Vektorske funkcije i vektorska polja

Franka Miriam Brückler

Vektorske funkcije

Vidjeli smo: Gradijent skalarne funkcije f svakoj točki X iz domene te funkcije pridružuje vektor $\nabla f(X)$ parcijalnih derivacija te funkcije izračunatih u X. Funkcije poput ∇f, kojima je kodomena podskup nekog $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$, nazivaju se vektorskim funkcijama. Ako se broj koordinata u domeni i kodomeni podudara govorimo o vektorskim poljima.

Zadatak

Je li gradijent skalarne funkcije vektorsko polje ili općenitija vektorska funkcija?

Vektorske funkcije

Vidjeli smo: Gradijent skalarne funkcije f svakoj točki X iz domene te funkcije pridružuje vektor $\nabla f(X)$ parcijalnih derivacija te funkcije izračunatih u X. Funkcije poput ∇f, kojima je kodomena podskup nekog $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$, nazivaju se vektorskim funkcijama. Ako se broj koordinata u domeni i kodomeni podudara govorimo o vektorskim poljima.

Zadatak

Je li gradijent skalarne funkcije vektorsko polje ili općenitija vektorska funkcija?

$(x_1, \ldots, x_n) \overset{f}{\mapsto} f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \overset{\nabla f}{\mapsto} \nabla f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Vektorske funkcije

Vidjeli smo: Gradijent skalarne funkcije f svakoj točki X iz domene te funkcije pridružuje vektor $\nabla f(X)$ parcijalnih derivacija te funkcije izračunatih u X. Funkcije poput ∇f, kojima je kodomena podskup nekog $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$, nazivaju se vektorskim funkcijama. Ako se broj koordinata u domeni i kodomeni podudara govorimo o vektorskim poljima.

Zadatak

Je li gradijent skalarne funkcije vektorsko polje ili općenitija vektorska funkcija?

$(x_1, \dots, x_n) \overset{f}{\mapsto} f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \overset{\nabla f}{\mapsto} \nabla f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

Zadatak

Osmislite primjer pravila za neko vektorsko polje s dvije varijable.

Koordinatne funkcije

Svaku vektorsku funkciju F s n nezavisnih varijabli čija kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}^m$ možemo shvatiti kao m skalarnih funkcija istih tih varijabli:

$$F(X) = (F_1(X), F_2(X), \ldots, F_m(X))$$

ili kraće $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$, gdje smo s X kratko označili elemente $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ domene od F. Funkcije $F_1, F_2, \ldots, F_m$ zovemo koordinatnim funkcijama od F.

Zadatak

Koje su koordinatne funkcije vektorske funkcije zadane s $F(x, y) = (xy, x + y, x^2)$*?*

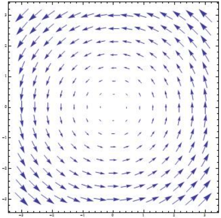
Grafički prikaz vektorskih polja s 2 i 3 varijable

Primjer

Promotrimo vektorsko polje $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definirano s*

$$F(x, y) = (-y, x)$$

Ako F *želimo prikazati grafički, to činimo tako da s početkom u točki* (x, y) *ucrtamo orijentiranu dužinu koja prikazuje toj točki pridruženi vektor* $F(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.



3D-varijanta

Promjena koordinatnog sustava kao vektorsko polje

Zadatak

Možete li promjenu koordinata u ravnini iz Kartezijevih u polarne i obrnuto opisati kao vektorske funkcije?

Promjena koordinatnog sustava kao vektorsko polje

Zadatak

Možete li promjenu koordinata u ravnini iz Kartezijevih u polarne i obrnuto opisati kao vektorske funkcije?

$$f = (u, v) : (x, y) \mapsto (r, \varphi) \overset{f}{\mapsto} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi+)\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right),$$

$$g = (u', v') : (r, \varphi) \overset{g}{\mapsto} (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Promjena koordinatnog sustava kao vektorsko polje

Zadatak

Možete li promjenu koordinata u ravnini iz Kartezijevih u polarne i obrnuto opisati kao vektorske funkcije?

