Unitarni prostori i linearni operatori

Franka Miriam Brückler

Unitarni prostori

Skalarni produkt dva geometrijska vektora je

Unitarni prostori

Skalarni produkt dva geometrijska vektora je umnožak njihovih iznosa i kosinusa (manjeg) kuta među njima. Vektorski prostori na kojima se može osmisliti dodatna operacija skalarnog množenja, tj. operacija koja iz dva vektora „napravi" skalar i pritom ima ista svojstva kao skalarni produkt geometrijskih vektora, zovu se unitarni prostori.

Definicija (Unitarni prostori)

Vektorski prostor V je unitaran ako je na njemu definirana još jedna operacija (skalarni produkt vektora, u oznaci $\langle v, w\rangle$ ili $v \cdot w$) sa svojstvima

$$\langle v, v\rangle \geq 0; \quad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0},$$

$$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,$$

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \quad \langle v, \alpha \cdot w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle.$$

Zadatak

Predložite kako biste definirali skalarne produkte na $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{C}^2$, *te na prostoru svih integrabilnih funkcija s* $[a, b]$ *u* $\mathbb{R}$.

Zadatak

Predložite kako biste definirali skalarne produkte na $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^5$, $\mathbb{C}^2$, te na prostoru svih integrabilnih funkcija s $[a,b]$ u $\mathbb{R}$.

- V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$ su unitarni prostori ako skalarni produkt definiramo s $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \angle(\vec{v}, \vec{w})$.
- $\mathbb{R}^n$ su unitarni prostori ako skalarni produkt definiramo s $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
- $\mathbb{C}^n$ su unitarni prostori ako skalarni produkt definiramo s $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \overline{x_1} y_1 + \ldots + \overline{x_n} y_n$.
- Vektorski prostor realnih funkcija integrabilnih na intervalu I je unitaran ako skalarni produkt definiramo s $\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.
- Vektorski prostor kompleksnih funkcija integrabilnih na skupu I je unitaran ako skalarni produkt definiramo s $\langle f, g \rangle = \int_I f^*(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.

U svakom unitarnom prostoru može se definirati norma (iznos, duljina) vektora preko jednakosti:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Zadatak

Kako biste izračunali normu elementa $(1, 2, 3, 4)$ *u* $\mathbb{R}^4$*? A funkcije kosinus kao funkcije s domenom* $[0, 2\pi]$*?*

U svakom unitarnom prostoru može se definirati norma (iznos, duljina) vektora preko jednakosti:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Zadatak

Kako biste izračunali normu elementa $(1, 2, 3, 4)$ *u* $\mathbb{R}^4$*? A funkcije kosinus kao funkcije s domenom* $[0, 2\pi]$*?*

Dva vektora unitarnog prostora zovu se ortogonalnim ako im je skalarni produkt nula. Svaki skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna je linearno nezavisan.

U svakom unitarnom prostoru može se definirati norma (iznos, duljina) vektora preko jednakosti:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Zadatak

Kako biste izračunali normu elementa $(1, 2, 3, 4)$ u $\mathbb{R}^4$? A funkcije kosinus kao funkcije s domenom $[0, 2\pi]$?

Dva vektora unitarnog prostora zovu se ortogonalnim ako im je skalarni produkt nula. Svaki skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna je linearno nezavisan.

Zadatak

Provjerite ortogonalnost vektora $(1, -1, 2, 0, 3)$ i $(0, 2, 1, 4, 0)$ u $\mathbb{R}^5$. Nađite par međusobno ortogonalnih (nenul)vektora u $\mathbb{R}^6$. Nađite i par međusobno ortogonalnih integrabilnih (nenul)funkcija $f, g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ (a odaberite po volji).

Primjer: Ortogonalnost vodikove 1s i 2s orbitale

$$\psi_{1s} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \ \ \psi_{2s} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{8\pi a_0^3}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}.$$

Uvjet ortogonalnosti s orbitala se svodi na oblik

$$\int_0^{+\infty} 4\pi r^2 \psi_{1,0,0}(r)\psi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 0.$$

Dovoljno je provjeriti (zašto?) da je
$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-r/a_0}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}\,\mathrm{d}r = 0$. Koristimo formulu
$\int_0^{+\infty} r^n e^{-ar}\,\mathrm{d}r = \frac{n!}{a^{n+1}}$ ...

