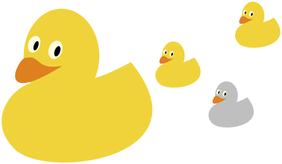
Matrice i sustavi linearnih jednadžbi, inverzi i determinante, svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

Franka Miriam Brückler



Inverzni linearni operator

Neki linearni operatori su bijekcije. Zbog svojstva da su linearni operatori potpuno zadani djelovanjem na bazi, linearan operator koji je invertibilan mora imati domenu i kodomenu iste dimenzije. Budući da su konačnodimenzionalni prostori iste dimenzije međusobno izomorfni, ovdje možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$.

Inverzni linearni operator

Neki linearni operatori su bijekcije. Zbog svojstva da su linearni operatori potpuno zadani djelovanjem na bazi, linearan operator koji je invertibilan mora imati domenu i kodomenu iste dimenzije. Budući da su konačnodimenzionalni prostori iste dimenzije međusobno izomorfni, ovdje možemo uzeti da je $\hat{A} : V \to V$. Ako je $\hat{A}$ invertibilan, onda je njegova inverzna funkcija $\hat{A}^{-1}$ također linearni operator i vrijedi

$$\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}.$$

Ako je pak A matrica invertibilnog operatora $\hat{A}$, ona je kvadratna i mora postojati matrica B sa svojstvom

$$AB = BA = I_n,$$

a ta matrica B bit će matrica operatora $\hat{A}^{-1}$.

Inverzna matrica

Definicija (Inverzna matrica)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen inverz (inverzna matrica od A) je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom matricom). Ako je A matrica invertibilnog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ u nekoj bazi, onda je A^{-1} matrica operatora $\hat{A}^{-1}$.

Inverzna matrica

Definicija (Inverzna matrica)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen inverz (inverzna matrica od A) je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom matricom). Ako je A matrica invertibilnog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ u nekoj bazi, onda je A^{-1} matrica operatora $\hat{A}^{-1}$.

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna?

Inverzna matrica

Definicija (Inverzna matrica)

Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen inverz (inverzna matrica od A) je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom matricom). Ako je A matrica invertibilnog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ u nekoj bazi, onda je A^{-1} matrica operatora $\hat{A}^{-1}$.

Je li svaka kvadratna matrica invertibilna? Budući da osim nulmatrice postoji beskonačno mnogo kvadratnih matrica koje nisu invertibilne, nema smisla definirati dijeljenje matrica!

Određivanje inverzne matrice

Zadatak

Ako je $R_{z,\alpha}$ matrica rotacije za kut α oko z-osi, koja je matrica rotacije oko z-osi za kut $2\pi - \alpha$?

Što o retcima i stupcima kvadratne matrice A govori ako vrijedi $AA^t = A^t A = I_n$?

Određivanje inverzne matrice

Zadatak

Ako je $R_{z,\alpha}$ matrica rotacije za kut α oko z-osi, koja je matrica rotacije oko z-osi za kut $2\pi - \alpha$?

Što o retcima i stupcima kvadratne matrice A govori ako vrijedi $AA^t = A^tA = I_n$? Matrica je ortogonalna ako joj je inverz jednak transponiranoj matrici. Posebno, inverzna matrica bilo kojeg matrice operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz pretpostavku da se odnosi na ortonormiranu bazu.

Određivanje inverzne matrice

Zadatak

Ako je $R_{z,\alpha}$ matrica rotacije za kut α oko z-osi, koja je matrica rotacije oko z-osi za kut $2\pi - \alpha$?

Što o retcima i stupcima kvadratne matrice A govori ako vrijedi $AA^t = A^tA = I_n$? Matrica je ortogonalna ako joj je inverz jednak transponiranoj matrici. Posebno, inverzna matrica bilo kojeg matrice operatora simetrije je njezina transponirana matrica, uz pretpostavku da se odnosi na ortonormiranu bazu.
Matrica je unitarna ako joj je inverz jednak hermitski konjugiranoj matrici.