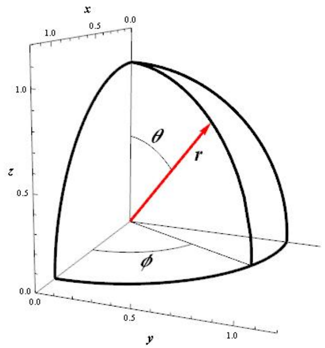
$$f = (u, v) : (x, y) \mapsto (r, \varphi) \overset{f}{\mapsto} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi+)\text{arctg}\,\frac{y}{x}\right),$$

$$g = (u', v') : (r, \varphi) \overset{g}{\mapsto} (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Osim Kks-a, u prostoru se često koriste još dva tipa koordinatnih sustava: cilindrički i sferni.
Cilindrički je direktno poopćenje polarnog koordinatnog sustava u prostoru: prve dvije koordinate su udaljenost projekcije točke na (x, y)-koordinatnu ravninu od ishodišta i pripadni polarni kut, a treća je jednostavno aplikata točke:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Sferni koordinatni sustav



$0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ (ili: $-\pi \leq \phi < \pi$), $0 \leq \theta \leq \pi$ (ili: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\mathbb{R}^3 = [0, +\infty\rangle \times [0, 2\pi\rangle \times [0, \pi]$$

$$x = r\cos\phi\sin\theta, \quad y = r\sin\phi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta.$$

- Koje su sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 0, -\sqrt{3})$? $(-1, -1, 0)$?
- Koje su Kartezijeve koordinate točke koja u sfernom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, 2\pi/3, \pi/4)$? $(1, \pi, \pi/2)$?
- Kako izgledaju plohe koje u sfernim koordinatama imaju jednadžbe $r = 2$? $\phi = \pi/3$? $\rho = 5\pi/6$?

Jakobijeva matrica i Jakobijan

Zadatak

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Jakobijeva matrica i Jakobijan

Zadatak

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Ako je $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ vektorska funkcija, matricu koja na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju i-te po redu koordinatne funkcije po j-toj varijabli, izračunatu u točki X domene, zovemo Jacobijevom matricom od F.

Zadatak

Kakva je Jacobijeva matrica vektorskog polja?

Jakobijeva matrica i Jakobijan

Zadatak

Ima li smisla govoriti o parcijalnim derivacijama vektorskih funkcija?

Ako je $F = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$ vektorska funkcija, matricu koja na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju i-te po redu koordinatne funkcije po j-toj varijabli, izračunatu u točki X domene, zovemo Jacobijevom matricom od F.

Zadatak

Kakva je Jacobijeva matrica vektorskog polja?

Determinantu Jacobijeve matrice vektorskog polja F zovemo Jakobijanom od F (u X):

$$JF(X) = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(X) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X)\right).$$

Zadatak

Odredite Jakobijan za promjenu varijabli iz Kartezijevih u polarne, odnosno cilindričke i sferne!

Zadatak

Odredite Jakobijan za promjenu varijabli iz Kartezijevih u polarne, odnosno cilindričke i sferne! Za polarne i cilindričke Jakobijan je r, a za sferne:

$$JF = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

Za promjene koordinata (i općenito za „lokalno invertibilne” funkcije) vrijedi:

$$JF^{-1}(Y) = JF(X)^{-1} \quad (Y = F(X))$$

Nabla-operator

Upoznali smo se s

- skalarnim funkcijama više varijabli i njihovim parcijalnim derivacijama te s
- vektorskim funkcijama i parcijalnim derivacijama njihovih koordinatnih funkcija.

Od velikog su fizikalnog značenja skalarnim i vektorskim funkcijama, tj. poljima, po određenim principima iz pripadnih parcijalnih derivacija konstruirana nova skalarna i vektorska polja. Ti principi se nazivaju različitim načinima djelovanja nabla-operatora

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Zbog linearnosti deriviranja slijedi da je nabla-operator linearan u sva tri svoja načina djelovanja na funkcije. Vrijede i mnoga druga zgodna svojstva (vidjeti skriptu za formule).

Gradijent skalarne funkcije

Gradijent skalarnoj funkciji pridružuje vektorsko polje po pravilu:

$$\operatorname{grad} f(X) = \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right).$$

Za funkcije dviju varijabli je $\nabla f(x_0, y_0)$ vektor normale na krivulju (nivo-liniju) $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, za funkcije triju varijabli je $\nabla f(x_0, y_0, y_0)$ vektor normale na plohu $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.

