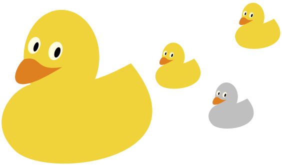
Višestruki i krivuljni integrali

Franka Miriam Brückler



Višestruki integrali

Podsjetimo se:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

u Kks-u predstavlja (za nenegativne, po dijelovima neprekidne podintegralne funkcije) površinu omeđenu grafom podintegralne funkcije f, područjem integriranja (segmentom $[a, b]$ kao podskupom x-osi) i vertikalama povućenim u rubovima područja integriranja do grafa. Pritom je područje integriranja podskup domene podintegralne funkcije.

Višestruki integrali

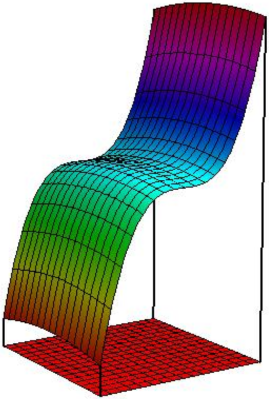
Podsjetimo se:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

u Kks-u predstavlja (za nenegativne, po dijelovima neprekidne podintegralne funkcije) površinu omeđenu grafom podintegralne funkcije f, područjem integriranja (segmentom $[a, b]$ kao podskupom x-osi) i vertikalama povućenim u rubovima područja integriranja do grafa. Pritom je područje integriranja podskup domene podintegralne funkcije.

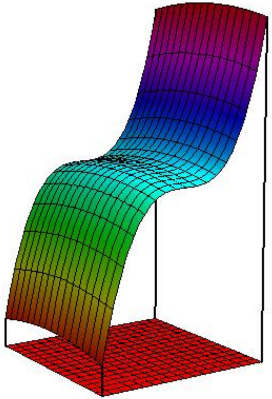
Ideja višestrukih integrala je poopćiti jednostruke (određene, Riemannove) integrale na skalarne funkcije više varijabli. U tom je slučaju područje integriranja opet podskup domene, dakle za funkciju s n varijabli područje integriranja bit će podskup od $\mathbb{R}^n$.

Dvostruki (i trostruki) integrali



$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 20,\ A = [-2,2] \times [-1,1],$$
$$V = \iint_A (2x^3 - y^2 + 20)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dvostruki (i trostruki) integrali



$$f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 20,\; A = [-2,2] \times [-1,1],$$
$$V = \iint_A (2x^3 - y^2 + 20)\, dx\, dy.$$

Neka je f nenegativna skalarna funkcija dviju varijabli i A podskup njezine domene (podskup (x, y)-ravnine). Dvostruki integral od f A, simbolički

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ili} \quad \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}A,$$

je volumen omeđen grafom te funkcije, skupom A i vertikalama povučenim na A u svim točkama ruba od A.

Neka je f nenegativna skalarna funkcija dviju varijabli i A podskup njezine domene (podskup (x, y)-ravnine). Dvostruki integral od f A, simbolički

$$\iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ili} \quad \iint_A f(x, y)\,\mathrm{d}A,$$

je volumen omeđen grafom te funkcije, skupom A i vertikalama povučenim na A u svim točkama ruba od A.

Primjer

Kako izgleda graf funkcije $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$, *ako je* $A = [a, b] \times [c, d]$*?*

Neka je f nenegativna skalarna funkcija dviju varijabli i A podskup njezine domene (podskup (x, y)-ravnine). Dvostruki integral od f A, simbolički

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ili} \quad \iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}A,$$

je volumen omeđen grafom te funkcije, skupom A i vertikalama povučenim na A u svim točkama ruba od A.

Primjer

Kako izgleda graf funkcije $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$, ako je $A = [a, b] \times [c, d]$?

$$\int_{[a,b]} \mathrm{d}x = (b-a)\cdot 1; \qquad \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (b-a)(d-c)\cdot 1;$$

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (b-a)(d-c)(q-p)\cdot 1$$

Svojstva dvostrukog i trostrukog integrala

Dijelovi volumena ispod (x, y)-ravnine pribrajaju se s negativnim predznakom:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

Svojstva dvostrukog i trostrukog integrala

Dijelovi volumena ispod (x, y)-ravnine pribrajaju se s negativnim predznakom:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

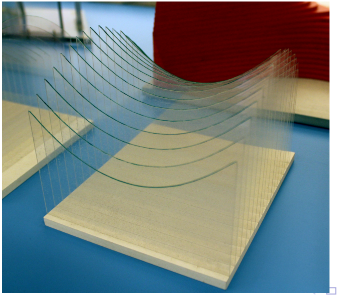
Kao i jednostruki integrali, i svi višestruki integrali su linearni.

