Matematika 1 i 2 za kemičare

Franka Miriam Brueckler

7. veljače 2022.

Sadržaj

Predgovor

Zašto bi kemičar trebao znati dosta sadržaja iz matematike? To je pitanje koje si sigurno, možda ne u baš toj formulaciji, postavlja mnogo studenata kemije – a vjerojatno i dosta „gotovih" kemičara. Odgovor na to pitanje nije i ne može biti kratak.

Zasigurno nije nužno za dobrog kemičara da bude dobar, pa čak ni da bude slab matematičar. Načelno, nužna je samo sigurnost u aritmetici racionalnih brojeva i korištenju pojma funkcije i njenog grafa. No, ne samo da su neka područja kemije matematički zahtjevnija, primjerice fizikalna kemija, nego se i u mnogim drugim područjima može uz (razumno!) korištenje matematičkog jezika efikasnije uočiti zakonitosti. Ipak, osobno je mišljenje autora ovog udžbenika da je najvažniji razlog zašto student kemije mora učiti matematiku bitno jednostavniji: Znati matematiku znači znati jasno i precizno formulirati svoje tvrdnje, argumentirati te uočavati bitne sličnosti i razlike među pojmovima, konceptima i stvarnim objektima. A te sposobnosti su nužne za svakog prirodoznanstvenika, dakle i kemičara.

Nažalost, da bi se savladao matematički jezik i stekao odgovarajući način razmišljanja potrebno je ponešto strpljenja. Matematika se uči prije svega redovnom vježbom i navikavanjem, ali kad se jednom nauči omogućava stvaranje novih svjetova i olakšava razumijevanje postojećih.

U tom smislu, preporučam svakom kemičaru u nastajanju (a i svakom drugom koji uzme ovaj tekst u ruke) da se koncentrira na pamćenje samo definicija, a zatim dopusti da njegov ili njezin mozak prati – bez opterećenja memoriranjem – kako se iz malog broja zapamćenih stvari može zaključiti neusporedivo puno više nego što je zapamćeno. A za onoga tko je naučio pravilno zaključivati, možemo reći da je i savladao osnove matematike.

Struktura teksta prilagođena je programu kolegija Matematika 1 i 2 kako se predaju na Kemijskom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. U prva dva poglavlja ponavlja se srednjoškolsko gradivo o brojevima i realnim funkcijama jedne varijable, s naglaskom na crtanje i interpretaciju njihovih grafova. Treće, četvrto i peto poglavlje posvećeno su standardnim sadržajima infinitezimalnog računa funkcija jedne varijable. Pritom se, za matematički tekst nestandardno, deriviranje obrađuje prije limesa i neprekidnosti, na intuitivan način, kako bi studenti (koji paraleno slušaju i kolegije iz Fizike u kojima se intenzivno koristi deriviranje i integriranje) čim ranije mogli pratiti i to gradivo. Šesto, sedmo i osmo poglavlje bave se linearnom algebrom. U šestom poglavlju (koje je još uključeno u sadržaj Matematike 1) obrađuje se klasična algebra s geometrijskim vektorima te analitička geometrija prostora. Sedmo i osmo poglavlje, s kojima započinje gradivo Matematike 2, obrađuju sustave linearnih jednadžbi te opću teoriju matrica i vektorskih prostora. U devetom poglavlju obrađeni su osnovni tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi. Deseto se poglavlje bavi infinitezimalnim računom skalarnih i vektorskih funkcija više varijabli, a u posljednjem, jedanaestom poglavlju se bavimo nizovima i redovima, s naglaskom na Taylorove i Fourierove redove i njihovu primjenu na aproksimaciju funkcija.

U Zagrebu, 2019.

F. M. B.

P. S. Matematika nisu formule. Formule u ovoj knjizi služe isključivo uvježbavanju standardne notacije i kao vrsta stenografije. Stoga svakom tko se priprema za ispit iz matematike preporučam da razmisli o smislu formula i pokuša ih izraziti riječima te za svaku definiciju ili formulu proba naći i poneki vlastiti primjer ili kontraprimjer.

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Varijable i konstante

U primijenjenoj, a i u teorijskoj, matematici formule koje povezuju promatrane veličine često sadrže više oznaka nepreciziranog ili neistaknutog iznosa. Tako jednadžba stanja idealnog plina glasi

$$pV = nRT,$$

gdje je n množina, R je opća plinska konstanta, T je temperatura, a V volumen. Svakom fizičaru i kemičaru bit će jasno da je R konstanta, tj. da uvijek ima istu vrijednost (i znat će njezinu vrijednost napamet ili naći ju u tablicama). No, ostale oznake (p, V, n, T) načelno ne predstavljaju konstantne veličine.

Pojmovi konstante (nepromjenjive veličine) i varijable (veličine promjenjivog iznosa) u pravilu imaju smisla tek u konkretnom kontekstu. Tako se recimo u jednoj situaciji mogu kao konstante uzeti n i T, dok će se ovisno o tlaku volumen mijenjati pa su p i V u tom kontekstu varijable. U nekom drugom slučaju ne mijenjaju se tlak i temperatura pa su p i T tada konstante, dok su onda n i V varijable.

