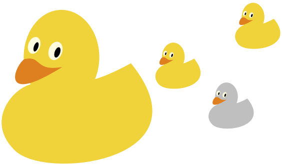
Diferencijali i primjene

Franka Miriam Brückler



Pojam diferencijala

Izrazi oblika

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \sum_i F_i\,\mathrm{d}x_i$$

u kojima sve skalarne funkcije $F_1, \ldots, F_n$ ovise o istim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ nazivaju se diferencijali.

[1] Oprez: To NIJE isto što i diferencijal polja F, u oznaci $\mathrm{d}F$.

Pojam diferencijala

Izrazi oblika

$$\omega = F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n = \sum_i F_i \, \mathrm{d}x_i$$

u kojima sve skalarne funkcije F_1, ..., F_n ovise o istim varijablama x_1, ..., x_n nazivaju se diferencijali. Očigledno je svaki diferencijal određen[1] vektorskim poljem $F = (F_1, \ldots, F_n)$ čije varijable su x_1, ..., x_n pa diferencijal poput gornjeg možemo označiti s ω_F.

Primjer

$F(x, y) = (x + y, x^2 - y^2) \leftrightarrow \omega_F = (x + y) \, \mathrm{d}x + (x^2 - y^2) \, \mathrm{d}y$

[1] Oprez: To NIJE isto što i diferencijal polja F, u oznaci $\mathrm{d}F$.

Diferencijal varijable

Očito dakle i diferencijal ω_F ovisi o istim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ o kojima ovisi i vektorsko polje F (tj. funkcije $F_1, \ldots, F_n$). No, kamo uvrstiti konkretne vrijednosti tih varijabli? I, što su to $\mathrm{d}x_i$-ovi?

- $\mathrm{d}x_i \neq \Delta x_i$!!!

Diferencijal varijable

Očito dakle i diferencijal ω_F ovisi o istim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ o kojima ovisi i vektorsko polje F (tj. funkcije $F_1, \ldots, F_n$). No, kamo uvrstiti konkretne vrijednosti tih varijabli? I, što su to $\mathrm{d}x_i$-ovi?

- $\mathrm{d}x_i \neq \Delta x_i$!!!
- $\mathrm{d}x_i$ je linearan funkcional na $\mathbb{R}^n$ koji n-torci pridružuje iznos i-te koordinate

$$\mathrm{d}x_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

- Stoga je:

$$\mathrm{d}x_i(\Delta X) = \mathrm{d}x_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = \Delta x_i,$$

tj. u slučaju male promjene točke u $\mathbb{R}^n$ diferencijal $\mathrm{d}x_i$ ukupnoj promjeni pridružuje promjenu i-te koordinate.

Primjer

Ako promatramo $\mathbb{R}^3$ *s koordinatama* (x, y, z)*, onda je* $\mathrm{d}y(1, 2, 3) = 2$.

Primjer

Ako promatramo $\mathbb{R}^3$ *s koordinatama* (x, y, z)*, onda je* $\mathrm{d}y(1, 2, 3) = 2$.

Primjer

$$\omega_F = (x + y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$
$$\omega_F(1, 2) = (1 + 2)\,\mathrm{d}x + (1^2 - 2^2)\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$

Primjer

Ako promatramo $\mathbb{R}^3$ *s koordinatama* (x, y, z), *onda je* $\mathrm{d}y(1, 2, 3) = 2$.

Primjer

$$\omega_F = (x + y)\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$
$$\omega_F(1, 2) = (1 + 2)\,\mathrm{d}x + (1^2 - 2^2)\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y \Rightarrow$$
$$\omega_F(1, 2)(3, 4) = 3\,\mathrm{d}x(3, 4) - 3\,\mathrm{d}y(3, 4) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -3.$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L($$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L($$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L($$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}$$

$$\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \leftrightarrow \omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{dx_i}_{\text{lin.funkcional}} : \Omega \to L($$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{dx_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}$$

$$\omega_{\mathbf{F}}(X_0)(\Delta X) = \sum_i F_i(X_0)\Delta x_i$$

Zbog korespondencije između vektorskih polja i diferencijala, krivuljni integrali 2. vrste se odnose na jedno i drugo:

$$\int_\gamma \omega_F = \int_\gamma F_1\, dx_1 + \ldots + F_n\, dx_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt.$$

Krivuljni integral 2. vrste u termodinamici

Svako svojstvo sustava možemo shvatiti kao skalarnu funkciju Y definiranu na sustavu Ω čije vrijednosti $Y(X)$ su iznosi tog svojstva u stanjima X. U termodinamici često ne raspolažemo pravilom funkcije Y, već samo diferencijalom ω koji opisuje promjene funkcije Y, ali ne i njene apsolutne iznose. Termodinamički gledano, diferencijali predstavljaju infinitezimalne promjene termodinamičkih svojstava, tj. indirektno opisuju ne samo svojstvo, već njegovu promjenu.

