jedan od limesa $\lim_{x \to c+} f(x)$ i $\lim_{x \to c-} f(x)$ beskonačan.

Limesi i vertikalne asimptote

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ $(c \in \mathbb{R})$ ako je bar jedan od limesa $\lim_{x \to c+} f(x)$ i $\lim_{x \to c-} f(x)$ beskonačan.

Primjerice, $f(x) = \frac{1}{x}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ jer je $\displaystyle\lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$.

Limesi i vertikalne asimptote

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ $(c \in \mathbb{R})$ ako je bar jedan od limesa $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ beskonačan.

Primjerice, $f(x) = \frac{1}{x}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ jer je
$$\lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$
Općenito, ako je $\lim\limits_{x \to c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$, onda je
$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. Kratko: $\frac{a}{0} = \infty$ (za $a \neq 0$). Ovo ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom; oznaka $\frac{a}{0}$ znači da se broj blizu a dijeli brojem koji je blizu 0, ali nije jednak 0.

Limesi i vertikalne asimptote

Funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$) ako je bar jedan od limesa $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ beskonačan.

Primjerice, $f(x) = \frac{1}{x}$ ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ jer je
$\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.
Općenito, ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, onda je
$\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. Kratko: $\frac{a}{0} = \infty$ (za $a \neq 0$). Ovo ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom; oznaka $\frac{a}{0}$ znači da se broj blizu a dijeli brojem koji je blizu 0, ali nije jednak 0.

Zadatak

Koliko iznosi $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{\sin^2 x}$ *ako je* $c = \frac{\pi}{2}$*? A ako je* $c = 0$*?*

Ako je $\lim_{x \to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kratko: $\frac{a}{\infty} = 0$ (za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kratko: $\frac{a}{\infty} = 0$ (za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Zadatak

Koliko iznosi $\lim_{x\to c} \frac{1}{\ln x}$ *ako je* $c = e$*? A ako je* $c = +\infty$*?*

Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kratko: $\frac{a}{\infty} = 0$ (za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Zadatak

Koliko iznosi $\lim_{x\to c} \frac{1}{\ln x}$ *ako je* $c = e$*? A ako je* $c = +\infty$*?*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0} (x + 1) = 1$$

Ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kratko: $\frac{a}{\infty} = 0$ (za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Zadatak

Koliko iznosi $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{1}{\ln x}$ *ako je* $c = e$? *A ako je* $c = +\infty$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Ako je $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Kratko: $\frac{a}{\infty} = 0$ (za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Zadatak

Koliko iznosi $\lim_{x\to c} \frac{1}{\ln x}$ *ako je* $c = e$*? A ako je* $c = +\infty$*?*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Vidimo dakle da limesi tipa $\frac{0}{0}$ mogu davati različite konačne rezultate. Takve tipove limesa zovemo neodređenim izrazima. Osim $\frac{0}{0}$ u neodređene izraze spadaju i $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, 1^∞, 0^∞, $+\infty - \infty$.

Limesi racionalnih funkcija

Limes racionalne funkcije u beskonačnosti računamo tako da brojnik i nazivnik podijelimo najvećom potencijom varijable, te koristimo svojstva limesa i činjenicu da je za $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Primjer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 500x}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 500\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 0.$$

Limesi racionalnih funkcija

Limes racionalne funkcije u beskonačnosti računamo tako da brojnik i nazivnik podijelimo najvećom potencijom varijable, te koristimo svojstva limesa i činjenicu da je za $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Primjer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 500x}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 500\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 0.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{8x^4 - x^2}{4x^4 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8 - \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^3}} = 2.$$

Limesi racionalnih funkcija

Limes racionalne funkcije u beskonačnosti računamo tako da brojnik i nazivnik podijelimo najvećom potencijom varijable, te koristimo svojstva limesa i činjenicu da je za $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Primjer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 500x}{2x^3 + x + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 500\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = 0.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{8x^4 - x^2}{4x^4 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{8 - \frac{1}{x^2}}{4 - \frac{2}{x^3}} = 2.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x + x^2 - x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = \mp\infty.$$

Limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ jednak je vrijednosti funkcije u c ako je c u domeni, a inače maksimalno skratimo faktor $(x - c)$ (zašto pod limesom $\lim_{x \to c}$ to smijemo?) i koristeći svojstva limesa zaključimo o iznosu limesa.

Limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ jednak je vrijednosti funkcije u c ako je c u domeni, a inače maksimalno skratimo faktor $(x - c)$ (zašto pod limesom $\lim_{x \to c}$ to smijemo?) i koristeći svojstva limesa zaključimo o iznosu limesa.

