JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 *(10 bodova)* Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := z \sin x + y^2 e^z,$$

izračunajte

$$\operatorname{div}(\nabla f).$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 2 *(15 bodova)*

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := 3x^2 + 2y^2 + \ln\left(z^2 + 1\right).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 3 *(15 bodova)*

Odredite duljine susjednih stranica a i b pravokutnika P opsega 12 cm tako da volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika P oko stranice a bude maksimalan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 4 *(10 bodova)*

Dokažite da je skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{S} \ldots \; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1,$$

ploha zadana funkcijom $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

i odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na $\mathcal{S}$ u točki $(1, 0, 0)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 5 *(15 bodova)*

Rad izvršen pod utjecajem vektorskog polja neke sile **F** duž krivulje γ računa se kao krivuljni integral te sile duž te krivulje. Koliki rad se izvrši pomicanjem čestice duž elipse s poluosima duljina 3 cm odnosno 5 cm, ako čestica napravi pola kruga u pozitivnom smjeru (od jednog do drugog tjemena na maloj osi), te ako je polje sile takvo da u svakoj točki ravnine djeluje paralelno s velikom osi elipse, a pritom je iznos sile (u N) u pojedinoj točki ravnine jednak recipročnoj vrijednosti udaljenost te točke do središta elipse. Kao poznatu smijete koristiti formulu

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 6 *(15 bodova)*

Michaelis-Menteničina jednadžba za brzinu v nastajanja produkta u enzimskoj katalizi glasi

$$v = \frac{v_{\mathrm{max}}}{1 + K_{\mathrm{M}}/[\mathrm{S}]}.$$

Pritom je K_{M} Michaelisova konstanta (za dani enzim koji djeluje na dani supstrat), v_{max} je maksimalna brzina reakcije, a [S] je koncentracija supstrata S.

Ugljična anhidraza je enzim koji katalizira hidrataciju CO_2 u crvenim krvnim zrncima. Praćenjem koncentracije supstrata CO_2 dobiveni su sljedeći podaci:

$[\mathrm{CO_2}]/(\mathrm{mmol/L})$	1,25	2,50	5,00	7,00
$v/(\mathrm{mmol/(L\,s)})$	0,0278	0,0500	0,0833	0,103

Koristeći metodu najmanjih kvadrata, procijenite iznos Michaelisove konstante i maksimalne brzine opisane hidratacije CO_2. Obvezno skicirajte dijagram koji može poslužiti za usporedbu zadanih podataka s izračunatom ovisnosti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 *(10 bodova)* Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := x^2 e^y + y \sin z,$$

izračunajte

$$\operatorname{div}(\nabla f).$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 2 *(15 bodova)*

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := -3x^2 - y^2 - \ln\left(z^2 + 1\right).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 3 *(15 bodova)*

Odredite duljine susjednih stranica x i y pravokutnika P opsega 24 cm tako da volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika P oko stranice x bude maksimalan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 4 *(10 bodova)*
Dokažite da je skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{S} \ldots \; 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 3,$$

ploha zadana funkcijom $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2,$$

i odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na $\mathcal{S}$ u točki $(1, 0, 0)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 5 *(15 bodova)*

Vjerojatnost da se elektron opisan orbitalom ψ nađe unutar dijela prostora V računa se kao $\iiint_V |\psi|^2 \mathrm{d}V$. Izračunajte vjerojatnost da se elektron fluorove ($Z = 9$) 3p$_z$-orbitale

$$\psi_{3,1,0}(r,\theta,\varphi) = \frac{Z^2}{81a_0^3}\sqrt{\frac{Z}{2\pi a_0}}\,(12-2Zr)\,r\exp\left(-\frac{Zr}{3a_0}\right)\cos\theta$$

nalazi unutar kugle polumjera $a_0 = 52{,}9$ pm i istovremeno izvan stošca kojemu je vrh u jezgri (ishodištu) i čije izvodnice s pozitivnim dijelom z-osi zatvaraju kut od $60°$.