Svojstva dvostrukog i trostrukog integrala

Dijelovi volumena ispod (x, y)-ravnine pribrajaju se s negativnim predznakom:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Kao i jednostruki integrali, i svi višestruki integrali su linearni. Postupak višestrukog integriranja najlakši je kad je područje integriranja tipa $[a, b] \times [c, d] \times \ldots$.



Primjer

$$\iint\limits_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (b-a)(d-c)\cdot 1 = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(„zbroj beskonačno bliskih površina pravokutnikâ")

Primjer

$$\iint\limits_{A} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (b-a)(d-c)\cdot 1 = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

(„zbroj beskonačno bliskih površina pravokutnikâ")

Teorem (Fubini)

Ako je podintegralna funkcija neprekidna na pravokutniku $[a,b]\times[c,d]$,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{a}^{b}\left(\int_{c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{c}^{d}\left(\int_{a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Zadatak

Izračunajte $\iint_{[-5,4]\times[0,3]}(2x-4y^3)\,\mathrm{d}A.$

Zadatak

Izračunajte $\iint_{[-5,4]\times[0,3]}(2x-4y^3)\,\mathrm{d}A.$

Za neprekidne funkcije oblika $f(x,y)=g(x)h(y)$ vrijedi

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Zadatak

Izračunajte $\iint_{[-5,4]\times[0,3]} (2x - 4y^3)\,\mathrm{d}A$.

Za neprekidne funkcije oblika $f(x,y) = g(x)h(y)$ vrijedi

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

I za trostruke integrale vrijedi Fubinijev teorem: ako je područje integriranja kvadar $V = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ i f neprekidna na V, onda je

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_p^q f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

ili slično za neki drugi odabir redoslijeda integriranja.

Također, ako je dodatno f moguće faktorizirati kao $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$ vrijedi

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Zadatak

Izračunajte $\iiint_{[0,1]\times[-2,2]\times[2,3]} \frac{\sqrt{x}\cdot y}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$

Također, ako je dodatno f moguće faktorizirati kao $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$ vrijedi

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\,dz\right).$$

Zadatak

Izračunajte $\iiint_{[0,1]\times[-2,2]\times[2,3]} \frac{\sqrt{x}\cdot y}{z}\,dx\,dy\,dz$.

Zadatak

Skicirajte područje integriranja za integral $\iint_{x^2+4y^2\leq 4} f(x, y)\,dx\,dy$.

Također, ako je dodatno f moguće faktorizirati kao $f(x,y,z) = g(x)h(y)k(z)$ vrijedi

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\cdot\left(\int_p^q k(z)\,dz\right).$$

Zadatak

Izračunajte $\iiint_{[0,1]\times[-2,2]\times[2,3]} \frac{\sqrt{x}\cdot y}{z}\,dx\,dy\,dz$.

Zadatak

Skicirajte područje integriranja za integral $\iint_{x^2+4y^2\leq 4} f(x,y)\,dx\,dy$.

Zadatak

Kako biste integrirali funkciju zadanu s $f(x,y) = x+y$ *po dijelu* (x,y)*-ravnine omeđenom s pravcem* $y = 9$ *i parabolom* $y = x^2$*?*

Ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$ i grafovima funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Slično, ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $y = c$, $y = d$ i grafovima funkcija $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Zadatak

Izračunajte integral iz prethodnog zadatka!

Jednostruki integral po skupu duljine 0 je površina iznosa 0:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

dvostruki integral po skupu površine 0 je volumen iznosa 0:

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}A = 0 \quad (P(A) = 0);$$

trostruki integral po skupu volumena 0 je 0:

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (V(\Omega) = 0).$$

Primjer

Ako je S površina kugle (sfera), onda je za svaku skalarnu funkciju f triju varijabli $\iiint_S f\,\mathrm{d}V = 0$.

Zamjena varijabli u višestrukim integralima

Zadatak

Kako biste što jednostavnije opisali četvrtinu jediničnog kruga koja se nalazi u prvom kvadrantu?

