Skalarne funkcije više varijabli i parcijalne derivacije

Franka Miriam Brückler

8. svibnja 2024.

Uvod u funkcije više varijabli

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\mathrm{mol}}, y = \frac{T}{\mathrm{K}}, z = \frac{V}{\mathrm{L}}, f == \frac{p}{\mathrm{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je

Uvod u funkcije više varijabli

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\mathrm{mol}}, y = \frac{T}{\mathrm{K}}, z = \frac{V}{\mathrm{L}}, f == \frac{p}{\mathrm{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ (prirodna domena bila bi

Uvod u funkcije više varijabli

Jednadžba stanja idealnog plina

$$p = \frac{nRT}{V} \Leftrightarrow f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$$

uz

$$x = \frac{n}{\mathrm{mol}}, y = \frac{T}{\mathrm{K}}, z = \frac{V}{\mathrm{L}}, f == \frac{p}{\mathrm{Pa}}.$$

Pritom je kodomena od f skup $\mathbb{R}$, a domena je $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z > 0\}$ (prirodna domena bila bi $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$).

Definicija (Skalarne funkcije više varijabli)

Skalarna (realna) funkcija od n (nezavisnih) varijabli je funkcija koja uređenim n-torkama brojeva pridružuje realne brojeve, tj. funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$, a kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}$.

Primjer

Ako je $f(x,z) = x^2 - 2xz - 3y^2$, *onda je* $f(2,1) =$

Primjer

Ako je $f(x,z) = x^2 - 2xz - 3y^2$, *onda je* $f(2,1) = -3$, *a* $f(1,2) =$

Primjer

Ako je $f(x,z) = x^2 - 2xz - 3y^2$, *onda je* $f(2,1) = -3$, *a* $f(1,2) = -15$.

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 *kojoj je prirodna domena čitav* $\mathbb{R}^4$ *i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u* $(0,0,0,0)$.

Primjer

Ako je $f(x,z) = x^2 - 2xz - 3y^2$*, onda je* $f(2,1) = -3$*, a* $f(1,2) = -15$*.*

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciju četiriju varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 *kojoj je prirodna domena čitav* $\mathbb{R}^4$ *i izračunajte koju vrijednost ta funkcija postiže u* $(0,0,0,0)$*.*

Zadatak

Osmislite neko pravilo koje bi predstavljalo skalarnu funkciji dviju varijabli x, y *kojoj je domena* $\mathbb{R}^2$ *bez ishodišta* $(0,0)$*.*

Grafovi skalarnih funkcija više varijabli

Kako se definira graf funkcije?

Grafovi skalarnih funkcija više varijabli

Kako se definira graf funkcije? Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n?

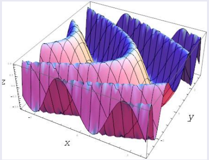
Grafovi skalarnih funkcija više varijabli

Kako se definira graf funkcije? Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n? Vidimo: Graf skalarne funkcije n varijabli nalazi se u $\mathbb{R}^{n+1}$. Stoga se grafovi skalarnih funkcija mogu vizualno prikazati u koordinatnom sustavu samo u slučaju jedne ili dviju varijabli.

Grafovi skalarnih funkcija više varijabli

Kako se definira graf funkcije? Graf funkcije $f : D \to K$ je skup svih uređenih parova $(X, f(X))$ gdje je $X \in D$. Skalarnim funkcijama s n varijabli je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a $K \subseteq \mathbb{R}$. U kojem se skupu nalaze elementi grafa skalarne funkcije dviju varijabli? Triju? Njih n? Vidimo: Graf skalarne funkcije n varijabli nalazi se u $\mathbb{R}^{n+1}$.
Stoga se grafovi skalarnih funkcija mogu vizualno prikazati u koordinatnom sustavu samo u slučaju jedne ili dviju varijabli.
Graf skalarne funkcije dviju varijabli se može prikazati u koordinatnom sustavu u prostoru i sastoji se od točaka s koordinatama $(x, y, f(x, y))$, gdje je $(x, y) \in D$.
Stoga se domena skalarne funkcije dviju varijabli vizualizira kao podskup (x, y)-koordinatne ravnine, a za pojedinu točku iz domene njoj pridružena vrijednost $f(x, y)$ je aplikata točke grafa iznad (ili ispod) točke $(x, y, 0)$.