Primjer

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = 2.$$

Limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ jednak je vrijednosti funkcije u c ako je c u domeni, a inače maksimalno skratimo faktor $(x - c)$ (zašto pod limesom $\lim_{x \to c}$ to smijemo?) i koristeći svojstva limesa zaključimo o iznosu limesa.

Primjer

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = 2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{(x-1)^3 \cdot (x+2)} = 0.$$

Limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ jednak je vrijednosti funkcije u c ako je c u domeni, a inače maksimalno skratimo faktor $(x - c)$ (zašto pod limesom $\lim_{x \to c}$ to smijemo?) i koristeći svojstva limesa zaključimo o iznosu limesa.

Primjer

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = 2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{(x-1)^3 \cdot (x+2)} = 0.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \pm\infty.$$

Limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ jednak je vrijednosti funkcije u c ako je c u domeni, a inače maksimalno skratimo faktor $(x - c)$ (zašto pod limesom $\lim_{x \to c}$ to smijemo?) i koristeći svojstva limesa zaključimo o iznosu limesa.

Primjer

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = 2.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{(x-1)^3 \cdot (x+2)} = 0.$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1)^3 \cdot (x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 \cdot (x+5)}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+2)} = \pm\infty.$$

Dakle, ako (nakon skraćivanja) u nazivniku nema faktora $(x - c)$, limes racionalne funkcije u $c \in \mathbb{R}$ je konačan i racionalna funkcija tada *nema* vertikalnu asimptotu $x = c$.

L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Teorem

Za $c \in \mathbb{R}$ *ili* $c = \pm\infty$, *neka su* $\lim_{x \to c} f(x)$ *i* $\lim_{x \to c} g(x)$ *ili oba jednaka* 0 *ili oba beskonačna.*
Ako postoji $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ili ako je jednak* $\pm\infty$, *te ako je* $g'(x) \neq 0$ *za* x*-eve iz nekog intervala oko* c, *onda vrijedi*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjerice: $\lim_{x \to 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2.$

L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Teorem

Za $c \in \mathbb{R}$ ili $c = \pm\infty$, neka su $\lim_{x \to c} f(x)$ i $\lim_{x \to c} g(x)$ ili oba jednaka 0 ili oba beskonačna.
Ako postoji $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ili ako je jednak $\pm\infty$, te ako je $g'(x) \neq 0$ za x-eve iz nekog intervala oko c, onda vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjerice: $\lim_{x \to 1} \frac{2 \ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$. No, oprez: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + \sin x}{x} =$

L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Teorem

Za $c \in \mathbb{R}$ *ili* $c = \pm\infty$, *neka su* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ *ili oba jednaka* 0 *ili oba beskonačna.*
Ako postoji $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *ili ako je jednak* $\pm\infty$, *te ako je* $g'(x) \neq 0$ *za* x*-eve iz nekog intervala oko* c, *onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjerice: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{2}{x}}{1} = 2$. No, oprez: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} (1+\cos x)$. Posljednji limes ne postoji, a
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = 1!$

L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo

Teorem

Za $c \in \mathbb{R}$ *ili* $c = \pm\infty$, *neka su* $\lim_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c} g(x)$ *ili oba jednaka* 0 *ili oba beskonačna.*
Ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *ili ako je jednak* $\pm\infty$, *te ako je* $g'(x) \neq 0$ *za* x*-eve iz nekog intervala oko* c, *onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjerice: $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 2$. No, oprez: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x} =$ $= \lim_{x\to\pm\infty} (1+\cos x)$. Posljednji limes ne postoji, a $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$! Je li točno: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-5} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$?

Zadatak

Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \cdot \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2}.$$

Procijenite njegov iznos za vrlo niske temperature!

