Redovi potencija

Franka Miriam Brückler

Redovi funkcija

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Redovi funkcija

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Svaki od ovakvih redova za pojedini x daje red koji možda konvergira, a možda ne — to ovisi o tome koji konkretan x uzmemo. Redove čiji opći članovi osim o indeksu n ovise i o dodatnoj nezavisnoj varijabli x zovemo redovima funkcija.

Općenito ih možemo označiti s $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$.

Područje konvergencije

Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red $\sum_n a_n(x)$ konvergira zove se područje konvergencije tog reda.

Primjer

Područje konvergencije reda $\sum_n x^n$ je $\langle -1, 1\rangle$ jer je to geometrijski red s kvocijentom x.

Područje konvergencije

Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red $\sum_n a_n(x)$ konvergira zove se područje konvergencije tog reda.

Primjer

Područje konvergencije reda $\sum_n x^n$ je $\langle -1, 1\rangle$ jer je to geometrijski red s kvocijentom x.

Primjer

Odredimo područje konvergencije reda $\sum_n \frac{(x-2)^n}{n!}$:

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-2)^n}{n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{x-2}{n+1} \right| = 0 < 1$$

za sve x pa je područje konvergencije $\mathbb{R}$.

Za x iz područja konvergencije (i samo za njih) smisleno je pisati

$$f(x) = \sum_n a_n(x),$$

tj. tom je formulom definirana realna funkcija kojoj je domena točno području konvergencije reda na desnoj strani formule.

Primjer

S

$$f(x) = \sum_n x^n$$

je definirana funkcija $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$. *Vrijedi npr.*

$$f(0{,}5) = \sum_n 0,5^n = 2, f(0{,}25) = \sum_n 0,25^n = 1{,}333\ldots$$

Za x iz područja konvergencije (i samo za njih) smisleno je pisati

$$f(x) = \sum_n a_n(x),$$

tj. tom je formulom definirana realna funkcija kojoj je domena točno području konvergencije reda na desnoj strani formule.

Primjer

S

$$f(x) = \sum_n x^n$$

je definirana funkcija $f : \langle -1, 1 \rangle \to \mathbb{R}$. *Vrijedi npr.*

$$f(0{,}5) = \sum_n 0,5^n = 2, f(0{,}25) = \sum_n 0,25^n = 1{,}333\ldots$$

Često je potrebno razmišljati obrnuto: Za zadanu funkciju f, može li se ona zapisati kao red funkcija određenog tipa?

Definicija (Red potencija)

Za niz (b_n) i $c \in \mathbb{R}$ red funkcija oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n$$

zove se redom potencija (oko točke c).

Zadatak

Što su parcijalne sume reda potencija?

Definicija (Red potencija)

Za niz (b_n) i $c \in \mathbb{R}$ red funkcija oblika

$$\sum_n b_n(x-c)^n$$

zove se redom potencija (oko točke c).

Zadatak

Što su parcijalne sume reda potencija?

Red potencija konvergira za sve x iz intervala oblika $\langle c-R, c+R\rangle$, gdje je broj R tzv. radijus konvergencije reda potencija, određen bilo kojom od formula

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}}, \qquad R = \lim_n \left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|.$$

U rubovima intervala $\langle c-R, c+R\rangle$ red može i ne mora konvergirati.

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ *i* $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ *i* $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n},\ c = 3.;$$

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ i $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}, \; c = 3.;$$

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1;$$

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ *i* $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}, \;\; c = 3.;$$

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1;$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za $x \in \langle 2, 4 \rangle$.

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ i $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n},\ c = 3.;$$

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1;$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za $x \in \langle 2, 4 \rangle$.
Za $x = 2$ dobivamo red $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ koji konvergira,

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ *i* $\sum_n b_n (x-1)^n$*.*

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}, \; c = 3.;$$

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1;$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za $x \in \langle 2, 4 \rangle$*.*
Za $x = 2$ *dobivamo red* $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ *koji konvergira, a za* $x = 4$ *dobivamo harmonijski red* $\sum \frac{1}{n}$ *koji divergira.*

Napomena

Radijus konvergencije ne ovisi o c — isti radijus konvergencije imaju redovi $\sum_n b_n x^n$ *i* $\sum_n b_n (x-1)^n$.

Primjer

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n},\ \ c = 3.;$$

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1;$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za $x \in \langle 2, 4 \rangle$.
Za $x = 2$ *dobivamo red* $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ *koji konvergira, a za* $x = 4$ *dobivamo harmonijski red* $\sum \frac{1}{n}$ *koji divergira. Dakle, područje konvergencije promatranog reda potencija je* $[2, 4\rangle$.