Primjer

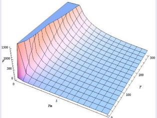


$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \sin(x + y^2)$$

Primjer

Tlak idealnog plina možemo shvatiti i kao funkciju dviju varijabli, molarnog volumena $V_\mathrm{m} = V/n$ i temperature:

$$p(V_\mathrm{m}, T) = R\frac{T}{V_\mathrm{m}}.$$



Nivo-krivulje skalarnih funkcija dviju varijabli

Primjer

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 *sa središtem* $(-2, 3)$*?*

Nivo-krivulje skalarnih funkcija dviju varijabli

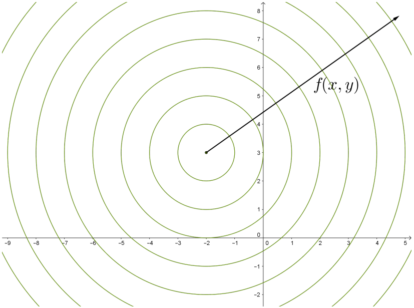
Primjer

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 *sa središtem* $(-2,3)$*?*
Ona se sastoji od točaka (x,y) *za koje izraz* $f(x,y) = (x+2)^2 + (y-3)^2$ *poprima vrijednost* 25. *Koje su točke ravnine za koje isti izraz poprima vrijednost* 1*?* 0*?* -1*?*

Nivo-krivulje skalarnih funkcija dviju varijabli

Primjer

Kako u Kks-u glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$?
Ona se sastoji od točaka (x, y) za koje izraz $f(x, y) = (x+2)^2 + (y-3)^2$ poprima vrijednost 25. Koje su točke ravnine za koje isti izraz poprima vrijednost 1? 0? −1?



Neka je pravilom $f(x, y)$ zadana skalarna funkcija dviju nezavisnih varijabli x i y.

Za različite vrijednosti (x, y), iznos zavisne varijable $f(x, y)$ je također realan broj.

Ako fiksiramo „ciljani" iznos zavisne varijable a, sve točke koje zadovoljavaju

$$f(x, y) = a$$

čine krivulju u ravnini koju nazivamo nivo-krivuljom funkcije f — to je ono što smo u Matematici 1 nazivali implicitno zadanom funkcijom: Jednadžbom $f(x, y) = a$ je implicitno zadana funkcija jedne varijable y: Za svaku točku (x_0, y_0) na toj krivulji se, osim ako je u njoj tangenta na krivulju paralelna s y-osi, dio krivulje oko te točke može shvatiti kao graf funkcije g jedne varijable x (čija je domena neki interval oko x_0).

Za razne a dobivamo različite nivo-krivulje i one u određenom smislu vizualiziraju ponašanje od f.

Zadatak

Zašto se nivo-krivulje uvijek nalaze unutar domene od f?

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-krivulja funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$?

Zadatak

Zašto se nivo-krivulje uvijek nalaze unutar domene od f?

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-krivulja funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable?

Zadatak

Zašto se nivo-krivulje uvijek nalaze unutar domene od f?

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-krivulja funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable? Oko kojih se točaka može njen dio shvatiti kao graf funkcije jedne varijable?

Zadatak

Zašto se nivo-krivulje uvijek nalaze unutar domene od f?

Zadatak

Kako izgleda nulta nivo-krivulja funkcije zadane s $f(x, y) = x^4 - x^2 + y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable? Oko kojih se točaka može njen dio shvatiti kao graf funkcije jedne varijable?