Ortogonalne i unitarne matrice

Kvadratnu matricu iz M_n zovemo ortogonalnom ako su joj svaka dva različita retka/stupca, shvaćeni kao vektori u $\mathbb{R}^n$, ortogonalni, a norma svakog retka/stupca je 1. Kompleksna kvadratna matrica se uz iste uvjete naziva unitarnom.

Zadatak

Osmislite dva primjera ortogonalnih matrica u M_3.

Ortogonalne i unitarne matrice

Kvadratnu matricu iz M_n zovemo ortogonalnom ako su joj svaka dva različita retka/stupca, shvaćeni kao vektori u $\mathbb{R}^n$, ortogonalni, a norma svakog retka/stupca je 1. Kompleksna kvadratna matrica se uz iste uvjete naziva unitarnom.

Zadatak

Osmislite dva primjera ortogonalnih matrica u M_3.

Baza unitarnog prostora zove se ortonormirana baza ako su svi vektori u njoj norme 1 i međusobno ortogonalni. Kanonske baze za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ su ortonormirane. Stupci (retci) ortogonalne/unitarne matrice reda n čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$. Koliki je rang ortogonalne matrice u M_5?

Ortogonalne i unitarne matrice

Kvadratnu matricu iz M_n zovemo ortogonalnom ako su joj svaka dva različita retka/stupca, shvaćeni kao vektori u $\mathbb{R}^n$, ortogonalni, a norma svakog retka/stupca je 1. Kompleksna kvadratna matrica se uz iste uvjete naziva unitarnom.

Zadatak

Osmislite dva primjera ortogonalnih matrica u M_3.

Baza unitarnog prostora zove se ortonormirana baza ako su svi vektori u njoj norme 1 i međusobno ortogonalni. Kanonske baze za $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ su ortonormirane. Stupci (retci) ortogonalne/unitarne matrice reda n čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$. Koliki je rang ortogonalne matrice u M_5?

Napomena

U unitarnim prostorima vrijedi nejednakost[a] $|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||$.
Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori v i w proporcionalni.

Zadatak

Ako je $a = (1, 2, 3, 4)$ *i* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, *koliko iznosi* $f(-1, 2, -3, 4)$*?*

Funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, zovu se linearnim realnim funkcijama s n varijabli.

Zadatak

Raspišite formulu linearne funkcije!

Zadatak

Ako je $a = (1, 2, 3, 4)$ *i* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, *koliko iznosi* $f(-1, 2, -3, 4)$*?*

Funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, zovu se linearnim realnim funkcijama s n varijabli.

Zadatak

Raspišite formulu linearne funkcije!

Zadatak

Možete li linearnu jednadžbu $2x - 6y + 7z + 8u = 4$ *zapisati koristeći skalarni produkt? U kojem unitarnom prostoru?*

Zadatak

Ako je $a = (1, 2, 3, 4)$ *i* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, *koliko iznosi* $f(-1, 2, -3, 4)$*?*

Funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, zovu se linearnim realnim funkcijama s n varijabli.

Zadatak

Raspišite formulu linearne funkcije!

Zadatak

Možete li linearnu jednadžbu $2x - 6y + 7z + 8u = 4$ *zapisati koristeći skalarni produkt? U kojem unitarnom prostoru?*

Linearna jednadžba s n nepoznanica se uz standardni skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ može zapisati u obliku $\langle a, x \rangle = b$, gdje je $b \in \mathbb{R}$, $a, x \in \mathbb{R}^n$. Drugim riječima, linearne jednadžbe s n nepoznanica su zapravo linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom u $\mathbb{R}^n$.

Linearni operatori

Kako se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x$, ponaša obzirom na zbrajanje i množenje (skalarom)?

Linearni operatori

Kako se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x$, ponaša obzirom na zbrajanje i množenje (skalarom)? A funkcija $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle (1,2,3,4), x \rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$?