Možemo reći da je u zadanom matematičkom modelu konstanta svaka veličina koja se u toku razmatranja tog modela neće mijenjati, dok je varijabla svaka veličina koju tokom razmatranja modela smatramo promjenjivom (to ne znači da se ona nužno i mijenja — bitna je načelna mogućnost njene promjene). Pritom razlikujemo nezavisne i zavisne varijable: Nezavisnim varijablama smatramo one koje su temeljne, čiji iznos ne ovisi o iznosu ikoje druge varijable, odnosno to su one koje načelno proizvoljno biramo unutar nekog raspona, a zavisnima one čiji iznos se mijenja uslijed promjene neke od nezavisnih varijabli — zavisne varijable ovise o nezavisnim.

Primjer 1. *U jednažbi idealnog plina možemo primjerice n, T i V smatrati nezavisnim varijablama (mijenjat ćemo ih po želji), a p o njima ovisećom zavisnom varijablom (za svaki iznos n, T i V, pripadni iznos p je jednoznačno određen).*

Varijable se dijele i po jednom drugom principu na diskretne i kontinuirane varijable: Ako varijabla, bar načelno, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost unutar nekog raspona, zovemo ju kontinuiranom, a ako pak može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti ili pak samo vrijednosti koje možemo numerirati cijelim brojevima naziva se diskretnom.[1] Diskretne se varijable obično pojavljuju kad se radi o nabrajanju nekih vrijednosti, dok se mjerljive fizikalne veličine obično uzimaju kao kontinuirane varijable.

Primjer 2. *Tlak idealnog plina je kontinuirana varijabla: njegove vrijednosti načelno mogu biti svi pozitivni realni brojevi. Kvantni energijski nivoi pak čine diskretnu varijablu jer se mogu numerirati prirodnim brojevima.*

Ponovimo bitno... Matematičke i fizikalne veličine se u konkretnom kontekstu dijele na nepromjenjive (konstante) i promjenjive (varijable). Varijable mogu biti nezavisne i (o njima) zavisne. Varijable se također obzirom na raspon mogućih vrijednosti dijele na diskretne i kontinuirane.

1.2 Brojevi i jedinice

Kemičari i drugi prirodoznanstvenici brojeve koriste ponajviše za izražavanje rezultata mjerenjâ, tj. za navođenje iznosa fizikalnih veličina. Iznosi fizikalnih veličina *uvijek* su umnožak broja i mjerne jedinice. Primjerice, nije dovoljno reći da je koncentracija nečega 1,01; to je besmislen iznos ako se ne navede radi li se o, recimo, 1,01 mol L^{-1} ili pak 1,01 mmol L^{-1}. Ponekad se pojavljuju i „čisti" brojevi, poput logaritama kvocijenata nekih veličina (primjerice $\ln \frac{c}{c^{\ominus}}$), no ako se dogovorimo da je njima mjerna jedinica jednaka **1** (što god to značilo), onda i njih možemo shvatiti kao umnožak broja i jedinice. Matematički gledano, mjerne jedinice možemo smatrati konstantama. Radi lakšeg razaznavanja, oznake imena konstanti i varijabli pišu se kurzivno, a oznake jedinica uspravno; primjerice, m je oznaka varijable (npr. mase), a m je oznaka jedinice (metar).

Važno je zapamtiti: Dva iznosa ne mogu biti jednaka ako se ne podudaraju u fizikalnoj dimenziji. Drugim riječima, jednakost $a = b$ povlači da se veličine

[1]Možda nematematičaru nevjerojatno, ali istinito: Ako varijabla može poprimiti bilo koju racionalnu vrijednost unutar nekog raspona, ona je diskretna jer racionalnih brojeva ima jednako mnogo kao cijelih.

a i b mogu izraziti u istoj mjernoj jedinici. Varijable i konstante koje nemaju istu fizikalnu dimenziju ne mogu se zbrajati ni oduzimati.

Primjer 3. *Za čestice idealnog plina molarne mase M pri temperaturi T definira se srednja kvadratna brzina*

$$v_{\mathrm{srk}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Primijetimo da se stvarno radi o brzini: jedinica od R je $\mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$ pa je jedinica od $3RT$ $\mathrm{J/mol}$. Slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka $\mathrm{J/kg}$. Kako je $1\ \mathrm{J}$ isto što i $1\ \mathrm{kg\ m^2/s^2}$, slijedi da je jedinica od $3RT/M$ jednaka $\mathrm{m^2/s^2}$, dakle je jedinica od v_{srk} $\mathrm{m/s}$.

