Osnove Fourierove analize

Franka Miriam Brückler

Zadatak

Kako izgleda graf funkcije zadane s $f(x) = 2\cos(3\pi x)$*?*

Zadatak

Kako izgleda graf funkcije zadane s $f(x) = 2\cos(3\pi x)$*?*

Zadatak

Za koji a *će* $\sin(ax)$ *imati period* $\pi/2$*?*

Zadatak

Kako izgleda graf funkcije zadane s $f(x) = 2\cos(3\pi x)$*?*

Zadatak

Za koji a će $\sin(ax)$ *imati period* $\pi/2$*?*

Periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ perioda T (ne nužno temeljnog) potpuno je određena svojom restrikcijom na segment $[-L, L]$ gdje je $L = \frac{T}{2}$. Vrijedi i obrnuto: svaka funkcija zadana na $[-L, L]$ prirodno se proširuje do periodične funkcije na $\mathbb{R}$ perioda $2L$.

Zadatak

Kako izgleda graf funkcije zadane s $f(x) = 2\cos(3\pi x)$*?*

Zadatak

Za koji a *će* $\sin(ax)$ *imati period* $\pi/2$*?*

Periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ perioda T (ne nužno temeljnog) potpuno je određena svojom restrikcijom na segment $[-L, L]$ gdje je $L = \frac{T}{2}$. Vrijedi i obrnuto: svaka funkcija zadana na $[-L, L]$ prirodno se proširuje do periodične funkcije na $\mathbb{R}$ perioda $2L$. Najjednostavnije funkcije koje imaju period $2L$ su funkcije oblika

$$f_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

i

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(za $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$).

Primjer

Ako je $L = \pi$, tj. ako promatramo funkcije perioda 2π, onda je

$$f_m(x) = \cos(mx), \quad g_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da im za $m, n > 1$ 2π nije temeljni (najmanji) period.

Primjer

Ako je $L = \pi$, tj. ako promatramo funkcije perioda 2π, onda je

$$f_m(x) = \cos(mx), \quad g_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da im za $m, n > 1$ 2π nije temeljni (najmanji) period.

Na vektorskom prostoru svih realnih funkcija s domenom $[-L, L]$ (koje imaju najviše konačno mnogo prekida) skalarni produkt definiramo formulom

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbog opisanog poistovjećivanja funkcija s periodom $2L$ s funkcijama kojima je $[-L, L]$ domena, gornja formula definira i skalarni produkt za funkcije s periodom $2L$.

Svaka funkcija tipa f_m ortogonalna je na svaku funkciju tipa g_n:

$$\langle f_m, g_n \rangle = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, \mathrm{d}x = 0$$

(zašto je to očito?).

Svaka funkcija tipa f_m ortogonalna je na svaku funkciju tipa g_n:

$$\langle f_m, g_n \rangle = \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \, \mathrm{d}x = 0$$

(zašto je to očito?). Za $m \neq n$ vrijedi i

$$\langle f_m, f_n \rangle = \langle g_m, g_n \rangle = 0.$$

Nadalje, ako $m = n \neq 0$ vrijedi

$$\langle f_n, f_n \rangle = \langle g_n, g_n \rangle = L.$$

Za slučaj $m = n = 0$ imamo

$$\langle f_0, f_0 \rangle = 2L.$$

U ovom nam je poglavlju cilj zadanu periodičku funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa s istim periodom, tj. linearnom kombinacijom funkcija f_m i g_n.

U ovom nam je poglavlju cilj zadanu periodičku funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa s istim periodom, tj. linearnom kombinacijom funkcija f_m i g_n.
Kao i kod redova potencija kod kojih je cilj aproksimacija konačnom sumom (polinomom), s obzirom da želimo dozvoliti načelno proizvoljno duge parcijalne sume, promatramo odgovarajuće beskonačne sume:
Trigonometrijski redovi (perioda $T = 2L$) su redovi funkcija oblika $\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x))$. Nulti član je konstantna funkcija A_0 (jer je g_0 nulfunkcija). Stoga je uobičajenija notacija općeg oblika trigonometrijskog reda

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x)) .$$

U ovom nam je poglavlju cilj zadanu periodičku funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa s istim periodom, tj. linearnom kombinacijom funkcija f_m i g_n.
Kao i kod redova potencija kod kojih je cilj aproksimacija konačnom sumom (polinomom), s obzirom da želimo dozvoliti načelno proizvoljno duge parcijalne sume, promatramo odgovarajuće beskonačne sume:
Trigonometrijski redovi (perioda $T = 2L$) su redovi funkcija oblika $\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x))$. Nulti član je konstantna funkcija A_0 (jer je g_0 nulfunkcija). Stoga je uobičajenija notacija općeg oblika trigonometrijskog reda

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x)) .$$

Ako područje konvergencije trigonometrijskog reda sadrži segment $[-L, L]$, onda je sa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x))$$

definirana funkcija na $[-L, L]$, tj. funkcija perioda $2L$.