Primjer

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*

Primjer

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *je kvadratna i nije nulmatrica. Nađimo joj inverz, ako postoji.*
Trebalo bi riješiti sustav s četiri nepoznanice (elementi matrice A^{-1}*)*

$$x + 2y = 1,$$

$$3x + 6y = 0,$$

$$z + 2v = 0,$$

$$3z + 6v = 1.$$

Rješavanjem ćemo dobiti kontradiktorne jednakosti, dakle sustav nije rješiv. Znači da ne možemo odrediti elemente matrice A^{-1} *te matrica* A *nije invertibilna!*

Vidimo: Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica (to su elementi inverzne matrice).
Sustav se postavlja iz $AA^{-1} = I_n$. Ako taj sustav ima jedinstveno rješenje, matrica A je invertibilna, a ako taj sustav nema rješenja nije.[1]

[1] Kod sustavâ za određivanje inverza ne može se dogoditi da imaju beskonačno mnogo rješenja.

Vidimo: Za određivanje inverza matrice $A \in M_n$ potrebno je riješiti sustav od n^2 linearnih jednadžbi s n^2 nepoznanica (to su elementi inverzne matrice).
Sustav se postavlja iz $AA^{-1} = I_n$. Ako taj sustav ima jedinstveno rješenje, matrica A je invertibilna, a ako taj sustav nema rješenja nije.[1]

Računanje A^{-1} ...

... je ekvivalentno rješavanju n sustava tipa $n \times n$ (po jedan za svaki stupac od A^{-1}), pri čemu su lijeve strane (koeficijenti) svih tih sustava iste (to su točno elementi matrice A), a stupci slobodnih članova su redom stupci jedinične matrice. Sustav za određivanje j-tog stupca od A^{-1} kao stupac slobodnih članova ima j-ti stupac od I_n.

[1] Kod sustavâ za određivanje inverza ne može se dogoditi da imaju beskonačno mnogo rješenja.

Budući u Gaussovoj metodi eliminacija redoslijed operacija ne ovisi o stupcu slobodnih članova, znači da je za svaki od tih sustava račun jednak osim u stupcu slobodnih članova. Stoga se ti sustavi mogu rješavati paralelno:

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq \left(I_n|A^{-1}\right).$$

Budući u Gaussovoj metodi eliminacija redoslijed operacija ne ovisi o stupcu slobodnih članova, znači da je za svaki od tih sustava račun jednak osim u stupcu slobodnih članova. Stoga se ti sustavi mogu rješavati paralelno:

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq (I_n|A^{-1}) \,.$$

Zadatak

Odredite matricu inverznog operatora operatora $\hat{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_4)$ *(s obzirom na kanonsku bazu).*

Budući u Gaussovoj metodi eliminacija redoslijed operacija ne ovisi o stupcu slobodnih članova, znači da je za svaki od tih sustava račun jednak osim u stupcu slobodnih članova. Stoga se ti sustavi mogu rješavati paralelno:

$$(A|I_n) \simeq \ldots \simeq \left(I_n|A^{-1}\right).$$

Zadatak

Odredite matricu inverznog operatora operatora $\hat{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4, x_4)$ (s obzirom na kanonsku bazu).

Napomena

Sve matrice jednog linearnog operatora su međusobno slične: ako su A i B dvije matrice istog operatora, obzirom na različite baze, onda postoji invertibilna matrica X takva da je $B = X^{-1}AX$.

Determinante

Provjerite da vrijedi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Determinante

Provjerite da vrijedi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Uz koji uvjet postoji inverz matrice reda 2?

Determinante

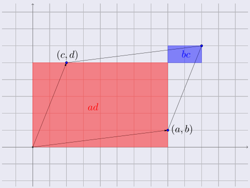
Provjerite da vrijedi:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Uz koji uvjet postoji inverz matrice reda 2?

Primjer

Neka su u Kks-u zadane točke $P=(a,b)$ i $Q=(c,d)$. Koja je površina A paralelograma određenog s $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$?



$$A = |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |ad-bc|.$$

Što je determinanta?

Broj koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice (ako je 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) zove se determinantom matrice.

Determinanta matrice A označava se sa $\det(A)$ odnosno omeđuje vertikalnim crtama.
Prije nego se posvetimo izračunavanju determinanti i njihovim svojstvima, napravit ćemo malu digresiju.

Teorem

Sve matrice istog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$*, neovisno o odabranoj bazi, imaju istu determinantu i isti trag.*

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje točkama rešetke pridružuju isključivo točke rešetke mogu biti samo rotacije za kutove 360°, 180°, 120°, 90° *ili* 60°.