Brojevi su matematički organizirani u skupove. Skup je jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike. Pojam skupa se ne definira. Skup prepoznajemo po njegovim elementima, točnije: dva skupa su jednaka točno ako[2] imaju iste elemente. Uobičajene oznake za skupove su velika slova engleske abecede, a za njihove elemente mala slova. Za neke česte izjave vezane za skupove postoje kratki simbolički zapisi. Tako se za „objekt x je element skupa S" (x je u S) kratko piše

$$x \in S,$$

a za „objekt x nije element skupa S" (x nije u S) pišemo

$$x \notin S.$$

Želimo li pak reći da se skup S sastoji od svih objekata x koji imaju neko svojstvo $\heartsuit$ pišemo

$$S = \{x : \heartsuit\}.$$

Najčešće spominjani skupovi brojeva u matematici i njenim primjenama imaju istaknute oznake. To su redom:

1. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

2. Skup prirodnih brojeva s nulom $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$;

[2] Matematički izraz „točno ako" (alternativno: „ako i samo ako") znači da dvije tvrdnje koje taj izraz povezuje mogu biti samo istovremeno istinite ili istovremeno lažne. Primjerice, „Student je položio Matematiku 1 ako i samo ako je iz nje dobio ocjenu dovoljan ili više". Za razliku od toga, „ako" znači samo implikaciju: „Ako je student položio ispit iz Matematike 1, onda je položio pismeni dio ispita iz Matematike 1" (no, ako je položio pismeni dio ispita, ne znači da je položio i cijeli ispit, jer postoji i usmeni dio ispita).

3. Skup cijelih brojeva je skup svih rezultata oduzimanja prirodnih brojeva: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;

4. Skup racionalnih brojeva je skup svih rezultata dijeljenja cijelih brojeva, tj. skup svih brojeva koji se mogu zapisati kao razlomci: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;

5. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ uz racionalne brojeve sadrži sve iracionalne brojeve i možemo ga shvatiti kao skup svih mogućih duljina dužina i njihovih suprotnih iznosa (ukoliko je zadana jedinična duljina);

6. Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, o kojima ćemo više reći u odjeljku 1.4.

Osnovne računske operacije s brojevima su zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, potenciranje i korjenovanje. U svakom od gore navedenih skupova možemo zbrajati i množiti (zbrojimo li odnosno pomnožimo dva elementa skupa, rezultat je element *istog* skupa). Pritom nije bitan redoslijed (kaže se: zbrajanje i množenje su komutativne operacije) i, dok se držimo samo zbrajanja ili samo množenja, zagrade nemaju utjecaja (kaže se: zbrajanje i množenje su asocijativne operacije). Formalno: Operacija $\diamondsuit$ na skupu S je komutativna ako je $x \diamondsuit y = y \diamondsuit x$ za sve $x, y \in S$, a asocijativna je ako $(x \diamondsuit y) \diamondsuit z = x \diamondsuit (y \diamondsuit z)$ za sve $x, y, z \in S$.

Zbrajanje i množenje u svim gore navedenim skupovima (osim zbrajanja u $\mathbb{N}$ jer on ne sadrži nulu) imaju još jedno lijepo svojstvo — imaju neutralni element: $x + 0 = 0 + x = x$ i $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ za sve brojeve x. Općenito, neutralni element $\natural$ obzirom na neku operaciju $\diamondsuit$ je onaj za koji, kad tu operaciju primijenimo na njega i bilo koji element promatranog skupa S, ne mijenja taj element: $x \diamondsuit \natural = \natural \diamondsuit x = x$ za sve $x \in S$.

Oduzimanje možemo shvatiti kao suprotnu operaciju od zbrajanja, a dijeljenje od množenja. Oduzimanje dva broja daje element istog skupa u svim gornjim slučajevima osim prva dva skupa ($5 - 7 = -2$ je rezultat oduzimanja dva prirodna broja, ali nije prirodan broj). Dijeljenje dva broja daje rezultat istog skupa samo u skupovima $\mathbb{Q}$ bez nule i $\mathbb{R}$ bez nule. Dijeljenje s nulom nije dozvoljeno (znate li zašto?).

Potenciranje se konstruira iz množenja i dijeljenja: Za prirodan broj n i bilo koji broj x je

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n}$$

(x pomnožen sam sa sobom $n - 1$ puta), a za $x \neq 0$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Ako je $x^n = y$, kažemo da je x n-ti korijen iz y i pišemo $x = \sqrt[n]{y}$ ili

$$x = y^{\frac{1}{n}}.$$

Korjenovanje se dakle može shvatiti kao proširenje potenciranja na racionalne eksponente:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ako želimo realan broj kao rezultat, ne može se računati paran korijen od negativnog broja (jer je umnožak bilo kojeg realnog broja sa samim sobom nenegativan broj).

Svaki realan broj može se zapisati u decimalnom zapisu, tj. zapisu u kojem su pojedine znamenke broja svojom pozicijom vezane za toj poziciji odgovarajuću potenciju broja 10 (vidi i primjer 452 u posljednjem poglavlju).