Zamjena varijabli u višestrukim integralima

Zadatak

Kako biste što jednostavnije opisali četvrtinu jediničnog kruga koja se nalazi u prvom kvadrantu?

Neka područja integriranja lakše je opisati u nekim ne-Kartezijevim koordinatama.

- Kružni isječak iz kruga polumjera a između polupravaca $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.
- Kružni vijenac između kružnica $r = a$ i $r = b$: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Zamjena varijabli u višestrukim integralima

Zadatak

Kako biste što jednostavnije opisali četvrtinu jediničnog kruga koja se nalazi u prvom kvadrantu?

Neka područja integriranja lakše je opisati u nekim ne-Kartezijevim koordinatama.

- Kružni isječak iz kruga polumjera a između polupravaca $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$.
- Kružni vijenac između kružnica $r = a$ i $r = b$: $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
- ...

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A'} f(x',y')\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y',$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(x',y',z')\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

$$\iint\limits_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{A'} f(x',y')\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y',$$

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(x',y',z')\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}\right|\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

Zadatak

Izračunajte $\iint_A e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *ako je* A *četvrtina jediničnog kruga koja se nalazi u prvom kvadrantu.*

Trostruki integrali u vjerojatnosnom računu

1. Neka je f funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na poziciji (x, y, z) u prostoru (npr. elektrona: $f = |\psi|^2$);

Trostruki integrali u vjerojatnosnom računu

1. Neka je f funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na poziciji (x, y, z) u prostoru (npr. elektrona: $f = |\psi|^2$);
2. vjerojatnost da se taj objekt nalazi unutar dijela prostora V je
$$P = \iiint\limits_V f \, \mathrm{d}V.$$
3. Kako se svaki objekt sigurno nalazi negdje u prostoru, funkcija f mora biti normirana:
$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f \, \mathrm{d}V = 1.$$
4. Prosječna (očekivana) vrijednost veličine opisane operatorom $\hat{\Omega}$ za $f = |\psi|^2$ je
$$\langle \Omega \rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{\Omega} \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Zadatak

Odredite prosječnu (očekivanu) udaljenost elektrona 1s-orbitale do jezgre atoma vodika, ako znate

$$\psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}.$$

Zadatak

Odredite prosječnu (očekivanu) udaljenost elektrona 1s-orbitale do jezgre atoma vodika, ako znate

$$\psi_{1s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}.$$

$$\hat{\Omega} = \hat{r} = r\cdot,$$

$$\langle r\rangle = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{r}\psi \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} r \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}\,\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^3 e^{-2r/a_0} \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2} a_0.$$

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_S \psi_1^* \psi_2 \, \mathrm{d}S.$$

Zadatak

Pokažite da su vodikove 1s i 2s orbitale ortogonalne!

$$\psi_{2s}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0}.$$

$$\langle \psi_{1s}, \psi_{2s} \rangle = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \psi_{1s} \psi_{2s} \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Zadatak

Ako je elektron opisan valnom funkcijom ψ, koja je vjerojatnost da se on nađe izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio z-osi i kut pri vrhu 45°, a unutar kugle polumjera R?

$$P = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=22{,}5^\circ}^{\pi} r^2 |\psi|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

Zadatak

Ako je elektron opisan valnom funkcijom ψ, koja je vjerojatnost da se on nađe izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio z-osi i kut pri vrhu 45°, a unutar kugle polumjera R?

$$P = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=22{,}5^\circ}^{\pi} r^2 |\psi|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

No, tko kaže da je jedini način da poopćimo jednostruke integrale povećanje dimenzije područja integriranja?

Krivulje

Definicija

Krivulja u $\mathbb{R}^n$ *je slika neprekidne* [a]. *funkcije* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

[a] U pravilu derivabilna s neprekidnom derivacijom: glatnka. Funkciju γ također ćemo, nepravilno, zvati krivuljom

Krivulje

Definicija

Krivulja u $\mathbb{R}^n$ je slika neprekidne [a]. funkcije $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

[a] U pravilu derivabilna s neprekidnom derivacijom: glatnka. Funkciju γ također ćemo, nepravilno, zvati krivuljom

- $A = \gamma(a)$ zovemo **početkom krivulje**,
- $B = \gamma(b)$ zovemo **krajem krivulje**;
- ako je $A = B$ kažemo da je γ **zatvorena**.
- Ako je (za svako t) $\gamma(t)$ element neke plohe, govorimo o krivulji na toj plohi.
- Krivulje su prirodno **orijentirane**, tj. postoji prirodan smjer obilaska krivulje: u smjeru porasta varijable t.