Ako područje konvergencije trigonometrijskog reda sadrži segment $[-L, L]$, onda je sa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x))$$

definirana funkcija na $[-L, L]$, tj. funkcija perioda $2L$.
Kao što smo se kod redova potencija pitali za koje koeficijente ćemo dobiti najbolju aproksimaciju parcijalnom sumom i iz tog uvjeta dobili Taylorov red, tako ovdje postavljamo pitanje: Za koje koeficijente u gornjem redu taj red konvergira na $[-L, L]$ i pritom je njegova suma u svakoj točki x tog intervala jednaka $f(x)$?

Ako područje konvergencije trigonometrijskog reda sadrži segment $[-L, L]$, onda je sa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x))$$

definirana funkcija na $[-L, L]$, tj. funkcija perioda $2L$.
Kao što smo se kod redova potencija pitali za koje koeficijente ćemo dobiti najbolju aproksimaciju parcijalnom sumom i iz tog uvjeta dobili Taylorov red, tako ovdje postavljamo pitanje: Za koje koeficijente u gornjem redu taj red konvergira na $[-L, L]$ i pritom je njegova suma u svakoj točki x tog intervala jednaka $f(x)$?
Pomnožimo pretpostavljenu jednakost skalarno s f_m. Dobijemo $\langle f, f_m\rangle = \ldots = A_m\langle f_m, f_m\rangle = A_m L$.

Dakle, ako je uopće moguće postići traženu jednakost funkcije i trigonometrijskog reda, onda je

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Analogno se dobije da tada mora biti i

$$B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, ako je uopće moguće postići traženu jednakost funkcije i trigonometrijskog reda, onda je

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Analogno se dobije da tada mora biti i

$$B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Brojevi A_n i B_n određeni gornjim formulama zovu se Fourierovi koeficijenti funkcije f. Fourierov red funkcije f je trigonometrijski red kojem su koeficijenti upravo Fourierovi koeficijenti.

Važno i korisno!

Ako je f parna funkcija, onda su svi B_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi.

Važno i korisno!

Ako je f parna funkcija, onda su svi B_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi.
Ako je f neparna funkcija, onda su svi A_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo sinusi.

Važno i korisno!

Ako je f parna funkcija, onda su svi B_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi.
Ako je f neparna funkcija, onda su svi A_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo sinusi.

Fourierov red funkcije $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ konvergira na $[-L, L]$ ako se taj segment može rastaviti na konačno mnogo podintervala na kojima je f neprekidna i monotona te ako su sve točke prekida skokovi.

Važno i korisno!

Ako je f parna funkcija, onda su svi B_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi.
Ako je f neparna funkcija, onda su svi A_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo sinusi.

Fourierov red funkcije $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ konvergira na $[-L, L]$ ako se taj segment može rastaviti na konačno mnogo podintervala na kojima je f neprekidna i monotona te ako su sve točke prekida skokovi.
Tada za svaki $x \in [-L, L]$ osim eventualno u točkama prekida i u $\pm L$ vrijedi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x)) .$$

Primjer

Odredimo Fourierov red funkcije definirane s

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

i po periodičnosti proširene na $\mathbb{R}$.

Primjer

Odredimo Fourierov red funkcije definirane s

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

i po periodičnosti proširene na $\mathbb{R}$. *Funkcija je neparna, dakle su svi* $A_n = 0$, *odnosno u razvoju u Fourierov red imamo samo sinuse.*

Primjer

Odredimo Fourierov red funkcije definirane s

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

i po periodičnosti proširene na $\mathbb{R}$. *Funkcija je neparna, dakle su svi* $A_n = 0$, *odnosno u razvoju u Fourierov red imamo samo sinuse.* $L = 1$ *pa su* $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ *i*

$$B_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\left(2 - 2\cos(n\pi)\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Primjer