Primjer 4. *Kad govorimo o broju* 725 *mislimo na to da je on jednak* $7 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$ *odnosno*

$$725 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Kad pišemo 2,14 *mislimo na*

$$2{,}14 = 2 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 2 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}.$$

Vidimo: Decimalni zapis broja x kao

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

znači da je

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + \cdots$$

Neki realni brojevi, poput $\frac{1}{16}$, imaju konačan[3] decimalni zapis (0,0625) te je on potpuno egzaktan. Drugi brojevi, poput $\frac{1}{3}$ ili $\sqrt{2}$, nemaju konačan decimalan zapis te svaki njihov zapis s konačno mnogo znamenki nužno sadrži i grešku: $\frac{1}{3} \neq 0{,}3333$, $\sqrt{2} \neq 1{,}41$. Greška u takvom zapisu je reda veličine 10^{-m-1} (odgovarajuće mjerne jedinice) gdje je m broj znamenki iza decimalnog zareza u odabranoj aproksimaciji. Tako je greška zapisa $\frac{1}{3}$ mm kao 0,3333 mm reda veličine 10^{-5} mm, a greška zapisa $\sqrt{2}$ m s^{-1} kao 1,41 m s^{-1} je reda veličine 10^{-3} m s^{-1}. Ipak, svaki se realan broj x može proizvoljno

[3]Zapravo se i konačan decimalni zapis može shvatiti kao beskonačan, s beskonačno mnogo nula iza zadnje nenul znamenke: $0{,}5 = 0{,}500000\ldots = 0,5\dot{0}$.

točno aproksimirati racionalnim: Za svaku zadanu maksimalnu grešku $\varepsilon > 0$ postoji racionalan broj r takav da je $|x - r| < \varepsilon$.[4]

Ovdje svakako treba istaknuti da bi pod decimalnim zapisom broja trebalo podrazumijevati zapis sa *svim* znamenkama; tako shvaćen decimalni zapis uvijek je egzaktno jednak zapisanom broju. Čim na kraju odbacimo jednu ili više znamenaka, dobili smo aproksimaciju promatranog broja — broj koji nije jednak tom broju, ali mu je više ili manje blizu. Jednostavnosti radi ćemo pod konačnim decimalnim zapisom podrazumijevati svaki s konačno mnogo znamenki iza decimalnog zareza, bez obzira radi li se o egzaktnom broju (npr. $0{,}5 = 1/2$) ili aproksimaciji ($0{,}67 \approx 2/3$).

Kako rezultati mjerenja fizičkih veličina uvijek u sebi sadrže grešku (nije moguće mjerenjem dobiti egzaktan iznos), razumno je koristiti konačan decimalni zapis za brojevni dio njihove vrijednosti. Recimo, ako ste izmjerili duljinu nekog predmeta kao 387,8 mm i znate da je greška uređaja za mjerenje najviše 0,5 mm, možete pisati da je duljina tog predmeta 387,8 mm $\pm$ 0,5 mm. No, greška mjerenja nije isto što i greška uzimanja kraćeg decimalnog zapisa!

Budući da je precizna greška mjerenja nepoznata, treba ju razumno procijeniti kako bi se izbjeglo navođenje znamenki koje su vjerojatno krive. Recimo, ako je pri nekom mjerenju duljine vjerojatno da rezultat 388,1 mm ne sadrži grešku veću od 1 mm, obzirom na izmjereni iznos, vjerojatnije je da je rezultat 388 mm, nego 389 mm. Možemo reći da je izmjerena duljina 388 mm i to na tri značajne znamenke. Da smo ju usprkos nesigurnosti u iznosu od 1 mm ipak zapisali kao 388,1 mm, rekli bismo da je u tom zapisu zadnja znamenka neznačajna. Neznačajne, tj. vjerojatno krive, znamenke se ne navode u rezultatima mjerenja i ne računa se s njima.

Kad vidimo zapisani rezultat mjerenja, kao značajne znamenke se broje sve nenul znamenke, nule između nenul znamenki te nule iza decimalnog zareza. Nule na početku nikad nisu značajne. Nule koje služe samo za specifikaciju mjesta decimalnog zareza ne broje se u značajne znamenke. Npr. broj 0,0000345 ima tri značajne znamenke, broj 0,003045 ih ima četiri, a 0,000034500 ih ima pet (kako zadnje dvije nule nisu nužne za položaj decimalnog zareza, one moraju biti značajne). Ako se radi o egzaktnom broju, smatramo da ima beskonačno mnogo značajnih znamenki.

Kako bi se izbjegle nedoumice, uobičajeno je koristiti znanstvenu notaciju: to je zapis realnog broja x u obliku

$$x = m \cdot 10^n$$

[4]Primijetimo da je za realne — a isto tako i kompleksne — brojeve apsolutna vrijednost njihove razlike jednaka njihovoj udaljenosti (razmaku) na brojevnom pravcu (odnosno u kompleksnoj ravnini). Apsolutna vrijednost broja je njegova udaljenost do nule.

gdje je broj $m \in [1, 10\rangle$ tzv. mantisa (zapisana sa svim značajnim znamenkama), a $n \in \mathbb{Z}$ je eksponent (ili: karakteristika). Broj značajnih znamenki broja x jednak je broju značajnih znamenki mantise. Zahtjev da mantisa bude broj između 1 i 10 čini takav zapis jedinstvenim.

