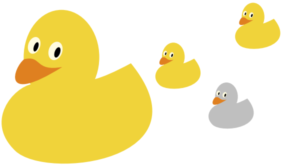
Nizovi i redovi

Franka Miriam Brückler



Nizovi

Intuitivno:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$\diamond, \diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond\diamond, \diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond\diamond, \ldots$$

Nizovi

Intuitivno:

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$\diamond, \diamond\diamond, \diamond\ \diamond\ \diamond\diamond, \diamond\ \diamond\ \diamond\ \diamond\ \diamond\ \diamond\ \diamond\diamond, \dots$$

U svakodnevnom govoru se i konačno nabrajanje naziva nizom; u matematici se u pravilu gledaju beskonačni nizovi.

Nizovi

Intuitivno:

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$\diamond, \diamond\diamond, \diamond \diamond \diamond\diamond, \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond \diamond\diamond, \ldots$$

U svakodnevnom govoru se i konačno nabrajanje naziva nizom; u matematici se u pravilu gledaju beskonačni nizovi.
Nizovi se sastoje od članova, koji su obično brojevi. Za svaki član moguće je utvrditi ne samo nalazi li se u nizu, nego i na kojem mjestu u redoslijedu se nalazi. Pritom su mjesta određena prirodnim (rednim) brojevima: prvi član, drugi član, . . . , pet stotina dvadeset i sedmi član, . . .

Definicija (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)

Niz je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ *(ili* $\mathbb{N}_0$*). Niz realnih brojeva je niz s kodomenom* $\mathbb{R}$*, a niz kompleksnih brojeva je niz s kodomenom* $\mathbb{C}$*.*

Definicija (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)

Niz je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$). Niz realnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{R}$, a niz kompleksnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{C}$.

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,

Definicija (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)

Niz je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$). Niz realnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{R}$, a niz kompleksnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{C}$.

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.

Definicija (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)

Niz je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ *(ili* $\mathbb{N}_0$*). Niz realnih brojeva je niz s kodomenom* $\mathbb{R}$*, a niz kompleksnih brojeva je niz s kodomenom* $\mathbb{C}$*.*

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.
- Uobičajeno je elemente domene označavati s n, a njima pridružene elemente kodomene (članove niza a) s a_n (a ne kao kod drugih funkcija s $a(n)$).

Definicija (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)

Niz je funkcija kojoj je domena skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$). Niz realnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{R}$, a niz kompleksnih brojeva je niz s kodomenom $\mathbb{C}$.

- Elementi domene niza su redni brojevi (pozicije) u nizu,
- a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza.
- Uobičajeno je elemente domene označavati s n, a njima pridružene elemente kodomene (članove niza a) s a_n (a ne kao kod drugih funkcija s $a(n)$).
- Kad govorimo o čitavom nizu umjesto $a : \mathbb{N} \to K$ pišemo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće $(a_n)_n$

Nizove, kao i druge funkcije, najčešće zadajemo formulom koja opisuje kako elementu domene pridružiti odgovarajući element kodomene. Kod nizova takvu formulu nazivamo formulom općeg člana niza.

Primjer

Formulom

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

zadan je opći član niza recipročnih neparnih prirodnih brojeva

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots.$$

Nizove, kao i druge funkcije, najčešće zadajemo formulom koja opisuje kako elementu domene pridružiti odgovarajući element kodomene. Kod nizova takvu formulu nazivamo formulom općeg člana niza.

