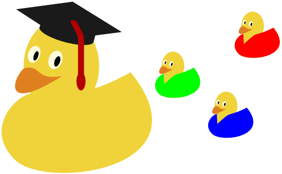
2. tjedan nastave: Uvod u matrice i opće vektorske prostore

Franka Miriam Brückler



Definicija (Matrica)

Matrica je svaka pravokutna tablica realnih (ili kompleksnih) brojeva. Brojevi u matrici zovu se njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama, a one s kompleksnim elementima su kompleksne matrice. Matrica je reda (tipa, dimenzije) $m \times n$ ako ima m redaka i n stupaca.

Matrice ograničavamo okruglim ili uglatim zagradama, a označavamo ih velikim slovima latinske abecede. Ako je A realna matrica tipa $m \times n$ pišemo:

$$A \in M_{m,n}$$

ili $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dakle, $M_{m,n} = M_{m,n}(\mathbb{R})$ je skup svih realnih matrica tipa $m \times n$. Skup svih kompleksnih matrica tipa $m \times n$ se označava s $M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Ako je matrica označena slovom A, broj (element matrice) koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu označavamo s a_{ij}. Piše se $A = [a_{ij}]$. Uvijek se prvo navodi indeks retka, a onda indeks stupca. Matrice A i B su jednake matrice ako su istog tipa i $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Primjer

Matrica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *je tipa* 2×3*:* $A \in M_{2,3}$*. Za tu je matricu* $a_{12} = 1$*,* $a_{23} = 2$*, a* a_{32} *ne postoji jer matrica nema trećeg retka.*

Definicija (Dijagonala matrice)

Dijagonalu matrice čine brojevi kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, tj. elementi a_{ii}*,* $i = 1, 2, \ldots$*.*

Matrice kojima je broj redaka jednak broju stupaca (dakle, matrice tipa 2×2, 3×3, ...) nazivaju se kvadratnim matricama.
Za kvadratnu matricu s n redaka i stupaca kažemo da je reda (tipa) n. Skup svih kvadratnih matrica reda n označava se s $M_n = M_n(\mathbb{R})$, odnosno u kompleksnom slučaju s $M_n(\mathbb{C})$.
matrice koje imaju samo jedan stupac, tj. matrice tipa $m \times 1$ zovu se matrice-stupci (stupčane matrice). Matrice koje imaju samo jedan redak (matrice tipa $1 \times n$) zovu se matrice-retci (retčane matrice).

Primjer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 89 \\ -34 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5+i & -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Transponiranje

Ako matrici A zamijenimo retke i stupce („preklopimo ju preko dijagonale"), dobivamo njenu transponiranu matricu A^t:

Definicija (Transponirana matrica)

Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ je matrica $A^t \in M_{n,m}$ koja na poziciji (i,j) ima a_{ji}. Ista definicija vrijedi i za $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Primjer

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi:

$$(A^t)^t = A.$$

Definicija (Simetrična matrica)

Realnu matricu A zovemo simetričnom ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j.

Definicija (Simetrična matrica)

Realnu matricu A zovemo simetričnom ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j.

$A \in M_{m,n} \Rightarrow A^t \in M_{n,m} \Rightarrow$ samo kvadratne matrice mogu biti simetrične.

Primjer

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

Definicija (Hermitska matrica)

Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji (i,j) u A^* je $\overline{a_{ji}}$).
Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$).

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

Definicija (Hermitska matrica)

Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji (i,j) u A^* je $\overline{a_{ji}}$).
Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$).

I hermitske matrice moraju biti kvadratne.

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

Definicija (Hermitska matrica)

Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ *njena hermitski konjugirana matrica je matrica* $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ *koju iz* A *dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji* (i,j) *u* A^* *je* $\overline{a_{ji}}$*).*
Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$*).*

I hermitske matrice moraju biti kvadratne.
Što možete zaključiti o dijagonalnim elementima hermitskih matrica?

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

Definicija (Hermitska matrica)

Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji (i,j) u A^* je $\overline{a_{ji}}$).
Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$).

I hermitske matrice moraju biti kvadratne.
Što možete zaključiti o dijagonalnim elementima hermitskih matrica? Dijagonalni elementi hermitske matrice moraju biti realni.

