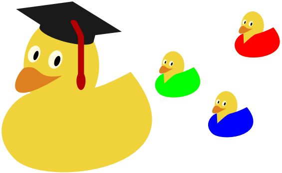
1. tjedan nastave: Sustavi linearnih jednadžbi.

Franka Miriam Brückler



Linearne jednadžbe

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Linearne jednadžbe

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Definicija

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom x *je jednadžba koja se može zapisati u obliku* $a\,x = b$, *gdje su* a *i* b *zadani brojevi (konstante). Rješenje takve jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice daje istinitu brojevnu jednakost.*

Linearne jednadžbe

Koja je razlika između $f(x) = 2x - 5$ i $2x - 5 = 0$?

Definicija

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom x je jednadžba koja se može zapisati u obliku $a\,x = b$, gdje su a i b zadani brojevi (konstante). Rješenje takve jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice daje istinitu brojevnu jednakost.

Rješenje jednadžbe $a\,x = b$ je nultočka funkcije zadane formulom $f(x) = a\,x - b$, odnosno apscisa sjecišta pravca $y = a\,x - b$ s x-osi. Moguća su tri slučaja:

- Jedinstveno rješenje (ako $a \neq 0$;
- Nema rješenja (ako $a = 0$ i $b \neq 0$);
- Beskonačno mnogo rješenja (ako $a = b = 0$).

Primjer

Lani je Dominik bio dvostruko stariji od Lane.

Primjer

Lani je Dominik bio dvostruko stariji od Lane. Ima li smisla reći: Jedno rješenje te jednadžbe da je Dominik star 9 *godina, a drugo da Lana ima* 5*?*

Primjer

Lani je Dominik bio dvostruko stariji od Lane. Ima li smisla reći: Jedno rješenje te jednadžbe da je Dominik star 9 godina, a drugo da Lana ima 5?

Definicija

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by = c$ gdje su a, b i c zadani brojevi (konstante). Broj c naziva se slobodnim članom, a a i b su koeficijenti jednadžbe. Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeva x i y daje istinitu brojevnu jednakost.

Primjer

Lani je Dominik bio dvostruko stariji od Lane. Ima li smisla reći: Jedno rješenje te jednadžbe da je Dominik star 9 godina, a drugo da Lana ima 5?

Definicija

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku $ax + by = c$ gdje su a, b i c zadani brojevi (konstante). Broj c naziva se slobodnim članom, a a i b su koeficijenti jednadžbe. Rješenje takve jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeva x i y daje istinitu brojevnu jednakost.

Je li točno: Slobodni član je broj desno od jednakosti?
Formulirajte definiciju linearne jednadžbe s tri nepoznanice i njezinog rješenja, a zatim tu definiciju poopćite na proizvoljni broj nepoznanica.

Sustavi linearnih jednadžbi

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g *smjese natrijeva klorida i kalijeva klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je* 1,3211 g *srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.*

Neka je x masa NaCl *u smjesi, a y masa* KCl *u smjesi:*

$$x + y = 0{,}6190\,\mathrm{g}$$

Sustavi linearnih jednadžbi

Primjer

U vodi je otopljeno 0,6190 g *smjese natrijeva klorida i kalijeva klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je* 1,3211 g *srebrova klorida. Odredite masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.*
Neka je x *masa* NaCl *u smjesi, a* y *masa* KCl *u smjesi:*

$$x + y = 0{,}6190\,\mathrm{g}$$

$M_{\mathrm{NaCl}} = 58{,}45\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$, $M_{\mathrm{KCl}} = 74{,}56\ \mathrm{g\,mol^{-1}}$, $M_{\mathrm{AgCl}} = 143{,}34\ \mathrm{g\,mol^{-1}} \Rightarrow$

$$\frac{143{,}34}{58{,}45}x + \frac{143{,}34}{74{,}56}y = 1{,}3211\,\mathrm{g}.$$

$$x = 0{,}2474\,\mathrm{g},\ y = 0{,}3716\,\mathrm{g}$$

Promjena baze

Primjer

Zadani su nekomplanarni vektori $\vec{a} = [2, -1, 0]$, $\vec{b} = [1, 0, 2]$ *i* $\vec{c} = [0, 2, -4]$. *Koje su koordinate vektora* $\vec{v} = [2, -6, 4]$ *u bazi* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$*?*