Primjer

Možete li za $x \in \langle -1, 1 \rangle$ *funkciju zadanu s* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *zapisati kao red potencija?*

Primjer

Možete li za $x \in \langle -1, 1\rangle$ *funkciju zadanu s* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *zapisati kao red potencija?*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Ako znamo formulu $f(x)$ neke funkcije, može li se naći red potencija koji kao područje konvergencije ima neki interval koji je podskup prirodne domene od f i takav da za x iz tog područja konvergencije ima sumu jednaku $f(x)$?

Primjer

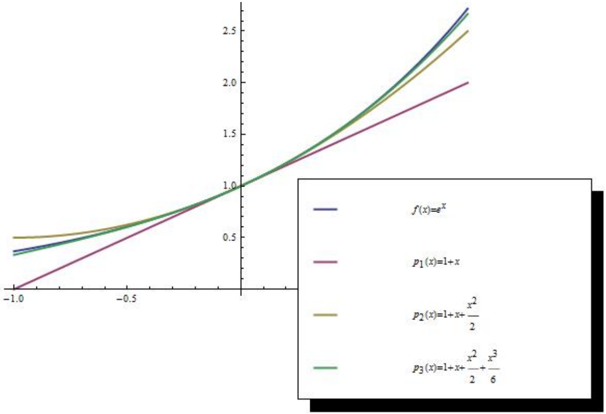
Možete li za $x \in \langle -1, 1\rangle$ funkciju zadanu s $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zapisati kao red potencija?

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Ako znamo formulu $f(x)$ neke funkcije, može li se naći red potencija koji kao područje konvergencije ima neki interval koji je podskup prirodne domene od f i takav da za x iz tog područja konvergencije ima sumu jednaku $f(x)$?

Ako to možemo učiniti, to znači da se $f(x)$ može (za x iz nekog intervala) aproksimirati parcijalnom sumom tog reda potencija, tj. polinomom.

Za zadanu formulu $f(x)$ i za x blizu neke točke c u domeni te funkcije tražimo polinom $p(x)$ nekog stupnja takav da je $f(x) \approx p(x)$ za x blizu c i da je pritom među svim polinomima odabranog stupnja $p(x)$ najbolja aproksimacija za $f(x)$ (graf od p se u blizini točke $(c, f(c))$ najbolje priljubljuje uz graf od f).



Od svih polinoma stupnja n funkciju f oko točke c najbolje aproksimira onaj polinom $p(x)$ kojemu se vrijednosti svih derivacija od nulte do n-te u točki c podudaraju s vrijednostima odgovarajućih po redu derivacija funkcije f:

$$f(c) = p(c),\ f'(c) = p'(c),\ f''(c) = p''(c),\ \ldots,\ f^{(n)}(c) = p^{(n)}(c).$$

Od svih polinoma stupnja n funkciju f oko točke c najbolje aproksimira onaj polinom $p(x)$ kojemu se vrijednosti svih derivacija od nulte do n-te u točki c podudaraju s vrijednostima odgovarajućih po redu derivacija funkcije f:

$$f(c) = p(c),\ f'(c) = p'(c),\ f''(c) = p''(c),\ \ldots,\ f^{(n)}(c) = p^{(n)}(c).$$

Primjer

Ako $f(x) = e^x$ oko $c = 0$ želimo aproksimirati polinomom 3. stupnja, $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$, najbolji je onaj za kog vrijedi

$$f(0) = p(0): \quad e^0 = b_0, f'(0) = p'(0): \quad e^0 = b_1,$$

$$f''(0) = p''(0): \quad e^0 = 2b_2, f'''(0) = p'''(0): \quad e^0 = 6b_3.$$

Dakle, traženi polinom je $p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Taylorov polinom

Općenito za aproksimaciju oko c polinomom stupnja n
$p(x) = b_0 + b_1(x-c) + \ldots + b_n(x-c)^n$ dobivamo redom uvjete:

$$b_0 = f(c),$$

$$p'(x) = b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + \ldots + nb_n(x-c)^{n-1} \Rightarrow b_1 = f'(c),$$
$$p''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-c)\ldots + n(n-1)b_n(x-c)^{n-2} \Rightarrow 2b_2 = f''(c),$$
$$p'''(x) = 2\cdot 3b_3 + \ldots + n(n-1)b_n(x-c)^{n-2} \Rightarrow 6b_3 = f'''(c),$$
$$\vdots$$
$$p^{(n)}(x) = n!a_n \Rightarrow n!b_n = f^{(n)}(c).$$

odnosno za sve i od 0 do n je

$$b_i = \frac{f^{(i)}(c)}{i!}.$$

Dakle, od svih polinoma stupnja n oko c funkciju $f(x)$ najbolje aproksimira:

Taylorov polinom stupnja n funkcije f oko točke c

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Taylorov polinom stupnja n funkcije f oko točke c

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Taylorov polinom stupnja n naravno ima smisla samo ako funkcija f u točki c posjeduje sve derivacije do n-te.

