Matrice linearnih operatora. Množenje matrica.

Franka Miriam Brückler

Matrice linearnog operatora

Neka je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, gdje su V i W *konačnih* dimenzija.
Znamo: Djelovanje linearnog operatora $\hat{A}$ uvijek je dovoljno zadati na vektorima jedne baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ domene. Pripadni rezultati su $\hat{A}e_1$, $\hat{A}e_2$, $\ldots$, $\hat{A}e_n$, što su vektori u kodomeni. Stoga se svaki od njih može (jednoznačno) zapisati kao linearna kombinacija elemenata neke odabrane baze $\{f_1, \ldots, f_m\}$. kodomene.

Matrice linearnog operatora

Neka je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, gdje su V i W *konačnih* dimenzija.
Znamo: Djelovanje linearnog operatora $\hat{A}$ uvijek je dovoljno zadati na vektorima jedne baze $\{e_1, \dots, e_n\}$ domene. Pripadni rezultati su $\hat{A}e_1$, $\hat{A}e_2$, ..., $\hat{A}e_n$, što su vektori u kodomeni. Stoga se svaki od njih može (jednoznačno) zapisati kao linearna kombinacija elemenata neke odabrane baze $\{f_1, \dots, f_m\}$. kodomene.

Definicija

Matrica linearnog operatora $\hat{A}$ s obzirom na odabrane baze domene i kodomene je matrica A u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora odabrane baze domene, sve u odabranoj bazi kodomene.

Kad je $V = W$, uobičajeno je uzeti istu bazu u domeni i kodomeni.

Primjer

Neka je $\hat{M} : V^3 \to V^3$ *zrcaljenje prostora obzirom na neku ravninu. Neka je odabran ortogonalni koordinatni sustav tako da je ta ravnina* (y, z)*-ravnina. Koja je matrica tog operatora?*

Primjer

Neka je $\hat{M} : V^3 \to V^3$ *zrcaljenje prostora obzirom na neku ravninu. Neka je odabran ortogonalni koordinatni sustav tako da je ta ravnina* (y, z)*-ravnina. Koja je matrica tog operatora?*

Ako je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, koliko koordinata ima element domene? Kodomene?

Primjer

Neka je $\hat{M} : V^3 \to V^3$ *zrcaljenje prostora obzirom na neku ravninu. Neka je odabran ortogonalni koordinatni sustav tako da je ta ravnina* (y, z)*-ravnina. Koja je matrica tog operatora?*

Ako je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, koliko koordinata ima element domene? Kodomene? Dakle, matrica operatora $\hat{A}$ ima onoliko redaka kolika je dimenzija kodomene i onoliko stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, ako su domena i kodomena iste dimenzije, matrica linearnog operatora je kvadratna.

Primjer

Neka je $\hat{M} : V^3 \to V^3$ zrcaljenje prostora obzirom na neku ravninu. Neka je odabran ortogonalni koordinatni sustav tako da je ta ravnina (y, z)-ravnina. Koja je matrica tog operatora?

Ako je $\dim V = n$ i $\dim W = m$, koliko koordinata ima element domene? Kodomene? Dakle, matrica operatora $\hat{A}$ ima onoliko redaka kolika je dimenzija kodomene i onoliko stupaca kolika je dimenzija domene. Posebno, ako su domena i kodomena iste dimenzije, matrica linearnog operatora je kvadratna. Kakve su matrice linearnih funkcionala?

Zadatak

Neka je V skup svih linearnih kombinacija dviju eksponencijalnih funkcija s različitim bazama. Argumentirajte da se radi o potprostoru prostora svih beskonačno mnogo puta derivabilnih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Koja mu je dimenzija? Odaberite jednu bazu i s obzirom na tu bazu odredite matricu linearnog operatora

$\frac{d}{dx} : V \to V$

Linearni operatori na beskonanodimenzionalnim prostorima

U kvantnoj mehanici se dinamičke veličine klasične mehanike predstavljaju linearnim operatorima koji djeluju na vektorskom prostoru valnih funkcija. Primjerice, kvantnomehanički operatori za kinetičku i potencijalnu energiju pri gibanju po pravcu su $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ te $\hat{V}$, $\hat{V}\psi(x) = V(x) \cdot \psi(x)$. Ukupnoj energiji odgovara linearan operator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ (Hamiltonijan).