Zadatak

Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \cdot \frac{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^2}.$$

Procijenite njegov iznos za vrlo niske temperature!

$$\lim_{\frac{T}{\mathrm{K}}\to 0+} C_{V,\mathrm{m}} = ? x = \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow$$

$$\lim_{\frac{T}{\mathrm{K}}\to 0+} C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{Rx^2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{R(2x+x^2)e^x}{2\left(e^x-1\right)e^x} =$$

$$= \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{R(2+2x)}{2e^x} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{R}{e^x} = \frac{5}{2}R.$$

„Teorem o sendviču"

Teorem

Ako za x-eve iz nekog intervala oko c vrijedi $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *i ako je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$*, onda je i* $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$*.*

Primjer

$-1 \le \sin x \le 1$ *pa je za sve* $x > 0$ $-\dfrac{1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$*. Po teoremu o sendviču slijedi:* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$*.*

„Teorem o sendviču"

Teorem

Ako za x-eve iz nekog intervala oko c vrijedi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *i ako je* $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$*, onda je i* $\lim_{x \to c} g(x) = L$*.*

Primjer

$-1 \leq \sin x \leq 1$ *pa je za sve* $x > 0$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$*. Po teoremu o sendviču slijedi:* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$*.*

Tri važna limesa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Sve elementarne funkcije imaju svojstvo

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

za sve elemente c iz njihove prirodne domene. Zato se za njih izračunavanje limesa $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ za $c \in D_f$ svodi na uvrštavanje c u f.[1] No, isto svojstvo imaju i mnoge neelementarne funkcije:

Primjer

$\lim\limits_{x \to c} |x| = |c|$.

[1] Odnosno, računanje tog limesa je zanimljivo samo kad je c „rupa" u domeni ili na otvorenom rubu nekog od intervala od kojih je domena sastavljena.

Sve elementarne funkcije imaju svojstvo

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

za sve elemente c iz njihove prirodne domene. Zato se za njih izračunavanje limesa $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ za $c \in D_f$ svodi na uvrštavanje c u f.[1] No, isto svojstvo imaju i mnoge neelementarne funkcije:

Primjer

$\lim\limits_{x \to c} |x| = |c|$.

Zašto je važno da je c u domeni da bismo mogli razmatrati svojstvo

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)?$$

Što nam ono govori o grafu funkcije?

[1] Odnosno, računanje tog limesa je zanimljivo samo kad je c „rupa" u domeni ili na otvorenom rubu nekog od intervala od kojih je domena sastavljena.

Neprekidnost funkcija

Definicija

Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Funkcija koja je neprekidna u svim točkama svoje domene zove se neprekidnom funkcijom. Ako je c element domene funkcije f, ali nije zadovoljeno gornje svojstvo, kažemo da f ima prekid u c i c zovemo točkom prekida funkcije f.

Iznimno, u definicijskom svojstvu neprekidnosti dovoljan je jednostrani limes ako je c zatvoreni rub nekog od intervala koji sačinjavaju domenu funkcije (primjerice, $f(x) = \sqrt{x}$ je neprekidna u 0).

Neprekidnost funkcija

Definicija

Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Funkcija koja je neprekidna u svim točkama svoje domene zove se neprekidnom funkcijom. Ako je c element domene funkcije f, ali nije zadovoljeno gornje svojstvo, kažemo da f ima prekid u c i c zovemo točkom prekida funkcije f.

Iznimno, u definicijskom svojstvu neprekidnosti dovoljan je jednostrani limes ako je c zatvoreni rub nekog od intervala koji sačinjavaju domenu funkcije (primjerice, $f(x) = \sqrt{x}$ je neprekidna u 0).

Sve elementarne funkcije su neprekidne u svim točkama svoje (prirodne) domene.

Ako je domena neprekidne funkcije interval, onda se graf te funkcije može nacrtati u jednom potezu.

[2] Jedan od njih se može, ali ne mora podudarati s $f(c)$.

Ako je domena neprekidne funkcije interval, onda se graf te funkcije može nacrtati u jednom potezu.

Obrat te tvrdnje ne vrijedi:

Primjer

Graf funkcije obrnute proporcionalnosti $f(x) = \frac{1}{x}$ *sastoji se od dva odvojena dijela, ali ta funkcija nema prekid u* 0 *jer* 0 *nije element njezine domene.*

[2] Jedan od njih se može, ali ne mora podudarati s $f(c)$.

Ako je domena neprekidne funkcije interval, onda se graf te funkcije može nacrtati u jednom potezu.

Obrat te tvrdnje ne vrijedi:

Primjer

Graf funkcije obrnute proporcionalnosti $f(x) = \frac{1}{x}$ sastoji se od dva odvojena dijela, ali ta funkcija nema prekid u 0 jer 0 nije element njezine domene.

Koji mogu biti uzroci prekida funkcije?

[2] Jedan od njih se može, ali ne mora podudarati s $f(c)$.

Ako je domena neprekidne funkcije interval, onda se graf te funkcije može nacrtati u jednom potezu.