Primjer

Formulom

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

zadan je opći član niza recipročnih neparnih prirodnih brojeva

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots.$$

Konstantan niz je niz koji je kao funkcija konstantan:

$$a_n = c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nizovi se mogu zadati i rekurzivno, pravilom koje kaže kako se iz jednog ili više prethodnih članova dobije sljedeći član:

Primjer

Fibonaccijev niz je niz (F_n) *definiran tako da su mu prva dva člana jednaka* 1 $(F_1 = F_2 = 1)$*, a svaki sljedeći je zbroj prethodna dva:*

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2,$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 3,$$

$$F_5 = F_3 + F_4 = 5,$$

$$F_6 = F_4 + F_5 = 8,$$

$$\ldots$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definicija (Aritmetički niz)

Niz sa svojstvom da je razlika svaka dva uzastopna člana niza ista zovemo aritmetičkim nizom: Niz $(a_n)_n$ *je aritmetički ako postoji konstanta* d *(diferencija aritmetičkog niza) takva da za sve* n *vrijedi*

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Primjer

Niz s općim članom $a_n = 2 + 3n$ *(tj.* $2, 5, 8, 11, \ldots$*) je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana* 3*:*

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) = 3.$$

Definicija (Aritmetički niz)

Niz sa svojstvom da je razlika svaka dva uzastopna člana niza ista zovemo aritmetičkim nizom: Niz $(a_n)_n$ *je aritmetički ako postoji konstanta* d *(diferencija aritmetičkog niza) takva da za sve* n *vrijedi*

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Primjer

Niz s općim članom $a_n = 2 + 3n$ *(tj.* $2, 5, 8, 11, \ldots$*) je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana* 3*:*

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) = 3.$$

Opći član aritmetičkog niza s diferencijom d dan je formulom

$$a_n = a_0 + dn.$$

Dakle, aritmetički nizovi su afine funkcije s domenom $\mathbb{N}_0$.

Definicija (Geometrijski niz)

Niz realnih ili kompleksnih brojeva sa svojstvom da je kvocijent svaka dva uzastopna člana niza isti zovemo geometrijskim nizom: niz $(a_n)_n$ je geometrijski ako postoji neki broj q (kvocijent geometrijskog niza) takav da za sve n vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Primjer

Niz s općim članom $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (tj. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$) je geometrijski jer je kvocijent svaka dva uzastopna člana $\frac{1}{3}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Primjer

Otopina početne množinske koncentracije c_0 *uzastopno se m-terostruko* ($m \in \mathbb{N}$) *razrjeđuje vodom:* c_0, $c_1 = \frac{c_0}{m}$, $c_2 = \frac{c_1}{m} = \frac{c_0}{m^2}, \ldots,$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Primjer

Otopina početne množinske koncentracije c_0 uzastopno se m-terostruko ($m \in \mathbb{N}$) razrjeđuje vodom: c_0, $c_1 = \frac{c_0}{m}$, $c_2 = \frac{c_1}{m} = \frac{c_0}{m^2}$, ..., Koncentracija otopine će pasti na manje od $c_{\min}$ kad je

$$c_k = c_0/m^k < c_{\min} \Leftrightarrow c_0 < m^k c_{\min} \Leftrightarrow$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Primjer

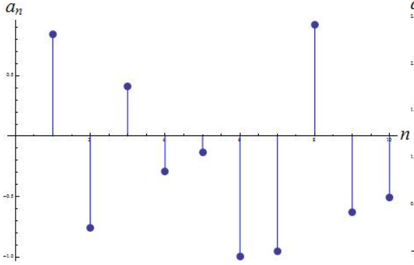
Otopina početne množinske koncentracije c_0 uzastopno se m-terostruko ($m \in \mathbb{N}$) razrjeđuje vodom: c_0, $c_1 = \frac{c_0}{m}$, $c_2 = \frac{c_1}{m} = \frac{c_0}{m^2}, \dots,$ Koncentracija otopine će pasti na manje od $c_{\min}$ kad je