Linearni operatori

Kako se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x$, ponaša obzirom na zbrajanje i množenje (skalarom)? A funkcija $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle (1, 2, 3, 4), x \rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$? A funkcije $f : M_2 \to M_2$, $f(A) = 5A$? A funkcija zrcaljenja vektora u $V^2(0)$ obzirom na neki pravac kroz O?

Linearni operatori

Kako se funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -5x$, ponaša obzirom na zbrajanje i množenje (skalarom)? A funkcija $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle (1,2,3,4), x \rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$? A funkcije $f : M_2 \to M_2$, $f(A) = 5A$? A funkcija zrcaljenja vektora u $V^2(0)$ obzirom na neki pravac kroz O?

Definicija (Linearni operatori)

Funkcije $\hat{A}$ kojima su domena i kodomena vektorski prostori zovu se linearni operatori ako su aditivne i homogene:

$$\hat{A}(v+w) = \hat{A}(v) + \hat{A}(w) \quad \textit{(aditivnost)},$$

$$\hat{A}(\lambda v) = \lambda \hat{A}(v) \quad \textit{(homogenost)}$$

(za sve $v, w \in V$ i skalare λ).

Smije li domena linearnog operatora biti realan, a kodomena kompleksan vektorski prostor (ili obrnuto)? Zašto?

Smije li domena linearnog operatora biti realan, a kodomena kompleksan vektorski prostor (ili obrnuto)? Zašto?
Ako je kodomena linearnog operatora jednodimenzionalna, zovemo ga linearnim funkcionalom.

Smije li domena linearnog operatora biti realan, a kodomena kompleksan vektorski prostor (ili obrnuto)? Zašto?

Ako je kodomena linearnog operatora jednodimenzionalna, zovemo ga linearnim funkcionalom.

Kod linearnih operatora nije uobičajeno pisati $\hat{A}(v)$ već se piše $\hat{A}v$.

Za kvadratne matrice definira se njihov trag: zbroj elemenata na dijagonali. Ako trag želimo promatrati kao funkciju, što mu je domena? Kodomena? Je li trag linearan operator? Funkcional?

Smije li domena linearnog operatora biti realan, a kodomena kompleksan vektorski prostor (ili obrnuto)? Zašto?
Ako je kodomena linearnog operatora jednodimenzionalna, zovemo ga linearnim funkcionalom.
Kod linearnih operatora nije uobičajeno pisati $\hat{A}(v)$ već se piše $\hat{A}v$.
Za kvadratne matrice definira se njihov trag: zbroj elemenata na dijagonali. Ako trag želimo promatrati kao funkciju, što mu je domena? Kodomena? Je li trag linearan operator? Funkcional?

Zadatak

Osmislite po jedan primjer linearnih funkcionala na prostorima derivabilnih odnosno integrabilnih realnih funkcija (definiranih na nekom intervalu I)! Osmislite i po jedan primjer linearnih operatora na tim prostorima tako da se kodomena podudara s domenom.

Za svaki V vektorski prostor definirani su sljedeći linearni operatori:

- Jedinični operator: $\hat{I} : V \to V$, $\hat{I}(v) = v$
- Nuloperator: $\hat{0} : V \to V$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}$
- Nulfunkcional: $0 : V \to \mathbb{R}$ (odnosno $0 : V \to \mathbb{C}$), $0(v) = 0$.

Za svaki V vektorski prostor definirani su sljedeći linearni operatori:

- Jedinični operator: $\hat{I} : V \to V$, $\hat{I}(v) = v$
- Nuloperator: $\hat{0} : V \to V$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}$
- Nulfunkcional: $0 : V \to \mathbb{R}$ (odnosno $0 : V \to \mathbb{C}$), $0(v) = 0$.

Zadatak

Kamo $\hat{I}$ preslikava nulvektor? A $\hat{0}$? A operator zrcaljenja u $V^2(0)$ obzirom na pravac kroz ishodište?

Za svaki V vektorski prostor definirani su sljedeći linearni operatori:

- Jedinični operator: $\hat{I} : V \to V$, $\hat{I}(v) = v$
- Nuloperator: $\hat{0} : V \to V$, $\hat{0}(v) = \mathbf{0}$
- Nulfunkcional: $0 : V \to \mathbb{R}$ (odnosno $0 : V \to \mathbb{C}$), $0(v) = 0$.