Odredimo Fourierov red funkcije definirane s

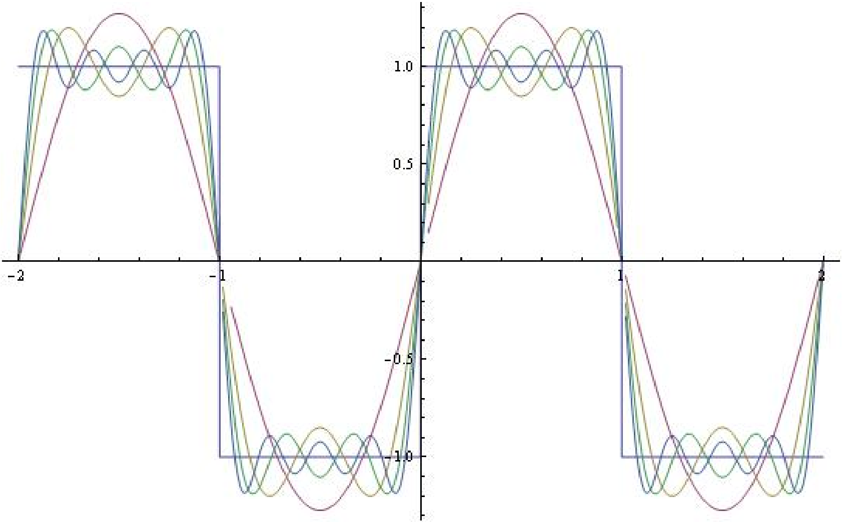
$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

i po periodičnosti proširene na $\mathbb{R}$. *Funkcija je neparna, dakle su svi* $A_n = 0$, *odnosno u razvoju u Fourierov red imamo samo sinuse.* $L = 1$ *pa su* $f_n(x) = \sin(n\pi x)$ *i*

$$B_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}(2 - 2\cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n).$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \dots\right)$$

za sve $x \neq k$, $k \in \mathbb{Z}$.


1.0
0.5
-0.5
-1.0
-2
-1
1
2

Primjer

Ako je f *na* $[-L, L]$ *zadana s* $f(x) = \frac{2}{L}x + 1$ *za* $x < 0$ *i* $f(x) = -\frac{2}{L}x + 1$ *za* $x \geq 0$*, imamo parnu funkciju.*

Primjer

Ako je f na $[-L, L]$ zadana s $f(x) = \frac{2}{L}x + 1$ za $x < 0$ i $f(x) = -\frac{2}{L}x + 1$ za $x \geq 0$, imamo parnu funkciju. Stoga su svi $B_n = 0$. Račun za A_n daje: Za parne n je $A_n = 0$, a za neparne n je $A_n = \frac{8}{\pi^2 n^2}$ za $n \in \mathbb{N}$ tj. pripadni Fourierov red glasi

$$A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \ldots =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4}\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \ldots\right).$$

Primjer

Ako je f na $[-L, L]$ *zadana s* $f(x) = \frac{2}{L}x + 1$ *za* $x < 0$ *i* $f(x) = -\frac{2}{L}x + 1$ *za* $x \geq 0$*, imamo parnu funkciju.*
Stoga su svi $B_n = 0$*. Račun za* A_n *daje: Za parne n je* $A_n = 0$*, a za neparne n je* $A_n = \frac{8}{\pi^2 n^2}$ *za* $n \in \mathbb{N}$ *tj. pripadni Fourierov red glasi*

$$A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x) + \ldots =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4}\frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \ldots\right).$$

No, ako želimo koristiti Fourierov red za aproksimacije, je li najbolje uzimati što dulje parcijalne sume? Ne!

Kompleksni oblik Fourierovog reda

$$\cos t + i \sin t$$

Kompleksni oblik Fourierovog reda

$$\cos t + i \sin t = e^{it}, \quad \cos t - i \sin t = e^{-it} \Rightarrow$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = .$$

Kompleksni oblik Fourierovog reda

$$\cos t + i \sin t = e^{it}, \quad \cos t - i \sin t = e^{-it} \Rightarrow$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = .$$

Slijedi

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n f_n(x) + B_n g_n(x)) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n - iB_n}{2} \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n + iB_n}{2} \phi_n(-x)$$

gdje je

$$\phi_n(x) = \exp(in\pi x/L).$$

Primijetimo: $\phi_n^*(x) = \overline{\phi_n(x)} = \phi_n(-x)$, a tako su i odgovarajući koeficijenti kompleksno konjugirani. Stoga dobivamo jednostavniji oblik

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(x)$$

koji se naziva kompleksni oblik Fourierovog reda funkcije f, uz

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2} (n \in \mathbb{N}).$$

- Ako je f realna i parna funkcija, svi koeficijenti c_n su realni brojevi.
- Ako je f realna i neparna, svi c_n su čisto imaginarni brojevi.
- Ako je f realna funkcija, za sve n vrijedi $\overline{c_n} = c_{-n}$.