Gradijent skalarne funkcije

Gradijent skalarnoj funkciji pridružuje vektorsko polje po pravilu:

$$\operatorname{grad} f(X) = \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right).$$

Za funkcije dviju varijabli je $\nabla f(x_0, y_0)$ vektor normale na krivulju (nivo-liniju) $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, za funkcije triju varijabli je $\nabla f(x_0, y_0, y_0)$ vektor normale na plohu $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$.
Primijetimo:

$$\nabla f(X) \cdot [\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \Delta x_i \approx \Delta f$$

Primjer

Potencijalna energija međudjelovanja dvaju naboja Q_1 i Q_2 udaljenih za r je

$$V = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Sila koja djeluje na drugi naboj uslijed postojanja prvog je

$$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

($r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$ i analogno za deriviranje po y i z)

Divergencija vektorskog polja

Primjer

Neka je $F(x,y) = (\ln y, \frac{x}{y}) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$. *Jacobijeva matrica vektorskog polja* F *je*

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1/y \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

Trag Jacobijeve matrice vektorskog polja zove se divergencijom vektorskog polja F:

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

Primjer

Gaussov zakon za magnetsko polje $\mathbf{B}$ *ima oblik* $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$. *Ta formula iskazuje da nema točkastih izvora magnetskog polja.*

Rotacija vektorskog polja

Rotacija vektorskog polja se definira samo za vektorska polja $F = (F_x, F_y, F_z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Je li rotacija skalarna ili vektorska funkcija?

Rotacija vektorskog polja

Rotacija vektorskog polja se definira samo za vektorska polja $F = (F_x, F_y, F_z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{rot}\, F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Je li rotacija skalarna ili vektorska funkcija? Je li vektorsko polje?

Rotacija vektorskog polja

Rotacija vektorskog polja se definira samo za vektorska polja $F = (F_x, F_y, F_z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Je li rotacija skalarna ili vektorska funkcija? Je li vektorsko polje?

Primjer

Ako je $F(x, y, z) = (y, z, x) = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + x\,\vec{k}$, *onda je* $\operatorname{rot} F = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

Dvostruka djelovanja nabla operatora

Koje od sljedećih „stvari” su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

Dvostruka djelovanja nabla operatora

Koje od sljedećih „stvari” su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

- Rotacija gradijenta skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [0, 0, 0]$$

Npr., rotacija elektrostatskog polja točkastog naboja je nul-polje: $\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times \nabla \phi = \vec{0}$.

Dvostruka djelovanja nabla operatora

Koje od sljedećih „stvari” su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

- Rotacija gradijenta skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [0, 0, 0]$$

  Npr., rotacija elektrostatskog polja točkastog naboja je nul-polje: $\nabla \times \overrightarrow{E} = -\nabla \times \nabla \phi = \overrightarrow{0}$.
- Divergencija rotacije vektorskog polja s tri varijable je nul-funkcija:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

Dvostruka djelovanja nabla operatora

Koje od sljedećih „stvari" su smislene: grad grad, grad div, grad rot, div grad, div div, div rot, rot grad, rot div, rot rot?

- Rotacija gradijenta skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = [0, 0, 0]$$

  Npr., rotacija elektrostatskog polja točkastog naboja je nul-polje: $\nabla \times \overrightarrow{E} = -\nabla \times \nabla\phi = \overrightarrow{0}$.

- Divergencija rotacije vektorskog polja s tri varijable je nul-funkcija:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

- Divergancija gradijenta skalarne funkcije naziva se Laplaceovim operatorom:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

Primjer

Raspišimo Laplaceov operator za funkcije triju varijabli:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Primjer

Raspišimo Laplaceov operator za funkcije triju varijabli:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Općenito:

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Primjer

Za $f(x,y,z) = A\sin(ax)\sin(by)\sin(cz)$ *je*

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -(a^2 + b^2 + c^2) f(x,y,z),$$

tj. funkcija f *je svojstveni vektor Laplaceovog operatora koji odgovara svojstvenoj vrijednosti* $-a^2 - b^2 - c^2$*.*

Napomena

Laplaceov operator se pojavljuje u mnogim važnim jednadžbama u fizici:

- *Laplaceova jednadžba* $\nabla^2\phi = 0$,
- *Helmholtzova jednadžba* $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$,
- *valna jednadžba* $\nabla^2\phi = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$,
- *Schrödingerova jednadžba (za stacionarna stanja):* $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V$.