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje točkama rešetke pridružuju isključivo točke rešetke mogu biti samo rotacije za kutove 360°, 180°, 120°, 90° *ili* 60°.

Dokaz:Rotacija oko neke osi o mora biti predstavljena nekom matricom $A \in M_3$. Ako je ta matrica odabrana s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da smo pretpostavili da rotacija preslikava točke rešetke samo u točke rešetke, slijedi da su elementi matrice A cijeli brojevi, dakle je i trag matrice A cijeli broj.

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje točkama rešetke pridružuju isključivo točke rešetke mogu biti samo rotacije za kutove 360°, 180°, 120°, 90° *ili* 60°.

Dokaz:Rotacija oko neke osi o mora biti predstavljena nekom matricom $A \in M_3$. Ako je ta matrica odabrana s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da smo pretpostavili da rotacija preslikava točke rešetke samo u točke rešetke, slijedi da su elementi matrice A cijeli brojevi, dakle je i trag matrice A cijeli broj. S druge strane, odaberemo li bazu tako da z-os leži na osi o, matrica naše rotacije imat će oblik $R_{z,\alpha}$. Ta matrica ima trag $1 + 2\cos\alpha$.

Teorem (Kristalografska restrikcija)

Rotacije koje točkama rešetke pridružuju isključivo točke rešetke mogu biti samo rotacije za kutove 360°, 180°, 120°, 90° *ili* 60°.

Dokaz:Rotacija oko neke osi o mora biti predstavljena nekom matricom $A \in M_3$. Ako je ta matrica odabrana s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da smo pretpostavili da rotacija preslikava točke rešetke samo u točke rešetke, slijedi da su elementi matrice A cijeli brojevi, dakle je i trag matrice A cijeli broj. S druge strane, odaberemo li bazu tako da z-os leži na osi o, matrica naše rotacije imat će oblik $R_{z,\alpha}$. Ta matrica ima trag $1 + 2\cos\alpha$. Kako trag ne ovisi o odabiru baze, slijedi da je $1 + 2\cos\alpha$ cijeli broj, tj. $2\cos\alpha$ je cijeli broj, dakle je $\cos\alpha$ jedan od brojeva -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1.

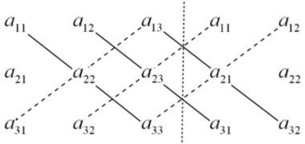
Računanje determinanti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Računanje determinanti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Za matrice reda 3 (vektorski produkt! mješoviti produkt!) često se koristi Sarrusovo pravilo:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Laplaceov razvoj determinante

Laplaceov razvoj determinante može se računati po bilo kojem (i-tom) retku ili bilo kojem (j-tom) stupcu:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Pritom je s A_{ij} označena matrica koju iz A dobijemo brisanjem i-tog retka i j-tog stupca.

Dakle, Laplaceov razvoj po nekom retku/stupcu izračunava determinantu matrice $A \in M_n$ tako da svaki element tog retka/stupca pomnoži s determinantom matrice koju bismo iz A dobili tako da iz nje pobrišemo redak i stupac promatranog elementa. Tako dobijemo n brojeva, koje zatim naizmjenično zbrojimo i oduzmemo. Kod razvoja po neparnim retcima/stupcima alterniranje zbrajanja i oduzimanja je $+-+-+-\ldots$. Kod razvoja po parnim retcima/stupcima alterniranje zbrajanja i oduzimanja kreće s $-$.

S obzirom na to da Laplaceov razvoj po *i*-tom stupcu daje isti rezultat kao razvoj po *i*-tom retku zaključujemo da je determinanta svake matrice jednaka determinanti njezine transponirane matrice:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Za kompleksne matrice imamo $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

S obzirom na to da Laplaceov razvoj po i-tom stupcu daje isti rezultat kao razvoj po i-tom retku zaključujemo da je determinanta svake matrice jednaka determinanti njezine transponirane matrice:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Za kompleksne matrice imamo $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.
Nadalje, znamo da matrice koje sadrže nulstupac odgovaraju neinvertibilnim linearnim operatorima (a i Laplaceov razvoj po nulstupcu dao bi 0). Ako matrica sadrži nulredak, njezina transponirana matrica sadrži nulstupac, pa također dobivamo determinantu nula: Ako $A \in M_n$ sadrži nulstupac ili nulredak, onda je $\det(A) = 0$. Specijalno vrijedi:

$$\det(0_n) = 0.$$

Koliko iznosi determinanta $\begin{vmatrix} 2 & 0 & & 123 \\ 0 & 1 & 1234 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? A $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$?