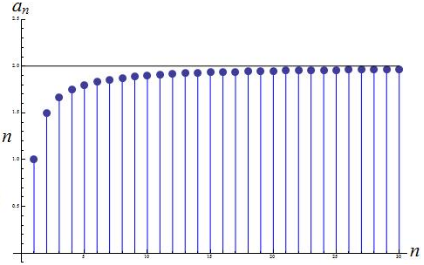
$$c_k = c_0/m^k < c_{\min} \Leftrightarrow c_0 < m^k c_{\min} \Leftrightarrow$$

$$m^k > \frac{c_0}{c_{\min}} \Leftrightarrow k > \log_m \frac{c_0}{c_{\min}}.$$

Grafički prikaz niza realnih brojeva

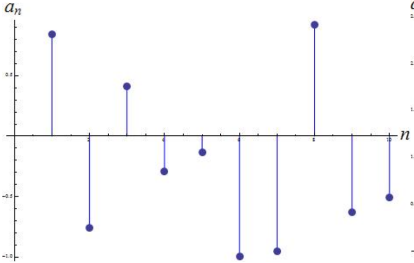
Niz s općim članom $a_n = \sin n^2$ (lijevo) i niz s općim članom $b_n = 2 - \frac{1}{n}$ i limesom 2 (desno):

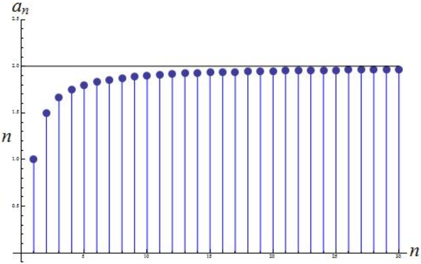




Grafički prikaz niza realnih brojeva

Niz s općim članom $a_n = \sin n^2$ (lijevo) i niz s općim članom $b_n = 2 - \frac{1}{n}$ i limesom 2 (desno):

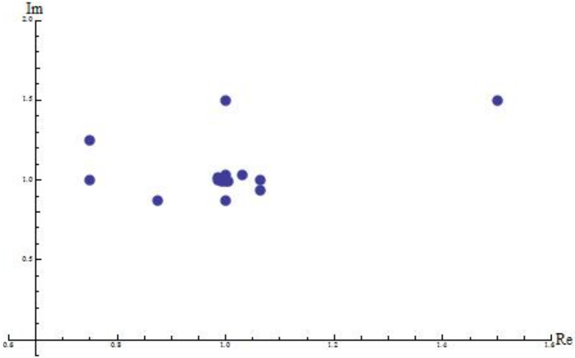




Realni niz $b_n = 2 - \frac{1}{n}$

Grafički prikaz niza kompleksnih brojeva

$$z_n = 1 + i + \frac{1}{(1-i)^n}$$



Definicija (Ograničeni nizovi)

Niz realnih ili kompleksnih brojeva je ograničen ako postoji realan broj M takav da je

$$|a_n| \leq M$$

za sve n (tj. svi članovi niza imaju apsolutnu vrijednost najviše M).

Definicija (Ograničeni nizovi)

Niz realnih ili kompleksnih brojeva je ograničen ako postoji realan broj M takav da je

$$|a_n| \leq M$$

za sve n (tj. svi članovi niza imaju apsolutnu vrijednost najviše M).

Primjer

Niz zadan s $a_n = \frac{1}{n}$ je ograničen jer su mu svi članovi između 0 i 1.

Primjer

Niz prirodnih brojeva je definiran formulom $a_n = n$ i ograničen je odozdo jer je $a_n \geq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, ali nije ograničen odozgo.

Definicija (Rastući i padajući nizovi realnih brojeva)

Niz $(a_n)_n$ realnih brojeva zovemo rastućim ako je

$$a_n \leq a_{n+1}$$

za sve n, a padajućim ako je

$$a_n \geq a_{n+1}$$

za sve n.

Primjer

Ako niz $(a_n)_n$ raste, njegov suprotni niz $(-a_n)_n$ pada (i obrnuto). Primjerice, niz zadan s $a_n = \frac{1}{n}$ pada, a niz zadan s $b_n = -\frac{1}{n}$ raste.

