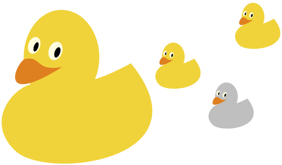
Uvod u obične diferencijalne jednadžbe

Franka Miriam Brückler



Primjer

Deriviranje po x je linearan operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *(kao domenu i kodomenu uzmemo npr. vektorski prostor realnih funkcija jedne varijable (sa zajedničkom domenom) koje posjeduju derivacije svih redova):*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f'.$$

Primjer

Deriviranje po x je linearan operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *(kao domenu i kodomenu uzmemo npr. vektorski prostor realnih funkcija jedne varijable (sa zajedničkom domenom) koje posjeduju derivacije svih redova):*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f'.$$

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti operatora deriviranja su onda funkcije f *odnosno skalari (realni)* λ *za koje je*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \lambda f,$$

tj. $f'(x) = \lambda f(x)$ *za sve* x*. Vidimo da je problem određivanja svojstvenih vektora i vrijednosti za operator deriviranja diferencijalna jednadžba (prvog reda).*

Definicija (Obična diferencijalna jednadžba)

Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je F izraz ovisan o više varijabli (formalno: skalarna funkcija $n+2$ varijabli). Rješenje takve jednadžbe na intervalu I je funkcija $y : I \to \mathbb{R}$ čije uvrštavanje u jednadžbu daje istinitu jednakost za svaku vrijednost nezavisne varijable $t \in I$. Red (stupanj) obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije nepoznate funkcije koja se u njoj pojavljuje.

Osnovna tehnika u pozadini rješavanja diferencijalnih jednadžbi je integriranje:

Primjer

$$y' = \sin x$$

Osnovna tehnika u pozadini rješavanja diferencijalnih jednadžbi je integriranje:

Primjer

$$y' = \sin x$$

$$\int y' \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \mathrm{d}x, \quad y(x) = -\cos x + C.$$

U primjenama: Najčešće je nezavisna varijabla nepoznate funkcije vrijeme t, a red jednadžbe je 1 ili 2.
U kemiji: najviše u kemijskoj kinetici.

Primjer

Kretanje čestice mase m po pravcu (opisano pozicijom $x(t)$ u trenutku t) pod utjecajem sile $F(t)$ opisano je drugim Newtonovim zakonom, koji poprima forum diferencijalne jednadžbe reda 2:

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{x}.$$

Primjer

Kretanje čestice mase m po pravcu (opisano pozicijom $x(t)$ u trenutku t) pod utjecajem sile $F(t)$ opisano je drugim Newtonovim zakonom, koji poprima forum diferencijalne jednadžbe reda 2:

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{x}.$$

Npr. za slobodni pad je $F(t) = m\,g$, dakle

$$m\ddot{z} = -mg.$$

U tom jednostavnom slučaju rješenje dobijemo tako da dvaput integriramo po t: $\dot{z}(t) = -gt + C_1$,

Primjer

Kretanje čestice mase m po pravcu (opisano pozicijom $x(t)$ u trenutku t) pod utjecajem sile $F(t)$ opisano je drugim Newtonovim zakonom, koji poprima forum diferencijalne jednadžbe reda 2:

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{x}.$$

Npr. za slobodni pad je $F(t) = m\,g$, dakle

$$m\ddot{z} = -mg.$$

U tom jednostavnom slučaju rješenje dobijemo tako da dvaput integriramo po t: $\dot{z}(t) = -gt + C_1$, $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$.

Vrste rješenja

Definicija (Opće, partikularno i singularno rješenje)

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe reda n je njeno rješenje koje sadrži n neodređenih konstanti. Partikularno rješenje je ono koje odgovara uvrštavanju konkretnih vrijednosti konstanti u opće rješenje. Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe je njeno rješenje koje se ne može dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti u konstante općeg rješenja.

Vrste rješenja

Definicija (Opće, partikularno i singularno rješenje)

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe reda n je njeno rješenje koje sadrži n neodređenih konstanti. Partikularno rješenje je ono koje odgovara uvrštavanju konkretnih vrijednosti konstanti u opće rješenje. Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe je njeno rješenje koje se ne može dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti u konstante općeg rješenja.

Primjer

Opće rješenje Clairaut-ove jednadžbe $y = xy' + (y')^2$ je $y(x) = Cx + C^2$. No, i funkcija $y_S(x) = -\frac{1}{4}x^2$ je također rješenje, koje ni za koji C ne možemo dobiti iz općeg rješenja; y_S je singularno rješenje Clairautove jednadžbe.