Smijete koristiti formule

$$\int_0^{6/a} x^2\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{2}{a^3}-\frac{50}{e^6a^3};\ \int_0^{6/a} x^3\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{6}{a^4}-\frac{366}{e^6a^4};\ \int_0^{6/a} x^4\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{24}{a^5}-\frac{2760}{e^6a^5}.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 6 *(15 bodova)*

Veza između visine h stupca otopine i njezine masene koncentracije γ može se aproksimirati jednadžbom

$$\rho g M^2 h = RTM\gamma + RTB\gamma^2.$$

Tu je $R = 8{,}3145$ J K^{-1} mol^{-1} opća plinska konstanta, T je temperatura (u K), $g = 9{,}81$ m s^{-2} ubrzanje sile teže, ρ je gustoća otopine, M molarna masa otopljene tvari, a B je tzv. osmotski virijalni koeficijent.

Za neku otopinu PVC-a u cikloheksanonu mjerene su visine h pri raznim γ i konstantnoj $T = 298$ K. Gustoća otopine je $\rho = 0{,}980$ g cm^{-3}. Dobiveni su sljedeći podaci

$\gamma/(\mathrm{g/L})$	1,00	2,00	4,00	7,00
h/cm	0,280	0,710	2,01	5,10

Koristeći metodu najmanjih kvadrata, procijenite molarnu masu otopljenog PVC-a i osmotski vrijalni koeficijent. *Hint*: Pri linearizaciji može biti smisleno za x ili y uzeti da ovisi o obje varijable danog konteksta. Obvezno skicirajte dijagram koji može poslužiti za usporedbu zadanih podataka s izračunatom ovisnosti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 *(10 bodova)* Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := -x^2 e^y + y \cos z,$$

izračunajte

$$\operatorname{div}(\nabla f).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 2 *(15 bodova)*

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := x^2 + \ln\big(y^2 + 1\big) + 2z^2.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 3 *(15 bodova)*

Odredite duljine susjednih stranica a i b pravokutnika P opsega 6 cm tako da volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika P oko stranice b bude maksimalan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 4 *(10 bodova)*
Dokažite da je skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{S} \ldots \ 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 2,$$

ploha zadana funkcijom $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2,$$

i odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na $\mathcal{S}$ u točki $(1, 0, 0)$.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 5 *(15 bodova)*

Rad izvršen pod utjecajem vektorskog polja neke sile **F** duž krivulje γ računa se kao krivuljni integral te sile duž te krivulje. Koliki rad se izvrši pomicanjem čestice duž elipse s poluosima duljina 1 cm odnosno 2 cm, ako čestica napravi pola kruga u pozitivnom smjeru (od jednog do drugog tjemena na velikoj osi), te ako je polje sile takvo da u svakoj točki ravnine djeluje paralelno s malom osi elipse, a pritom je iznos sile (u N) u pojedinoj točki ravnine jednak sinusu udaljenosti te točke do pravca na kojemu leži velika os.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 6 *(15 bodova)*

Integrirani oblik zakona brzine reakcija drugog reda, kod kojih na brzinu utječe samo (množinska) koncentracija [R] jednog reaktanta R, može se zapisati primjerice u obliku

$$[\mathrm{R}] - [\mathrm{R}]_0 = k\nu_{\mathrm{R}} t [\mathrm{R}]_0 [\mathrm{R}].$$

Pritom je $\nu_{\mathrm{R}} < 0$ stehiometrijski koeficijent reaktanta R, $[\mathrm{R}]_0$ je njegova početna koncentracija, k je koeficijent brzine reakcije, k je koeficijent brzine reakcije, a t je vrijeme proteklo od početka reakcije.