Promjena baze

Primjer

Zadani su nekomplanarni vektori $\overrightarrow{a} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{b} = [1, 0, 2]$ *i* $\overrightarrow{c} = [0, 2, -4]$. *Koje su koordinate vektora* $\overrightarrow{v} = [2, -6, 4]$ *u bazi* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$*?*

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

Promjena baze

Primjer

Zadani su nekomplanarni vektori $\overrightarrow{a} = [2, -1, 0]$, $\overrightarrow{b} = [1, 0, 2]$ *i* $\overrightarrow{c} = [0, 2, -4]$. *Koje su koordinate vektora* $\overrightarrow{v} = [2, -6, 4]$ *u bazi* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$*?*

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2$$

$$-x + 2z = -6$$

$$2y - 4z = 4$$

Promjena baze

Primjer

Zadani su nekomplanarni vektori $\vec{a} = [2, -1, 0]$, $\vec{b} = [1, 0, 2]$ *i* $\vec{c} = [0, 2, -4]$. *Koje su koordinate vektora* $\vec{v} = [2, -6, 4]$ *u bazi* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$*?*

$$[2, -6, 4] = x[2, -1, 0] + y[1, 0, 2] + z[0, 2, -4] \Rightarrow$$

$$2x + y = 2$$

$$-x + 2z = -6$$

$$2y - 4z = 4$$

Vektor $\vec{x}$ *u bazi* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *ima koordinate* $[2, -2, -2]$.

Primjer

Koji problem bi rješavao zadatak: Riješi sustav

$$2x + y - z = \lambda,$$

$$-x - 3y + 2z = \mu,$$

$$3x + 2y - 4z = \eta.$$

u ovisnosti o λ, μ *i* η*?*

Primjer

Koji problem bi rješavao zadatak: Riješi sustav

$$2x + y - z = \lambda,$$

$$-x - 3y + 2z = \mu,$$

$$3x + 2y - 4z = \eta.$$

u ovisnosti o λ, μ *i* η*?*

Ako su poznate koordinate vektora $\vec{v}$ i triju nekomplanarnih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ u nekoj bazi, koordinate $[x, y, z]$ od $\vec{v}$ u bazi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ dobiju se rješavanjem sustava triju jednadžbi s tri nepoznanice x, y, z. Pritom su jednadžbe oblika ,,i-ta koordinata od $\vec{a}$"$\cdot x +$,,i-ta koordinata od $\vec{b}$"$\cdot y +$,,i-ta koordinata od $\vec{c}$"$\cdot z =$,,i-ta koordinata od $\vec{v}$" za $i = 1, 2, 3$.

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:

$$\mathrm{C_2H_5OH\ (l) + O_2\ (g) \longrightarrow CO_2\ (g) + H_2O\ (g)}.$$

Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

$$\begin{array}{ll} \mathrm{C}: & 2x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + x_{\mathrm{CO_2}} = 0 \\ \mathrm{H}: & 6x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + 2x_{\mathrm{H_2O}} = 0 \\ \mathrm{O}: & x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + 2x_{\mathrm{O_2}} + 2x_{\mathrm{CO_2}} + x_{\mathrm{H_2O}} = 0 \end{array}.$$

Primjer

Izjednačite jednadžbu gorenja etanola:

$$\mathrm{C_2H_5OH\ (l) + O_2\ (g) \longrightarrow CO_2\ (g) + H_2O\ (g)}.$$

Algebarski opišite uvjete na stehiometrijske koeficijente!