Ponekad se koriste i antisimetrične matrice (matrice sa svojstvom $A^t = -A$) i antihermitske matrice (kompleksne matrice sa svojstvom $A^* = -A$). Dajte po jedan primjer antisimetrične i antihermitske matrice!

Ponekad se koriste i antisimetrične matrice (matrice sa svojstvom $A^t = -A$) i antihermitske matrice (kompleksne matrice sa svojstvom $A^* = -A$). Dajte po jedan primjer antisimetrične i antihermitske matrice!

Zadatak

Dokažite da antisimetrične i antihermitske matrice moraju biti kvadratne, da na dijagonali antisimetrične matrice moraju biti nule i da na dijagonali antihermitske matrice moraju biti čisto imaginarni brojevi.

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice se mogu zbrajati i oduzimati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbrajaju odnosno oduzimaju elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja odnosno oduzimanja realnih/kompleksnih matrica tipa $m \times n$ je realna/kompleksna matrica tipa $m \times n$.

Je li pri zbrajanju matrica bitan redoslijed? Zašto?

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice se mogu zbrajati i oduzimati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbrajaju odnosno oduzimaju elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja odnosno oduzimanja realnih/kompleksnih matrica tipa $m \times n$ je realna/kompleksna matrica tipa $m \times n$.
Je li pri zbrajanju matrica bitan redoslijed? Zašto? Zbrajanje matrica je komutativno:

$$A + B = B + A, \quad A, B \in M_{m,n}$$

Vrijedi li

$$(A + B) + C = A + (B + C)?$$

Zbrajanje i oduzimanje matrica

Matrice se mogu zbrajati i oduzimati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbrajaju odnosno oduzimaju elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja odnosno oduzimanja realnih/kompleksnih matrica tipa $m \times n$ je realna/kompleksna matrica tipa $m \times n$. Je li pri zbrajanju matrica bitan redoslijed? Zašto? Zbrajanje matrica je komutativno:

$$A + B = B + A, \quad A, B \in M_{m,n}$$

Vrijedi li

$$(A + B) + C = A + (B + C)?$$

Za kakve matrice to svojstvo (asocijativnost) vrijedi?

Postoji li matrica koja pribrojena svakoj matrici istu ne mijenja?

Postoji li matrica koja pribrojena svakoj matrici istu ne mijenja? Nulmatrice su matrice kojima su svi elementi nule. U svakom skupu $M_{m,n}$ (odnosno $M_{m,n}(\mathbb{C})$) postoji po jedna nulmatrica, koju ćemo označavati s $0_{m,n}$. Ona je neutralni element za zbrajanje u tom skupu:

$$A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A, \quad A \in M_{m,n}.$$

Zadatak

Riješite matričnu jednadžbu

$$A + X = B$$

ako je

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svaka matrica ima suprotnu matricu:

$$A + (-A) = -A + A = 0_{m,n}$$

(suprotna matrica je matrica $-A$ koju iz A dobijemo tako da svim elementima promijenimo predznak).

Svaka matrica ima suprotnu matricu:

$$A + (-A) = -A + A = 0_{m,n}$$

(suprotna matrica je matrica $-A$ koju iz A dobijemo tako da svim elementima promijenimo predznak).
Oduzimanje matrica se zapravo definira kao pribrajanje suprotne matrice: $A - B = A + (-B)$.
Kako biste neku matricu pomnožili s 2?

Svaka matrica ima suprotnu matricu:

$$A + (-A) = -A + A = 0_{m,n}$$

(suprotna matrica je matrica $-A$ koju iz A dobijemo tako da svim elementima promijenimo predznak).
Oduzimanje matrica se zapravo definira kao pribrajanje suprotne matrice: $A - B = A + (-B)$.
Kako biste neku matricu pomnožili s 2? Svaka matrica može se množiti svakim brojem (skalarom). To se radi tako da se svaki njen element pomnoži tim brojem:

$$\alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Množenje matrice skalarom ne mijenja tip matrice. Pritom, za realne matrice pod skalarima podrazumijevamo realne brojeve, a za kompleksne matrice se kao skalari uzimaju kompleksni brojevi.

Množenje matrice skalarom

Postoji li broj s kojim možemo pomnožiti matricu, a da se pritom ona ne promijeni?