Linearni operatori na beskonanodimenzionalnim prostorima

U kvantnoj mehanici se dinamičke veličine klasične mehanike predstavljaju linearnim operatorima koji djeluju na vektorskom prostoru valnih funkcija. Primjerice, kvantnomehanički operatori za kinetičku i potencijalnu energiju pri gibanju po pravcu su $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ te $\hat{V}$, $\hat{V}\psi(x) = V(x) \cdot \psi(x)$. Ukupnoj energiji odgovara linearan operator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ (Hamiltonijan).

Primjer

Neka je s $\hat{x}$ označen operator koji funkciji pridružuje njen produkt s njenom varijablom x. Ako je $\hat{A} = \hat{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, argumentirajte da se radi o linearnom operatoru i izračunajte $\hat{A}(\exp)$.

Linearni operatori na beskonanodimenzionalnim prostorima

U kvantnoj mehanici se dinamičke veličine klasične mehanike predstavljaju linearnim operatorima koji djeluju na vektorskom prostoru valnih funkcija. Primjerice, kvantnomehanički operatori za kinetičku i potencijalnu energiju pri gibanju po pravcu su $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ te $\hat{V}$, $\hat{V}\psi(x) = V(x) \cdot \psi(x)$. Ukupnoj energiji odgovara linearan operator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ (Hamiltonijan).

Primjer

Neka je s $\hat{x}$ označen operator koji funkciji pridružuje njen produkt s njenom varijablom x. Ako je $\hat{A} = \hat{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, argumentirajte da se radi o linearnom operatoru i izračunajte $\hat{A}(\exp)$.

No, linearni operatori na *beskonačnodimenzionalnim* prostorima nemaju svoje matrice.

Ovisnost matrice operatora o bazi

Zadatak

Odredite matrice od $\hat{I}$ i $\hat{0}$? Ovise li one o odabiru baze?

Ovisnost matrice operatora o bazi

Zadatak

Odredite matrice od $\hat{I}$ i $\hat{0}$? Ovise li one o odabiru baze?

Definicija

Operatori oblika $\hat{A} : V \to V$, $\hat{A}v = \alpha v$ za konstantan skalar α zovu se skalarni operatori.

Ovisi li matrica skalarnog operatora o odabiru baze?

Ovisnost matrice operatora o bazi

Zadatak

Odredite matrice od $\hat{I}$ i $\hat{0}$? Ovise li one o odabiru baze?

Definicija

Operatori oblika $\hat{A} : V \to V$, $\hat{A}v = \alpha v$ za konstantan skalar α zovu se skalarni operatori.

Ovisi li matrica skalarnog operatora o odabiru baze? Ne. Matrica skalarnog operatora množenja s α u svim bazama ima sve elemente na dijagonali jednake α, a ostale elemente jednake 0. Takve matrice zovu se skalarne matrice. Za slučaj $\alpha = 1$ imamo jedinični operator i odgovarajuća se matrica zove jedinična matrica, a za $\alpha = -1$ (i $V = V^3(O)$) imamo operator centralne simetrije.

Zadatak

Odredite matricu operatora projekcije $\hat{P} : V^3(O) \to V^3(O)$ *koji svakoj točki prostora pridružuje njenu ortogonalnu projekciju na* (x, y)*-ravninu, uz pretpostavku da je odabrana baza ortogonalna.*

Zadatak

Odredite matricu operatora projekcije $\hat{P} : V^3(O) \to V^3(O)$ koji svakoj točki prostora pridružuje njenu ortogonalnu projekciju na (x, y)-ravninu, uz pretpostavku da je odabrana baza ortogonalna.

Zadatak

Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadan je kao tzv. pomak ulijevo: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_3, x_4, 0)$. Odredite njegove matrice s obzirom na kanonsku bazu i s obzirom na bazu $a = (4, 0, 3, 0)$, $b = (-2, 1, 0, 0)$, $c = (0, 0, -1, 1)$ i $d = (0, 1, 0, 2)$.