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}: &\quad 2x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + x_{\mathrm{CO_2}} = 0 \\
\mathrm{H}: &\quad 6x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + 2x_{\mathrm{H_2O}} = 0 \\
\mathrm{O}: &\quad x_{\mathrm{C_2H_5OH}} + 2x_{\mathrm{O_2}} + 2x_{\mathrm{CO_2}} + x_{\mathrm{H_2O}} = 0
\end{aligned} .$$

Napomena

Stehiometrijski koeficijenti u danoj kemijskoj jednadžbi opisuju omjere množina pojedinih reaktanata i produkata u reakciji. Po dogovoru, stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim, a stehiometrijski koeficijenti produkata s pozitivnim predznakom. Razlog je u tome što stehiometrijski koeficijent reaktanta opisuje koliko jedinki te vrste se troši tijekom jedinične pretvorbe, dok stehiometrijski koeficijent produkta opisuje koliko jedinki te vrste nastaje tijekom jedinične pretvorbe.

$$\mathrm{C_2H_5OH\ (l) + 3O_2\ (g) \longrightarrow 2CO_2\ (g) + 3H_2O\ (g).}$$

$$\mathrm{0C_2H_5OH\ (l) + 0O_2\ (g) \longrightarrow 0CO_2\ (g) + 0H_2O\ (g).}$$

$$\mathrm{2C_2H_5OH\ (l) + 6O_2\ (g) \longrightarrow 4CO_2\ (g) + 6H_2O\ (g).}$$

$$n\mathrm{C_2H_5OH\ (l)} + 3n\mathrm{O_2\ (g)} \longrightarrow 2n\mathrm{CO_2\ (g)} + 3n\mathrm{H_2O\ (g)}.$$

$$C_2H_5OH\ (l) + 3O_2\ (g) \longrightarrow 2CO_2\ (g) + 3H_2O\ (g).$$

$$0C_2H_5OH\ (l) + 0O_2\ (g) \longrightarrow 0CO_2\ (g) + 0H_2O\ (g).$$

$$2C_2H_5OH\ (l) + 6O_2\ (g) \longrightarrow 4CO_2\ (g) + 6H_2O\ (g).$$

$$nC_2H_5OH\ (l) + 3nO_2\ (g) \longrightarrow 2nCO_2\ (g) + 3nH_2O\ (g).$$

Definicija

Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Rješenje sustava je svaka uređena n-torka brojeva koja zadovoljava sve jednadžbe sustava. Ako sustav ima m jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$-sustavom. Sustavi kojima su svi slobodni članovi jednaki nuli zovu se homogeni sustavi, a ostali se zovu nehomogeni sustavi.

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ *u ravnini? U prostoru?*

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ *u ravnini? U prostoru?*

- jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ pravac u ravnini; sustav od m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ m pravaca u ravnini; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim pravcima.

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

- jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ pravac u ravnini; sustav od m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ m pravaca u ravnini; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim pravcima.
- jedna linearna jednadžba s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ ravnina u prostoru; sustav od m linearnih jednadžbi s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ m ravnina u prostoru; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim ravninama.

Koliko rješenja može imati sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ *u ravnini? U prostoru?*

- jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ pravac u ravnini; sustav od m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ m pravaca u ravnini; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim pravcima.
- jedna linearna jednadžba s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ ravnina u prostoru; sustav od m linearnih jednadžbi s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ m ravnina u prostoru; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim ravninama.

Koliko rješenja može imati sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice? A sustav od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice?

Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

- jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ pravac u ravnini; sustav od m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ m pravaca u ravnini; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim pravcima.
- jedna linearna jednadžba s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ ravnina u prostoru; sustav od m linearnih jednadžbi s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ m ravnina u prostoru; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim ravninama.

Koliko rješenja može imati sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice? A sustav od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice? A 3×3-sustav?