Konvergencija niza

Limes ili granična vrijednost niza $(a_n)_n$ kad n teži u beskonačnost je, ako postoji, broj L takav da što je veći n, to su članovi niza a_n bliži L (i pritom mogu doći proizvoljno blizu L).

Konvergencija niza

Limes ili granična vrijednost niza $(a_n)_n$ kad n teži u beskonačnost je, ako postoji, broj L takav da što je veći n, to su članovi niza a_n bliži L (i pritom mogu doći proizvoljno blizu L). Formalno:

Definicija (Limes niza)

Broj L je limes niza $(a_n)_n$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$. Ako je L limes niza $(a_n)_n$ pišemo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \quad \text{ili} \quad \lim a_n = L.$$

Konvergencija niza

Limes ili granična vrijednost niza $(a_n)_n$ kad n teži u beskonačnost je, ako postoji, broj L takav da što je veći n, to su članovi niza a_n bliži L (i pritom mogu doći proizvoljno blizu L). Formalno:

Definicija (Limes niza)

Broj L je limes niza $(a_n)_n$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$. Ako je L limes niza $(a_n)_n$ pišemo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \quad \text{ili} \quad \lim a_n = L.$$

Ako limes niza postoji, kažemo da je niz konvergentan, a inače je divergentan. Najjednostavniji primjeri konvergentnih nizova su konstantni nizovi: niz definiran s $a_n = c$ uvijek ima limes c, tj. $\lim_{n \to +\infty} c = c$.

Konvergencija niza tiče se ponašanja njegovih „dalekih članova": Bitno je da se počevši od neke pozicije članovi niza grupiraju oko nekog broja. Stoga odabir početnih (ma koliko, ali konačno mnogo) članova niza ne utječe na njegovu konvergenciju.

Primjer

Nizovi $2, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ *(konstantan niz), zatim niz* $1235, i-45, i, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ *te niz* $1, 2, 3, \dots, 5000000, 2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ *svi imaju limes* 2 *iako se razlikuju u početnim članovima.*

Konvergencija niza tiče se ponašanja njegovih „dalekih članova": Bitno je da se počevši od neke pozicije članovi niza grupiraju oko nekog broja. Stoga odabir početnih (ma koliko, ali konačno mnogo) članova niza ne utječe na njegovu konvergenciju.

Primjer

Nizovi $2, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ *(konstantan niz), zatim niz* $1235, i-45, i, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ *te niz* $1, 2, 3, \ldots, 5000000, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ *svi imaju limes* 2 *iako se razlikuju u početnim članovima.*

Neki divergentni nizovi realnih brojeva poprimaju proizvoljno velike ili male vrijednosti pa imaju smisla oznake $\lim a_n = +\infty$ i $\lim a_n = -\infty$.

Definicija (Beskonačni limesi nizova)

Ako članovi niza postaju proizvoljno veliki (mali), tj. ako za proizvoljno velik (malen) broj M postoji pozicija $n_0 \in \mathbb{N}$ u nizu takva da su za sve daljnje pozicije $n > n_0$ članovi niza veći (manji) od M, $a_n > M$ $(a_n < M)$, kažemo da niz teži u plus (minus) beskonačno i pišemo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty).$$

Neki divergentni nizovi realnih brojeva poprimaju proizvoljno velike ili male vrijednosti pa imaju smisla oznake $\lim a_n = +\infty$ i $\lim a_n = -\infty$.

Definicija (Beskonačni limesi nizova)

Ako članovi niza postaju proizvoljno veliki (mali), tj. ako za proizvoljno velik (malen) broj M postoji pozicija $n_0 \in \mathbb{N}$ u nizu takva da su za sve daljnje pozicije $n > n_0$ članovi niza veći (manji) od M, $a_n > M$ $(a_n < M)$, kažemo da niz teži u plus (minus) beskonačno i pišemo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty).$$

Primjer

Aritmetički niz s diferencijom različitom od 0 divergira u $+\infty$ ili u $-\infty$, ovisno o predznaku te diferencije.