Spektar amplituda i fazni spektar

Prikažemo li kompleksne Fourierove koeficijente u eksponencijalnom obliku

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n},$$

njihove apsolutne vrijednosti čine spektar amplituda, a argumenti čine fazni spektar:
Spektar amplituda periodične funkcije f definira je funkcija $|c_n|$ u ovisnosti o kutnoj frekvenciji $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$, a fazni spektar je ovisnost φ_n o ω_n.

Spektar amplituda i fazni spektar

Prikažemo li kompleksne Fourierove koeficijente u eksponencijalnom obliku

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n},$$

njihove apsolutne vrijednosti čine spektar amplituda, a argumenti čine fazni spektar:
Spektar amplituda periodične funkcije f definira je funkcija $|c_n|$ u ovisnosti o kutnoj frekvenciji $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$, a fazni spektar je ovisnost φ_n o ω_n.
Primijetimo i da je fizikalna dimenzija od ω_n recipročna fizikalnoj dimenziji od L, koja je pak jednaka fizikalnoj dimenziji varijable x funkcije f koju razvijamo u Fourierov red.

Kako dakle računamo te spektre za zadanu funkciju?

1. odredimo realne Fourierove koeficijente

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n\rangle;$$

2. Iz njih izračunamo kompleksne Fourierove koeficijente:

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}(n \in \mathbb{N}).$$

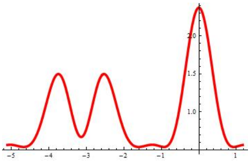
Kako dakle računamo te spektre za zadanu funkciju?

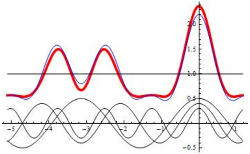
1. odredimo realne Fourierove koeficijente
$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n\rangle;$$
2. Iz njih izračunamo kompleksne Fourierove koeficijente:
$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}(n \in \mathbb{N}).$$
3. Odredimo im apsolutne vrijednosti da dobijemo spektar amplituda:
$$|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$
Primijetimo da ćemo za realne funkcije uvijek dobivati paran spektar amplituda.

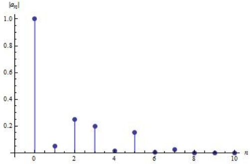
Kako dakle računamo te spektre za zadanu funkciju?

1. odredimo realne Fourierove koeficijente
$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, f_n\rangle, \quad B_n = \frac{1}{L}\langle f, g_n\rangle;$$
2. Iz njih izračunamo kompleksne Fourierove koeficijente:
$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2}(n \in \mathbb{N}).$$
3. Odredimo im apsolutne vrijednosti da dobijemo spektar amplituda:
$$|c_{\pm n}| = \frac{1}{2}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}.$$
Primijetimo da ćemo za realne funkcije uvijek dobivati paran spektar amplituda.
4. Za fazni spektar odredimo argumente od c_n-ova (tangens argumenta kompleksnog broja je kvocijent njegovog imaginarnog i realnog dijela). Primijetimo da se za parne realne funkcije fazni spektar sastoji samo od 0 i π, a za neparne realne funkcije samo od $\pm\pi/2$.

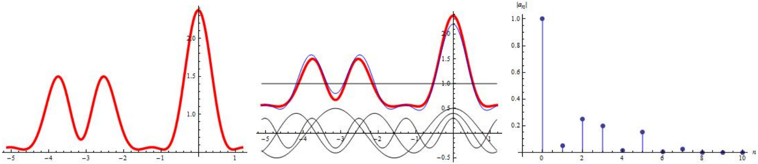
Spektar amplituda ukazuje koje od funkcija ϕ_n u sumi najviše doprinose formiranju aproksimacije funkcije f putem Fourierova reda.







Spektar amplituda ukazuje koje od funkcija ϕ_n u sumi najviše doprinose formiranju aproksimacije funkcije f putem Fourierova reda.



Napomena

Kako su $n \in \mathbb{Z}$, slijedi da se radi diskretnim funkcijama te se ta dva grafa zovu i diskretni frekvencijski spektri ili linijski spektri. U grafičkom prikazu spektra amplituda i faznog spektra često se na apscisu nanosi n umjesto ω_n.