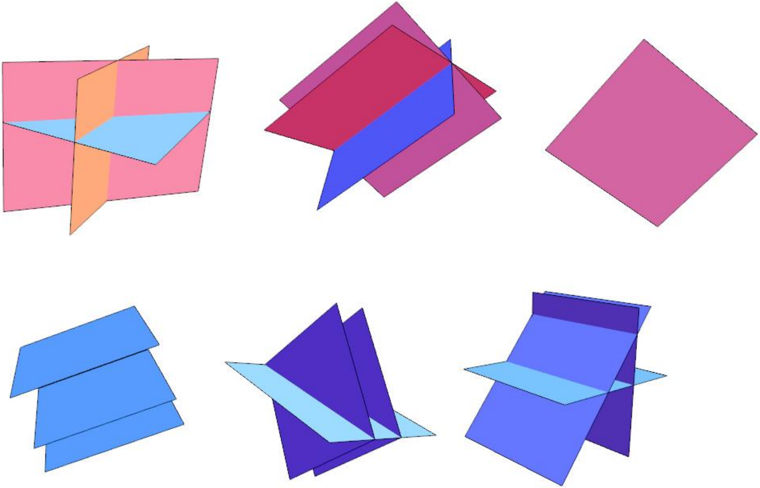
Geometrijska interpretacija sustava

Zadatak

Što predstavlja jednadžba $2x - y = 1$ u ravnini? U prostoru?

- jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ pravac u ravnini; sustav od m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice $\Leftrightarrow$ m pravaca u ravnini; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim pravcima.
- jedna linearna jednadžba s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ ravnina u prostoru; sustav od m linearnih jednadžbi s tri nepoznanice $\Leftrightarrow$ m ravnina u prostoru; rješenje takvog sustava $\Leftrightarrow$ svaka točka koja je zajednička svim tim ravninama.

Koliko rješenja može imati sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice? A sustav od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice? A 3×3-sustav? $m \times 4$-sustav za $m > 3$?



Primjer

Sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice nije linearan:

$$x + y = 2, \quad x\,y = -3$$

Riješite ga!

Primjer

Sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice nije linearan:

$$x + y = 2, \quad x\,y = -3$$

Riješite ga!
Supstitucijom $y = -3/x$ *u prvu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu* $x^2 - 3 = 2x$ *koja ima dva rješenja* $x_1 = 3$ *i* $x_2 = -1$*.* *Stoga polazni sustav ima dva rješenja:* $(x_1, y_1) = (3, -1)$, $(x_2, y_2) = (-1, 3)$.

Primjer

Sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice nije linearan:

$$x + y = 2, \quad x\,y = -3$$

Riješite ga!
Supstitucijom $y = -3/x$ *u prvu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu* $x^2 - 3 = 2x$ *koja ima dva rješenja* $x_1 = 3$ *i* $x_2 = -1$*. Stoga polazni sustav ima dva rješenja:* $(x_1, y_1) = (3, -1)$, $(x_2, y_2) = (-1, 3)$.

Teorem (Osnovni teorem o rješenjima sustava linearnih jednadžbi)

Svaki sustav linearnih jednadžbi ima ili jedinstveno rješenje ili nema rješenja ili ima beskonačno mnogo rješenja.

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge.

Matrica sustava linearnih jednadžbi

Odgovorite i argumentirajte odgovore:

- Utječe li promjena poretka jednadžbi na rješenje sustava linearnih jednadžbi?
- A množenje/dijeljenje jednadžbe brojem?
- Ako zbrojimo dvije jednadžbe i jednu od njih zamijenimo tim zbrojem, utječe li to na rješenje sustava?
- Kad zbrojimo dvije jednadžbe, koji efekt to ima na njihove koeficijente uz pojedine nepoznanice i na slobodne članove?

Dogovor: Uredno zapisan sustav linearnih jednadžbi je onaj u kojem su sve nepoznanice na lijevim stranama jednakosti, slobodni članovi na desnim, a na lijevoj strani su istoimene nepoznanice potpisane jedna ispod druge. Uvodimo sljedeće oznake:

- koeficijent uz j-tu nepoznanicu u i-toj po redu jednadžbi označavamo s a_{ij};
- slobodni član u i-toj po redu jednadžbi označavamo s b_i;
- broj jednadžbi označavamo s m, a broj nepoznanica s n.