Termodinamička interpretacija

Svako stanje (termodinamičkog) sustava opisuje se preko određenih skalarnih svojstava, dakle stanje opisano sa m svojstava možemo poistovjetiti s točkom $X \in \mathbb{R}^m$.
(Termodinamički) sustav poistovjećujemo sa skupom svih svojih mogućih stanja: (otvorenim) podskupom $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$.
Procesi su promjene stanja sustava. U infinitezimalnim procesima se te promjene događaju u beskonačno malim iznosima. Svaki infinitezimalni proces može se vizualizirati kao orijentirana krivulja γ u skupu Ω; točke na toj krivulji predstavljaju sva stanja tokom procesa. Reverzibilan proces je onaj čiji smjer (tijek) možemo obrnuti infinitezimalnom promjenom nekog od svojstava.

Duljina krivulje i normalna ravnina

	2D	3D
krivulja	$\gamma(t) = (x(t), y(t))$	$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
tangencijalni vektor[1]	$\gamma'(T) = (x'(T), x'(T))$	$\gamma'(T) = (x'(T), y'(T), z'(T))$

[1]Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki $\gamma(T)$.

Duljina krivulje i normalna ravnina

	2D	3D
krivulja	$\gamma(t) = (x(t), y(t))$	$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
tangencijalni vektor[1]	$\gamma'(T) = (x'(T), x'(T))$	$\gamma'(T) = (x'(T), y'(T), z'(T))$

- Duljina krivulje:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt.$$

Pritom je $||\gamma'(t)|| = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$.

[1] Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki $\gamma(T)$.

Duljina krivulje i normalna ravnina

	2D	3D
krivulja	$\gamma(t) = (x(t), y(t))$	$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
tangencijalni vektor[1]	$\gamma'(T) = (x'(T), x'(T))$	$\gamma'(T) = (x'(T), y'(T), z'(T))$

- Duljina krivulje:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

  Pritom je $||\gamma'(t)|| = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$.
- Ako je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, ravnina koja je u točki $\gamma(T)$ okomita na krivulju (normalna ravnina) je određena jednadžbom

[1] Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki $\gamma(T)$.

Duljina krivulje i normalna ravnina

	2D	3D
krivulja	$\gamma(t) = (x(t), y(t))$	$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$
tangencijalni vektor[1]	$\gamma'(T) = (x'(T), x'(T))$	$\gamma'(T) = (x'(T), y'(T), z'(T))$

- Duljina krivulje:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t.$$

Pritom je $||\gamma'(t)|| = \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}$.

- Ako je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, ravnina koja je u točki $\gamma(T)$ okomita na krivulju (normalna ravnina) je određena jednadžbom

$$x'(T)(x - x(T)) + y'(T)(y - y(T)) + z'(T)(z - z(T)) = 0.$$

[1]Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki $\gamma(T)$.

Promjena orijentacije

Primjer

Kružnicu zadanu parametarski s $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ *obilazimo u pozitivnom smjeru. Kako postići da ju obilazimo u negativnom smjeru?*

Promjena orijentacije

Primjer

Kružnicu zadanu parametarski s $x(t) = \cos t$*,* $y(t) = \sin t$*,* $0 \leq t \leq 2\pi$ *obilazimo u pozitivnom smjeru. Kako postići da ju obilazimo u negativnom smjeru?*

$$x(t) = \cos(-t) = \cos t, \quad y(t) = \sin(-t) = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Općenito:

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Spajanje krivulja

Zadatak

Opišite parametarski krivulju $ABCA$, gdje je dio AB dužina od $A = (0,0)$ do $B = (1,0)$, a C četvrtina jedinične kružnice od B do $C = (0,1)$.

Spajanje krivulja

Zadatak

Opišite parametarski krivulju $ABCA$, gdje je dio AB dužina od $A = (0, 0)$ do $B = (1, 0)$, a C četvrtina jedinične kružnice od B do $C = (0, 1)$.