Koliko iznosi determinanta $\begin{vmatrix} 2 & 0 & & 123 \\ 0 & 1 & 1234 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? A $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$? Gornje-/donjetrokutaste matrice su one kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se dijagonalne. Determinanta gornjetrokutaste, kao i donjetrokutaste i dijagonalne matrice jednaka je

Koliko iznosi determinanta $\begin{vmatrix} 2 & 0 & & 123 \\ 0 & 1 & 1234 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? A $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$? Gornje-/donjetrokutaste matrice su one kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se dijagonalne. Determinanta gornjetrokutaste, kao i donjetrokutaste i dijagonalne matrice jednaka je umnošku njenih dijagonalnih elemenata. Koliko iznosi $\det(I_n)$?

Determinante vs. elementarne transformacije

Teorem

Zamjena dva retka (ili dva stupca) mijenja predznak determinante.
Ako matrici neki redak (ili stupac) pomnožimo nekim brojem α*, determinanta dobivene matrice je* α *puta determinanta matrice prije tog množenja.*
Ako jedan redak pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja.

Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu).

Determinante vs. elementarne transformacije

Teorem

Zamjena dva retka (ili dva stupca) mijenja predznak determinante. Ako matrici neki redak (ili stupac) pomnožimo nekim brojem α, determinanta dobivene matrice je α puta determinanta matrice prije tog množenja.
Ako jedan redak pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja.

Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu).
Iz gornjeg teorema može se dokazati da za $A \in M_n$ vrijedi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Determinante vs. elementarne transformacije

Teorem

Zamjena dva retka (ili dva stupca) mijenja predznak determinante. Ako matrici neki redak (ili stupac) pomnožimo nekim brojem α, determinanta dobivene matrice je α puta determinanta matrice prije tog množenja.
Ako jedan redak pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja.

Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu).
Iz gornjeg teorema može se dokazati da za $A \in M_n$ vrijedi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Je li determinatna linearan funkcional na M_n?

Ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (nulstupcem). Ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0.

Ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (nulstupcem). Ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0.

Primjer (Slaterova determinanta)

Paulijev princip: Ukupna elektronska valna funkcija, koja uključuje i spin, mora biti antisimetrična na izmjenu bilo kojeg para elektrona. Jednostavnija formulacija je: Nikoja dva elektrona u istom atomu ne mogu imati iste sve kvantne brojeve. To svojstvo se izvodi iz nemogućnosti razlikovanja elektronâ.

Ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (nulstupcem). Ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je 0.

Primjer (Slaterova determinanta)

Paulijev princip: Ukupna elektronska valna funkcija, koja uključuje i spin, mora biti antisimetrična na izmjenu bilo kojeg para elektrona. Jednostavnija formulacija je: Nikoja dva elektrona u istom atomu ne mogu imati iste sve kvantne brojeve. To svojstvo se izvodi iz nemogućnosti razlikovanja elektronâ.
Ako atom ima n elektrona, svaki od njih je opisan po jednom valnom funkcijom ψ_i. Želimo li opisati ukupnu valnu funkciju, najjednostavnija ideja bila bi definirati ju kao produkt svih valnih funkcija pojedinih elektrona, no tako definirana ukupna valna funkcija omogućavala bi razlikovanje elektronâ pa nije prihvatljiva.

Primjerice, za slučaj dva elektrona $\mathbb{1}$ i $\mathbb{2}$, moguće su dvije takve valne funkcije sustava: $\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2})$ i $\psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$.
Kao ukupna valna funkcija uzima se stoga
$\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}) - \psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$.

Primjerice, za slučaj dva elektrona $\mathbb{1}$ i $\mathbb{2}$, moguće su dvije takve valne funkcije sustava: $\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2})$ i $\psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$.

Kao ukupna valna funkcija uzima se stoga

$\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}) - \psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$.