Definicija

Matrica sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rrrrrcl}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

je tablica oblika

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right).$$

Zadatak

Koje sustave predstavljaju matrice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- Čemu odgovaraju retci matrice sustava?
- Čemu odgovaraju stupci matrice sustava?
- Što predstavlja okomita crta?
- Ako je sustav tipa $m \times n$, koliko njegova matrica ima redaka? Stupaca?

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica! Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje, dakle cilj nam je dobiti matricu kojoj su u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.

Koji tip sustava linearnih jednadžbi s 2 nepoznanice je najlakše riješiti? Poopćite zaključak na n nepoznanica! Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje, dakle cilj nam je dobiti matricu kojoj su u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.
Primijetimo: dovoljno je poništiti elemente ispod i iznad dijagonale, tj. nije nužno inzistirati da na dijagonali dobijemo jedinice. Zašto?

$$\left\{\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & & & & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & & & = & \vdots \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & b_1/a_{11} \\ & x_2 & & & = & b_2/a_{22} \\ \vdots & & & & = & \vdots \\ & & & x_n & = & b_n/a_{nn} \end{array}\right.$$

Elementarne transformacije

Kako želimo pojednostaviti sustav u oblik što sličniji gornjem, ali tako da ne promijenimo skup njegovih rješenja, očito ne možemo primjenjivati sasvim proizvoljne operacije.

Definicija

Dozvoljene operacije smijemo primijeniti na matricu sustava bez da time promijenimo skup rješenja sustava zovu se elementarne transformacije. Ima ih tri:

- *Zamjena dva retka (član po član);*
- *Množenje nekog retka brojem koji nije nula (množenje svih članova retka tim brojem);*
- *Pribrajanje jednog retka drugom (član po član).*

Tim operacijama se doduše mijenja matrica sustava, ali ne i skup rješenja. Između uzastopnih matrica koje dobivamo elementarnim transformacijama pišemo znak $\sim$.

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako naiđemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako naiđemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula? A ako naiđemo na redak u kojemu su svi brojevi osim zadnjega (desno od crte) nula?

Je li temeljem gornje definicije dozvoljeno međusobno oduzimati retke? Množiti? A dijeliti retke brojem koji nije 0? Smijemo li u istom koraku pomnožiti dva retka svaki s po jednim brojem, a neki treći redak pribrojiti nekom četvrtom? Smijemo li u jednom koraku pribrojiti neki višekratnik jednog retka drugome? Zašto nije dozvoljeno provoditi elementarne operacije na stupcima? Što ako koristeći elementarne transformacije naiđemo na redak u kojem su svi brojevi nula? A ako naiđemo na stupac u kojemu su svi brojevi nula? A ako naiđemo na redak u kojemu su svi brojevi osim zadnjega (desno od crte) nula?

Napomena

Cramerov sustav je sustav s jedinstvenim rješenjem koji je tipa $n \times n$ (dakle, ima onoliko jednadžbi koliko ima nepoznanica).

Sustav linearnih jednadžbi s jedinstvenim rješenjem prepoznat ćemo po tome što ćemo matricu sustava elementarnim transformacijama uspjeti svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

U ovom slučaju rješenje polaznog sustava je n-torka $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Može li sustav s manje jednadžbi nego nepoznanica imati jedinstveno rješenje?

Sustave linearnih jednadžbi bez rješenja prepoznajemo tako što u nekom trenutku uzastopne primjene elementarnih transfomacija kao neki od redaka matrice sustava dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array} \right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.

Sustave linearnih jednadžbi bez rješenja prepoznajemo tako što u nekom trenutku uzastopne primjene elementarnih transfomacija kao neki od redaka matrice sustava dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.
Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje?