Množenje matrice skalarom

Postoji li broj s kojim možemo pomnožiti matricu, a da se pritom ona ne promijeni?

$$1 \cdot A = A$$

Koji je rezultat množenja matrice s nulom?

Množenje matrice skalarom

Postoji li broj s kojim možemo pomnožiti matricu, a da se pritom ona ne promijeni?

$$1 \cdot A = A$$

Koji je rezultat množenja matrice s nulom?

$$0 \cdot A = 0_{m,n}$$

Koliko je $2A + 3A$? $-7A - 7B$? Uz koje uvjete na matrice A i B ti računi imaju smisla?

Množenje matrice skalarom

Postoji li broj s kojim možemo pomnožiti matricu, a da se pritom ona ne promijeni?

$$1 \cdot A = A$$

Koji je rezultat množenja matrice s nulom?

$$0 \cdot A = 0_{m,n}$$

Koliko je $2A + 3A$? $-7A - 7B$? Uz koje uvjete na matrice A i B ti računi imaju smisla?

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

za sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i matrice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$, odnosno $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i matrice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Vrijedi i tzv. kvaziasocijativnost:

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$$

Uvod u vektorske prostore

Primjećujete li kakvu sličnost između skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$, $M_{m,n}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$?

Uvod u vektorske prostore

Primjećujete li kakvu sličnost između skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$, $M_{m,n}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$?
U svim navedenim skupovima znamo zbrajati njihove elemente tako da dobijemo element istog skupa, a da pritom zbrajanje ima uobičajena svojstva.
Nadalje, u svim navedenim skupovima znamo elemente množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente istog skupa, pri čemu u slučaju $\mathbb{C}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$ kao skalare možemo (ali ne moramo) koristiti kompleksne brojeve. Pritom u svim navedenim slučajevima množenje skalarom ima svojstva kao množenje brojeva međusobno.

Uvod u vektorske prostore

Primjećujete li kakvu sličnost između skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$, $M_{m,n}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$?
U svim navedenim skupovima znamo zbrajati njihove elemente tako da dobijemo element istog skupa, a da pritom zbrajanje ima uobičajena svojstva.
Nadalje, u svim navedenim skupovima znamo elemente množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente istog skupa, pri čemu u slučaju $\mathbb{C}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$ kao skalare možemo (ali ne moramo) koristiti kompleksne brojeve. Pritom u svim navedenim slučajevima množenje skalarom ima svojstva kao množenje brojeva međusobno.
Kažemo: Gore nabrojani skupovi su vektorski prostori, a njihovi elementi mogu se zvati vektorima. Imaju li ti vektori iznos, smjer, orijentaciju?

Vektorski prostor i vektor

Neka je V (neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Osim u vektorskim prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavamo jednostavno s $v, w, u, \ldots$.

Vektorski prostor i vektor

Neka je V (neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Osim u vektorskim prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavamo jednostavno s $v, w, u, \ldots$.
Ovisno o tome kakav vektorski prostor trebamo, potrebno je utvrditi (odlučiti se) koju vrstu brojeva ćemo uzeti za skalare: realne ili kompleksne brojeve.

Vektorski prostor i vektor

Neka je V (neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Osim u vektorskim prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavamo jednostavno s $v, w, u, \dots$.

Ovisno o tome kakav vektorski prostor trebamo, potrebno je utvrditi (odlučiti se) koju vrstu brojeva ćemo uzeti za skalare: realne ili kompleksne brojeve. Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi.

Da bismo V zvali vektorskim prostorom, moraju biti definirane dvije operacije: zbrajanje vektorâ i množenje vektora skalarom. Pritom, one moraju imati sljedeća svojstva: zbroj dva elementa iz V (dva vektora) mora opet biti element iz V (tj. vektor), umnožak elementa iz V (vektora) sa skalarom mora biti element iz V (dakle, vektor), a te operacije moraju imati već „uobičajena" svojstva.

Vektorski prostor i vektor

Neka je V (neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Osim u vektorskim prostorima V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavamo jednostavno s $v, w, u, \ldots$.

Ovisno o tome kakav vektorski prostor trebamo, potrebno je utvrditi (odlučiti se) koju vrstu brojeva ćemo uzeti za skalare: realne ili kompleksne brojeve. Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi.