Reakcija raspada $2\,\mathrm{NOBr(g)} \longrightarrow 2\,\mathrm{NO(g)} + \mathrm{Br_2(g)}$ je drugog reda. U priloženoj tablici su podaci dobiveni mjerenjem tijekom jedne takve reakcije pri temperaturi od 10°C:

t/min	1,0	2,5	5,0	7,5
[I]/(mmol/L)	10,0	4,10	2,07	1,38

Koristeći metodu najmanjih kvadrata, procijenite iznos koeficijenta brzine reakcije i početne koncentracije NOBr. Obvezno skicirajte dijagram koji može poslužiti za usporedbu zadanih podataka s izračunatom ovisnosti.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Napomene. Dozvoljena pomagala za rješavanje kolokvija su: kalkulator, tiskane ili rukom pisane tablice s formulama i pribor za pisanje. Neće se bodovati nečitko pisani dijelovi testa.

Napišite svoje ime, prezime i JMBAG na sve papire koje predajete!

Zadatak 1 *(10 bodova)* Za funkciju $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := y \cos x - z^2 e^y,$$

izračunajte

$$\operatorname{div}(\nabla f).$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 2 *(15 bodova)*

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := -\ln\left(x^2 + 1\right) - y^2 - z^2.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 3 *(15 bodova)*

Odredite duljine susjednih stranica x i y pravokutnika P opsega 18 cm tako da volumen valjka nastalog rotacijom pravokutnika P oko stranice y bude maksimalan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 4 *(10 bodova)*

Dokažite da je skup $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{S} \ldots \; 2x^2 + y^2 + 2z^2 = 2,$$

ploha zadana funkcijom $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z^2,$$

i odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na $\mathcal{S}$ u točki $(1, 0, 0)$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 5 *(15 bodova)*

Vjerojatnost da se elektron opisan orbitalom ψ nađe unutar dijela prostora V računa se kao $\iiint_V |\psi|^2 \mathrm{d}V$. Izračunajte vjerojatnost da se elektron ugljikove ($Z = 6$) 3p$_z$-orbitale

$$\psi_{3,1,0}(r,\theta,\varphi) = \frac{Z^2}{81a_0^3}\sqrt{\frac{Z}{2\pi a_0}}\,(12-2Zr)\,r\exp\left(-\frac{Zr}{3a_0}\right)\cos\theta$$

nalazi unutar kugle polumjera $a_0 = 52{,}9$ pm i istovremeno unutar stošca kojemu je vrh u jezgri (ishodištu) i čije izvodnice s pozitivnim dijelom z-osi zatvaraju kut od $60°$.

Smijete koristiti formule

$$\int_0^{4/a} x^2\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{2}{a^3}-\frac{26}{e^4a^3};\ \int_0^{4/a} x^3\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{6}{a^4}-\frac{142}{e^4a^4};\ \int_0^{4/a} x^4\exp(-ax)\mathrm{d}x = \frac{24}{a^5}-\frac{824}{e^4a^5}.$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

Matematika 2 za kemičare

Drugi kolokvij - 28. svibnja 2016.

Zadatak 6 *(15 bodova)*

Pri faznim prijelazima između tekućeg i plinovitog stanja, ovisnost tlaka para p o temperaturi T (u K) se obično opisuje Clausius-Clapeyronovom jednadžbom. Za slučaj da je reakcijska entalpija isparavanja, $\Delta_{\text{vap}}H$, konstantna za razmatrani raspon temperatura, jedan oblik Clausius-Clapeyronove jednadžbe glasi

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\Delta_{\text{vap}}H(T_0 - T)}{RTT_0}\right).$$

Pritom je $R = 8{,}3145\ \text{J K}^{-1}\ \text{mol}^{-1}$ opća plinska konstanta, p_0 je tlak para pri temperaturi T_0, a p je tlak para pri temperaturi T.

Mjerenjem tlaka para ketona karvona pri različitim temperaturama dobiveni su podaci:

$\theta/°\text{C}$	100,4	133,0	157,3	203,5
p/torr	10,0	40,0	100	400

Koristeći metodu najmanjih kvadrata, procijenite iznos reakcijske energije isparavanja za karvon u navedenom rasponu temperatura te tlak para pri temperaturi 80°C. Obvezno skicirajte dijagram koji može poslužiti za usporedbu zadanih podataka s izračunatom ovisnosti.