Primjer 5. *Avogadrova konstanta iznosi* 602214000000000000000000 mol^{-1}, *što je na šest značajnih znamenki jednako*

$$N_\mathrm{A} = 6,02214 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}.$$

Naboj elektrona iznosi 0,000000000000000000160217 C, *što je*

$$e = 1{,}60217 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}.$$

Red veličine je eksponent broja 10 u znanostvenom zapisu. Primjerice, broj $2{,}1 \cdot 10^{-5}$ je za 8 redova veličine manji od broja $5{,}345 \cdot 10^3$ jer je $10^3/10^{-5} = 10^8$.

Kod računanja vrijede sljedeća pravila: Rezultat zbrajanja i oduzimanja treba imati isti broj znamenki iza decimalnog zareza kao najmanje točan početni podatak. Recimo, 12,11 + 18,0 + 1,013 = 31,123 se u rezultatu navodi kao 31,1. Kod množenja i dijeljenja ne broje se mjesta iza decimalnog zareza, nego broj značajnih znamenaka: broj značajnih znamenaka rezultata treba biti jednak broju značajnih znamenaka najmanje preciznog početnog podatka. Primjerice, $4{,}56 \cdot 1{,}4 = 6{,}38$ se u rezultatu navodi kao 6,4. Pritom se, kako bi se izbjeglo pojavljivanje greške zbog samog računa, račun treba provoditi s više znamenki i tek konačni rezultat zaokružiti u skladu s gornjim pravilima.

Zaokruživanje brojeva se može provoditi na više načina. Standardni način je sljedeći: Ako želimo odbaciti nekoliko zadnjih znamenki i one počinju s 5,6,7,8 ili 9, zaokružujemo na gore (zadnja znamenka ispred njih se pri odbacivanju poveća za 1: 3,7898 na tri decimale zaokruženo je 3,790), a ako počinju s drugim znamenkama nadolje. Ako pak odbacujemo niz znamenaka $500\ldots0$, ponekad se koristi sljedeće pravilo: parna znamenka ispred se ne mijenja, neparna ide nagore (7,85 na 7,8, a 7,15 na 7,2).

Ponovimo bitno... Fizička veličina X ima neki stvarni iznos x jed. (gdje je jed. odabrana jedinica). Taj iznos u pravilu nije točno mjerljiv. Zato umjesto točnog (ali nepoznatog) broja x zapisujemo broj $\tilde{x}$ koji je konačan decimalan broj koji sadrži samo značajne znamenke broja x u decimalnom zapisu. Broj $\tilde{x}$ je aproksimacija broja x. Primjerice, dijagonala kvadrata stranice 1 cm ima točnu duljinu

$$d = \sqrt{2}\ \mathrm{cm} =$$

$$= 1{,}41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\ \ldots \text{ cm}$$

(tj. $x = \sqrt{2} = 1{,}41421\,35623\,73095\,04880\,16887\,24209\,69807\,85696\,71875\ \ldots$ i tu se radi o egzaktnim jednakostima). Ravnalom možemo mjeriti točno do na 0,1 cm pa je $\tilde{x} = 1,4$ odnosno[5] $d = 1{,}4$ cm (s dvije značajne znamenke).

1.3 Kartezijev i opći pravokutni koordinatni sustav u ravnini

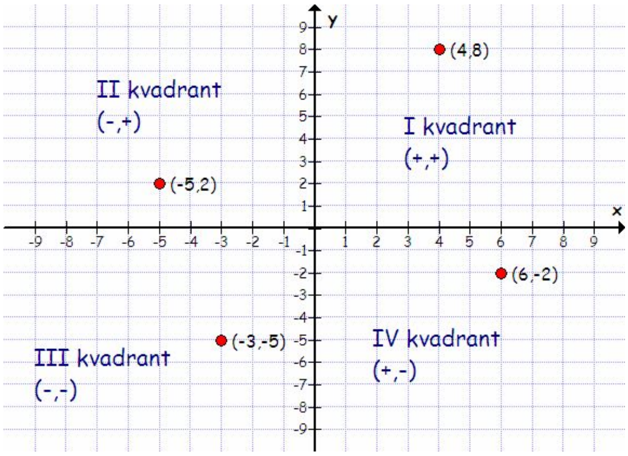
Često je korisno imati način prikazivanja uređenih parova brojeva, npr. parova podataka. Uređeni par dva (ne nužno različita) broja čine ta dva broja uz specifikaciju koji je prvi, a koji je drugi. Npr. $(1, 2)$ je uređeni par različit od $(2, 1)$. Najlakši i najpregledniji način je prikazivanje u pravokutnom koordinatnom sustavu koji se sastoji od dva brojevna, međusobno okomita, pravca koje nazivamo koordinatnim osima.