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$A_n = 0;\ B_n = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow c_0 = 0, \quad c_{\pm n} = \mp i\frac{\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi}$$

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$A_n = 0;\; B_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \Rightarrow c_0 = 0, \quad c_{\pm n} = \mp i \frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

$$|c_0| = 0; |c_{\pm n}| = \frac{(1-(-1)^n)}{n\pi} = \frac{(1-(-1)^n)}{\omega_n}$$

Primjer

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases},$$

$$A_n = 0;\ B_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \Rightarrow c_0 = 0, \quad c_{\pm n} = \mp i\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

$$|c_0| = 0; |c_{\pm n}| = \frac{(1-(-1)^n)}{n\pi} = \frac{(1-(-1)^n)}{\omega_n}$$

$$f(x) \approx -\frac{2}{\omega_3}\exp(i\omega_{-3}x) - \frac{2}{\omega_1}\exp(i\omega_{-1}x) + \frac{2}{\omega_1}\exp(i\omega_1 x) + \frac{2}{\omega_2}\exp(i\omega_3 x) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x\right).$$

Primjer

Periodičnu funkcija opisuje intenzitete niza jednoličnih impulsa: Impuls traje konstantnim intenzitetom $1/20$ *s, a razmak između početka dva impulsa iznosi* $1/4$ *s.*

Primjer

Periodičnu funkcija opisuje intenzitete niza jednoličnih impulsa: Impuls traje konstantnim intenzitetom $1/20$ *s, a razmak između početka dva impulsa iznosi* $1/4$ *s. Imamo dakle redom:*

$$T = 2L = \frac{1}{4}, f(t) = \begin{cases} I, & -\frac{1}{40} < x < \frac{1}{40} \\ 0, & inace \end{cases}$$

Primjer

Periodičnu funkcija opisuje intenzitete niza jednoličnih impulsa: Impuls traje konstantnim intenzitetom $1/20$ *s, a razmak između početka dva impulsa iznosi* $1/4$ *s. Imamo dakle redom:*

$$T = 2L = \frac{1}{4}, f(t) = \begin{cases} I, & -\frac{1}{40} < x < \frac{1}{40} \\ 0, & inace \end{cases}$$

Funkcija je parna pa je

$$c_{\pm n} = \frac{A_n}{2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}} \int_{-1/40}^{1/40} I \cos \frac{n\pi x}{1/8} \, \mathrm{d}x = 8I \int_0^{1/40} \cos(8n\pi x) \, \mathrm{d}x,$$

$$c_0 = \frac{I}{5}, \;\; c_n = \frac{1}{8n\pi} \sin \frac{n\pi}{5} (n \neq 0).$$

Spektar amplituda je stoga jednak

$$|c_0| = \frac{l}{5}, \ |c_n| = \frac{1}{8n\pi}|\sin\frac{n\pi}{5}|(n \neq 0).$$

Za $n \neq 0$ djeljiv s 5 amplitude su 0. Ako n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1 ili 4, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi}\sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}0234/n$, a ako n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2 ili 3, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi}\sin\frac{2\pi}{5} \approx 0{,}0378/n$.

$$|c_0| = \frac{l}{5}, \ |c_n| = \frac{1}{8n\pi}|\sin\frac{n\pi}{5}|(n \neq 0).$$

Za $n \neq 0$ djeljiv s 5 amplitude su 0. Ako n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1 ili 4, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi}\sin\frac{\pi}{5} \approx 0{,}0234/n$, a ako n pri dijeljenju s 5 daje ostatak 2 ili 3, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi}\sin\frac{2\pi}{5} \approx 0{,}0378/n$.

Napomena

Formalno gledajući, kompleksni Fourierovi koeficijenti čine kompleksan niz $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, tj. $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ (a c_n je isto što i $c(n)$). Ukoliko definiramo $c(\omega_n) = c_n$ doduše formalno imamo drugu funkciju (domena joj je skup svih cjelobrojnih višekratnika od π/L), no efektivno ništa bitno nismo promijenili.