Konvergencija geometrijskog niza

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent $q = 1$) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ($|q| < 1$), a inače su divergentni.

Konvergencija geometrijskog niza

Geometrijski nizovi su konvergentni ako su konstantni (kvocijent $q = 1$) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ($|q| < 1$), a inače su divergentni. Za slučaj realnih geometrijskih nizova $a_n = a_0 q^n$ vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1,\ a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1,\ a_0 < 0, \\ \text{neodređen}, & q \leq -1 \end{cases}.$$

Zadatak

Trokut Sierpinskog *jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.*

Zadatak

Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

Zadatak

Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P,$$

Zadatak

$\boxed{\textit{Trokut Sierpinskog}}$ *jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?*

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P,$$

Zadatak

$\boxed{\text{Trokut Sierpinskog}}$ jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

Zadatak

Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

$$\Rightarrow P_n = P\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Zadatak

Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala.On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Postupak se nastavlja unedogled. Kad bi se postupak stvarno moga provesti „u beskonačnost", kolika će na kraju biti ukupna površina neizrezanih trokutaâ, tj. koliko iznosi površina trokuta Sierpinskog?

$$P_0 = P, P_1 = \frac{3}{4}P, P_{n+1} = \frac{3}{4}P_n$$

$$\Rightarrow P_n = P\left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \lim P_n = 0.$$

Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom a_n svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju $a(x)$.

Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom a_n svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju $a(x)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Neki važni konvergentni i divergentni nizovi

Primijetimo da se konvergencija/divergencija realnog niza s općim članom a_n svodi na postojanje/nepostojanje desne horizontalne asimptote za funkciju $a(x)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad k > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$$

Svojstva limesa nizova analogna su svojstvima limesa funkcija za slučajeve kad varijabla teži u $+\infty$.

Primjer

$\lim \left(\frac{1}{n} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \lim \frac{1}{n} + 3 \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 + 0 = 0.$

Teorem

Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.

Teorem

Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.

Teorem

Limes niza, ako postoji, jedinstven je.

Teorem

Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.

Teorem

Limes niza, ako postoji, jedinstven je.

Teorem (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Realna funkcija f je neprekidna u točki c ako i samo ako za svaki niz $(a_n)_n$ koji konvergira k c, niz $(f(a_n))_n$ konvergira k $f(c)$.

Ukratko, za neprekidne funkcije f i sve konvergentne nizove $(a_n)_n$ vrijedi

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \to +\infty} a_n).$$

Teorem

Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.

Teorem

Limes niza, ako postoji, jedinstven je.

Teorem (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Realna funkcija f je neprekidna u točki c ako i samo ako za svaki niz $(a_n)_n$ koji konvergira k c, niz $(f(a_n))_n$ konvergira k $f(c)$.

Ukratko, za neprekidne funkcije f i sve konvergentne nizove $(a_n)_n$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to+\infty} a_n).$$

Primjer

$$\lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$$

Primjer

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

Primjer

Sinus je neprekidna funkcija pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n^2} = \sin \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \sin 0 = 0.$$

Primjer

$$\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

Primjer

Sinus je neprekidna funkcija pa vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{n^2} = \sin \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \sin 0 = 0.$$

Primjer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n - e^n}{5n^2 + e^n} = \frac{2\frac{n}{e^n} - 1}{5\frac{n^2}{e^n} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$$

$$\lim a_n = \lim a_{n+1}$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$$

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} \Rightarrow L = \frac{1}{5}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$$

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} \Rightarrow L = \frac{1}{5}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

$$L = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

Zadatak

U nekom nizu svaki sljedeći član je petina zbroja prethodnog člana i od tog člana dvostrukog recipročnog broja. Prvi član niza je negativan. Zapišite formulom to pravilo. Znajući da taj niz konvergira, odredite mu limes!