Napomena

Laplaceov operator se pojavljuje u mnogim važnim jednadžbama u fizici:

- *Laplaceova jednadžba* $\nabla^2\phi = 0$,
- *Helmholtzova jednadžba* $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$,
- *valna jednadžba* $\nabla^2\phi = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$,
- *Schrödingerova jednadžba (za stacionarna stanja):* $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V$.

Znamo da je gradijent skalarne funkcije vektorsko polje, dakle neka vektorska polja su gradijenti skalarnih funkcija (usporedi: neke funkcije jedne varijable su derivacije neke funkcije).

Napomena

Laplaceov operator se pojavljuje u mnogim važnim jednadžbama u fizici:

- *Laplaceova jednadžba* $\nabla^2\phi = 0$,
- *Helmholtzova jednadžba* $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$,
- *valna jednadžba* $\nabla^2\phi = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$,
- *Schrödingerova jednadžba (za stacionarna stanja):* $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V$.

Znamo da je gradijent skalarne funkcije vektorsko polje, dakle neka vektorska polja su gradijenti skalarnih funkcija (usporedi: neke funkcije jedne varijable su derivacije neke funkcije). Kako za vektorsko polje F saznati je li ono gradijent neke skalarne funkcije f?

Primjer

Je li $F(x,y) = (x+y, xy)$ *gradijent neke skalarne funkcije?*
Pretpostavimo da jest: $F = \nabla f$*, odnosno*

$$(x+y, xy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

za neku $f = f(x,y)$*. Integriranjem* $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ *po* x *dobijemo*

Primjer

Je li $F(x, y) = (x + y, xy)$ *gradijent neke skalarne funkcije?*
Pretpostavimo da jest: $F = \nabla f$, *odnosno*

$$(x + y, xy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

za neku $f = f(x, y)$. *Integriranjem* $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ *po* x *dobijemo*

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = xy - x.$$

Primjer

Je li $F(x,y) = (x+y, xy)$ gradijent neke skalarne funkcije? Pretpostavimo da jest: $F = \nabla f$, odnosno

$$(x+y, xy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

za neku $f = f(x,y)$. Integriranjem $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ po x dobijemo

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = xy - x.$$

Integriranjem po y dobijemo

$$C(y) = x\frac{y^2}{2} - xy + c,$$

što je nemoguće (C deriviranjem po x mora dati 0). Dakle, nije svako vektorsko polje gradijent neke skalarne funkcije.

Konzervativna vektorska polja

Definicija

Vektorsko polje F zove se konzervativnim ako postoji skalarna funkcija f takva da je $F = \nabla f$. U tom slučaju f se zove potencijalom od F.

Uoči: po definiciji je ∇f uvijek konzervativno vektorsko polje.

Konzervativna vektorska polja

Definicija

Vektorsko polje F zove se konzervativnim ako postoji skalarna funkcija f takva da je $F = \nabla f$. U tom slučaju f se zove potencijalom od F.

Uoči: po definiciji je ∇f uvijek konzervativno vektorsko polje. Ako je $F = \nabla f$, znači da je $F_1 = \frac{\partial f}{x_1}, \ldots, F_n = \frac{\partial f}{x_n}$, pa po Schwartzovom teoremu mora vrijediti

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Gornji uvjet zove se Eulerovim uvjetom: Vektorsko polje zadovoljava Eulerov uvjet ako mu je Jacobijeva matrica simetrična. Vektorsko polje koje ne zadovoljava Eulerov uvjet sigurno nije konzervativno.

Teorem

Ako je domena od F otvorena i povezana[a]*, vektorsko polje F je konzervativno točno onda kad njegove koordinatne funkcije zadovoljavaju Eulerov uvjet.*

[a] Primjerice, cijeli $\mathbb{R}^n$, $\langle 0, \infty\rangle^n$, otvoreni pravokutnik, otvoreni krug,...

Zadatak

Je li $F(x, y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$ *konzervativno vektorsko polje? Ako da, odredite mu potencijal!*

Napomena

Rotacija konzervativnog vektorskog polja triju varijabli uvijek je nul-polje.