Poopćenjem gornje ideje dobiva se da je za sustav od n elektrona (fermiona) ukupna valna funkcija dana tzv. Slaterovom determinantom

$$\psi(\mathbb{1}, \mathbb{2}, \ldots, \mathbb{n}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbb{1}) & \psi_1(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_1(\mathbb{n}) \\ \psi_2(\mathbb{1}) & \psi_2(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_2(\mathbb{n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_n(\mathbb{1}) & \psi_n(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_n(\mathbb{n}) \end{vmatrix}.$$

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

- Izvedite vezu između determinante matrice i determinante njezina inverza!

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

- Izvedite vezu između determinante matrice i determinante njezina inverza!

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Koje su moguće vrijednosti determinanti ortogonalnih matrica?

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

- Izvedite vezu između determinante matrice i determinante njezina inverza!

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Koje su moguće vrijednosti determinanti ortogonalnih matrica? ± 1. A koje su moguće vrijednosti determinanti unitarnih matrica?

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

- Izvedite vezu između determinante matrice i determinante njezina inverza!
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
- Koje su moguće vrijednosti determinanti ortogonalnih matrica? ± 1. A koje su moguće vrijednosti determinanti unitarnih matrica? $|\det(A)| = 1$.

Teorem (Binet-Cauchy)

Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti.

- Izvedite vezu između determinante matrice i determinante njezina inverza!
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
- Koje su moguće vrijednosti determinanti ortogonalnih matrica? ± 1. A koje su moguće vrijednosti determinanti unitarnih matrica? $|\det(A)| = 1$.
- Dakle, svaki operator simetrije u svakoj bazi ima matricu s determinantom 1 ili -1, a u svakoj ortonormiranoj bazi matrica mu je uz to i ortogonalna.

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Neka je dano n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots$. Kako pomoću skalarnog produkta možemo zapisati jednu linearnu jednadžbu s tim nepoznanicama?

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Neka je dano n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots$. Kako pomoću skalarnog produkta možemo zapisati jednu linearnu jednadžbu s tim nepoznanicama?

$$\langle a, x \rangle = b$$

Ako vektore koeficijenata $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kao retke matrice A, a slobodne članove $b_1, \ldots, b_m$ kao matricu-stupac b, vidimo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = b, \ A \in M_{m,n}, b \in M_{m,1}, x \in M_{n,1}$$

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Neka je dano n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots$. Kako pomoću skalarnog produkta možemo zapisati jednu linearnu jednadžbu s tim nepoznanicama?

$$\langle a, x \rangle = b$$

Ako vektore koeficijenata $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kao retke matrice A, a slobodne članove $b_1, \ldots, b_m$ kao matricu-stupac b, vidimo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = b, \; A \in M_{m,n}, b \in M_{m,1}, x \in M_{n,1}$$

Ako je $A \in M_n$, u kakvoj je vezi invertibilnost matrice A i broja rješenja sustava $Ax = b$?

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Neka je dano n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots$. Kako pomoću skalarnog produkta možemo zapisati jednu linearnu jednadžbu s tim nepoznanicama?

$$\langle a, x\rangle = b$$

Ako vektore koeficijenata $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kao retke matrice A, a slobodne članove $b_1, \ldots, b_m$ kao matricu-stupac b, vidimo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = b, \; A \in M_{m,n}, b \in M_{m,1}, x \in M_{n,1}$$

Ako je $A \in M_n$, u kakvoj je vezi invertibilnost matrice A i broja rješenja sustava $Ax = b$? Ako je A invertibilna, izvedite formulu za rješenje tog sustava!

Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

Neka je dano n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots$. Kako pomoću skalarnog produkta možemo zapisati jednu linearnu jednadžbu s tim nepoznanicama?

$$\langle a, x\rangle = b$$

Ako vektore koeficijenata $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ zapišemo kao retke matrice A, a slobodne članove $b_1, \ldots, b_m$ kao matricu-stupac b, vidimo da svaki sustav linearnih jednadžbi možemo zapisati kao

$$Ax = b, \ A \in M_{m,n}, b \in M_{m,1}, x \in M_{n,1}$$

Ako je $A \in M_n$, u kakvoj je vezi invertibilnost matrice A i broja rješenja sustava $Ax = b$? Ako je A invertibilna, izvedite formulu za rješenje tog sustava! $x = A^{-1}b$. Zašto ova formula nije baš korisna?