Da bismo V zvali vektorskim prostorom, moraju biti definirane dvije operacije: zbrajanje vektorâ i množenje vektora skalarom. Pritom, one moraju imati sljedeća svojstva: zbroj dva elementa iz V (dva vektora) mora opet biti element iz V (tj. vektor), umnožak elementa iz V (vektora) sa skalarom mora biti element iz V (dakle, vektor), a te operacije moraju imati već „uobičajena” svojstva. Formalnije:

Definicija (Vektorski prostor)

Odabrani neprazan skup V s odabranim skupom skalara ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) zove se vektorski prostor *ako su definirane operacije $+$ i $\cdot$ (zbrajanje vektorâ i množenje vektora skalarom) tako da postoji $\mathbf{0} \in V$ tako da za sve elemente v, w, u iz V i sve skalare α, β vrijedi:*

$$\begin{array}{ll} v + w \in V & \alpha v \in V \\ v + w = w + v & 1 \cdot v = v \\ (v + w) + u = v + (w + u) & (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v & v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0} \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w & (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w \end{array}.$$

Neutralni element za zbrajanje, označen s $\mathbf{0} \in V$, zove se nulvektor*. Elementi vektorskog prostora zovu se* vektori*.*

Definicija (Vektorski prostor)

Odabrani neprazan skup V s odabranim skupom skalara ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) zove se vektorski prostor *ako su definirane operacije $+$ i $\cdot$ (zbrajanje vektorâ i množenje vektora skalarom) tako da postoji $\mathbf{0} \in V$ tako da za sve elemente v, w, u iz V i sve skalare α, β vrijedi:*

$$\begin{array}{ll} v + w \in V & \alpha v \in V \\ v + w = w + v & 1 \cdot v = v \\ (v + w) + u = v + (w + u) & (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v & v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0} \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w & (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w \end{array}.$$

Neutralni element za zbrajanje, označen s $\mathbf{0} \in V$, zove se nulvektor*. Elementi vektorskog prostora zovu se* vektori*.*

Iz definicijskih svojstava mogu se izvesti i druga očekivana svojstva, primjerice da je $0 \cdot v = \mathbf{0}$, $-v = (-1) \cdot v$, ... Preko suprotnog vektora definira se i oduzimanje vektora: $v - w = v + (-w)$.

Zadatak

Čini li skup svih matrica vektorski prostor? Zašto?

Zadatak

Čini li skup svih matrica vektorski prostor? Zašto?

Zadatak

Postoji li vektorski prostor s konačno mnogo elemenata?

Zadatak

Čini li skup svih matrica vektorski prostor? Zašto?

Zadatak

Postoji li vektorski prostor s konačno mnogo elemenata?

Zadatak

Kako biste definirali zbrajanje i množenje skalarom V^3, V^2, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $M_{m,n}(\mathbb{C})$, skupu svih realnih funkcija[a] s istom domenom? Koji od tih skupova su tako postali realni ili kompleksni vektorski prostori? Koji elementi su nulvektori u tim vektorskim prostorima?

[a] Možete se ograničiti samo na integrabilne, neprekidne ili derivabilne.

Linearne kombinacije

Primjer

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baza za V^2, onda se svaki vektor iz V^2 može zapisati kao $x\vec{a} + y\vec{b}$ za jedinstveno određene (realne) skalare x i y.

Linearne kombinacije

Primjer

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baza za V^2, onda se svaki vektor iz V^2 može zapisati kao $x\vec{a} + y\vec{b}$ za jedinstveno određene (realne) skalare x i y.

Definicija (Linearna kombinacija)

Linearna kombinacija jednog ili više vektora je vektor koji je zbroj tih vektora pomnoženih s nekim skalarima.

Zadatak

Što bi bila linearna kombinacija dviju derivabilnih funkcija sa zajedničkom domenom? Što bi bila linearna kombinacija jednog kompleksnog broja? Zapišite opći oblik linearne kombinacije dviju kvadratnih matrica reda 2!

Zadatak

Možete li koristeći izraz „linearna kombinacija" opisati što je to polinom? Linearna jednadžba s n nepoznanica? U kojim vektorskim prostorima su to linearne kombinacije?