Brojevni pravci (osi) imaju označene pozicije za brojeve 0 i 1 (čime je određeno mjerilo na svakoj od osi), a osi se sijeku u zajedničkoj nuli (ishodištu koordinatnog sustava). Udaljenost između oznaka za 0 i 1 ćemo zvati jediničnom duljinom[6] za pojedinu os. Pritom jedinične duljine na osima ne moraju biti jednakog iznosa, a ako jesu, sustav zovemo Kartezijevim koordinatnim sustavom.

Kad unosimo par brojeva (x, y) u pravokutni koordinatni sustav, jedan broj (prvi broj x u paru) nanosi se na horizontalnu os koju zovemo os apscisa, a drugi (y) na vertikalnu os koju zovemo os ordinata. Par (x, y) je onda prikazan točkom koja je sjecište okomica povučenih na osi u točkama koje odgovaraju nanesenim podacima. Brojevi x i y zovu se koordinatama točke (x, y) (apsisa i ordinata). Ukoliko u koordinatni sustav unosimo točke koje prikazuju parove vrijednosti nezavisne i pripadne joj vrijednosti zavisne varijable, standard je da se iznosi nezavisne varijable nanose kao apscise, a iznosi zavisne kao ordinate. Ishodište koordinatnog sustava po definiciji ima obje koordinate jednake 0. Točke na osi apscisa imaju ordinatu 0, a točke na osi ordinata imaju apscisu 0. Koordinatni sustav dijeli ravninu na četiri kvadranta; u prvom su točke kojima su obje koordinate pozitivne, u drugom one s negativnom apscisom i pozitivnom ordinatom, u trećem one kojima su obje koordinate negativne, a u četvrtom one s pozitivnom apscisom i negativnom ordinatom (vidi sliku 1.1).

[5] Ovdje bi korektnije bilo pisati $d \approx 1,4$ cm, no to nije uobičajeno.

[6] Dužina je matematički objekt, skup točaka između dvije rubne točke. Duljina je fizikalna veličina, sa SI jedinicom metar (m).



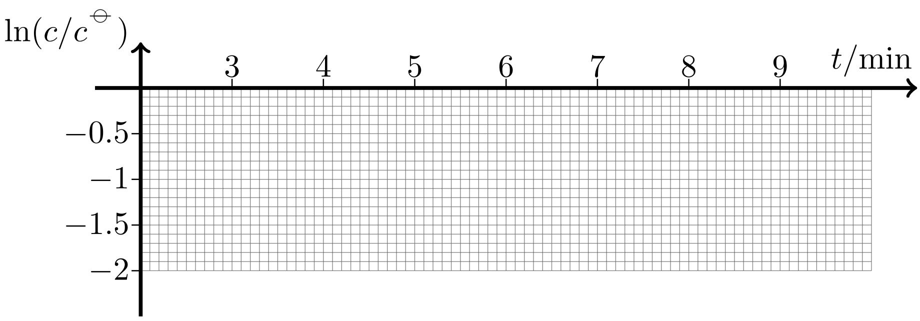
Slika 1.1: Pravokutni koordinatni sustav (slika izrađena programom Graph).

Svaka os se označava oznakom koja nam govori što brojevi na toj osi predstavljaju. U pravokutni koordinatni sustav u ravnini unose se isključivo parovi *brojeva*; dakle, ako u pravokutnom koordinantom sustavu prikazujemo parove rezultata nekih mjerenja, na osima su iznosi tih mjerenja u odabranoj jedinici. Kako su dakle brojevi na osima čisti brojevi, oznake osi su uvijek oznake fizikalnih veličina (vrste podataka) podijeljene s odabranom jedinicom. Apstraktne oznake osi su x odnosno y, koje u konkretnim situacijama zamjenjujemo upravo opisanim konkretnim oznakama.

Primjer 6. *Ako na os apscisa nanosimo vrijeme u sekundama, oznaka osi je t/s jer su apscise x u tom slučaju jednake t/s.*

U praksi nacrtano sjecište osi često nije točka kojoj su obje koordinate 0, tj. nije ishodište koordinatnog sustava (obično su koordinate nacrtanog sjecišta malo manje od, za konkretnu situaciju, najmanje potrebne apscise odnosno ordinate). Stoga oprez: Ishodište je zajednička nula, dok nacrtano sjecište osi ne mora biti ishodište (odnosno, jedan ili oba nacrtana brojevna pravca nisu koordinatne osi).

Napomena 1. *Želite li dobro planirati prostor papira za skiciranje podataka, potrebno je prvo odrediti raspon $[a, b]$ iznosa podataka koje nanosimo na apscisu i raspon $[c, d]$ iznosa podataka koje nanosimo na ordinatu. Sjecište osi obično se, ali ne nužno, crta dolje lijevo. Za njega se uzima točka s koordinatama (a, c), a najdesnija točka ima apscisu b i najgornja ordinatu d (te se tome prilagode jedinične dužine osi). Ukoliko je $a < 0 < b$, sjecište koordinatnih osi se stavlja u 0 na apscisi, odnosno ako je $c < 0 < d$ u 0 na ordinati, umjesto da se crta u donjem lijevom kutu papira.*



Slika 1.2: Odabir raspona na koordinatnim osima (primjer 7).