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),$$

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} \Rightarrow L = \frac{1}{5}\left(L + \frac{2}{L}\right)$$

$$L = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza:

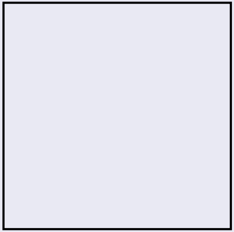
$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza:
$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

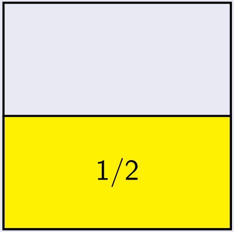


Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

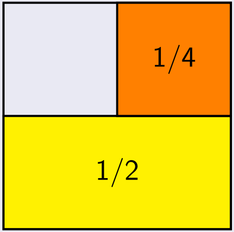


Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

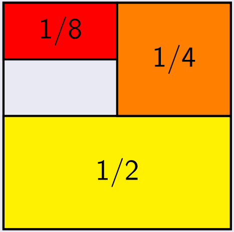


Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza:
$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$

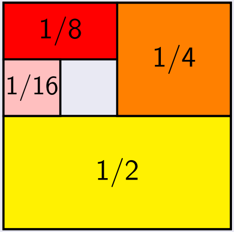


Redovi

Intuitivno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Primjer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$



U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, odnosno $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$,

U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, odnosno $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, dakle je $\lim_n S_n = 1$.

U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, odnosno $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, dakle je $\lim_n S_n = 1$.

Definicija (Red)

Red je uređen par niza $(a_n)_n$ i pripadnog niza parcijalnih suma $(S_n)_n$ definiranog s

$$S_1 = a_1, \quad S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Red je konvergentan ako je niz parcijalnih suma (S_n) konvergentan. U tom slučaju $\lim_{n\to\infty} S_n$ nazivamo sumom reda i označavamo s $\sum_n a_n$.

U prethodnom primjeru zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, odnosno $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, dakle je $\lim_n S_n = 1$.

Definicija (Red)

Red je uređen par niza $(a_n)_n$ i pripadnog niza parcijalnih suma $(S_n)_n$ definiranog s

$$S_1 = a_1, \quad S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Red je konvergentan ako je niz parcijalnih suma (S_n) konvergentan. U tom slučaju $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nazivamo sumom reda i označavamo s $\sum\limits_n a_n$.

Dakle, parcijalne sume su aproksimacije sume konvergentnog reda.

Geometrijski red je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. red oblika $\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$. Taj red konvergira (i suma mu je $\frac{a}{1-q}$) točno ako je $|q| < 1$.

Geometrijski red je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. red oblika $\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$. Taj red konvergira (i suma mu je $\frac{a}{1-q}$) točno ako je $|q| < 1$.

Primjer

Znate li Zenonov paradoks o Ahilu i kornjači?

Geometrijski red je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. red oblika $\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \dots$. Taj red konvergira (i suma mu je $\dfrac{a}{1-q}$) točno ako je $|q| < 1$.

Primjer

Znate li Zenonov paradoks o Ahilu i kornjači?

Primjer

Zapis $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ *zapravo znači*

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}.$$

Kad $\frac{1}{3}$ *pišemo kao aproksimativno* 0,33333 *zapravo smo uzeli petu parcijalnu sumu kao aproksimaciju ukupne sume reda. Pritom treba misliti na to da se radi samo o aproksimaciji poznatog broja* $\frac{1}{3}$, *koji je različit od broja* $0{,}33333 = 0{,}33333000\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$ *gdje je* $a_n = 3$ *za* $n \leq 5$ *i* $a_n = 0$ *za* $n > 5$.