Obrat te tvrdnje ne vrijedi:

Primjer

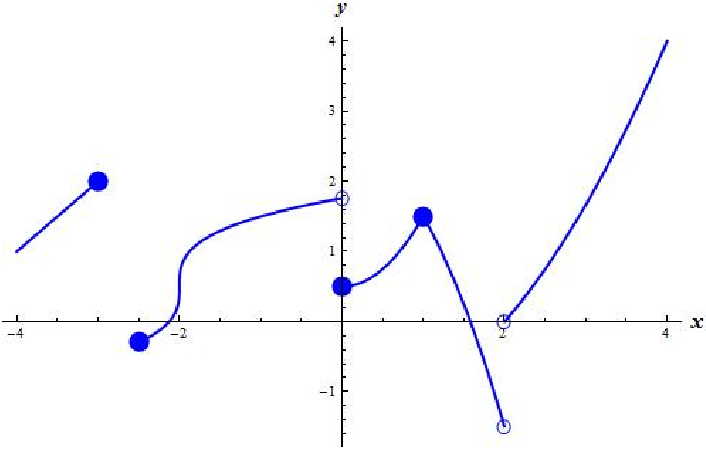
Graf funkcije obrnute proporcionalnosti $f(x) = \frac{1}{x}$ sastoji se od dva odvojena dijela, ali ta funkcija nema prekid u 0 jer 0 nije element njezine domene.

Koji mogu biti uzroci prekida funkcije?

- $\lim_{x \to c} f(x)$ postoji, ali nije jednak $f(c)$ (uklonjivi prekid);
- $\lim_{x \to c} f(x)$ ne postoji, ali postoje oba jednostrana limesa u c (i različiti su).[2] (skok);
- $\lim_{x \to c} f(x)$ ne postoji iz drugih razloga (bitni prekid).

[2] Jedan od njih se može, ali ne mora podudarati s $f(c)$.

Koje su točke i vrste prekida funkcije čiji graf je prikazan dolje?



Posljedica svojstava limesâ je da se neprekidne funkcije „pristojno" ponašaju kad ih kombiniramo: Ako su funkcije f i g neprekidne (u točki c), onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne (u c). Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent f/g također funkcija neprekidna (u c). Ako je f neprekidna u točki c i g neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c.

Posljedica svojstava limesâ je da se neprekidne funkcije „pristojno" ponašaju kad ih kombiniramo: Ako su funkcije f i g neprekidne (u točki c), onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne (u c). Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent f/g također funkcija neprekidna (u c). Ako je f neprekidna u točki c i g neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c.

Jedno važno svojstvo neprekidnih funkcija čija domena je segment već smo spominjali. Sjećate li se koje?

Posljedica svojstava limesâ je da se neprekidne funkcije „pristojno" ponašaju kad ih kombiniramo: Ako su funkcije f i g neprekidne (u točki c), onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne (u c). Ako je uz to i $g(c) \neq 0$, onda je i kvocijent f/g također funkcija neprekidna (u c). Ako je f neprekidna u točki c i g neprekidna u točki $f(c)$, onda je i kompozicija $g \circ f$ neprekidna u c.

Jedno važno svojstvo neprekidnih funkcija čija domena je segment već smo spominjali. Sjećate li se koje?

Bolzano-Weierstrass-ov teorem

Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i nije konstantna funkcija, onda je slika te funkcije segment (tj. takva funkcija postiže svoj globalni minimum i maksimum kao i sve međuvrijednosti, a jedine moguće točke promjene predznaka takve funkcije su njene nultočke).

Veza neprekidnosti i derivabilnosti

Kad ne postoji derivacija $f'(c)$? Argumentirajte pomoću njene prave definicije

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}?$$

Veza neprekidnosti i derivabilnosti

Kad ne postoji derivacija $f'(c)$? Argumentirajte pomoću njene prave definicije

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}?$$

- U zatvorenim rubovima domene funkcije ne možemo tražiti obostrani, nego samo jednostrane limese, pa nema smisla definirati derivaciju u zatvorenim rubovima intervala koji čine domenu.

Veza neprekidnosti i derivabilnosti

Kad ne postoji derivacija $f'(c)$? Argumentirajte pomoću njene prave definicije

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}?$$

- U zatvorenim rubovima domene funkcije ne možemo tražiti obostrani, nego samo jednostrane limese, pa nema smisla definirati derivaciju u zatvorenim rubovima intervala koji čine domenu.
- Ako je gornji limes beskonačan, onda i ne postoji — to će se desiti ako je u $(c, f(c))$ tangenta na graf od f vertikalna.