Zadatak

Kamo $\hat{I}$ preslikava nulvektor? A $\hat{0}$? A operator zrcaljenja u $V^2(0)$ obzirom na pravac kroz ishodište?

Zadatak

Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, dokažite da $\hat{A}$ sigurno nulvektor prostora V preslikava u nulvektor prostora W.

Linearni operatori na $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, tj. linearne operatore kojima je su domena i kodomena isti jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$.

Primjer

Ako je $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *linearan operator, kamo on preslikava pravce koji prolaze kroz ishodište?*

Linearni operatori na $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, tj. linearne operatore kojima je su domena i kodomena isti jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$.

Primjer

Ako je $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *linearan operator, kamo on preslikava pravce koji prolaze kroz ishodište? Slika pravca kroz ishodište putem linearnog operatora može biti samo neki pravac kroz ishodište ili nulvektor.*
Ako je $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ *linearan operator, kamo on preslikava ravnine koji prolaze kroz ishodište?*

Linearni operatori na $V^2(O)$ i $V^3(O)$

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, tj. linearne operatore kojima je su domena i kodomena isti jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$.

Primjer

Ako je $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *linearan operator, kamo on preslikava pravce koji prolaze kroz ishodište? Slika pravca kroz ishodište putem linearnog operatora može biti samo neki pravac kroz ishodište ili nulvektor.*
Ako je $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ *linearan operator, kamo on preslikava ravnine koji prolaze kroz ishodište? Slika ravnine kroz ishodište putem linearnog operatora može biti samo ravnina ili pravac kroz ishodište ili eventualno nulvektor.*

Operatori simetrija

Definicija (Ortogonalni operator)

Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom.

Ukoliko je V jedan od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ ortogonalne operatore često nazivamo operatorima simetrije.

Operatori simetrija

Definicija (Ortogonalni operator)

Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom.

Ukoliko je V jedan od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ ortogonalne operatore često nazivamo operatorima simetrije.
Osnovni tipovi operatora simetrije su: centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija te njihove kompozicije.
Ukoliko operator simetrije fiksira neki podskup S od V, govorimo o simetriji od S.

Operatori simetrija

Definicija (Ortogonalni operator)

Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom.

Ukoliko je V jedan od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ ortogonalne operatore često nazivamo operatorima simetrije. Osnovni tipovi operatora simetrije su: centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija te njihove kompozicije.
Ukoliko operator simetrije fiksira neki podskup S od V, govorimo o simetriji od S.Najjednostavniji je jedinični operator $\hat{I}$ (kojeg možemo smatrati rotacijom)

Operatori simetrija

Definicija (Ortogonalni operator)

Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom.

Ukoliko je V jedan od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ ortogonalne operatore često nazivamo operatorima simetrije.
Osnovni tipovi operatora simetrije su: centralna simetrija, zrcaljenje, rotacija te njihove kompozicije.
Ukoliko operator simetrije fiksira neki podskup S od V, govorimo o simetriji od S.Najjednostavniji je jedinični operator $\hat{I}$ (kojeg možemo smatrati rotacijom) i on je simetrija svakog S.
Centralna simetrija (inverzija) s obzirom na točku O je definirana s $\hat{\imath}(v) = -v$ (tj. $\hat{\imath} = -\hat{I}$).

Operatori zrcaljenja

Zrcaljenje se različito definira u ravnini i u prostoru.[1] Zrcaljenje ravnine je linearni operator $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{M}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine $\overline{TT'}$ na pravcu p.

[1] Ako gledamo zrcaljenje ravnine, govorimo i o osnoj simetriji.

Operatori zrcaljenja

Zrcaljenje se različito definira u ravnini i u prostoru.[1] Zrcaljenje ravnine je linearni operator $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{M}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine $\overline{TT'}$ na pravcu p.

Zrcaljenje prostora je linearan operator $\hat{M} : V^3(O) \to V^3(O)$ definiran analogno, samo umjesto osi simetrije za njega postoji ravnina simetrije Π sa istim svojstvom kao što je u ravninskom slučaju navedeno za os simetrije.

[1] Ako gledamo zrcaljenje ravnine, govorimo i o osnoj simetriji.