Zadatak

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *formulom* $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$. *Skicirajte spektar amplituda za polinom stupnja* 3 *koji ju najbolje aproksimira oko* 0, *uzet kao periodična funkcija s temeljnim periodom* 1 *(tj. uzeto da je na* $[-1, 1]$ *taj polinom definicija periodične funkcije).*

Imamo prvo:

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-x^2/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2/4)^n = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} - \ldots,$$

$$-2 < x < 2.$$

Stoga je na $[-1, 1]$ tražena formula periodične funkcije

$$T_3(x) = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{16}.$$

Očito se radi o parnoj funkciji te je njen kompleksni Fourieov red oblika

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(n\pi x),\ c_{\pm n} = \frac{A_n}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{16}\right)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Imamo:

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{16}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{48},$$

$$c_{\pm n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}-\frac{x^2}{16}\right)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{32}\int_{-1}^{1}(4-x^2)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{(-1)^n}{8\pi^2 n^2}.$$

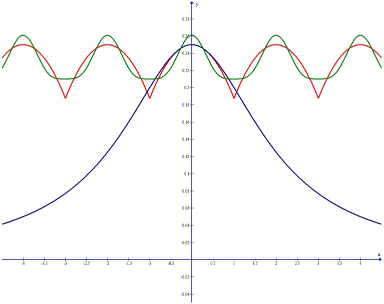
Dakle je $|c_0| = 11/48$ i

$$|c_{\pm n}| = \frac{1}{8\omega_n^2}.$$

Da želimo našu (proširenu) funkciju T_3 aproksimirati sa recimo 5 članova, uzeli bismo $n = 0, \pm 1, \pm 2$ i dobili

$$T_3(x) \approx \frac{11}{48} + \frac{1}{8\pi^2}\left(\exp(\pi x) + \exp(-\pi x)\right) - \frac{1}{32\pi^2}\left(\exp(2\pi x) + \exp(-2\pi x)\right)$$

$$= \frac{11}{48} + \frac{1}{4\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{1}{16\pi^2}\cos(2\pi x).$$



Zadatak

Spektar amplituda neke realne parne funkcije temeljnog perioda 1 *zadan je formulom* $|c_n| = \omega_n^{-1}$ *za* $n \neq 0$ *i* $c_0 = 1/\pi$. *Odredite najbolju polinomijalnu aproksimaciju stupnja* 2 *koji oko* 0 *najbolje aproksimira tri najznačajnija člana (realnog) Fourierovog reda te funkcije.*

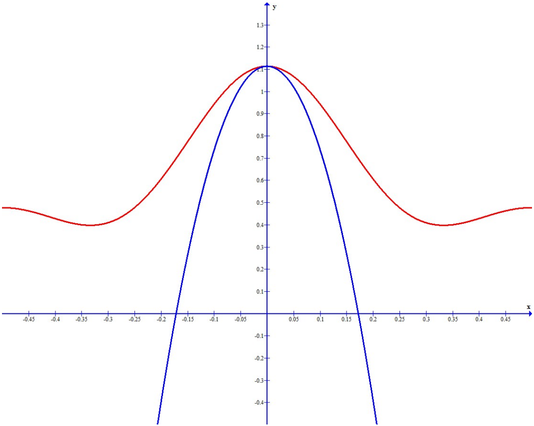
Kako je zadano da je funkcija parna, imamo $A_0 = 2/\pi$, $A_n = 2|c_n| = \frac{2L}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}$ i $B_n = 0$. Kako spektar amplituda pada s porastom $|n|$, tri najznačajnija člana dobivamo iz pet najznačajnijih kompleksnih članova (kao u prethodnom primjeru), odnosno dobijemo

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\cos(2\pi x) + \frac{1}{2\pi}\cos(4\pi x).$$

Najbolji kvadratni polinom koji oko 0 aproksimira f je

$$T_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = \frac{7}{2\pi} - 12\pi x^2.$$

Kompleksni oblik Fourierovog reda



Uvod u Fourierovu transformaciju

Vidjeli smo: Periodičke funkcije se (uglavnom) mogu zapisati u obliku kompleksnog Fourierovog reda, koji je određen Fourirerovim koeficijentima (i funkcijom i njezinim periodom).
Kompleksni Fourierovi koeficijenti čine niz $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, dakle funkciju $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

Uvod u Fourierovu transformaciju

Vidjeli smo: Periodičke funkcije se (uglavnom) mogu zapisati u obliku kompleksnog Fourierovog reda, koji je određen Fourirerovim koeficijentima (i funkcijom i njezinim periodom).
Kompleksni Fourierovi koeficijenti čine niz $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, dakle funkciju $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Razmaci između spektralnih linija su $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T/2}$.