Taylorov polinom stupnja n funkcije f oko točke c

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Taylorov polinom stupnja n naravno ima smisla samo ako funkcija f u točki c posjeduje sve derivacije do n-te.
U pravilu povećanjem stupnja n Taylorovog polinoma dobivamo točniju aproksimaciju funkcije f oko c.
Ako funkcija f posjeduje sve derivacije u c, onda je definiran i red potencija

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Taj red se zove Taylorovim redom funkcije f oko c. Njegove parcijalne sume su Taylorovi polinomi. Ako je $c = 0$ govorimo o Maclaurinovom redu $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Primjer

Kako je za $f(x) = e^x$ *i* $f^{(n)}(x) = e^x$ *i stoga* $f^{(n)}(0) = 1$ *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$, *slijedi da je Maclaurinov red za* e^x *dan formulom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Primjer

Kako je za $f(x) = e^x$ *i* $f^{(n)}(x) = e^x$ *i stoga* $f^{(n)}(0) = 1$ *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$, *slijedi da je Maclaurinov red za* e^x *dan formulom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Grešku aproksimacije Taylorovim polinomom stupnja n označit ćemo s R_n:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

za x iz intervala na kojem razmatramo aproksimaciju Taylorovim polinomom.

Primjer

Greška aproksimacije $f(x) = e^x$ *oko nule Taylorovim polinomom* $T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ *je* $R_3(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. *Ta greška za primjerice* $x = 0{,}1$ *iznosi* $R_3(0,1) = 4{,}2514 \cdot 10^{-6}$.

Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji f nigdje osim u c, tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između $f(x)$ i pripadnog Taylorovog reda $T(x)$.

Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji f nigdje osim u c, tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između $f(x)$ i pripadnog Taylorovog reda $T(x)$.

Teorem (Taylor)

Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu I oko c) ako s porastom n greške $R_n(x)$ aproksimacije $f(x)$ s $T_n(x)$ teže u 0 za sve $x \in I$.

Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji f nigdje osim u c, tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između $f(x)$ i pripadnog Taylorovog reda $T(x)$.

Teorem (Taylor)

Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu I oko c) ako s porastom n greške $R_n(x)$ aproksimacije $f(x)$ s $T_n(x)$ teže u 0 za sve $x \in I$.

Teorem

Ako je na nekom intervalu oko c funkcija jednaka nekom redu potencija, onda je to njezin Taylorov red oko c.

Taylorovi redovi polinoma su oni sami, raspisani po potencijama od $(x - c)$.

Važni Maclaurinovi redovi

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1].$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

Binomni red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

koji konvergira za $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Eksponent α može biti bilo koji realan broj, a $\binom{\alpha}{n}$ je definiran kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Iz ovih razvoja se novi dobivaju algebarskim manipulacijama te deriviranjem i integriranjem (konvergentni redovi potencija mogu se derivirati i integrirati poput polinoma).

Zadatak

Odredite Maclaurinove redove za 2^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{arctg} x$ *i* $(1-x)^{-2}$.

Iz ovih razvoja se novi dobivaju algebarskim manipulacijama te deriviranjem i integriranjem (konvergentni redovi potencija mogu se derivirati i integrirati poput polinoma).

Zadatak

Odredite Maclaurinove redove za 2^x, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{arctg} x$ *i* $(1-x)^{-2}$.

Redovi potencija se nerijetko mogu iskoristiti i za izračunavanje suma konvergentnih redova.

Primjer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{(2n)!} = -1$$

jer se radi o Maclaurinovom razvoju funkcije kosinus u koji je uvršten π, *te rezultat mora biti* $\cos \pi = -1$-

Ako je dana funkciju na nekom intervalu oko c jednaka odgovarajućem Taylorovom redu, onda ju možemo aproksimirati njegovom parcijalnom sumom (Taylorovim polinomom). Pritom je greška aproksimacije $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ obično nepoznata, ali se može procijeniti pomoću formule

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

gdje je M gornja međa za apsolutnu vrijednost od $f^{(n+1)}(t)$ za t-ove između x i c (tj. $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ za sve t između x i c).