Početni uvjeti

Ukoliko ishodište stavimo u mjesto otkud je tijelo počelo padati i pretpostavimo da je samo ispušteno, a ne bačeno, onda su nam poznata i dva dodatna podatka koja čine početni uvjet za gornju jednadžbu:

$$z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}, \quad z'(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Dakle, rješenje koje opisuje poziciju tijela koje je ispušteno s pozicije $z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ je

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Početni uvjeti

Ukoliko ishodište stavimo u mjesto otkud je tijelo počelo padati i pretpostavimo da je samo ispušteno, a ne bačeno, onda su nam poznata i dva dodatna podatka koja čine početni uvjet za gornju jednadžbu:

$$z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}, \quad z'(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Dakle, rješenje koje opisuje poziciju tijela koje je ispušteno s pozicije $z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ je

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Definicija (Početni uvjet)

Diferencijalna jednadžba $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *je zadana s početnim uvjetom ako su poznate vrijednosti* $y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$ *za neku konkretnu vrijednost varijable* t_0.

Metoda separacije varijabli

Neke diferencijalne jednadžbe 1. reda mogu se zapisati u obliku

$$y' = f(t)g(y).$$

Metoda separacije varijabli

Neke diferencijalne jednadžbe 1. reda mogu se zapisati u obliku

$$y' = f(t)g(y).$$

Takve diferencijalne jednadžbe rješavaju se ovako:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)g(y) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t,$$

Metoda separacije varijabli

Neke diferencijalne jednadžbe 1. reda mogu se zapisati u obliku

$$y' = f(t)g(y).$$

Takve diferencijalne jednadžbe rješavaju se ovako:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)g(y) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Radioaktivni raspad

Brzina raspadanja razmjerna je trenutnoj brojnosti radioaktivnih atoma:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

(λ je pozitivna konstanta).

Radioaktivni raspad

Brzina raspadanja razmjerna je trenutnoj brojnosti radioaktivnih atoma:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

(λ je pozitivna konstanta). Rješenje je

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t).$$

Općenito, procesi kod kojih je brzina promjene praćene veličine y u svakom trenutku t razmjerna iznosu te veličine zovu se eksponencijalnim procesima. Kako može izgledati graf takve veličine y?

Logistička jednadžba

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje rasta: Maksimalni kapacitet okoline (opisan konstantom K).

Logistička jednadžba

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje rasta: Maksimalni kapacitet okoline (opisan konstantom K). Ideja logističkog modela je sljedeća: Sve dok je $N(t)$ puno manji od K, rast je eksponencijalan, no što je $N(t)$ bliži K, to se rast više usporava. Kako bi izgledao graf takve ovisnosti N o t?

Logistička jednadžba

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje
rasta: Maksimalni kapacitet okoline (opisan konstantom K).
Ideja logističkog modela je sljedeća: Sve dok je $N(t)$ puno manji od K, rast je eksponencijalan, no što je $N(t)$ bliži K, to se rast više usporava. Kako bi izgledao graf takve ovisnosti N o t?

$$\frac{K-N}{K} \approx 1, \ N << K; \quad \frac{K-N}{K} \to 0, \ N \to K$$

Logistička jednadžba

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje rasta: Maksimalni kapacitet okoline (opisan konstantom K).
Ideja logističkog modela je sljedeća: Sve dok je $N(t)$ puno manji od K, rast je eksponencijalan, no što je $N(t)$ bliži K, to se rast više usporava. Kako bi izgledao graf takve ovisnosti N o t?

$$\frac{K-N}{K} \approx 1, \ N << K; \qquad \frac{K-N}{K} \to 0, \ N \to K$$

$$N' = rN \cdot \frac{K-N}{K} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \qquad N(0) = N_0$$

Napomena

Logistička jednadžba opisuje mnoge prirodne zakonitosti: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ...

Metodom separacije varijabli:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Napomena

Logistička jednadžba opisuje mnoge prirodne zakonitosti: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ...

Metodom separacije varijabli:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Uočimo: Budući da je $N_0 < K$, prirodna domena od N je cijeli $\mathbb{R}$, a N poprima samo pozitivne vrijednosti manje od K.

Napomena

Logistička jednadžba opisuje mnoge prirodne zakonitosti: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ...

Metodom separacije varijabli:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Uočimo: Budući da je $N_0 < K$, prirodna domena od N je cijeli $\mathbb{R}$, a N poprima samo pozitivne vrijednosti manje od K. Budući da s porastom t $e^{-rt} \to 0$, vidimo i da je $N = K$ HA.

Napomena

Logistička jednadžba opisuje mnoge prirodne zakonitosti: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ...

Metodom separacije varijabli:

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$

Uočimo: Budući da je $N_0 < K$, prirodna domena od N je cijeli $\mathbb{R}$, a N poprima samo pozitivne vrijednosti manje od K. Budući da s porastom t $e^{-rt} \to 0$, vidimo i da je $N = K$ HA. Nadalje, budući da je $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) > 0$ za sve t, N je rastuća.