Operatori rotacije

Rotacija ravnine oko centra rotacije O je linearni operator $\hat{R} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{R}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle TOT'$ uvijek isti (taj kut nazivamo kutom rotacije $\hat{R}$).

Operatori rotacije

Rotacija ravnine oko centra rotacije O je linearni operator $\hat{R} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{R}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle TOT'$ uvijek isti (taj kut nazivamo kutom rotacije $\hat{R}$).
Rotacija prostora je linearan operator $\hat{R} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{R}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

Operatori rotacije

Rotacija ravnine oko centra rotacije O je linearni operator $\hat{R} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{R}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle TOT'$ uvijek isti (taj kut nazivamo kutom rotacije $\hat{R}$).
Rotacija prostora je linearan operator $\hat{R} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{R}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

Zadatak

Dokažite da je u ravninskom slučaju centralna simetrija isto što i rotacija za 180°.

Komponirani operatori simetrije

Kad god kompozicija dva linearna operatora ima smisla, ona je uvijek linearni operator.

Komponirani operatori simetrije

Kad god kompozicija dva linearna operatora ima smisla, ona je uvijek linearni operator. U trodimenzionalnom („prostornom") slučaju se razmatraju i rotoinverzije (kompozicija rotacije oko osi kroz O i centralne simetrije s obzirom na O).

Komponirani operatori simetrije

Kad god kompozicija dva linearna operatora ima smisla, ona je uvijek linearni operator. U trodimenzionalnom („prostornom") slučaju se razmatraju i rotoinverzije (kompozicija rotacije oko osi kroz O i centralne simetrije s obzirom na O). Kompozicija centralne simetrije sa zrcaljenjem (kojemu ravnina simetrije prolazi kroz $O =$ centar simetrije) je rotacija (za 180°). Kompozicija dviju rotacija oko osi koje prolaze kroz O kao i kompozicija dvaju zrcaljenja s obzirom na osi odnosno ravnine kroz O je rotacija. Kompozicija zrcaljenja i rotacije je u prostornom slučaju rotoinverzija, a u dvodimenzionalnom se naziva nepravom rotacijom.

Komponirani operatori simetrije

Kad god kompozicija dva linearna operatora ima smisla, ona je uvijek linearni operator. U trodimenzionalnom („prostornom") slučaju se razmatraju i rotoinverzije (kompozicija rotacije oko osi kroz O i centralne simetrije s obzirom na O). Kompozicija centralne simetrije sa zrcaljenjem (kojemu ravnina simetrije prolazi kroz O = centar simetrije) je rotacija (za 180°). Kompozicija dviju rotacija oko osi koje prolaze kroz O kao i kompozicija dvaju zrcaljenja s obzirom na osi odnosno ravnine kroz O je rotacija. Kompozicija zrcaljenja i rotacije je u prostornom slučaju rotoinverzija, a u dvodimenzionalnom se naziva nepravom rotacijom.

Zadatak

Translacija za vektor t je preslikavanje $\hat{T} : V \to V$, $\hat{T}(v) = v + t$. Je li translacija linearan operator?

Svi navedeni operatori simetrije su invertibilni. Općenito vrijedi: Ako je linearan operator invertibilan, onda mu je i inverzna funkcija također linearni operator.

Zadatak

Odredite (opišite) inverzne operatore jediničnog operatora, operatora centralne simetrije, operatora rotacije, zrcaljenja.

Svi navedeni operatori simetrije su invertibilni. Općenito vrijedi: Ako je linearan operator invertibilan, onda mu je i inverzna funkcija također linearni operator.

Zadatak

Odredite (opišite) inverzne operatore jediničnog operatora, operatora centralne simetrije, operatora rotacije, zrcaljenja.

Zadatak

Neka je u prostoru odabran koordinatni sustav. Kakav efekt ima zrcaljenje obzirom na (x, y)-ravninu na vektor s koordinatama $[x, y, z]$? Ovisi li to o tome je li odabrani koordinatni sustav Kartezijev?