Cramerovo pravilo

Sustav linearnih jednadžbi tipa $n \times n$ može se matrično zapisati u obliku $AX = B$, gdje je

Cramerovo pravilo

Sustav linearnih jednadžbi tipa $n \times n$ može se matrično zapisati u obliku $AX = B$, gdje je $A \in M_n$, $X, B \in M_{n,1}$. On ima jedinstveno rješenje (Cramerov je) točno ako je matrica A invertibilna, dakle točno ako $D = \det A \neq 0$. U takvom se slučaju iznosi pojedinih komponenti rješenja mogu izračunati Cramerovim pravilom:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

za sve i, gdje su D_i je determinante matrica koje iz A dobijemo tako da im i-ti stupac zamijenimo s B.
Koje su prednosti ovog pravila? Mane?

Zadatak

Za kakve realne brojeve m i n sustav

$$mx + ny = 1, \quad x + y = mn$$

ima jedinstveno rješenje? Odredite ga!

Broj rješenja sustava linearnih jednadžbi

Homogeni sustav u matričnom obliku poprima oblik matrične jednadžbe

$$Ax = 0_{m,1}.$$

Sad je lako dokazati već poznati rezultat: Skup rješenja homogenog sustava je potprostor od $\mathbb{R}^n$ (odnosno od $M_{n,1}$).

Broj rješenja sustava linearnih jednadžbi

Homogeni sustav u matričnom obliku poprima oblik matrične jednadžbe

$$Ax = 0_{m,1}.$$

Sad je lako dokazati već poznati rezultat: Skup rješenja homogenog sustava je potprostor od $\mathbb{R}^n$ (odnosno od $M_{n,1}$). Koliko elemenata može imati vektorski prostor?

Broj rješenja sustava linearnih jednadžbi

Homogeni sustav u matričnom obliku poprima oblik matrične jednadžbe

$$Ax = 0_{m,1}.$$

Sad je lako dokazati već poznati rezultat: Skup rješenja homogenog sustava je potprostor od $\mathbb{R}^n$ (odnosno od $M_{n,1}$). Koliko elemenata može imati vektorski prostor?

Homogeni sustavi

Svaki homogeni sustav linearnih jednadžbi ili ima jedinstveno rješenje (nulvektor u $\mathbb{R}^n$) ili ih ima beskonačno mnogo.

Broj rješenja sustava linearnih jednadžbi

Homogeni sustav u matričnom obliku poprima oblik matrične jednadžbe

$$Ax = 0_{m,1}.$$

Sad je lako dokazati već poznati rezultat: Skup rješenja homogenog sustava je potprostor od $\mathbb{R}^n$ (odnosno od $M_{n,1}$). Koliko elemenata može imati vektorski prostor?

Homogeni sustavi

Svaki homogeni sustav linearnih jednadžbi ili ima jedinstveno rješenje (nulvektor u $\mathbb{R}^n$) ili ih ima beskonačno mnogo.

Ako je sustav $Ax = b$ nehomogen, pripadnim homogenim sustavom zovemo sustav $Ax = 0_{m,1}$. Neka je njegov prostor rješenja H.
Očito je moguće da sustav $Ax = b$ nema rješenja.
Ako ga ima, odaberemo jedno: x_P („partikularno rješenje”).

Ako je sustav $Ax = b$ nehomogen, pripadnim homogenim sustavom zovemo sustav $Ax = 0_{m,1}$. Neka je njegov prostor rješenja H.
Očito je moguće da sustav $Ax = b$ nema rješenja.
Ako ga ima, odaberemo jedno: x_P („partikularno rješenje").
Tada je (za svako rješenje $x_H \in H$ pripadnog homogenog sustava)

$$A(x_P + x_H) = Ax_P + Ax_H = b + 0_{m,1} = b,$$

tj. $x_P + x_H$ je rješenje od $Ax = b$.

Teorem

Svaki sustav linearnih jednadžbi, ukoliko ima više od jednog rješenja, ima ih beskonačno mnogo.

Svojstvene vrijednosti i vektori

Po čemu se vektori paralelni s osi rotacije ističu u odnosu na ostale vektore prostora (s obzirom na efekt koji rotacija na njih ima)?

Svojstvene vrijednosti i vektori

Po čemu se vektori paralelni s osi rotacije ističu u odnosu na ostale vektore prostora (s obzirom na efekt koji rotacija na njih ima)?