Promjena svojstva Y opisanog diferencijalom ω tijekom procesa γ jednaka je

$$\Delta Y = \int_\gamma \omega$$

Egzaktan diferencijal

Diferencijali koji „potječu" od konzervativnih vektorskih polja zovu se egzaktni (potpuni) diferencijali, dakle to su diferencijali određeni s

$$\mathbf{F} = \nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

odnosno oni su oblika

$$\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Egzaktan diferencijal

Diferencijali koji „potječu" od konzervativnih vektorskih polja zovu se egzaktni (potpuni) diferencijali, dakle to su diferencijali određeni s

$$\mathbf{F} = \nabla f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

odnosno oni su oblika

$$\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Definicija

Diferencijal ω_F zovemo egzaktnim (ili potpunim) ako je F konzervativno vektorsko polje, tj. to je diferencijal pridružen gradijentu ∇f neke skalarne funkcije f. Takav diferencijal se označava s $\mathrm{d}f$ i zove diferencijalom skalarne funkcije f.

Primjer

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$;
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)=f'(1)=2$;
$\mathrm{d}f(1)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)\,\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}x$;
$f'(1)\approx\Delta f/\Delta x=(f(1+\Delta x)-f(1))/\Delta x$
$\Delta f\approx f'(1)\cdot\Delta x=2\,\mathrm{d}x(\Delta x)=\mathrm{d}f(1)(\Delta x)$.

Primjer

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2;$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = f'(1) = 2;$
$\mathrm{d}f(1) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}x;$
$f'(1) \approx \Delta f/\Delta x = (f(1+\Delta x) - f(1))/\Delta x$
$\Delta f \approx f'(1)\cdot \Delta x = 2\,\mathrm{d}x(\Delta x) = \mathrm{d}f(1)(\Delta x).$

Primjer

$$f(x,y,z) = e^{x-y}z^2$$

$$\nabla f(x,y,z) = (e^{x-y}z^2, -e^{x-y}z^2, 2e^{x-y}z)$$

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}x - e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}y + 2e^{x-y}z\,\mathrm{d}z$$

Primjer

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2;$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)=f'(1)=2;$
$\mathrm{d}f(1)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)\,\mathrm{d}x=2\,\mathrm{d}x;$
$f'(1)\approx\Delta f/\Delta x=(f(1+\Delta x)-f(1))/\Delta x$
$\Delta f\approx f'(1)\cdot\Delta x=2\,\mathrm{d}x(\Delta x)=\mathrm{d}f(1)(\Delta x).$

Primjer

$$f(x,y,z)=e^{x-y}z^2$$

$$\nabla f(x,y,z)=(e^{x-y}z^2,-e^{x-y}z^2,2e^{x-y}z)$$

$$\mathrm{d}f(x,y,z)=e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}x-e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}y+2e^{x-y}z\,\mathrm{d}z$$

Zadatak

Ako je f konstantna funkcija na $\mathbb{R}^n$ i X_0 proizvoljni element iz $\mathbb{R}^n$, što je $\mathrm{d}f(X_0)$?

Dakle: Egzaktan diferencijal je isto što i diferencijal neke skalarne funkcije, kao što je konzervativno vektorsko polje isto što i gradijent neke skalarne funkcije:

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f \leftrightsquigarrow \mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i$$

Dakle: Egzaktan diferencijal je isto što i diferencijal neke skalarne funkcije, kao što je konzervativno vektorsko polje isto što i gradijent neke skalarne funkcije:

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f \leftrightsquigarrow \mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

Teorem

Za diferencijal ω ekvivalentne su tvrdnje:

(i) Integral od ω ne ovisi o putu, tj. $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ za svake dvije krivulje γ_1 i γ_2 koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.

(ii) $\oint_\gamma \omega = 0$ za sve zatvorene krivulje.

(iii) ω je egzaktan diferencijal.