Uvod u matricu linearnog operatora

Primjer

Neka je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ *neka baza za* $V^2(O)$ *te neka je za linearan operator* $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, a drugi u zbroj prvog i drugog.*
Svaki vektor $\overrightarrow{v} \in V^2(O)$ *jednoznačno se može zapisati kao* $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ *pa linearnost od* $\hat{A}$ *i navedena svojstva povlače da je*

$$\hat{A}(\overrightarrow{v}) = x\overrightarrow{b} + y(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = y\overrightarrow{a} + (x+y)\overrightarrow{b},$$

što kraće pišemo kao $\hat{A}([x, y]) = [y, x+y]$.

Uvod u matricu linearnog operatora

Primjer

Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ *neka baza za* $V^2(O)$ *te neka je za linearan operator* $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, a drugi u zbroj prvog i drugog.*
Svaki vektor $\vec{v} \in V^2(O)$ *jednoznačno se može zapisati kao* $x\vec{a} + y\vec{b}$ *pa linearnost od* $\hat{A}$ *i navedena svojstva povlače da je*

$$\hat{A}(\vec{v}) = x\vec{b} + y(\vec{a} + \vec{b}) = y\vec{a} + (x+y)\vec{b},$$

što kraće pišemo kao $\hat{A}([x,y]) = [y, x+y]$.

Neka je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za (konačnodimenzionalnu) domenu V. Tada su vektori $\hat{A}e_1, \ldots, \hat{A}e_n$ u kodomeni W. Svaki vektor $v \in V$ jednoznačno se može zapisati kao $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Stoga je:

$$\hat{A}v = \hat{A}(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \hat{A} e_1 + \ldots + x_n \hat{A} e_n.$$

$$\hat{A}v = \hat{A}(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \hat{A} e_1 + \ldots + x_n \hat{A} e_n.$$

Teorem

Linearni operator s konačnodimenzionalnom domenom je potpuno zadan svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi domene.

Zadatak

Neka je u $V^2(O)$ odabrana ortonormirana baza (Kartezijev koordinatni sustav). Koje su koordinate vektora $[x, y]$ nakon zrcaljenja s obzirom na pravac $y = x$?

$$\hat{A}v = \hat{A}(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \hat{A} e_1 + \ldots + x_n \hat{A} e_n.$$

Teorem

Linearni operator s konačnodimenzionalnom domenom je potpuno zadan svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi domene.

Zadatak

Neka je u $V^2(O)$ odabrana ortonormirana baza (Kartezijev koordinatni sustav). Koje su koordinate vektora $[x, y]$ nakon zrcaljenja s obzirom na pravac $y = x$?

Zadatak

Neka je u $V^2(O)$ odabrana bilo kakva baza. Kakav efekt na vektor s koordinatama $[x, y]$ ima rotacija oko ishodišta za kut od 60° u pozitivnom smjeru? Ovisi li to o tome je li odabrana baza ortonormirana?

Zadatak

Neka je u $V^3(O)$ *odabrana baza. Kakav efekt na vektor s koordinatama* $[x, y, z]$ *ima rotacija oko z-osi za kut* α *u pozitivnom smjeru? Ovisi li to o tome je li baza ortonormirana?*

Zadatak

Neka je u $V^3(O)$ *odabrana baza. Kakav efekt na vektor s koordinatama* $[x, y, z]$ *ima rotacija oko* z*-osi za kut* α *u pozitivnom smjeru? Ovisi li to o tome je li baza ortonormirana?*

Zadatak

Ako je $\hat{A}$ *rotoinverzija u* $V^3(O)$ *s rotacijskim kutom* 120°*, pogodno postavite koordinatni sustav i zapišite pravilo od* $\hat{A}$ *koordinatno.*

Zadatak

Neka je u $V^3(O)$ odabrana baza. Kakav efekt na vektor s koordinatama $[x, y, z]$ ima rotacija oko z-osi za kut α u pozitivnom smjeru? Ovisi li to o tome je li baza ortonormirana?

Zadatak

Ako je $\hat{A}$ rotoinverzija u $V^3(O)$ s rotacijskim kutom 120°, pogodno postavite koordinatni sustav i zapišite pravilo od $\hat{A}$ koordinatno.

Zadatak

Ako je u $V^3(O)$ odabrana baza, osmislite $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$, $\hat{A} \neq \hat{I}$ koji fiksira vektor $[1, 1, 0]$.