Postoje li vektori koje operator $X \mapsto AX$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fiksira?

Svojstvene vrijednosti i vektori

Po čemu se vektori paralelni s osi rotacije ističu u odnosu na ostale vektore prostora (s obzirom na efekt koji rotacija na njih ima)?

Postoje li vektori koje operator $X \mapsto AX$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fiksira?

Što je sa skalarnim operatorom $v \mapsto \pi v$?

Svojstvene vrijednosti i vektori

Po čemu se vektori paralelni s osi rotacije ističu u odnosu na ostale vektore prostora (s obzirom na efekt koji rotacija na njih ima)?
Postoje li vektori koje operator $X \mapsto AX$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fiksira?
Što je sa skalarnim operatorom $v \mapsto \pi v$?
Poopćenje gornjih ideja su svojstveni vektori: Svojstveni vektor linearnog operatora je vektor kojeg taj operator preslika u njegov skalarni višekratnik. Za kakve linearne operatore (domena, kodomena) ova definicija ima smisla?

Svojstvene vrijednosti i vektori

Po čemu se vektori paralelni s osi rotacije ističu u odnosu na ostale vektore prostora (s obzirom na efekt koji rotacija na njih ima)?

Postoje li vektori koje operator $X \mapsto AX$, gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fiksira?

Što je sa skalarnim operatorom $v \mapsto \pi v$?

Poopćenje gornjih ideja su svojstveni vektori: Svojstveni vektor linearnog operatora je vektor kojeg taj operator preslika u njegov skalarni višekratnik. Za kakve linearne operatore (domena, kodomena) ova definicija ima smisla? Postoji li neki vektor koji se sigurno svakim linearnim operatorom preslika u svoj skalarni višekratnik?

Definicija

Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. Za skalar λ kažemo da je *svojstvena vrijednost* *operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je*

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

U tom slučaju v zovemo *svojstvenim vektorom* *(operatora $\hat{A}$ s obzirom na svojstvenu vrijednost λ).*

Definicija

Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost *operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je*

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

U tom slučaju v zovemo svojstvenim vektorom *(operatora $\hat{A}$ s obzirom na svojstvenu vrijednost λ).*

Primjer

Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstveni vektori su valne funkcije, a pripadne svojstvene vrijednosti su energije sustava.

Definicija

Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

U tom slučaju v zovemo svojstvenim vektorom (operatora $\hat{A}$ s obzirom na svojstvenu vrijednost λ).

Primjer

Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstveni vektori su valne funkcije, a pripadne svojstvene vrijednosti su energije sustava.

Zadatak

Odredite sve svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore skalarnih operatora.

Ako je vektor v svojstveni vektor operatora $\hat{A}$, onda su svi njegovi skalarni višekratnici također svojstveni za $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A} v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Ako je vektor v svojstveni vektor operatora $\hat{A}$, onda su svi njegovi skalarni višekratnici također svojstveni za $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A} v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Dakle, ako operator ima svojstveni vektor koji pripada nekoj svojstvenoj vrijednosti λ, ima ih beskonačno mnogo. Štoviše: Skup

$$\{v \in V : \hat{A} v = \lambda v\}$$

je uvijek potprostor od V i zove se svojstveni potprostor (linearnog operatora $\hat{A}$ određen svojstvenom vrijednošću λ). Ako je on dimenzije veće od 1, svojstvenu vrijednost λ zovemo degeneriranom.

Ako je vektor v svojstveni vektor operatora $\hat{A}$, onda su svi njegovi skalarni višekratnici također svojstveni za $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A} v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Dakle, ako operator ima svojstveni vektor koji pripada nekoj svojstvenoj vrijednosti λ, ima ih beskonačno mnogo. Štoviše: Skup

$$\{v \in V : \hat{A} v = \lambda v\}$$

je uvijek potprostor od V i zove se svojstveni potprostor (linearnog operatora $\hat{A}$ određen svojstvenom vrijednošću λ). Ako je on dimenzije veće od 1, svojstvenu vrijednost λ zovemo degeneriranom. Skup svih svojstvenih vrijednosti se (za operatore na konačnodimenzionalnim prostorima) naziva spektar linearnog operatora.