Dakle: Egzaktan diferencijal je isto što i diferencijal neke skalarne funkcije, kao što je konzervativno vektorsko polje isto što i gradijent neke skalarne funkcije:

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \rightsquigarrow \nabla f \leftrightsquigarrow \mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

Teorem

Za diferencijal ω ekvivalentne su tvrdnje:

(i) Integral od ω ne ovisi o putu, tj. $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ za svake dvije krivulje γ_1 i γ_2 koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.

(ii) $\oint_{\gamma} \omega = 0$ za sve zatvorene krivulje.

(iii) ω je egzaktan diferencijal.

Eulerov kriterij egzaktnosti za diferencijale: Ako su sve F_i glatke fukcije s otvorenom povezanom domenom, diferencijal $\omega_{\mathbf{F}} = \sum_i F_i \, \mathrm{d}x_i$ je egzaktan ako i samo ako je Jacobijeva matrica polja $\mathbf{F}$ simetrična.

Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

pri čemu je $\omega = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan, nazivamo ju egzaktnom diferencijalnom jednadžbom. Budući da je tada $\omega = \mathrm{d}f$, određivanjem potencijala f vektorskog polja (M, N) dobivamo rješenje takve jednadžbe u obliku $f(x, y) = C$.

Primjer

$$(2xy - 9x^2)\,\mathrm{d}x + (2y + x^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0$$

Egzaktne diferencijalne jednadžbe

Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

pri čemu je $\omega = M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan, nazivamo ju egzaktnom diferencijalnom jednadžbom. Budući da je tada $\omega = \mathrm{d}f$, određivanjem potencijala f vektorskog polja (M,N) dobivamo rješenje takve jednadžbe u obliku $f(x,y) = C$.

Primjer

$$(2xy - 9x^2)\,\mathrm{d}x + (2y + x^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0$$

Ponekad je moguće naći funkciju μ jedne ili obiju varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktan. Tada kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω.

Primjer

Jednadžba $(3xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x(x-y)\,\mathrm{d}y = 0$ *nije egzaktna, ali to postaje množenjem s* x*.*

Neke primjene u termodinamici

Termodinamičke (skalarne) funkcije Y najčešće nisu dane eksplicitno, već opisane indirektno nekim diferencijalom ω (tako da se mogu računati njihove promjene tijekom procesa γ kao $\int_\gamma \omega$).

Neke primjene u termodinamici

Termodinamičke (skalarne) funkcije Y najčešće nisu dane eksplicitno, već opisane indirektno nekim diferencijalom ω (tako da se mogu računati njihove promjene tijekom procesa γ kao $\int_\gamma \omega$).
Funkcije stanja su svojstva sustava čija promjena tokom bilo kojeg procesa ne ovisi o samom procesu, nego samo o početnom i konačnom stanju: Y je funkcija stanja točno ako je ω egzaktan.

Neke primjene u termodinamici

Termodinamičke (skalarne) funkcije Y najčešće nisu dane eksplicitno, već opisane indirektno nekim diferencijalom ω (tako da se mogu računati njihove promjene tijekom procesa γ kao $\int_\gamma \omega$). Funkcije stanja su svojstva sustava čija promjena tokom bilo kojeg procesa ne ovisi o samom procesu, nego samo o početnom i konačnom stanju: Y je funkcija stanja točno ako je ω egzaktan. Ako znamo pravilo, odnosno formulu za Y, uvijek je $\mathrm{d}Y$ egzaktan jer je to po definiciji diferencijal određen s ∇Y.

Neke primjene u termodinamici

Termodinamičke (skalarne) funkcije Y najčešće nisu dane eksplicitno, već opisane indirektno nekim diferencijalom ω (tako da se mogu računati njihove promjene tijekom procesa γ kao $\int_\gamma \omega$).
Funkcije stanja su svojstva sustava čija promjena tokom bilo kojeg procesa ne ovisi o samom procesu, nego samo o početnom i konačnom stanju: Y je funkcija stanja točno ako je ω egzaktan.
Ako znamo pravilo, odnosno formulu za Y, uvijek je $\mathrm{d}Y$ egzaktan jer je to po definiciji diferencijal određen s ∇Y.
Funkcije stanja su sva svojstva koja su odrediva na tzv. apsolutnoj ljestvici: volumen, tlak, temperatura, množina, ... To u osnovi (sjetite se MNK!) znači da je takvim funkcijama načelno moguće odrediti pravilo.