Sustave linearnih jednadžbi bez rješenja prepoznajemo tako što u nekom trenutku uzastopne primjene elementarnih transfomacija kao neki od redaka matrice sustava dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array} \right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.
Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (sve nepoznanice jednake 0) te je za njih gore opisana situacija nemoguća. To rješenje $(0, 0, \dots, 0)$ naziva se trivijalnim rješenjem homogenog sustava.

Sustave linearnih jednadžbi bez rješenja prepoznajemo tako što u nekom trenutku uzastopne primjene elementarnih transfomacija kao neki od redaka matrice sustava dobijemo redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$.

Znate li neki tip sustava za kojeg već i prije rješavanja znate da sigurno ima bar jedno rješenje? Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (sve nepoznanice jednake 0) te je za njih gore opisana situacija nemoguća. To rješenje $(0, 0, \dots, 0)$ naziva se trivijalnim rješenjem homogenog sustava.

Zadatak

Riješite sustav

$$x + y + z = 1, \quad 2x - y = 2$$

i zapišite matrice sustava na početku te u zadnjem koraku prije ispisa rješenja.

Sustav linearnih jednadžbi s beskonačno mnogo rješenja prepoznajemo po tome što se elementarnim transformacijama njegova matrica može svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_2 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Pritom su sa $\heartsuit$ i $X_1, \ldots, X_k$ označeni bilo kakvi brojevi. Broj k (broj jedinica na dijagonali koji nam je na kraju preostao) je manji od broja nepoznanica n (tj. imamo bar jedan stupac tipa $\heartsuit$ — takve stupce zvat ćemo „umetnuti stupci"). Naravno, k ne može biti veći od broja jednadžbi polaznog sustava niti od broja nepoznanica.

Iako je načelno dozvoljeno provođenje elementarnih transformacija u bilo kojem redoslijedu, postoji algoritam koji daje redoslijed koji je za većinu sustava najefikasniji. Taj algoritam zove se[1] Gaußova metoda eliminacija. Pritom pozicije matrice sustava označavamo s (i, j): i-ti redak, j-ti stupac.

Nadalje, iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava.

[1] Ovdje opisani algoritam zapravo se zove Gauß-Jordanova metoda eliminacija. Razlika između Gaußove i Gauß-Jordanove metode je u tome što se u Gaußovoj metodi poništavaju samo elementi ispod dijagonale, dok se u Gauß-Jordanovoj metodi poništavaju elementi ispod i iznad dijagonale matrice sustava.

1. Uzmi sljedeći po redu (i-ti) stupac. Ako je ovo početni korak, uzmi prvi stupac ($i = 1$). Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.
2. Ako je na dijagonalnoj poziciji (i, i) nula, zamjenom i-tog retka s nekim retkom ispod njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.
3. Pomoću „ključnog elementa" (broja na poziciji (i, i)) poništi ostatak stupca: svakom retku u kojem iznad/ispod ključnog elementa nije nula, dodaj odgovarajući višekratnik i-tog retka.
4. Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP! Sustav nema rješenja.
5. Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.
6. Vrati se na prvi korak.

Ukoliko je postupak stao iz razloga navedenih u prva dva koraka, sve retke u kojima je na poziciji (i, i) broj različit od 1 podijelimo tim brojem i na kraju očitamo rješenje.

Primjer

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) ?!$$

Primjer

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)?!$$

$$(1)\ \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)_{+(-5/3)\cdot I.} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

Primjer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) ?!$$

(1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +(-5/3)\cdot I. \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

ili

(2) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} :6 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -10I. \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/6 & 7/6 \\ 0 & -7/3 & 5/3 & -38/3 \end{array}\right)$$

ili

$$(3)\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -I. \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array}\right)$$

ili

$$(3)\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) -I. \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array}\right)$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7$$

ili

$$(3)\quad \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 2 & -1 & 7 \\ 10 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 30 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right) -I. \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 30 & 10 & -5 & 35 \\ 0 & -7 & 5 & -38 \end{array}\right)$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite sustav.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 7$$

Zadatak

Gaußovom metodom eliminacija riješite zadatak sa slide-a 6.