Primjer

Molekulska particijska funkcija se u statističkoj termodinamici definira formulom

$$z = \sum_j g_j e^{-E_j/(k_B T)},$$

gdje je k_B Boltzmannova konstanta, T termodinamička temperatura, E_j je energija molekule u j-tom stanju, a g_j je degeneracijski broj j-tog stanja (sumira se po svim mogućim energijskim stanjima jedne molekule).

Primjer

Molekulska particijska funkcija se u statističkoj termodinamici definira formulom

$$z = \sum_j g_j e^{-E_j/(k_B T)},$$

gdje je k_B Boltzmannova konstanta, T termodinamička temperatura, E_j je energija molekule u j-tom stanju, a g_j je degeneracijski broj j-tog stanja (sumira se po svim mogućim energijskim stanjima jedne molekule). Ako nema degeneriranih stanja, svi su $g_j = 1$ pa je formula jednostavnija:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right).$$

Primjer

Molekulska particijska funkcija se u statističkoj termodinamici definira formulom

$$z = \sum_j g_j e^{-E_j/(k_B T)},$$

gdje je k_B Boltzmannova konstanta, T termodinamička temperatura, E_j je energija molekule u j-tom stanju, a g_j je degeneracijski broj j-tog stanja (sumira se po svim mogućim energijskim stanjima jedne molekule). Ako nema degeneriranih stanja, svi su $g_j = 1$ pa je formula jednostavnija:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right).$$

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$ i kvocijentom $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$,

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$ i kvocijentom $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$, koji je pozitivan broj manji od 1, Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j+\frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$ i kvocijentom $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$, koji je pozitivan broj manji od 1, dakle se radi o konvergentnom geometrijskom redu sa sumom

$$z = \frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) je $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta:

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$ i kvocijentom $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$, koji je pozitivan broj manji od 1, dakle se radi o konvergentnom geometrijskom redu sa sumom

$$z = \frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Uz geometrijski red, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Napomena

Poznato je da vrijedi $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, *tj.* $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *(Leonhard Euler, 18. st.).*

Uz geometrijski red, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Napomena

Poznato je da vrijedi $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, *tj.* $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *(Leonhard Euler, 18. st.).*

Primjer

Redovi s konstantnim članovima $(\sum_{n=1}^{+\infty} c = c + c + c + \dots)$ *divergiraju osim ako je* $c = 0$.

Uz geometrijski red, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

Napomena

Poznato je da vrijedi $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, *tj.* $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *(Leonhard Euler, 18. st.).*

Primjer

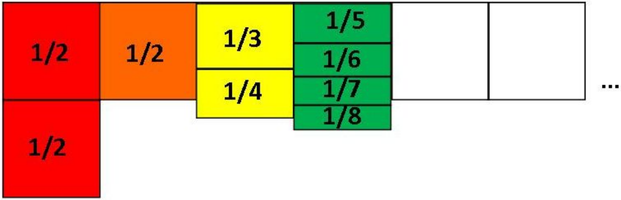
Redovi s konstantnim članovima ($\sum_{n=1}^{+\infty} c = c + c + c + \dots$) *divergiraju osim ako je* $c = 0$.

Primjer

Red $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ *divergira jer su mu parcijalne sume* $S_n = 0$ *za parne* n *i* $S_n = 1$ *za neparne* n *pa je niz* (S_n) *niz* $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ *koji ne konvergira.*

Među divergentnim redovima, posebno je poznat je harmonijski red

$$\sum_n \frac{1}{n}.$$



$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \ldots > \infty \times 1/2 = \infty$$

Postoji li veza između konvergencije niza i pripadnog reda, tj. postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza (a_n) i (ne)postojanja limesa pripadnog niza (S_n)?

Postoji li veza između konvergencije niza i pripadnog reda, tj. postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza (a_n) i (ne)postojanja limesa pripadnog niza (S_n)? Koje smo konvergentne redove dosad upoznali? Što primjećujemo?