Rad w i toplina q *nisu* funkcije stanja, dakle pripadni diferencijali nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s $\mathrm{d}w$ odnosno $\mathrm{d}q$.

Rad w i toplina q *nisu* funkcije stanja, dakle pripadni diferencijali nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s $\mathrm{d}w$ odnosno $\mathrm{d}q$.

Volumni rad je definiran diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$.

Rad w i toplina q *nisu* funkcije stanja, dakle pripadni diferencijali nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s $\mathrm{d}w$ odnosno $\mathrm{d}q$.

Volumni rad je definiran diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$.

Za neegzaktni diferencijal $\mathrm{d}q$ postoji Eulerov multiplikator, to je termodinamička temperatura T. Dobiveni egzaktni diferencijal je diferencijal funkcije stanja koja se naziva entropija i označava sa S.

Rad w i toplina q *nisu* funkcije stanja, dakle pripadni diferencijali nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s $\mathrm{d}w$ odnosno $\mathrm{d}q$.

Volumni rad je definiran diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$.

Za neegzaktni diferencijal $\mathrm{d}q$ postoji Eulerov multiplikator, to je termodinamička temperatura T. Dobiveni egzaktni diferencijal je diferencijal funkcije stanja koja se naziva entropija i označava sa S.

Prvi i drugi glavni stavak termodinamik

1. Unutrašnja energija je funkcija stanja sustava jednoznačno (za infinitezimalne procese) određena egzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q$.
2. Entropija je funkcija stanja sustava jednoznačno (za reverzibilne procese) određena egzaktnim diferencijalom $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}q}{T}$.

Dakle, ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces vrijedi

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Dakle, ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces vrijedi

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Ovdje su p i T (skalarne) funkcije od V i S!

Dakle, ako je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces vrijedi

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S.$$

Ovdje su p i T (skalarne) funkcije od V i S!

Zadatak

Raspišite diferencijale entalpije $H = U + pV$ i Gibbsove energije $G = H - TS$ (uz pretpostavku da je jedini mogući rad volumni). Koje su varijable entalpije odnosno Gibbsove energije u tom kontekstu? Argumentirajte zašto su H i G funkcije stanja!

Primjer (Druga Gibbs-Helmholtzova relacija)

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

je egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T.$$

Primjer (Druga Gibbs-Helmholtzova relacija)

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

je egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T.$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S,$$

Primjer (Druga Gibbs-Helmholtzova relacija)

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

je egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T.$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S,$$

pa iz $G = H - TS$ *dobivamo*

Primjer (Druga Gibbs-Helmholtzova relacija)

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

je egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T.$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S,$$

pa iz $G = H - TS$ *dobivamo*

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p.$$

Primjer (Maxwellowe formule)

Svaka od Maxwellovih formula dobiva se iz egzaktnosti jednog od diferencijalâ $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}A$ *i* $\mathrm{d}G$.
Primjerice, budući da je

$$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p,$$

egzaktan, mora zadovoljavati Eulerov uvjet pa je

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Opće lančano pravilo

Za slučaj kompozicije skalarne funkcije više varijabli s vektorskom funkcijom više varijabli formula lančanog pravila je

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \ldots .$$

Opće lančano pravilo

Za slučaj kompozicije skalarne funkcije više varijabli s vektorskom funkcijom više varijabli formula lančanog pravila je

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \ldots.$$

Npr. za kompoziciju skalarne funkcije dviju varijabli $f = f(x, y)$ s vektorskom funkcijom dviju varijabli $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Primjer

Ako U smatramo funkcijom temperature i volumena, vrijedi

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

(zašto?).

Primjer

Ako U smatramo funkcijom temperature i volumena, vrijedi

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

(zašto?). Ako pak U smatramo funkcijom temperature i tlaka, bit će

Primjer

Ako U smatramo funkcijom temperature i volumena, vrijedi

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

(zašto?). Ako pak U smatramo funkcijom temperature i tlaka, bit će

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p.$$

Kolika je razlika između relativnih promjena unutrašnje energije obzirom na promjenu temperature (iskazanih parcijalnim derivacijama $\frac{\partial U}{\partial T}$) u ova dva slučaja?

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + ?.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + ?.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V =$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + ?.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + ?.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

Zadatak

Koliko iznosi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{V,p} ?$$