Deriviranjem logističke jednadžbe dobivamo

$$N'' = rN' - \frac{2rNN'}{K} = r^2 N\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

Deriviranjem logističke jednadžbe dobivamo

$$N'' = rN' - \frac{2rNN'}{K} = r^2 N \left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

Od svih tih faktora jedini koji može biti 0 je zadnji, i to ako je $N = K/2$ (koji je pripadni t?), i tu N'' mijenja predznak, tj. imamo točku infleksije.

Deriviranjem logističke jednadžbe dobivamo

$$N'' = rN' - \frac{2rNN'}{K} = r^2 N \left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{2N}{K}\right).$$

Od svih tih faktora jedini koji može biti 0 je zadnji, i to ako je $N = K/2$ (koji je pripadni t?), i tu N'' mijenja predznak, tj. imamo točku infleksije.

Primjer

Pri nekom malom jezeru uvjeti su prikladni za preživljavanje najviše 100 *pataka. Na to jezero naselimo par pataka (patka i patku). Nakon* 19 *godina uz nepromijenjene uvjete pri tom će jezeru živjeti* 12 *pataka. Nakon koliko godina će se porast broja pataka početi usporavati? Skicirajte ovisnost broja pataka o proteklom broju godina za prvih* 70 *godina od naseljenja tog para pataka!*

Osnovni pojmovi kemijske kinetike

- Stehiometrijski koeficijenti (oznaka: ν) reaktanata su negativni, a produkata pozitivni.

Osnovni pojmovi kemijske kinetike

- Stehiometrijski koeficijenti (oznaka: ν) reaktanata su negativni, a produkata pozitivni.
- Brzina reakcije je

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t},$$

gdje je J proizvoljni sudionik reakcije, a [J] njegova koncentracija u trenutku t.

Osnovni pojmovi kemijske kinetike

- Stehiometrijski koeficijenti (oznaka: ν) reaktanata su negativni, a produkata pozitivni.
- Brzina reakcije je

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t},$$

  gdje je J proizvoljni sudionik reakcije, a [J] njegova koncentracija u trenutku t.
- Za pomoćnu veličinu x vrijedi $x(0) = 0$
- Slijedi:

$$(\heartsuit) \quad [\mathrm{J}] = [\mathrm{J}]_0 + \nu_\mathrm{J} \cdot x.$$

  Stoga ako znamo jedan [J], možemo odrediti koncentraciju svakog drugog sudionika reakcije A:

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 + \nu_\mathrm{A} \frac{[\mathrm{J}] - [\mathrm{J}]_0}{\nu_\mathrm{J}}.$$

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije:

$$v = k \cdot [\mathrm{J}_1]^{n_1} \cdot [\mathrm{J}_2]^{n_2} \cdot \ldots,$$

gdje su J_1, J_2, … reaktanti.

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije:

$$v = k \cdot [\mathrm{J}_1]^{n_1} \cdot [\mathrm{J}_2]^{n_2} \cdot \ldots,$$

gdje su J_1, J_2, ... reaktanti.Zbroj $n = \sum n_i$ se zove red reakcije, a brojevi n_i se zovu parcijalni redovi reakcije obzirom na reaktante J_i). Veličina k (ovisna o temperaturi, ali konstantna pri danoj temperaturi) zove se koeficijent brzine reakcije.

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije:

$$v = k \cdot [\mathrm{J}_1]^{n_1} \cdot [\mathrm{J}_2]^{n_2} \cdot \ldots,$$

gdje su J_1, J_2, … reaktanti. Zbroj $n = \sum n_i$ se zove red reakcije, a brojevi n_i se zovu parcijalni redovi reakcije obzirom na reaktante J_i). Veličina k (ovisna o temperaturi, ali konstantna pri danoj temperaturi) zove se koeficijent brzine reakcije.
Diferencijalni oblik zakona brzine reakcije:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}_1]_0 + \nu_{\mathrm{J}_1} \cdot x)^{n_1}([\mathrm{J}_2]_0 + \nu_{\mathrm{J}_2} \cdot x)^{n_2} \ldots.$$

Kojeg je reda ta diferencijalna jednažba?

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije:

$$v = k \cdot [\mathrm{J}_1]^{n_1} \cdot [\mathrm{J}_2]^{n_2} \cdot \ldots,$$

gdje su J_1, J_2, ... reaktanti.Zbroj $n = \sum n_i$ se zove red reakcije, a brojevi n_i se zovu parcijalni redovi reakcije obzirom na reaktante J_i). Veličina k (ovisna o temperaturi, ali konstantna pri danoj temperaturi) zove se koeficijent brzine reakcije.