Primjer

Greška aproksimacije $\sin x$ *Maclaurinovim polinomom stupnja* 3 *za* $x = 0{,}1$ *je najviše* $\frac{1}{24} \cdot 10^{-4} \approx 4{,}16667 \cdot 10^{-6}$.

Primjer

Ako $\sin x$ *želimo u okolini nule aproksimirati s* $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *tako da greška bude najviše reda* $0{,}001$*, na kojem intervalu to možemo postići?*

Primjer

Ako $\sin x$ *želimo u okolini nule aproksimirati s* $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *tako da greška bude najviše reda* $0{,}001$, *na kojem intervalu to možemo postići?*
Tražimo d *tako da za* $|x| < d$ *budemo sigurni da je* $|R_3(x)| \leq 10^{-3}$:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin t}{4!}x^4\right| \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{d^3}{24} \leq 0{,}001 \Rightarrow d \leq 0{,}28845.$$

Dakle, za $x \in \langle -0{,}28845,\ 0{,}28845\rangle$ *greška aproksimacije* $\sin x$ *s* $T_3(x)$ *je manja od* 10^{-3}.

Primjer

Virijalna jednadžba stanja za realni plin ima oblik

$$pV_m = RT\left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots\right), \text{ tj.}$$

$$p = p(V_m) = \frac{RT}{V_m} + \frac{RTB}{V_m^2} + \frac{RTC}{V_m^3} + \dots$$

Primjer

U teoriji relativnosti pojavljuje se formula

$$m = m(v) = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}} m_0 \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

(m_0 je masa mirovanja).
Pretpostavimo li da je v puno manji od c, aproksimirajmo formulu s Taylorovim polinomom stupnja dva:
Stavimo $x = (v/c)^2$ (sad je $x \approx 0$ zbog pretpostavke da je v puno manji od c) pa imamo $m(0) = m_0$, $m'(0) = -\frac{m_0}{2}$, $m''(0) = \frac{3m_0}{4}$ pa je

$$m \approx m_0 - \frac{m_0}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3m_0}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 .$$

Primjer

Planckov zakon za zračenje crnog tijela glasi

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}.$$

Tu je $\rho(\lambda)$ *spektralna gustoća energije zračenja valne duljine* λ, h *je Planckova konstanta,* k *Boltzmannova konstanta,* c *je brzina svjetlosti, a* T *temperatura (u Kelvinima). Prije Plancka Rayleigh i Jeans predložili su jednostavniju formulu*

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

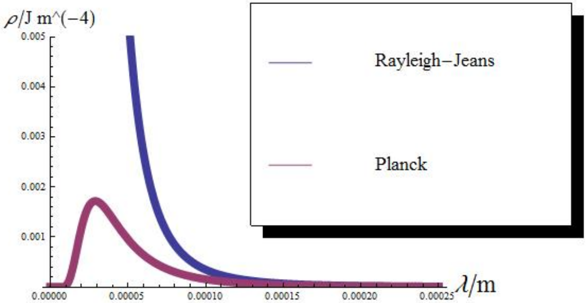
no kako bi iz te formule slijedilo da ρ *jako raste kako se valne duljine približavaju nuli, i to pri svim temperaturama, slijedilo bi da sva tijela emitiraju kratkovalno i ultraljubičasto zračenje (ultraljubičasta katastrofa).*

Za velike λ je $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ blizu nule. Stoga je aproksimacija $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ s prva dva člana Maclaurinova razvoja $1 + \frac{hc}{\lambda kT}$ dobra (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je x bliži nuli, tj. što je λ veća).

Za velike λ je $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ blizu nule. Stoga je aproksimacija $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ s prva dva člana Maclaurinova razvoja $1 + \frac{hc}{\lambda kT}$ dobra (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je x bliži nuli, tj. što je λ veća).
Slijedi da je za velike λ nazivnik u Planckovom zakonu približno jednak $\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}$ te Planckov zakon za velike λ poprima oblik

$$\rho(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

što je točno Rayleigh-Jeansova formula.



Primjer

Znajući da je vjerojatnost da se molekula plina kreće nekom brzinom opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT} \right),$$

koristeći Taylorov red na dvije značajne znamenke (cijeli postotak) procijenite vjerojatnost da se molekula dušika pri $25^{circ}\mathrm{C}$ *kreće brzinom ne većom od* $500\,\mathrm{m/s}$.