Zadatak

Možete li koristeći izraz „linearna kombinacija" opisati što je to polinom? Linearna jednadžba s n nepoznanica? U kojim vektorskim prostorima su to linearne kombinacije?

Primjer

Za operacije koje se rade pri izjednačavanju redoks-reakcija preko polujednadžbi oksidacije i redukcije može se reći: računa se određena linearna kombinacija polujednadžbi oksidacije i redukcije.
Slično, Hessov zakon možemo formulirati i ovako: ako se neka reakcija može zapisati kao linearna kombinacija nekih drugih reakcija, onda je reakcijski gradijent bilo koje ekstenzivne veličine stanja (primjerice, reakcijska entalpija ili reakcijska Gibbsova energija) jednak linearnoj kombinaciji reakcijskih gradijenata te iste veličine pojedinih reakcija, i to s istim koeficijentima: ako je reakciju R moguće zapisati kao $\sum_i \alpha_i \mathrm{R}_i$, *onda je* $\Delta_r Y = \sum_i \alpha_i \Delta_{r,i} Y$ *za* $Y = H, G, \ldots$.

Potprostori

Primjer

Skup svih polinoma (gledanih kao funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$) je vektorski prostor, no on je ujedno podskup vektorskog prostora svih (derivabilnih/neprekidnih) funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Potprostori

Primjer

Skup svih polinoma (gledanih kao funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$) je vektorski prostor, no on je ujedno podskup vektorskog prostora svih (derivabilnih/neprekidnih) funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

Ako podskup S vektorskog prostora V ima svojstvo da su sve linearne kombinacije elemenata iz S elementi iz S (S je „zatvoren na linearne kombinacije"), kažemo da je S potprostor od V ($S \leq V$).

Zadatak

Pokažite da je skup svih rješenja sustava $x + y + z = 0$, $5x - y + 2z = 0$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, ali da skup svih rješenja sustava $x - y = 5$, $x + y = 1$ nije potprostor od $\mathbb{R}^2$.

Zadatak

Koja dva potprostora ima svaki vektorski prostor?

Zadatak

Koja dva potprostora ima svaki vektorski prostor?

Trivijalni potprostori od V su sam V i $\{\mathbf{0}\}$; ostali potprostori od V nazivaju se pravim potprostorima.

Primjer

Za $\vec{a} \neq \overrightarrow{0}$ *je* $\{x\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$ *pravi potprostor od* V^3 *(ili* V^2*). Slično, ako su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dva fiksna vektora iz* V^3*, onda je* $\{x\vec{a} + y\vec{b} : x, y \in \mathbb{R}\}$ *pravi potprostor od* V^3.

Zadatak

Navedite po jedan pravi potprostor realnih v. p. $\mathbb{C}$ *i* M_2.

Zadatak

Koja dva potprostora ima svaki vektorski prostor?

Trivijalni potprostori od V su sam V i $\{\mathbf{0}\}$; ostali potprostori od V nazivaju se pravim potprostorima.

Primjer

Za $\vec{a} \neq \overrightarrow{0}$ *je* $\{x\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$ *pravi potprostor od* V^3 *(ili* V^2*). Slično, ako su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dva fiksna vektora iz* V^3*, onda je* $\{x\vec{a} + y\vec{b} : x, y \in \mathbb{R}\}$ *pravi potprostor od* V^3*.*

Zadatak

Navedite po jedan pravi potprostor realnih v. p. $\mathbb{C}$ *i* M_2*.*

Zadatak

Pokažite da je skup svih rješenja diferencijalne jednadžbe $y' + a(x)y = 0$ *pravi potprostor prostora svih derivabilnih* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*.*

Teorem

Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica je vektorski prostor, točnije potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Teorem

Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica je vektorski prostor, točnije potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Primjer

Iz perspektive korištenja baza (odnosno koordinata), kolinearnost odnosno komplanarnost su nepoželjna svojstva skupova vektora u vektorskim prostorima geometrijskih vektora.