Diferencijalni oblik zakona brzine reakcije:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}_1]_0 + \nu_{\mathrm{J}_1} \cdot x)^{n_1}([\mathrm{J}_2]_0 + \nu_{\mathrm{J}_2} \cdot x)^{n_2} \ldots.$$

Kojeg je reda ta diferencijalna jednažba? Njezino rješenje naziva se integriranim oblikom zakona brzine reakcije.

Reakcije n-tog reda, prvi tip

Promotrimo reakcije reda n na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant J. Tada je zakon brzine oblika

Reakcije n-tog reda, prvi tip

Promotrimo reakcije reda n na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant J. Tada je zakon brzine oblika

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{J}}}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}]_0 + \nu_{\mathrm{J}} \cdot x)^n$$

Reakcije n-tog reda, prvi tip

Promotrimo reakcije reda n na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant J. Tada je zakon brzine oblika

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{J}}}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}]_0 + \nu_{\mathrm{J}} \cdot x)^n$$

Za $n = 1$ ovo je poput radioaktivnog raspada, za $n = 0$ brzina je neovisna o trenutnim koncentracijama sudionika.

Zadatak

Odredite odgovarajući integrirani oblik za sve n.

Reakcije *n*-tog reda, prvi tip

Promotrimo reakcije reda n na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant J. Tada je zakon brzine oblika

$$\frac{1}{\nu_{\mathrm{J}}}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}]_0 + \nu_{\mathrm{J}} \cdot x)^n$$

Za $n = 1$ ovo je poput radioaktivnog raspada, za $n = 0$ brzina je neovisna o trenutnim koncentracijama sudionika.

Zadatak

Odredite odgovarajući integrirani oblik za sve n.

Zadatak

Za $n = 0, 1, 2$ skicirajte graf ovisnosti koncentracije bilo kojeg reaktanta ili produkta o vremenu.

Zadatak

Neka reakcija stehiometrije $A + 2\,B \longrightarrow C$ *je prvog reda i brzina joj ovisi samo o koncentraciji reaktanta A. Početne koncentracije od A i B su jednake i iznose* $0{,}10\,\mathrm{mol/L}$*, a koeficijent brzine reakcije iznosi* $0{,}50\,\mathrm{s}^{-1}$*. Nakon koliko vremena će koncentracija od A pasti na pola početne koncentracije? Ovisi li to vrijeme o početnoj koncentraciji od A? Kolika će u tom trenutku biti koncentracija od B?*

Zadatak

Neka reakcija stehiometrije $A + 2\,B \longrightarrow C$ *je prvog reda i brzina joj ovisi samo o koncentraciji reaktanta A. Početne koncentracije od A i B su jednake i iznose* $0{,}10\,\mathrm{mol/L}$, *a koeficijent brzine reakcije iznosi* $0{,}50\,\mathrm{s}^{-1}$. *Nakon koliko vremena će koncentracija od A pasti na pola početne koncentracije? Ovisi li to vrijeme o početnoj koncentraciji od A? Kolika će u tom trenutku biti koncentracija od B?*

Zadatak

Neka reakcija stehiometrije $2\,A + B + 3\,C \longrightarrow D$ *je 3. reda (parcijalno prvog obzirom na svakog od reaktanata). Neka su početne koncentracije reaktanata A, B i C redom a, b i c. Odredite formulu ovisnosti umnoška koncentracija od A, B i C o vremenu.*

Homogene diferencijalne jednadžbe

Neke diferencijalne jednadžbe mogu se supstitucijom svesti na jednadžbe sa separiranim varijablama, npr. homogene diferencijalne jednadžbe. To su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Homogene diferencijalne jednadžbe rješavaju se supstitucijom

$$u = \frac{y}{t}.$$

Dakle, $u' = \frac{ty'-y}{t^2} = \frac{y'}{t} - \frac{u}{t}$, iz čega slijedi $tu' = y' - u$, tj.

$$y' = tu' + u.$$

Time naša jednadžba poprima oblik

$$tu' + u = F(u),$$

a ona se može riješiti separacijom varijabli.

Primjer

Jednadžba $ty' = 5t + 2y$ *je homogena:*

$$y' = 5 + 2\frac{y}{t}.$$

Supstitucija $u = \frac{y}{t}$ *daje* $tu' = 5 + u$. *Separacija varijabli prevodi ju u oblik*

$$\frac{\mathrm{d}u}{5+u} = \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Integriranje daje $\ln|5+u| = \ln|t| + C_0$, *odnosno*

$$5 + \frac{y}{t} = Ct.$$

Stoga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = Ct^2 - 5t.$$