Ako uzmemo kanonsku bazu, imamo redom
$\hat{A}(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$,
$\hat{A}(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$, pa je s obzirom na kanonsku bazu matrica našeg operatora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za drugu navedenu bazu imamo redom $\hat{A}a = (0, 3, 0, 0) = v_1$, $\hat{A}b = (1, 0, 0, 0) = v_2$, $\hat{A}c = (0, -1, 1, 0) = v_3$, $\hat{A}d = (1, 0, 2, 0) = v_4$, no

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nije tražena matrica. Zašto?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za drugu navedenu bazu imamo redom $\hat{A}a = (0,3,0,0) = v_1$, $\hat{A}b = (1,0,0,0) = v_2$, $\hat{A}c = (0,-1,1,0) = v_3$, $\hat{A}d = (1,0,2,0) = v_4$, no

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nije tražena matrica. Zašto?

Vektorima v_1, v_2, v_3, v_4 treba naći koordinate u bazi $\{a,b,c,d\}$:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 3 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 3 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Kao što i koordinate pojedinačnih vektora općenito ovise o odabiru baze vektorskog prostora, tako i brojevi u matrici linearnog operatora ovise o odabiru baze domene i kodomene.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 3 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Kao što i koordinate pojedinačnih vektora općenito ovise o odabiru baze vektorskog prostora, tako i brojevi u matrici linearnog operatora ovise o odabiru baze domene i kodomene.

Matrice operatora simetrije na $V^2(O)$

Jedinični operator $\hat{I} : V_2(O) \to V_2(O)$ u svim bazama ima matricu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice zrcaljenja ravnine

Pogledajmo sad zrcaljenje $\hat{M}$ s obzirom na os kroz O. Tada ako je moguće biramo ortogonalnu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, tako da os simetrije bude jedna od dvije koordinatne osi.

Matrice zrcaljenja ravnine

Pogledajmo sad zrcaljenje $\hat{M}$ s obzirom na os kroz O. Tada ako je moguće biramo ortogonalnu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, tako da os simetrije bude jedna od dvije koordinatne osi.
Ako je os zrcaljenja x-os, pišemo $\hat{M}_x$. Tada je $\hat{M}_x \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ i $\hat{M}_x \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b}$.

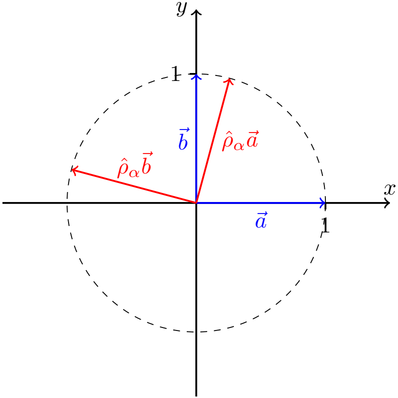
Matrice zrcaljenja ravnine

Pogledajmo sad zrcaljenje $\hat{M}$ s obzirom na os kroz O. Tada ako je moguće biramo ortogonalnu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, tako da os simetrije bude jedna od dvije koordinatne osi.
Ako je os zrcaljenja x-os, pišemo $\hat{M}_x$. Tada je $\hat{M}_x\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ i $\hat{M}_x\overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b}$.
Ako je os zrcaljenja y-os, pišemo $\hat{M}_y$. Tada je $\hat{M}_y\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a}$ i $\hat{M}_y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$.
Dakle, matrice operatora zrcaljenja ravnine s obzirom na jednu od koordinatnih osi, uz pretpostavku da je baza ortogonalna, su

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno, } M_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

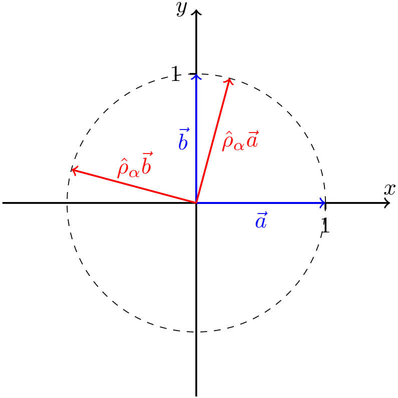
Matrica rotacija ravnine

Neka je $\hat{R}_\alpha$ rotacija ravnine oko O za kut α. Ako je moguće, onda biramo ortonormiranu bazu $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Onda je
$\hat{R}_\alpha \vec{i} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$ i $\hat{R}_\alpha \vec{j} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$.