Zadatak

Skicirajte nivo-krivulje za tlak idealnog plina kao funkciju molarnog volumena i temperature.

Grafiški prikaz skalarnih funkcija više varijabli

Za skalarne funkcije s više od dvije varijable možemo crtati grafove funkcije po jedne nezavisne varijable uz fiksiranje vrijednosti svih ostalih nezavisnih varijabli:

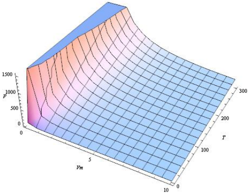
Primjer

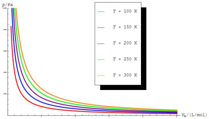
Graf ovisnosti tlaka idealnog plina o njegovoj množini, temperaturi i volumenu nalazi se u četverodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^4$*. No, u svrhu njegove vizualizacije mogu se crtati grafovi sljedećih triju realnih funkcija po jedne varijable:*

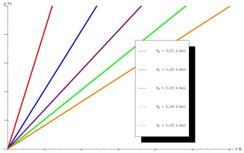
- $p_{T,V}(n) = \frac{RT}{V} \cdot n$, *koja za svaku odabranu vrijednost* T *i* V *ovisi samo o* n.
- $p_{n,V}(T) = \frac{nR}{V} \cdot T$, *koja za svaku odabranu vrijednost* n *i* V *ovisi samo o* T.
- $p_{n,T}(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}$, *koja za svaku odabranu vrijednost* n *i* T *ovisi samo o* V.

Primjer

Za slučaj tlaka idealnog plina kao funkcije molarnog volumena i temperature, ovim pristupom dobijemo izoterme (niz grafova funkcija oblika $p_T(V_m) = RT/V_m$ za različite fiksirane vrijednosti T) i izohore (niz grafova funkcija oblika $p_{V_m}(T) = RT/V_m$ za različite fiksirane vrijednosti V_m).

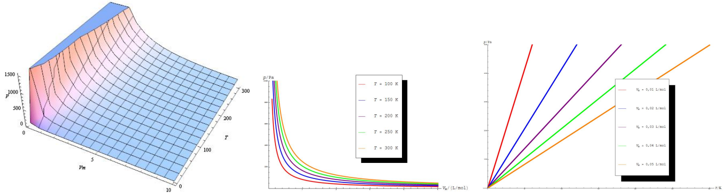






Primjer

Za slučaj tlaka idealnog plina kao funkcije molarnog volumena i temperature, ovim pristupom dobijemo izoterme (niz grafova funkcija oblika $p_T(V_m) = RT/V_m$ za različite fiksirane vrijednosti T) i izohore (niz grafova funkcija oblika $p_{V_m}(T) = RT/V_m$ za različite fiksirane vrijednosti V_m).



Vidimo: Izohore i izoterme su točno krivulje na grafu od $p = p(V_m, T)$ koje dobivamo presjecima s ravninama paralelnim (p, T)-ravnini (izohore) odnosno (p, V_m)-ravnini (izoterme).

Izo-krivulje skalarnih funkcija dviju varijabli

Dakle, skalarne funkcije $z = f(x, y)$ dviju varijabli možemo vizualizirati trima nizovima grafova: izo-x-icama (u (y, z)-ravnini crtamo $z = f(x_0, y)$), izo-y-icama (u (x, z)-ravnini crtamo $z = f(x, y_0)$), izo-z-icama (tj. nivo-krivuljama, u (x, y)-ravnini crtamo $z_0 = f(x, y)$),

Zadatak

Za sljedeće četiri skalarne funkcije dviju varijabli nacrtajte sva tri niza izo-krivulja i zaključite kako izgledaju grafovi tih funkcija:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.
b) $g(x, y) = x^2$.
c) $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.
d) $s(x, y) = x^2 - y^2$.