Primjer 7. *Recimo da želimo prikazivati vremena iz raspona* $2\,\mathrm{min} \leq t \leq 10\,\mathrm{min}$ *i prirodne logaritme izmjerenih koncentracija reaktanta (podijeljenih sa standardnom koncentracijom* $c^\ominus = 1\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$*) koji se nalaze u rasponu* $-2 \leq \ln\frac{c}{c^\ominus} \leq -0{,}5$. *Prikladan raspon apscisa bio bi malo veći od* 2 *do* 10*, a raspon ordinata malo veći od od* -2 *do* $-0{,}5$. *Odgovarajuća oznaka osi apscisa je* t/s*, a osi ordinata* $\ln(c/c^\ominus)$. *Takav koordinatni sustav prikazan je slikom 1.2. Primijetimo da ovdje nacrtano sjecište osi nije ishodište, nego točka* $(0, 2)$.

Zadatak 1. *Pri nekom eksperimentu dobivene su sljedeće vrijednosti tlaka para etanola pri različitim temperaturama:*

$t/°\mathrm{C}$	p/torr
25	55,900
30	70,000
35	93,800
40	117,50
45	154,10
50	190,70
55	241,90
60	304,15
65	377,90

Skicirajte podatke u pravokutnom koordinatnom sustavu tako da na apscisi budu temperature u kelvinima, a na ordinati tlak u torrima, te tako da prostor crtanja bude što bolje iskorište, tj. tako da sadrži sve potrebne točke i što manje onih koje nisu relevantne.

Ponovimo bitno. . . Pravokutni koordinatni sustav se sastoji od dvije međusobno okomite koordinatne osi (osi apscisa i osi ordinata) i služi za prikazivanje uređenih parova brojeva. U fizikalnom kontekstu brojevi na osima su iznosi fizikalnih veličina, te broj z na osi označenoj sa Z/jed. označava vrijednost z jed. fizikalne veličine Z.

1.4 Kompleksni brojevi

Imaginarni brojevi prvi put su se pojavili u 16. stoljeću vezano za problem rješavanja kubne jednadžbe. Njihova upotreba raširila se tokom 19. stoljeća, kad su se pojavile i prve primjene. Najpoznatije primjene vezane su za teoriju elektriciteta i magnetizma (koju bitno pojednostavljuju) te za kvantnu teoriju.

Kao motivacija za uvođenje imaginarnih brojeva obično se uzimaju kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. Poznato je da kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ te jednadžbe negativna. Osnovni primjer takve jednadžbe je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Po dogovoru, ta jednadžba (iako nema realnih rješenja jer bi to bio realan x koji kvadriran daje negativan broj -1, a takav ne postoji) ima dva rješenja u kompleksnim brojevima. Kao što su 1 i -1 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 1 = 0$, definira se da su rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ brojevi[7] i i $-i$. Broj i zove se imaginarna jedinica, ona je dakle jedan od dva moguća broja koji kvadrirani daju -1:

$$i^2 = -1.$$

Isto svojstvo ima i broj $-i$: $(-i)^2 = (-i)(-i) = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

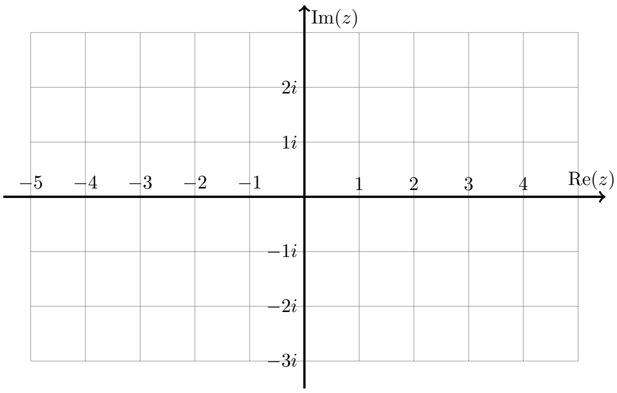
Definicija 1 (Kompleksni brojevi)**.** *Kompleksni brojevi su brojevi oblika*

$$z = x + yi$$

s $x, y \in \mathbb{R}$. Broj x se zove realnim dijelom, a broj y imaginarnim dijelom kompleksnog broja z (dakle: i realni i imaginarni dio kompleksnog broja su realni *brojevi).*

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbb{C}$. Skup $\mathbb{R}$ je podskup od $\mathbb{C}$ jer svaki realni broj x možemo shvatiti kao kompleksni broj $x + 0 \cdot i$. Brojeve kojima je realni dio nula zovemo čisto imaginarnima.

[7] Oznaka i za imaginarnu jedinicu potječe iz 18. stoljeća, kad ju je uveo švicarski matematičar Leonhard Euler.



Slika 1.3: Kompleksna ravnina.