Primjer

Znajući da je vjerojatnost da se molekula plina kreće nekom brzinom opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT} \right),$$

koristeći Taylorov red na dvije značajne znamenke (cijeli postotak) procijenite vjerojatnost da se molekula dušika pri $25^{circ}\mathrm{C}$ *kreće brzinom ne većom od* $500\,\mathrm{m/s}$.
Molarna masa molekule dušika je $M = 28{,}02\ \mathrm{g/mol}$; *znamo* $R = 8{,}3145\ \mathrm{J/(K\,mol)}$ *i* $T = 298{,}15\ \mathrm{K}$. *Dakle je za zadanu situaciju (ne pišemo jedinice jer je vidljivo da se sve krate)*

$$f(v) = 3{,}032 \cdot 10^{-8} v^2 \exp\left(-5{,}652 \cdot 10^{-6} v^2\right).$$

Znamo da se vjerojatnost da slučajna varijabla opisana funkcijom gustoće f nađe u intervali I računa kao integral od f po I, dakle zadatak je procijeniti $P = \int_0^{500} f(v)\mathrm{d}v$.

Znamo da se vjerojatnost da slučajna varijabla opisana funkcijom gustoće f nađe u intervali I računa kao integral od f po I, dakle zadatak je procijeniti $P = \displaystyle\int_0^{500} f(v)\mathrm{d}v$.
Razvoj u Maclaurinov red za e^x povlači

$$f(v) = 3{,}032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5{,}652 \cdot 10^{-6})^n}{n!} v^{2n+2} =$$

$$= 3{,}032 \cdot 10^{-8} v^2 - 1{,}714 \cdot 10^{-13} v^4 + 4{,}843 \cdot 10^{-19} v^6 - 9{,}124 \cdot 10^{-25} v^8 + \ldots$$

Znamo da se vjerojatnost da slučajna varijabla opisana funkcijom gustoće f nađe u intervali I računa kao integral od f po I, dakle zadatak je procijeniti $P = \int_0^{500} f(v)\mathrm{d}v$.

Razvoj u Maclaurinov red za e^x povlači

$$f(v) = 3{,}032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5{,}652 \cdot 10^{-6})^n}{n!} v^{2n+2} =$$

$$= 3{,}032 \cdot 10^{-8} v^2 - 1{,}714 \cdot 10^{-13} v^4 + 4{,}843 \cdot 10^{-19} v^6 - 9{,}124 \cdot 10^{-25} v^8 + \ldots$$

dakle integriranje član po član daje

$$P = 1{,}011 \cdot 10^{-8} 500^3 - 3{,}427 \cdot 10^{-14} 500^5 + 6{,}918 \cdot 10^{-20} 500^7 - \ldots$$

Računamo redom parcijalne sume za gornji red:

$$n = 0\colon\ P_0 = 1{,}011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1{,}26375$$
$$n = 1\colon\ P_1 = P_0 - 3{,}427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0{,}19281$$
$$n = 2\colon\ P_2 = P_1 + 6{,}918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0{,}73328$$
$$n = 3\colon\ P_3 = P_2 - 1{,}014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0{,}53523$$
$$n = 4\colon\ P_4 = P_3 + \ldots 500^{11} = 0{,}59246$$
$$n = 5\colon\ P_5 = P_4 - \ldots 500^{13} = 0{,}57878$$
$$n = 6\colon\ P_6 = P_5 + \ldots 500^{15} = 0{,}58157$$
$$n = 7\colon\ P_7 = P_6 - \ldots 500^{17} = 0{,}58108$$

$n = 0$: $P_0 = 1{,}011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1{,}26375$
$n = 1$: $P_1 = P_0 - 3{,}427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0{,}19281$
$n = 2$: $P_2 = P_1 + 6{,}918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0{,}73328$
$n = 3$: $P_3 = P_2 - 1{,}014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0{,}53523$
$n = 4$: $P_4 = P_3 + \ldots 500^{11} = 0{,}59246$
$n = 5$: $P_5 = P_4 - \ldots 500^{13} = 0{,}57878$
$n = 6$: $P_6 = P_5 + \ldots 500^{15} = 0{,}58157$
$n = 7$: $P_7 = P_6 - \ldots 500^{17} = 0{,}58108$

S obzirom na to da su se u zadnja dva koraka prve dvije, štoviše tri znamenke poklopile, zaključujemo da je tražena vjerojatnost 58,1 %.

Egzaktna vrijednost je $P = 58{,}0683\ldots$ %.