Primjer

U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem $n > 1$ *i azimutnim kvantnim brojem* $0 < l < n$ *dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za* $l = 1$ *i* $n = 2$ *imamo tri tzv. 2p-orbitale, tj. tri linearno nezavisna svojstvena vektora od* $\hat{H}$*, koje opisuju elektrone s istom energijom).*

Zadatak

Odredite spektar i sve svojstvene potprostore za sve osnovne operatore simetrija na $V^2(O)$ *i* $V^3(O)$*! Koje svojstvene vrijednosti su degenerirane?*

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Neka je V konačne dimenzije n i $\hat{A} : V \to V$ linearan operator prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V:

$$Av = \lambda v$$

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Neka je V konačne dimenzije n i $\hat{A} : V \to V$ linearan operator prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V:

$$Av = \lambda v \ldots \quad (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Neka je V konačne dimenzije n i $\hat{A} : V \to V$ linearan operator prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V:

$$Av = \lambda v \ldots \quad (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Za koje λ taj homogeni $n \times n$-sustav ima netrivijalnih rješenja?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Neka je V konačne dimenzije n i $\hat{A} : V \to V$ linearan operator prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V:

$$Av = \lambda v \ldots \quad (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Za koje λ taj homogeni $n \times n$-sustav ima netrivijalnih rješenja? Gornji sustav ima nejedinstveno rješenje točno ako

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta se jednadžba zove karakterističnom jednadžbom operatora $\hat{A}$ (odnosno matrice A). Je li bitno koju matricu operatora smo uzeli?

Određivanje svojstvenih vrijednosti i vektora

Zadatak

Što možete reći o spektru neinvertibilne matrice (neinvertibilnog operatora)?

Neka je V konačne dimenzije n i $\hat{A} : V \to V$ linearan operator prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V:

$$Av = \lambda v \ldots \quad (A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}$$

Za koje λ taj homogeni $n \times n$-sustav ima netrivijalnih rješenja? Gornji sustav ima nejedinstveno rješenje točno ako

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta se jednadžba zove karakterističnom jednadžbom operatora $\hat{A}$ (odnosno matrice A). Je li bitno koju matricu operatora smo uzeli? Nije, jer sve matrice jednog operatora imaju istu determinantu.

Karakteristična jednadžba je polinomijalna jednadžba stupnja $n = \dim(V)$.

Karakteristična jednadžba je polinomijalna jednadžba stupnja $n = \dim(V)$. Njezina rješenja su svojstvene vrijednosti operatora.

Karakteristična jednadžba je polinomijalna jednadžba stupnja $n = \dim(V)$. Njezina rješenja su svojstvene vrijednosti operatora. Svojstvene vektore određujemo tako da za svaku svojstvenu vrijednost λ zasebno rješavamo homogeni sustav $(A - \lambda I)x = 0$.

Zadatak

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore operatora zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je polinomijalna jednadžba stupnja $n = \dim(V)$. Njezina rješenja su svojstvene vrijednosti operatora. Svojstvene vektore određujemo tako da za svaku svojstvenu vrijednost λ zasebno rješavamo homogeni sustav $(A - \lambda I)x = 0$.

Zadatak

Odredite svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore operatora zadanog matricom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ako je matrica A dijagonalna, koji su vektori svojstveni vektori odgovarajućeg operatora? A svojstvene vrijednosti?

Problem dijagonalizacije

Teorem

Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. On u bazi $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ ima dijagonalnu matricu ako i samo ako se (e) sastoji od svojstvenih vektora od $\hat{A}$. U tom slučaju na dijagonali su redom svojstvene vrijednosti λ_i $(i = 1, \dots, n)$ kojima odgovaraju svojstveni vektori e_i.

Problem dijagonalizacije

Teorem

Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. On u bazi $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ima dijagonalnu matricu ako i samo ako se (e) sastoji od svojstvenih vektora od $\hat{A}$. U tom slučaju na dijagonali su redom svojstvene vrijednosti λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ kojima odgovaraju svojstveni vektori e_i.

Teorem

Ako je neka matrica linearnog operatora na realnom/kompleksnom (konačnodimenzionalnom) prostoru simetrična/hermitska,[a] sve su simetrične i sigurno postoji baza (koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora) u kojoj taj operator ima dijagonalnu matricu.

---

[a] Kod hermitske matrice brojevi na dijagonali su realni, dakle taj operator ima samo realne svojstvene vrijednosti.