Parcijalne derivacije

Ako promatramo bilo koju od izo-krivulja dobivenih fiksiranjem svih osim po jedne nezavisne varijable, ona je graf realne funkcije jedne varijable: Zavisna varijabla je ista kao i kad gledamo ovisnost o svim nezavisnim varijablama, ali je ostala samo po jedna nezavisna. Takvu funkciju naravno možemo derivirati po toj nezavisnoj varijabli. Kako bismo to mogli ponoviti za drugu izo-krivulju, sad je važno označiti po kojoj varijabli deriviramo:

Primjer

$$p_T(V_\mathrm{m}) = \frac{RT}{V_\mathrm{m}} \Rightarrow p'_T(V_\mathrm{m}) = -\frac{RT}{V_\mathrm{m}^2}.$$

Oznaka za ovo nije p'_T*, nego:* $\dfrac{\partial p}{\partial V_\mathrm{m}}$ *ili* $\left(\dfrac{\partial p}{\partial V_\mathrm{m}}\right)_T$*. Kakva je ta derivacija po predznaku? Što nam to i o kojem grafu govori?*

Parcijalna derivacija prvog reda skalarne funkcije f po jednoj njenoj varijabli x_i je prva derivacija skalarne funkcije f nezavisne varijable x_i uzevši isto pravilo, ali tako da se sve ostale nezavisne varijable tijekom deriviranja smatraju konstantnim:

Definicija (Parcijalne derivacije prvog reda)

Neka je $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ skalarna funkcija s n varijabli x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Parcijalna derivacija (prvog reda) od f po varijabli x_i u točki $X \in D$ je, ako postoji, limes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X + e_i \Delta x) - f(X)}{\Delta x}.$$

Napomena

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ je linearan operator na prostoru skalarnih funkcija kojima je x_i jedna od varijabli i za koje derivacija po x_i postoji.

U daljnjem pretpostavljamo da sve skalarne funkcije više varijabli posjeduju sve parcijalne derivacije prvog reda.

Parcijalne derivacije u kemijskoj termodinamici

Primjer

Ako je Y neko tzv. ekstenzivno svojstvo sustava, pripadni reakcijski gradijent je

$$\Delta_r Y = \frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

gdje je doseg kemijske reakcije ξ definiran sa

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}n_\mathrm{J}} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}},$$

a J *bilo koji sastojak sustava. Osobito često se koristi reakcijski gradijent Gibbsove energije G, zvan reakcijska Gibbsova energija:*

$$\Delta_r G = \frac{\partial G}{\partial \xi}.$$

Primjer

Unutrašnja energija U plina općenito ovisi o temperaturi T, volumenu V, tlaku p i sastavu (množinama sastojaka: $n_1, n_2, \dots, n_m$). Drugim riječima, U se može shvatiti kao skalarna funkcija $m+3$ varijable. U izohornim okolnostima ($V =$const.) radi se o funkciji $m+2$ varijable[a], a njena parcijalna derivacija po varijabli T zove se izohornim toplinskim kapacitetom:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n_1,n_2,\dots,n_m}.$$

Koje su varijable funkcije C_V, tj. o čemu ovisi izohorni toplinski kapacitet plina?

[a] Zapravo, njih $m+1$ jer jednadžba stanja izražava p u ovisnosti o ostalim varijablama.

Uvijek vrijedi: Svaka parcijalna derivacija svake skalarne funkcije ovisi o istim varijablama o kojima i polazna funkcija.

Primjer

$$f(x,y) = x + e^y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + e^y$$

Uvijek vrijedi: Svaka parcijalna derivacija svake skalarne funkcije ovisi o istim varijablama o kojima i polazna funkcija.

Primjer

$$f(x,y) = x + e^y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + e^y$$

Iznos parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial \heartsuit}(\heartsuit_0, \ldots)$ predstavlja aproksimaciju promjene vrijednosti funkcije f ako se varijabla $\heartsuit$ malo promijeni u odnosu na vrijednost $\heartsuit_0$, a ostale varijable ne promijene vrijednost.