Uvod u Fourierovu transformaciju

Vidjeli smo: Periodičke funkcije se (uglavnom) mogu zapisati u obliku kompleksnog Fourierovog reda, koji je određen Fourirerovim koeficijentima (i funkcijom i njezinim periodom).
Kompleksni Fourierovi koeficijenti čine niz $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, dakle funkciju $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Razmaci između spektralnih linija su $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T/2}$.
Opću funkciju $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ možemo zamisliti kao funkciju s jako velikim periodom. Time se razmaci među spektralnim linijama smanjuju i linijski spektar prelazi u kontinuirani spektar (varijabla funkcije c iz diskretne ω_n prelazi u kontinuiranu ω).
Fourierov red, koji možemo shvatiti kao sumaciju po ω_n, postaje integracija po $\mathrm{d}\omega$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x} \rightsquigarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\omega.$$

Gornje ideje dadu se provesti formalno i rezultiraju u:

Definicija (Fourierov transformat)

Ako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ima svojstvo da nepravi integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$ konvergira, kažemo da je apsolutno integrabilna i za takvu funkciju f je s

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

definirana kompleksna funkcija $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koja se zove Fourierov transformat od f.

Gornje ideje dadu se provesti formalno i rezultiraju u:

Definicija (Fourierov transformat)

Ako funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *ima svojstvo da nepravi integral* $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ *konvergira, kažemo da je apsolutno integrabilna i za takvu funkciju* f *je s*

$$\mathcal{F}(f)(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

definirana kompleksna funkcija $\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *koja se zove Fourierov transformat od* f.

Kako je $|e^{-i\omega t}|=1$ za sve t i ω,

Gornje ideje dadu se provesti formalno i rezultiraju u:

Definicija (Fourierov transformat)

Ako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ima svojstvo da nepravi integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$ konvergira, kažemo da je apsolutno integrabilna i za takvu funkciju f je s

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

definirana kompleksna funkcija $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koja se zove Fourierov transformat od f.

Kako je $|e^{-i\omega t}| = 1$ za sve t i ω, intuitivno se vidi (a može se i dokazati) da zahtjev apsolutne integrabilnosti na f povlači konvergenciju integrala kojim je $\mathcal{F}(f)$ definirana.

Dakle: Kao što je niz Fourierovih koeficijenata $c = (c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ funkcija s domenom $\mathbb{Z}$ (skaliranom s π/L) pridružena periodičnoj funkciji f, tako je $\mathcal{F}(f)$ funkcija s domenom $\mathbb{R}$ pridružena apsolutno integrabilnoj funkciji f.

Dakle: Kao što je niz Fourierovih koeficijenata $c = (c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ funkcija s domenom $\mathbb{Z}$ (skaliranom s π/L) pridružena periodičnoj funkciji f, tako je $\mathcal{F}(f)$ funkcija s domenom $\mathbb{R}$ pridružena apsolutno integrabilnoj funkciji f.
Općenito će fizikalna dimenzija varijable ω Fourierovog transformata neke funkcije f biti recipročna jedinici varijable t od f.

kontekst	varijabla funkcije f	varijabla od $\mathcal{F}(f)$
akustika, telekomunikacije	vrijeme t	frekvencija ν
kvantna teorija	pozicija x	$\frac{p}{\hbar}$
difrakcija	vektor $\overrightarrow{r}$	vektor $\overrightarrow{s^*}$

Dakle: Kao što je niz Fourierovih koeficijenata $c = (c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ funkcija s domenom $\mathbb{Z}$ (skaliranom s π/L) pridružena periodičnoj funkciji f, tako je $\mathcal{F}(f)$ funkcija s domenom $\mathbb{R}$ pridružena apsolutno integrabilnoj funkciji f.
Općenito će fizikalna dimenzija varijable ω Fourierovog transformata neke funkcije f biti recipročna jedinici varijable t od f.

kontekst	varijabla funkcije f	varijabla od $\mathcal{F}(f)$
akustika, telekomunikacije	vrijeme t	frekvencija ν
kvantna teorija	pozicija x	$\frac{p}{\hbar}$
difrakcija	vektor $\vec{r}$	vektor $\vec{s^*}$

Fourierova transformacija $\mathcal{F}$ apsolutno integrabilnoj funkciji f pridružuje njen Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$. Fourierova transformacija je linearan operator.

Svojstva Fourierove transformacije

Među raznim svojstvima Fourierove transformacije, ističu se: Ako je f realna, $\mathcal{F}(f)(\omega)$ je oblika $a(\omega) + ib(\omega)$ s a parnom, a b neparnom realnom funkcijom.