Veza neprekidnosti i derivabilnosti

Kad ne postoji derivacija $f'(c)$? Argumentirajte pomoću njene prave definicije

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}?$$

- U zatvorenim rubovima domene funkcije ne možemo tražiti obostrani, nego samo jednostrane limese, pa nema smisla definirati derivaciju u zatvorenim rubovima intervala koji čine domenu.
- Ako je gornji limes beskonačan, onda i ne postoji — to će se desiti ako je u $(c, f(c))$ tangenta na graf od f vertikalna.
- Ako gornji limes ne postoji jer se limes slijeva i limes zdesna ne podudaraju, imamo „špicu" na grafu.

- Ako funkcija ima prekid u točki c, onda je $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ pa brojnik u limesu $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nema limes 0, dok nazivnik ima limes nula te je limes beskonačan ili neodređen.

- Ako funkcija ima prekid u točki c, onda je $\lim\limits_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ pa brojnik u limesu $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nema limes 0, dok nazivnik ima limes nula te je limes beskonačan ili neodređen.

Teorem

Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je i neprekidna u toj točki.

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji primjer je funkcija apsolutne vrijednosti.

- Ako funkcija ima prekid u točki c, onda je $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq f(c)$ pa brojnik u limesu $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ nema limes 0, dok nazivnik ima limes nula te je limes beskonačan ili neodređen.

Teorem

Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je i neprekidna u toj točki.

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji primjer je funkcija apsolutne vrijednosti.

Napomena. Većina funkcija koje susrećemo u primjenama su ne samo neprekidne, nego i derivabilne, štoviše: i njihove derivacije su neprekidne funkcije. Takve funkcije zovemo glatkim funkcijama (funkcijama klase C^1).

Iz definicije derivacije izvedimo:

- formulu za derivaciju konstantne funkcije:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = 0;$$

Iz definicije derivacije izvedimo:

- formulu za derivaciju konstantne funkcije:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{0}{x - c} = 0;$$

- svojstvo homogenosti derivacija: Ako je f derivabilna u c, te ako je g definirana s $g(x) = Cf(x)$, onda je

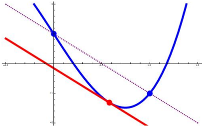
$$g'(c) = \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{Cf(x) - Cf(c)}{x - c}$$

$$= C \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = Cf'(c)$$

Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

Ako je funkcija f derivabilna na I i neprekidna na $a, b \in I$, $a < b$, onda postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

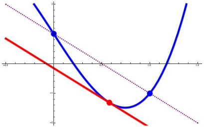
Geometrijski gledano: za proizvoljnu sekantu grafa derivabilne funkcije postoji točka grafa (između točaka koje određuju sekantu) takva da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti.



Lagrangeov teorem srednje vrijednosti

Ako je funkcija f derivabilna na I i neprekidna na $a, b \in I$, $a < b$, onda postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometrijski gledano: za proizvoljnu sekantu grafa derivabilne funkcije postoji točka grafa (između točaka koje određuju sekantu) takva da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti.



Fizikalno gledano: za svaku veličinu ovisnu o vremenu postoji trenutak u kojem je trenutna brzina promjene te veličine jednaka prosječnoj brzini tokom cijelog promatranog vremenskog intervala.

Zadatak

Recimo da znate da za neku funkciju vrijedi $f(2) = 1$ *i* $f'(x) \leq 5$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$. *Pokažite da je* $f(5) \leq 16$ *i* $f(-1) \geq -14$.

Zadatak

Recimo da znate da za neku funkciju vrijedi $f(2) = 1$ i $f'(x) \leq 5$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $f(5) \leq 16$ i $f(-1) \geq -14$.

Za svaki b postoji c između $a = 2$ i b takav da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(2)}{b - 2} \Leftrightarrow (b - 2)\, f'(c) = f(b) - 1$$

Zadatak

Recimo da znate da za neku funkciju vrijedi $f(2) = 1$ i $f'(x) \leq 5$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $f(5) \leq 16$ i $f(-1) \geq -14$.

Za svaki b postoji c između $a = 2$ i b takav da je

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(2)}{b - 2} \Leftrightarrow (b - 2)\, f'(c) = f(b) - 1$$

$$f(5) = 1 + (5 - 2) \cdot f'(c) = 1 + 3\, f'(c) \leq 16,$$

$$f(-1) = 1 + (-1 - 2) \cdot f'(c) = 1 - 3\, f'(c) \geq -14$$