Matrica rotacija ravnine

Neka je $\hat{R}_\alpha$ rotacija ravnine oko O za kut α. Ako je moguće, onda biramo ortonormiranu bazu $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Onda je
$\hat{R}_\alpha \vec{i} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$ i $\hat{R}_\alpha \vec{j} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$.



Operator rotacije ravnine oko O za kut α, uz odabir ortonormirane baze, ima matricu

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Matrice operatora simetrije na $V^3(O)$

Jedinični operator $\hat{I} : V_3(O) \to V_3(O)$ i centralna simetrija $\hat{\imath} : V_3(O) \to V_3(O)$ u svim bazama imaju matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matrice operatora simetrije na $V^3(O)$

Jedinični operator $\hat{I} : V_3(O) \to V_3(O)$ i centralna simetrija $\hat{\imath} : V_3(O) \to V_3(O)$ u svim bazama imaju matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{odnosno} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operator zrcaljenja $V^3(O)$ s obzirom na (x, y)-ravninu, uz pretpostavku da je z-os okomita na (x, y)-ravninu, ima matricu

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operator rotacije $V^3(O)$ oko z-osi za kut α, uz odabir ortogonalne baze u kojoj vektori koji određuju x- i y-os imaju istu duljinu, ima matricu

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadatak

Neka je dana ortonormirana baza za $V^3(O)$. Odredite matricu rotoinverzije s kutom 30°, ako je os rotoinverzije x-os.

Operator rotacije $V^3(O)$ oko z-osi za kut α, uz odabir ortogonalne baze u kojoj vektori koji određuju x- i y-os imaju istu duljinu, ima matricu

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadatak

Neka je dana ortonormirana baza za $V^3(O)$. Odredite matricu rotoinverzije s kutom 30°, ako je os rotoinverzije x-os.

Teorem

S obzirom na svaku ortonormiranu bazu, matrica svakog operatorâ simetrije je ortogonalna matrica.

Koja korist od matrice operatora?

Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T, odnosno njezin radij-vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$, ako se radi o rotaciji $\hat{R}_y$ prostora oko y-osi za kut od 45°, uz pretpostavku da je odabrana baza ortonormirana.

Koja korist od matrice operatora?

Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T, odnosno njezin radij-vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$, ako se radi o rotaciji $\hat{R}_y$ prostora oko y-osi za kut od 45°, uz pretpostavku da je odabrana baza ortonormirana. Vektor $\overrightarrow{r}$ ima neke koordinate $[x, y, z]$ obzirom na tu bazu. Kako je $\hat{R}_y$ linearan operator, znamo $\hat{R}_y \overrightarrow{r} = x\hat{R}_y(\overrightarrow{i}) + y\hat{R}_y(\overrightarrow{j}) + z\hat{R}_y(\overrightarrow{k})$.

Koja korist od matrice operatora?

Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T, odnosno njezin radij-vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$, ako se radi o rotaciji $\hat{R}_y$ prostora oko y-osi za kut od 45°, uz pretpostavku da je odabrana baza ortonormirana. Vektor $\overrightarrow{r}$ ima neke koordinate $[x, y, z]$ obzirom na tu bazu. Kako je $\hat{R}_y$ linearan operator, znamo $\hat{R}_y \overrightarrow{r} = x\hat{R}_y(\overrightarrow{i}) + y\hat{R}_y(\overrightarrow{j}) + z\hat{R}_y(\overrightarrow{k})$.
S druge strane, matrica našeg linearnog operatora je

$$R_y = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Koja korist od matrice operatora?

Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T, odnosno njezin radij-vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OT}$, ako se radi o rotaciji $\hat{R}_y$ prostora oko y-osi za kut od 45°, uz pretpostavku da je odabrana baza ortonormirana. Vektor $\overrightarrow{r}$ ima neke koordinate $[x, y, z]$ obzirom na tu bazu. Kako je $\hat{R}_y$ linearan operator, znamo $\hat{R}_y \overrightarrow{r} = x\hat{R}_y(\overrightarrow{i}) + y\hat{R}_y(\overrightarrow{j}) + z\hat{R}_y(\overrightarrow{k})$.
S druge strane, matrica našeg linearnog operatora je

$$R_y = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{R}_y[x, y, z] = x[\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] + y[0, 1, 0] + z[-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] =$$

$$= [(x - z)\sqrt{2}/2, y, (x + z)\sqrt{2}/2].$$

Ako bolje pogledamo, vidimo da je prva koordinata od $\hat{R}_y \overrightarrow{r} = [X, Y, Z]$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) prvog retka matrice R_y i (x, y, z), druga koordinata od $\hat{R}_y \overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) drugog retka matrice R_y i (x, y, z), a treća koordinata od $\hat{R}_y \overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) trećeg retka matrice R_y i (x, y, z).

Ako bolje pogledamo, vidimo da je prva koordinata od $\hat{R}_y\overrightarrow{r} = [X, Y, Z]$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) prvog retka matrice R_y i (x, y, z), druga koordinata od $\hat{R}_y\overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) drugog retka matrice R_y i (x, y, z), a treća koordinata od $\hat{R}_y\overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) trećeg retka matrice R_y i (x, y, z).
Pišemo:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-z)\sqrt{2}/2 \\ y \\ (x+z)\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Množenje matrice s matricom-stupcem

$A \cdot v$ za $A \in M_{m,n}$ i $v \in M_{n,1}$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje vektor $\hat{A}v$: Umnožak matrice A linearnog operatora $\hat{A}$ s matricom-stupcem u kojoj su koordinate vektora v kojeg taj operator preslikava daje koordinate od $\hat{A}(v)$.

Pritom se koordinate od v odnose na bazu domene, a koordinate od $\hat{A}v$ se odnose na bazu kodomene od $\hat{A}$ koja je odabrana pri odabiru matrice A.

Dakle: Ako je $A \in M_{m,n}$ i $v \in M_{n,1}$, umnožak $A \cdot v$ definiramo kao matricu u $M_{m,1}$ čiji elementi su skalarni produkti (u $\mathbb{R}^n$) redaka od A s v.

Množenje matrice s matricom-stupcem

$A \cdot v$ za $A \in M_{m,n}$ i $v \in M_{n,1}$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje vektor $\hat{A}v$: Umnožak matrice A linearnog operatora $\hat{A}$ s matricom-stupcem u kojoj su koordinate vektora v kojeg taj operator preslikava daje koordinate od $\hat{A}(v)$.

Pritom se koordinate od v odnose na bazu domene, a koordinate od $\hat{A}v$ se odnose na bazu kodomene od $\hat{A}$ koja je odabrana pri odabiru matrice A.
Dakle: Ako je $A \in M_{m,n}$ i $v \in M_{n,1}$, umnožak $A \cdot v$ definiramo kao matricu u $M_{m,1}$ čiji elementi su skalarni produkti (u $\mathbb{R}^n$) redaka od A s v.

Zadatak

Odredite kooordinate vektora $2\vec{i} - 5\vec{j}$ ako je na njega primijenjen operator rotoinverzije s kutom 30° oko x-osi.

Zadatak

Odredite matricu linearnog funkcionala $\mathrm{tr} : M_3 \to M_3$ *i koristeći množenje matrica pokažite da je* $\mathrm{tr} I_3 = 3$.

Zadatak

Odredite matricu linearnog funkcionala $\mathrm{tr} : M_3 \to M_3$ *i koristeći množenje matrica pokažite da je* $\mathrm{tr}\, I_3 = 3$.

Napomena

Svaka matrica predstavlja neki linearni operator: Neka je $A \in M_{m,n}$. *Definirajmo* $\hat{A} : M_{n,1} \to M_{m,1}$, $\hat{A}v = A \cdot v$. *Tada je* A *matrica od* $\hat{A}$ *s obzirom na kanonske baze u domeni i kodomeni.*

Zadatak

Odredite matricu linearnog funkcionala $\mathrm{tr} : M_3 \to M_3$ *i koristeći množenje matrica pokažite da je* $\mathrm{tr} I_3 = 3$.