Svojstva Fourierove transformacije

Među raznim svojstvima Fourierove transformacije, ističu se: Ako je f realna, $\mathcal{F}(f)(\omega)$ je oblika $a(\omega) + ib(\omega)$ s a parnom, a b neparnom realnom funkcijom. Ako je f parna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je realna, a ako je f neparna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je čisto imaginarna.

Teorem

Funkcija f je realna ako i samo ako njen Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$ ima svojstvo da je za sve $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(\omega)}.$$

Svojstva Fourierove transformacije

Među raznim svojstvima Fourierove transformacije, ističu se: Ako je f realna, $\mathcal{F}(f)(\omega)$ je oblika $a(\omega) + ib(\omega)$ s a parnom, a b neparnom realnom funkcijom. Ako je f parna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je realna, a ako je f neparna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je čisto imaginarna.

Teorem

Funkcija f je realna ako i samo ako njen Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$ ima svojstvo da je za sve $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(\omega)}.$$

Konvolucija obzirom na vrijeme:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

Definicija (Konvolucija)

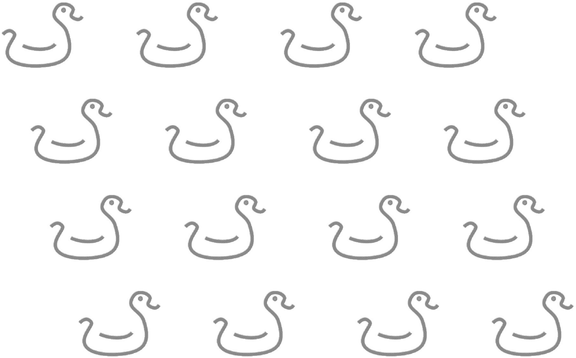
Konvolucija[a] *dviju funkcija* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *(gdje je* I *neki, ne nužno ograničen, interval u* $\mathbb{R}$*) je funkcija* $f * g$ *definirana s:*

$$f * g(x) = \int_I f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

[a] Naravno, konvolucija nije definirana za sve funkcije f i g, već za tzv. Schwartzove funkcije.

Jedan način kako vizualizirati konvoluciju dvije funkcije je da zamislimo da se graf jedne giba u smjeru osi apscisa jednolikom brzinom preko grafa druge funkcije te da u svakom trenutku računamo površinu presjeka — iznos te površine je vrijednost njihove konvolucije u tom trenutku.
`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Convolution_Animation_(Boxcar).gif`

http:
//www.ysbl.york.ac.uk/~cowtan/fourier/convthry.html



Kao i Fourierov red, tako i Fourierov transformat određuje dva spektra: spektar amplituda i fazni spektar:

$$M(\omega) = |\mathcal{F}(f)(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

Kao i Fourierov red, tako i Fourierov transformat određuje dva spektra: spektar amplituda i fazni spektar:

$$M(\omega) = |\mathcal{F}(f)(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

Često pitanje je: ako znamo funkciju F i znamo da je ona Fourierova transformacija nepoznate funkcije f, kako odrediti f? Odgovor na to daje sljedeći teorem.

Teorem (Inverzna Fourierova transformacija)

Neka je $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap A(\hat{\mathbb{R}})$. Pretpostavimo da je $F = \mathcal{F}(f)$ za neku $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tada za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Gornje ideje lako se poopćavaju na trodimenzionalni slučaj:

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{i\pi \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}} \, \mathrm{d}\mathbf{r}$$

gdje je $\mathbf{r}$ radij-vektor promatrane točke u $\mathbb{R}^3$, a $\mathbf{s}$ je vektor u recipročnom prostoru (izomorfnom s $\mathbb{R}^3$). Posjetimo se da je jedinica duljine u recipročnom prostoru recipročna jedinici duljine u direktnom prostoru — to je u skladu s već uočenom činjenicom da je jedinica varijable Fourierovog transformata (ovdje je to $\mathbf{s}$) recipročna jedinici varijable osnovne funkcije f (ovdje je to $\mathbf{r}$).
U standardnoj situaciji kakva se susreće u difrakcijskoj strukturnoj analizi, $\mathbf{r}$ je radij-vektor nekog atoma ili iona u kristalu, f je funkcija elektronske gustoće (nepoznata), a $\mathcal{F}(f)$ je rezultat dobiven difrakcijom na kristalu. Cilj je odrediti točke maksimuma funkcije elektronske gustoće, tj. pozicije atoma.