Postoji li veza između konvergencije niza i pripadnog reda, tj. postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza (a_n) i (ne)postojanja limesa pripadnog niza (S_n)? Koje smo konvergentne redove dosad upoznali? Što primjećujemo?

Teorem (Nužan uvjet konvergencije reda)

Ako red $\sum_n a_n$ konvergira, onda je $\lim_n a_n = 0$. Drugim riječima, ako niz (a_n) ne teži u 0, odgovarajući red $\sum_n a_n$ sigurno divergira.

Zadatak

Redovi $\sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ i $\sum_n \cos n$ divergiraju — zašto?

Postoji li veza između konvergencije niza i pripadnog reda, tj. postoji li veza između (ne)postojanja limesa niza (a_n) i (ne)postojanja limesa pripadnog niza (S_n)? Koje smo konvergentne redove dosad upoznali? Što primjećujemo?

Teorem (Nužan uvjet konvergencije reda)

Ako red $\sum_n a_n$ konvergira, onda je $\lim_n a_n = 0$. Drugim riječima, ako niz (a_n) ne teži u 0, odgovarajući red $\sum_n a_n$ sigurno divergira.

Zadatak

Redovi $\sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ i $\sum_n \cos n$ divergiraju — zašto?

Oprez: Ako u nekom redu $\sum_n a_n$ opći član teži u nulu ($\lim_n a_n = 0$) ne znači da red konvergira! (Primjer: harmonijski red).

Kriteriji konvergencije

Kriterij uspoređivanja

Ako je $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_n a_n$. Ako je $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n a_n$ divergira, onda divegira i $\sum_n b_n$.

Primjer

Znamo da konvergira red $\sum_n \frac{1}{3^n}$ *(geometrijski red s kvocijentom* $1/3$*). Kako je* $3^n < 3^n + n$ *za sve* n*, slijedi da je* $\frac{1}{3^n+n} \leq \frac{1}{3^n}$ *za sve* n*, pa temeljem kriterija uspoređivanja zaključujemo da i red* $\sum_n \frac{1}{3^n+n}$ *konvergira.*

D'Alembertov kriterij

Ako $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno)[a] konvergira, a ako je $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

[a] Red $\sum_n a_n$ s realnim ili kompleksnim članovima apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_n |a_n|$. Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

Primjer

Red $\sum_n \frac{1}{n!}$ konvergira po d'Alembertovom kriteriju jer je

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Cauchyjev kriterij

Ako $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno) konvergira, a ako je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

Primjer

Red $\sum_n \left(\frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6}\right)^n$ *konvergira po Cauchyjevom kriteriju jer je*

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6}\right)^n} = \lim_n \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} = \frac{1}{6} < 1.$$

Leibnizov kriterij

Red $\sum_n (-1)^n a_n$ (gdje su svi $a_n \geq 0$) konvergira ako je niz (a_n) padajući i konvergira u nulu.

Primjer

Red $\sum_n (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ *konvergira po Leibnizovom kriteriju jer je* $a_n = \frac{1}{n} > 0$ *za sve* n*, niz* $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *je padajući i* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

Integralni kriterij

Ako su svi a_n pozitivni i ako je $f(x)$ definirana tako da u formuli za opći član a_n znak n zamijenimo s x, te ako je tako definirana f neprekidna za $x \geq 1$ i $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, onda red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Primjer

Integralnim kriterijem može se pokazati divergencija harmonijskog reda $\sum_n \frac{1}{n}$. Kako je $a_n = \frac{1}{n}$, znači da uzimamo $f(x) = \frac{1}{x}$ i f ima tražena svojstva (neprekidna za $x \geq 1$ i ima x-os kao horizontalnu asimptotu). Kako znamo da $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergira u $+\infty$, zaključujemo da je $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$.
Općenito se integralnim kriterijem može pokazati da među redovima $\sum_n \frac{1}{n^s}$ konvergiraju točno oni kod kojih je $s > 1$.