Krivulja $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ nastala spajanjem dvije krivulje γ_1 i γ_2 : $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ za $a \leq t \leq c$ i $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ za $c \leq t \leq b$.

Radna motivacija za krivuljne integrale 1. vrste

Znamo: mehanički rad izvršen duž ravnog puta (dužine) uslijed djelovanja sile iznosa F može se opisati integralom

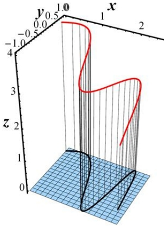
$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{I=[a,b]} F\,\mathrm{d}x.$$

Što ako put nije ravan, nego je nekakva krivulja γ u ravnini ili prostoru? Opet će rad geometrijski biti (do na predznak) površina omeđenu krivuljom, dijelom grafa od F iznad te krivulje i vertikalama povučenim u krajevima krivulje, u notaciji

$$w = \int_\gamma F\,\mathrm{d}s,$$

gdje $\mathrm{d}s$ predstavlja infinitezimalni djelić od γ. No, što bi to značilo $\int_\gamma \dots \mathrm{d}s$?

Krivuljni integrali prve vrste



Definicija (Krivuljni integral prve vrste)

Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neka neprekidna skalarna funkcija od n varijabli te neka je γ krivulja u Ω (dakle, $\gamma : [a, b] \to \Omega$). Tada je krivuljni integral od f (poznat i kao krivuljni integral prve vrste skalarne funkcije f) duž γ definiran s

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Vrijedi:

$$\int_{-\gamma} f\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}s.$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}s.$$

Oznaka $\oint$ umjesto $\int$ koristi se kad se želi naglasiti da se integrira po zatvorenoj krivulji.

Primjer

Izračunajmo $\oint_{\gamma} xy^4\,\mathrm{d}s$ *ako je* γ *rub polukruga* $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$:

Vrijedi:

$$\int_{-\gamma} f \, ds = \int_{\gamma} f \, ds.$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds.$$

Oznaka $\oint$ umjesto $\int$ koristi se kad se želi naglasiti da se integrira po zatvorenoj krivulji.

Primjer

Izračunajmo $\oint_{\gamma} xy^4 \, ds$ *ako je* γ *rub polukruga* $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$:

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t), 0 \leq t \leq \pi$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = 2$$

Vrijedi:

$$\int_{-\gamma} f\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma} f\,\mathrm{d}s.$$

$$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}s.$$

Oznaka $\oint$ umjesto $\int$ koristi se kad se želi naglasiti da se integrira po zatvorenoj krivulji.

Primjer

Izračunajmo $\oint_\gamma xy^4\,\mathrm{d}s$ *ako je* γ *rub polukruga* $x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$*:*

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t), 0 \le t \le \pi$$

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \Rightarrow ||\gamma'(t)|| = 2$$

$$\oint_\gamma xy^4\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 2\cos t\cdot(2\sin t)^4\cdot 2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Krivuljni integrali druge vrste

Po krivuljama se mogu integrirati i vektorska polja. U tom slučaju govorimo o krivuljnim integralima 2. vrste. Kao i kod krivuljnih integrala 1. vrste, krivulja po kojoj integriramo mora biti sadržana u domeni podintegralne funkcije.

Definicija (Krivuljni integral druge vrste)

Neka je $F = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ neko vektorsko polje i γ krivulja u Ω. Tada je krivuljni integral druge vrste vektorskog polja F duž γ definiran s

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t.$$

Primjer

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y = ?$$

γ *je dio pravca* $y = 2x + 1$ *za* x *između* 0 *i* 1.

Primjer

$$\int_\gamma x\,dx + xy^2\,dy = ?$$

γ *je dio pravca* $y = 2x + 1$ *za* x *između* 0 *i* 1. *Rješenje:* $37/6$.

Zadatak

$$\int_\gamma y^2\,dx + xy\,dy = ?$$

γ *je krivulja* $ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC}$; $A = (-1, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 2)$. *Koliko taj integral iznosi ako se krivulja obiđe obrnutim smjerom?*

Primjer

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y = ?$$

γ je dio pravca $y = 2x + 1$ za x između 0 i 1. Rješenje: $37/6$.

Zadatak

$$\int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = ?$$

γ je krivulja $ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC}$; $A = (-1, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 2)$. Koliko taj integral iznosi ako se krivulja obiđe obrnutim smjerom?Rješenje: 6 i -6.