Primjer

Uzmimo funkciju definiranu formulom $f(x,y,z) = \frac{x+yz^2}{e^x}$. *Imamo* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{1-x-yz^2}{e^x}$, *dakle je* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 1$: *Povećanjem* x *od* 0 *do* Δx, *ako pritom* y *i* z *ostaju* 0, *iznos* $f(x,y,z)$ *se poveća za približno* $1 \cdot \Delta x$ *u odnosu na svoju vrijednost* $f(0,0,0) = 0$.

Oprez: Samo za funkcije jedne varijable vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Primjerice, može se dokazati korisna formula poznata pod nazivom Eulerovo cikličko pravilo:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Zadatak

U izotermnim odnosno izoentropisjkim okolnostima definirana je izotermna odnosno adijabatsk kompresibilnost (stlačivost)

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}.$$

Dokažite da vrijedi

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Za izvod su nam potrebne sljedeće formule, koje se dadu izvesti iz definicija izohornog i izobarnog toplinskog kapaciteta:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}, \quad C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}.$$

Stoga je

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}}.$$

Korištenjem Eulerovog cikličkog pravila u brojniku i u nazivniku dobije se da je prethodni kvocijent dalje jednak

$$\frac{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{S,n}}{-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

U zadnjem redu smo za dobivanje prve jednakosti koristili formulu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$, za dobivanje druge lančano pravilo, a za dobivanje zadnje smo razlomak proširili faktorom $-\frac{1}{V}$.

Parcijalne derivacije drugog reda

Budući da je svaka parcijalna derivacija prvog reda funkcija istih varijabli kao i polazna, moguće je i nju ponovno derivirati po svakoj od njih. Tako dobivamo parcijalne derivacije drugog reda. Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija dviju varijabli? Triju? Njih n?

Parcijalne derivacije drugog reda

Budući da je svaka parcijalna derivacija prvog reda funkcija istih varijabli kao i polazna, moguće je i nju ponovno derivirati po svakoj od njih. Tako dobivamo parcijalne derivacije drugog reda.
Koliko parcijalnih derivacija drugog reda ima skalarna funkcija dviju varijabli? Triju? Njih n?
Kao i obično deriviranje, parcijalno deriviranje je linearan operator.
Stoga parcijalno deriviranje funkcije f prvo po $\heartsuit$ pa ona po $\spadesuit$ označavamo s

$$\frac{\partial}{\partial \spadesuit}\frac{\partial}{\partial \heartsuit}f = \frac{\partial^2 f}{\partial \spadesuit \partial \heartsuit}.$$

Ako je $\heartsuit = \spadesuit$ (dvaput deriviramo po istoj varijabli), pišemo $\frac{\partial^2 f}{\partial \heartsuit^2}$.

Zadatak

Odredite parcijalne derivacije drugog reda za funkcije zadane s $f(x,y) = \sin(xy) \cdot e^{x+y}$ *i* $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2$. *Što primjećujete?*

U većini „normalnih" slučajeva kod određivanja parcijalnih derivacija drugog reda nije potrebno paziti na redoslijed jer vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Teorem (Schwarz)

Ako u točki X postoje i neprekidne[a] su parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, onda su one jednake (u točki X).

[a] Pojam neprekidnosti nismo definirali za funkcije više varijabli. Kao i u slučaju jedne varijable vrijedi: funkcija je neprekidna ako male promjene njenih varijabli mogu izazvati samo male promjene vrijednosti funkcije. I ovdje vrijedi: funkcije koje su opisane formulom koja je oblika elementarne funkcije su neprekidne na svojoj domeni, neovisno o broju varijabli koje su uvrštene.

Posljedično u većini slučajeva za funkciju od n varijabli nije potrebno računati n^2 već samo $\frac{n(n+1)}{2}$ parcijalnu derivaciju drugog reda.