Teorem

Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica je vektorski prostor, točnije potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Primjer

Iz perspektive korištenja baza (odnosno koordinata), kolinearnost odnosno komplanarnost su nepoželjna svojstva skupova vektora u vektorskim prostorima geometrijskih vektora.
Dva geometrijska vektora su kolinearna točno ako se svaki od njih može zapisati kao (jednočlana) linearna kombinacija drugog:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{b} = x\overrightarrow{a}.$$

Slično, tri geometrijska vektora su komplanarna točno ako se svaki od njih može zapisati kao linearna kombinacija druga dva:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{w}.$$

Linearna (ne)zavisnost

Kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora su posebni slučajevi linearne zavisnosti:

Definicija (Linearna (ne)zavisnost)

Konačan skup vektora je linearno zavisan ako se (bar) jedan od vektora tog skupa može zapisati kao linearna kombinacija ostalih vektora (alternativno: ako se nulvektor može zapisati kao njihova linearna kombinacija na netrivijalan način). Skup vektora koji nije linearno zavisan zove se linearno nezavisan skup.

Linearna (ne)zavisnost

Kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora su posebni slučajevi linearne zavisnosti:

Definicija (Linearna (ne)zavisnost)

Konačan skup vektora je linearno zavisan ako se (bar) jedan od vektora tog skupa može zapisati kao linearna kombinacija ostalih vektora (alternativno: ako se nulvektor može zapisati kao njihova linearna kombinacija na netrivijalan način). Skup vektora koji nije linearno zavisan zove se linearno nezavisan skup.

Zadatak

Može li skup vektora koji sadrži nulvektor biti linearno nezavisan? Uz koji uvjet je jednočlani skup vektora linearno nezavisan? A dvočlani?

Zadatak

Postoji li u M_2 četveročlani linearno nezavisan skup? A peteročlani? Postoji li u $\mathbb{C}$ kao realnom vektorskom prostoru dvočlani linearno nezavisan skup? A tročlani? Postoji li u $\mathbb{R}^n$ n-člani linearno nezavisan skup? A $(n+1)$-člani?

Zadatak

Postoji li u M_2 četveročlani linearno nezavisan skup? A peteročlani? Postoji li u $\mathbb{C}$ kao realnom vektorskom prostoru dvočlani linearno nezavisan skup? A tročlani? Postoji li u $\mathbb{R}^n$ n-člani linearno nezavisan skup? A $(n+1)$-člani?

Zadatak

Uz koji uvjest su dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama linearno nezavisne?

Dimenzija i baza vektorskog prostora

Definicija (Dimenzija i baza)

Najveći broj elemenata koje u danom vektorskom prostoru može imati neki linearno nezavisan skup vektora zove se dimenzijom prostora. Svaki linearno nezavisan skup koji ima elemenata kolika je dimenzija prostora je baza prostora.

Dimenzija i baza vektorskog prostora

Definicija (Dimenzija i baza)

Najveći broj elemenata koje u danom vektorskom prostoru može imati neki linearno nezavisan skup vektora zove se dimenzijom prostora. Svaki linearno nezavisan skup koji ima elemenata kolika je dimenzija prostora je baza prostora.

Primjer

Pravac $(V^1, V^1(O))$ *je jednodimenzionalan er su svaka dva ne-nulvektora na pravcu kolinearni, tj. linearno zavisni, ravnina* $(V^2, V^2(O))$ *je dvodimenzionalna — lako nađemo dva nekolinearna vektora, ali svaki treći je s njima komplanaran, a naš uobičajeni prostor* $(V^3, V^3(O))$ *je trodimenzionalan.*

Napomena

Postoje vektorski prostori beskonačne dimenzije, primjerice skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zadatak

Može li baza prostora s konačnom dimenzijom biti njegov potprostor?

Napomena

Postoje vektorski prostori beskonačne dimenzije, primjerice skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zadatak

Može li baza prostora s konačnom dimenzijom biti njegov potprostor?

Zadatak

Nađite po jednu bazu za V^2, $\mathbb{C}$ *(kao realni i kao kompleksni prostor),* $M_{2,3}$, $\mathbb{R}^6$, *za prostor svih polinoma stupnja* ≤ 3 *te za skup rješenja sustava* $x + y + z = 0$, $5x - y + 2z = 0$. *Koje su dimenzije tih prostora? A što je s prostorom svih neprekidnih realnih funkcija sa zajedničkom domenom?*

Napomena

Postoje vektorski prostori beskonačne dimenzije, primjerice skup svih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Zadatak

Može li baza prostora s konačnom dimenzijom biti njegov potprostor?