Napomena

Svaka matrica predstavlja neki linearni operator: Neka je $A \in M_{m,n}$. *Definirajmo* $\hat{A} : M_{n,1} \to M_{m,1}$, $\hat{A}v = A \cdot v$. *Tada je* A *matrica od* $\hat{A}$ *s obzirom na kanonske baze u domeni i kodomeni.*

Ako je A matrica-redak, ona predstavlja linearni funkcional, pa je rezultat množenja matrice-retka s matricom-stupcem skalar, preciznije: 1×1-matrica. Pritom, to množenje ima smisla samo ako

Zadatak

Odredite matricu linearnog funkcionala $\operatorname{tr} : M_3 \to M_3$ *i koristeći množenje matrica pokažite da je* $\operatorname{tr} I_3 = 3$.

Napomena

Svaka matrica predstavlja neki linearni operator: Neka je $A \in M_{m,n}$. *Definirajmo* $\hat{A} : M_{n,1} \to M_{m,1}$, $\hat{A}v = A \cdot v$. *Tada je* A *matrica od* $\hat{A}$ *s obzirom na kanonske baze u domeni i kodomeni.*

Ako je A matrica-redak, ona predstavlja linearni funkcional, pa je rezultat množenja matrice-retka s matricom-stupcem skalar, preciznije: 1×1-matrica. Pritom, to množenje ima smisla samo ako su broj redaka matrice-stupca i matrice A jednaki.
Ima li smisla množiti matricu-stupac s matricom-stupcem?

Zadatak

Kvadrat ima vrhove koji u Kks-u imaju koordinate $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. *Matrica* $M \in M_2$ *definira* $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$.
U kakve četverokute $\hat{M}$ *može preslikati naš kvadrat? U kakve ne?*
Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,4)$, $(6,6)$, *uz koje uvjete na* M *će se oba kvadrata preslikati u isti tip četverokuta?*

Zadatak

Kvadrat ima vrhove koji u Kks-u imaju koordinate $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. *Matrica* $M \in M_2$ *definira* $\hat{M} : V^2(O) \to V^2(O)$. *U kakve četverokute* $\hat{M}$ *može preslikati naš kvadrat? U kakve ne? Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima* $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,4)$, $(6,6)$, *uz koje uvjete na* M *će se oba kvadrata preslikati u isti tip četverokuta?*

Zadatak

Tzv. opće pozicije u kristalnoj strukturi prostorne grupe Pbcn (rompski sustav) mogu se zapisati kao koordinate (m,n,p), $(m+1/2, n+1/2, p+1/2)$, $(m+1/2, n, p)$, $(m, n+1/2, p)$, $(m, n, p+1/2)$, $(m+1/2, n+1/2, p)$, $(m+1/2, n, p+1/2)$, $(m, n+1/2, p+1/2)$, *gdje su* m, n *i* l *cijeli brojevi. Zapišite jednu (ne-jediničnu) matricu koja (obzirom na kristalografsku bazu) predstavlja linearan operator simetrije za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se prije i poslije njegovog djelovanja opće pozicije nalaze na istim mjestima.*

Množenje matrica općenito

$A \cdot B$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje matricu koja odgovara kompoziciji linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati?

Množenje matrica općenito

$A \cdot B$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje matricu koja odgovara kompoziciji linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla?

Množenje matrica općenito

$A \cdot B$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje matricu koja odgovara kompoziciji linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$?

Množenje matrica općenito

$A \cdot B$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje matricu koja odgovara kompoziciji linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$? Podrazumijevamo li da je „dolazna" baza od $\hat{B}$ ista kao „polazna" od $\hat{A}$, definiramo: element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i-tog retka od A i j-tog stupca od B, oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$ (odnosno $\mathbb{C}^n$).

Množenje matrica općenito

$A \cdot B$

Ovo množenje je definirano tako da njegov rezultat daje matricu koja odgovara kompoziciji linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$.

Uz koji uvjet se dvije funkcije mogu komponirati? Kakve stoga trebaju biti matrice A i B da bi $A \cdot B$ imalo smisla? Koliko redaka i stupaca ima $A \cdot B$? Podrazumijevamo li da je „dolazna" baza od $\hat{B}$ ista kao „polazna" od $\hat{A}$, definiramo: element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i-tog retka od A i j-tog stupca od B, oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$ (odnosno $\mathbb{C}^n$).
Kada matricu-stupac možemo množiti s matricom-retkom i kako tada izgleda rezultat?