Općenito vrijedi:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega, \quad \int_{-\gamma} \omega = -\int_\gamma \omega.$$

Digresija: Lančano pravilo

Neka je f skalarna funkcija više varijabli i γ krivulja u njezinoj domeni. Tada je smisleno gledati kompoziciju $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots).$$

Dakle, $f \circ \gamma$ je sad realna funkcija jedne varijable i posjeduje „običnu" derivaciju $\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}$ (osim u konačno mnogo točaka).

Primjer

$f(x, y) = x^2 + y^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + \sin^3 t$,
$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 3 \sin^2 t \cos t$$

Digresija: Lančano pravilo

Neka je f skalarna funkcija više varijabli i γ krivulja u njezinoj domeni. Tada je smisleno gledati kompoziciju $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots).$$

Dakle, $f \circ \gamma$ je sad realna funkcija jedne varijable i posjeduje „običnu" derivaciju $\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t}$ (osim u konačno mnogo točaka).

Primjer

$f(x, y) = x^2 + y^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
$f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + \sin^3 t$,
$\dfrac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 3 \sin^2 t \cos t$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{f} \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}t}$$

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F = \nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n =$$

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F = \nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \,\mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_i =$$

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F = \nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1 \, dx_1 + \ldots + F_n \, dx_n =$$

$$= \int_\gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t))\gamma_i'(t) \, dt =$$

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F = \nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t))\gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(f(\gamma(t)) \right) \mathrm{d}t = f(B) - f(A).$$

Krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F = \nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t))\gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\gamma(t))\right) \mathrm{d}t = f(B) - f(A).$$

Dakle, krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja ne ovisi o krivulji, nego samo o njezinom početku i kraju.

Zadatak

Ako je F konzervativno i γ zatvorena, što možete reći o $\oint F \, \mathrm{d}\gamma$?

Zadatak

Ako je F konzervativno i γ zatvorena, što možete reći o $\oint F \, \mathrm{d}\gamma$?

Zadatak

Izračunajte

$$\int_{gamma} (2x^3y^4 + x)\,\mathrm{d}x + (2x^4y^3 + y)\,\mathrm{d}y$$

ako je γ negativno orijentirana poluelipsa središta O kojoj su tjemena točke $A(-5,0)$, $B(0,3)$ i $C(5,0)$.

Zadatak

Ako je F konzervativno i γ zatvorena, što možete reći o $\oint F\,\mathrm{d}\gamma$?

Zadatak

Izračunajte

$$\int_{gamma} (2x^3y^4 + x)\,\mathrm{d}x + (2x^4y^3 + y)\,\mathrm{d}y$$

ako je γ negativno orijentirana poluelipsa središta O kojoj su tjemena točke $A(-5,0)$, $B(0,3)$ i $C(5,0)$.
Podintegralno polje je konzervativno,

Zadatak

Ako je F konzervativno i γ zatvorena, što možete reći o $\oint F \, \mathrm{d}\gamma$?

Zadatak

Izračunajte

$$\int_{gamma} (2x^3y^4 + x) \, \mathrm{d}x + (2x^4y^3 + y) \, \mathrm{d}y$$

ako je γ negativno orijentirana poluelipsa središta O kojoj su tjemena točke $A(-5, 0)$, $B(0, 3)$ i $C(5, 0)$.
Podintegralno polje je konzervativno, stoga je traženi integral jednak integralu po dužini $\overline{AC}$, koju je lako parametrizirati kao $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$ za $-5 \leq t \leq 5$.

Zadatak

Ako je F konzervativno i γ zatvorena, što možete reći o $\oint F\,\mathrm{d}\gamma$?

Zadatak

Izračunajte

$$\int_{gamma} (2x^3y^4 + x)\,\mathrm{d}x + (2x^4y^3 + y)\,\mathrm{d}y$$

ako je γ negativno orijentirana poluelipsa središta O kojoj su tjemena točke $A(-5,0)$, $B(0,3)$ i $C(5,0)$.
Podintegralno polje je konzervativno, stoga je traženi integral jednak integralu po dužini $\overline{AC}$, koju je lako parametrizirati kao $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$ za $-5 \leq t \leq 5$. Stoga je traženi integral jednak

$$\int_{-5}^{5} (2t^3t^4 + t)\,\mathrm{d}t = 0.$$