Zadatak

Nađite po jednu bazu za V^2, $\mathbb{C}$ (kao realni i kao kompleksni prostor), $M_{2,3}$, $\mathbb{R}^6$, za prostor svih polinoma stupnja ≤ 3 te za skup rješenja sustava $x + y + z = 0$, $5x - y + 2z = 0$. Koje su dimenzije tih prostora? A što je s prostorom svih neprekidnih realnih funkcija sa zajedničkom domenom?

Glavna korist baza je da se za odabranu bazu (koja se sastoji od 'relativno' malo vektora) svi vektori danog prostora mogu jednoznačno opisati kao linearne kombinacije vektora baze.

Kanonske baze

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ je skup $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektora iz tog prostora koji su oblika: e_i na i-toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \dots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, 0) + \dots$$

$$\dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 0, 1) =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

moguć i jedinstven za svaki vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ odnosno $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Kanonske baze

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ je skup $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektora iz tog prostora koji su oblika: e_i na i-toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \dots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, 0) + \dots$$

$$\dots + x_n(0, 0, 0, \dots, 0, 1) =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

moguć i jedinstven za svaki vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ odnosno $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.

Kolika je dimenzija vektorskog prostora $M_{m,n}$? Matrice $E_{ij} \in M_{m,n}$ koje na svim pozicijama osim (i, j) imaju nule, a na toj poziciji imaju 1, čine kanonsku bazu od $M_{m,n}$.

Kanonske baze

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ je skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektora iz tog prostora koji su oblika: e_i na i-toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots$$

$$\ldots + x_n(0, 0, 0, \ldots, 0, 1) =$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

moguć i jedinstven za svaki vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ odnosno $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.
Kolika je dimenzija vektorskog prostora $M_{m,n}$? Matrice $E_{ij} \in M_{m,n}$ koje na svim pozicijama osim (i, j) imaju nule, a na toj poziciji imaju 1, čine kanonsku bazu od $M_{m,n}$.
Kanonska desna ortonormirana baza u prostoru V^3 odnosno $V^3(O)$ označava se s $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Koordinate

Definicija

Koordinate vektora obzirom na neku bazu su koeficijenti u prikazu tog vektora kao linearne kombinacije vektora baze.

Koordinate

Definicija

Koordinate vektora obzirom na neku bazu su koeficijenti u prikazu tog vektora kao linearne kombinacije vektora baze.

Za vektore iz $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ te iz $M_{m,n}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$ se njihove koordinate obzirom na kanonsku bazu podudaraju s njihovim članovima/elementima (npr. $(1,2,3,4)$ obzirom na kanonsku bazu od $\mathbb{R}^n$ ima koordinate redom 1, 2, 3 i 4, a matrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ obzirom na kanonsku bazu od $M_{2,3}$ ima koordinate redom 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Zadatak

Koje su koordinate vektora $(1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ *obzirom na bazu* $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$.

Važno! Dok ne znamo na koju se bazu odnose, zadane koordinate mogu predstavljati bilo koji vektor u danom vektorskom prostoru ili čak u bilo kojem prostoru dimenzije koja odgovara broju koordinata.

Važno! Dok ne znamo na koju se bazu odnose, zadane koordinate mogu predstavljati bilo koji vektor u danom vektorskom prostoru ili čak u bilo kojem prostoru dimenzije koja odgovara broju koordinata.

Zadatak

Koja je dimenzija prostora rješenja sustava $x + y + z = 0$, $5x - y + 2z = 0$? *Nađite jednu bazu za taj prostor. Koje su koordinate rješenja* $(-3, -3, 6)$ *tog sustava obzirom na bazu koju ste odabrali?*

Važno! Dok ne znamo na koju se bazu odnose, zadane koordinate mogu predstavljati bilo koji vektor u danom vektorskom prostoru ili čak u bilo kojem prostoru dimenzije koja odgovara broju koordinata.