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu linearnog operatora koji vektore prostora $V^3(O)$ *prvo zarotira oko neke osi za* 90°*, a zatim zrcali s obzirom na ravninu okomitu na tu os (takve operatore zovemo rotorefleksijama).*

Primjer

S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu linearnog operatora koji vektore prostora $V^3(O)$ prvo zarotira oko neke osi za 90°, a zatim zrcali s obzirom na ravninu okomitu na tu os (takve operatore zovemo rotorefleksijama).

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da kompoziciji operatora odgovara množenje njihovih matrica, tražena je matrica

$$S_{xy} R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svojstva množenja matrica

Množenje matrica je asocijativno ($A(BC) = (AB)C$ kad god je A ulančana s B i B s C).

Svojstva množenja matrica

Množenje matrica je asocijativno ($A(BC) = (AB)C$ kad god je A ulančana s B i B s C). Za jedinične matrice $I_n \in M_n$ vrijedi $I_m A = A I_n = A$ (za $A \in M_{m,n}$).

Svojstva množenja matrica

Množenje matrica je asocijativno ($A(BC) = (AB)C$ kad god je A ulančana s B i B s C). Za jedinične matrice $I_n \in M_n$ vrijedi $I_m A = A I_n = A$ (za $A \in M_{m,n}$). Vrijedi i distributivnost prema zbrajanju: $A(B+C) = AB + AC$ za $A \in M_{m,n}$, $B, C \in M_{n,p}$ i $(A+B)C = AC + BC$ za $A, B \in M_{m,n}$, $C \in M_{n,p}$, te kvaziasocijativnost: $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ ako su A i B ulančane.

Svojstva množenja matrica

Množenje matrica je asocijativno ($A(BC) = (AB)C$ kad god je A ulančana s B i B s C). Za jedinične matrice $I_n \in M_n$ vrijedi $I_m A = A I_n = A$ (za $A \in M_{m,n}$). Vrijedi i distributivnost prema zbrajanju: $A(B + C) = AB + AC$ za $A \in M_{m,n}$, $B, C \in M_{n,p}$ i $(A + B)C = AC + BC$ za $A, B \in M_{m,n}$, $C \in M_{n,p}$, te kvaziasocijativnost: $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ ako su A i B ulančane.

Zadatak

Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A0_{p,q}$? A $0_{p,q}A$? Što je rezultat tih umnožaka?

Zadatak

Možete li skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ opisati kao množenje matrica?

Zadatak

Možete li naći dvije matrice u M_2 takve da nisu nulmatrice, ali im je umnožak nulmatrica?

Iz definicije se vidi: Ako AB ima smisla, to ne znači da BA ima smisla. U kojim slučajevima oba umnoška AB i BA imaju smisla?

Zadatak

Možete li skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ opisati kao množenje matrica?

Zadatak

Možete li naći dvije matrice u M_2 takve da nisu nulmatrice, ali im je umnožak nulmatrica?

Iz definicije se vidi: Ako AB ima smisla, to ne znači da BA ima smisla. U kojim slučajevima oba umnoška AB i BA imaju smisla? Nađite dvije matrice $A, B \in M_2$ takve da $AB \neq BA$ i dvije takve da $AB = BA$!

Zadatak

Možete li skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ opisati kao množenje matrica?

Zadatak

Možete li naći dvije matrice u M_2 takve da nisu nulmatrice, ali im je umnožak nulmatrica?

Iz definicije se vidi: Ako AB ima smisla, to ne znači da BA ima smisla. U kojim slučajevima oba umnoška AB i BA imaju smisla? Nađite dvije matrice $A, B \in M_2$ takve da $AB \neq BA$ i dvije takve da $AB = BA$!

Zbog nekomutativnosti množenja matrica, često se kao „mjera nekomutativnosti" uzima njihov komutator

$$[A, B] = AB - BA.$$

Primjer

Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Za njih je

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, [S_y, S_z] = i\hbar S_x, [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

i

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posljednja matrica predstavlja kvadrat spinskog kutnog momenta.