Zadatak

Koja je dimenzija prostora rješenja sustava $x + y + z = 0$, $5x - y + 2z = 0$*? Nađite jednu bazu za taj prostor. Koje su koordinate rješenja* $(-3, -3, 6)$ *tog sustava obzirom na bazu koju ste odabrali?*

Zadatak

Uz koje uvjete je skup $\{\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}\}$ *baza za* V^2*?*

Rang matrice

Primjer

U matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *možemo njene retke shvatiti kao dva vektora* $(2, 1, 3)$ *i* $(0, -1, 2)$ *u* $\mathbb{R}^3$, *a njene stupce kao tri vektora* $(2, 0)$, $(1, -1)$ *i* $(3, 2)$ *u* $\mathbb{R}^2$.

Rang matrice

Primjer

U matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *možemo njene retke shvatiti kao dva vektora* $(2, 1, 3)$ *i* $(0, -1, 2)$ *u* $\mathbb{R}^3$*, a njene stupce kao tri vektora* $(2, 0)$, $(1, -1)$ *i* $(3, 2)$ *u* $\mathbb{R}^2$.

Definicija (Rang matrice)

Ako retke matrice (ili njene stupce) shvatimo kao vektore, rang matrice je broj linearno nezavisnih redaka (odnosno stupaca) te matrice.

Napomena

Nije očito, ali može se dokazati da ćemo istu vrijednost ranga dobiti ako u gornjoj definiciji uzimamo retke ili stupce.

Zadatak

Ako je matrica tipa 3×3 *koliki je njen najveći mogući rang? A ako je tipa* $m \times n$*?*

Zadatak

Ako je matrica tipa 3×3 koliki je njen najveći mogući rang? A ako je tipa $m \times n$?

Rang matrice određujemo tako da matricu podvrgnemo elementarnim transformacijama (može i na stupcima!) sve dok ne postignemo da su u njoj svi elementi nule osim eventualno na dijagonalnim mjestima. Broj nenul elemenata na dijagonali je rang matrice.

Želimo li za neke vektore utvrditi jesu li linearno zavisni ili ne, ukoliko su dani u koordinatnom obliku, dovoljno je zapisati ih kao stupce matrice i odrediti joj rang.

Zadatak

Ispitajte čine li vektori $(2, -1, 0, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 0)$ i $(0, 1, 0, 0)$ bazu prostora $\mathbb{R}^4$. Prikažite vektor $(1, 0, 0, 0)$ te proizvoljni vektor (x, y, z, w) u toj bazi!

Dva vektorska prostora su izomorfna ako do na smisao/vrstu vektora i operacija s njima nema razlika među njima. Smisao je sličan kemijskom: izomorfnost znači jednakost struktura, ali dopušta različitost sadržaja.

Primjer

Vektorski prostori $\mathbb{R}^3$, $M_{3,1}(\mathbb{R})$, V^3 *i* $V^3(0)$ *su izomorfni. Prva dva su izomorfni jer iako su elementi prvog oblika* (x, y, z), *a elementi drugog oblika* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *operacije se izvode po istim pravilima — razlika je samo u stilu zapisa. Putem koordinatizacije* V^3 *odnosno* $V^3(0)$ *može se provjeriti da su i oni izomorfni s* $\mathbb{R}^3$.

Općenito, vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{R})$ odnosno $\mathbb{C}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{C})$ su izomorfni. Zapravo: svi realni vektorski prostori iste (konačne) dimenzije su izomorfni pa stoga prostore $\mathbb{R}^n$ ili $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (ovisno o tom s kojim nam je trenutno jednostavnije raditi) možemo smatrati prototipovima realnih n-dimenzionalnih prostora.

Primjer

Svaki $M_{m,n}$ je izomorfan s $\mathbb{R}^{mn}$ — to se vidi tako da matricu shvatimo kao $(m \cdot n)$-torku jednostavnim nabrajanjem njenih elemenata po retcima. Primjerice, matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ možemo shvatiti i kao uređene četvorke (a, b, c, d) bez da ima bitnih promjena u zbrajanju i množenju skalarom (zbroju dviju matrica odgovara zbroj odgovarajućih četvorki, a produktu matrice skalarom odgovara produkt odgovarajuće četvorke s tim skalarom), pa su M_2 i $\mathbb{R}^4$ izomorfni.

Ako nas zanima jesu li matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ linearno zavisne, zbog izomorfnosti M_2 s $\mathbb{R}^4$, treba ispitati linearnu nezavisnost četvorki $(0, 1, -1, 2)$, $(5, 11, 0, 0)$ i $(1, 0, 0, 0)$.