Napomena 2. *Ako je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ negativna, realni dio njenih kompleksnih rješenja je $-\frac{b}{2a}$, a imaginarni je $\pm\frac{\sqrt{-D}}{2a}$. Primjerice, rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 4x + 5 =$ su $x_{1,2} = 2 \pm i$.*

Primjer 8. *Odredimo rješenja jednadžbi $4x^2 + 12x + 25 = 0$ i $z^2 + 36 = 0$ u skupu kompleksnih brojeva:*

Za prvu jednadžbu imamo

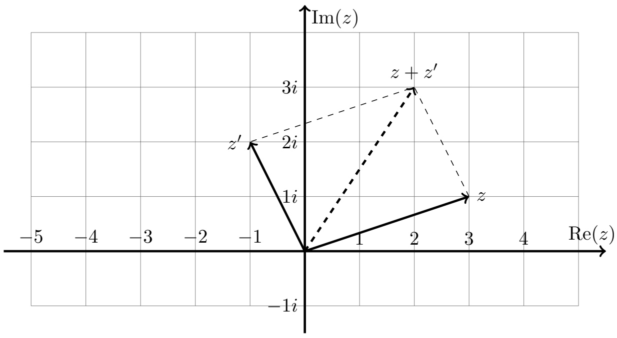
$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 400}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{-1 \cdot 256}}{8} =$$

$$= \frac{-12 \pm i\sqrt{256}}{8} = \frac{-12 \pm 16i}{8} = -\frac{3}{2} \pm 2i.$$

Druga je pak oblika $z^2 = -36$ pa su joj rješenja $\pm 6i$.

Svaki kompleksan broj $z = x + yi$ možemo poistovjetiti s točkom (x, y) u koordinatnoj ravnini (i obrnuto: svakoj točki odgovara kompleksan broj), uz pravokutni (u pravilu: Kartezijev) koordinatni sustav. Pritom uzimamo da apscise predstavljaju realne, a ordinate imaginarne dijelove pa se koordinatne osi u ovom slučaju zovu realna i imaginarna os. Na realnoj osi se nalaze svi realni brojevi (dakle, kompleksni brojevi kojima je imaginarni dio 0), a na imaginarnoj svi čisto imaginarni (tj. kompleksni brojevi kojima je realni dio 0). Prikaz kompleksne ravnine vidljiv je na slici 1.3.

Ponovimo bitno... Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi (realni i imaginarni dio kompleksnog broja z), a i je imaginarna jedinica, tj. jedan od dva broja sa svojstvom $i^2 =$



Slika 1.4: Zbrajanje kompleksnih brojeva.

-1. Kompleksan broj $x + yi$ prikazujemo kao točku (x, y) u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

1.4.1 Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja zbrajamo (oduzimamo) tako da im zbrojimo (oduzmemo) realne odnosno imaginarne dijelove:

$$(x + yi) \pm (x' + y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i.$$

Primjer 9.

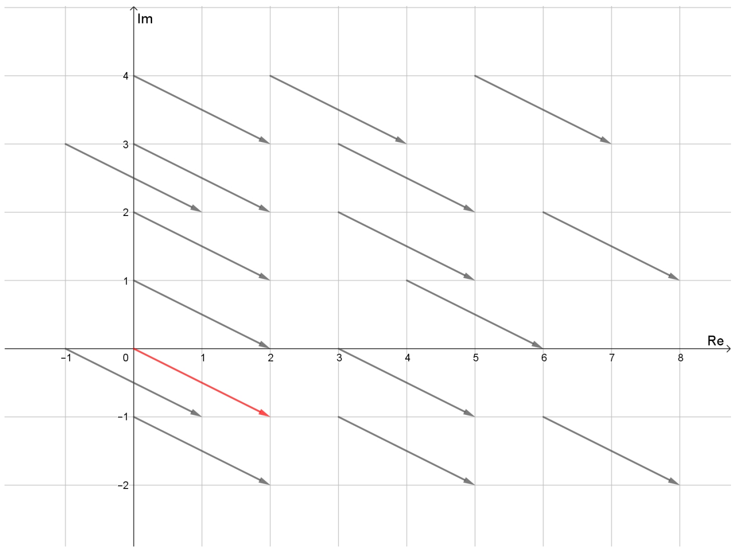
$$(3 + i) + (2i - 1) = 2 + 3i.$$

Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva imaju sva uobičajena svojstva tih operacija (komutativnost, asocijativnost, broj nula kao neutralni element, ...). U kompleksnoj ravnini zbroj odnosno razlika dva kompleksna broja z i z' nalazi se na kraju radij-vektora[8] koji se dobije zbrajanjem odnosno oduzimanjem radij-vektora koji pripadaju z i z': Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva geometrijski se interpretiraju kao zbrajanje i oduzimanje radij-vektora u kompleksnoj ravnini (vidi odjeljak 6.1).

Pribrajanje istog broja z_0 svim kompleksnim brojevima, dakle funkciju tipa $f(z) = z + z_0$, možemo shvatiti kao translaciju ravnine za radij-vektor od z_0 (vidi sliku 1.5).

Suprotni broj od $z = x + yi$ je $-z = -x - yi$. Određivanje suprotnog broja, dakle funkcija $f(z) = -z$, u tom je kontekstu centralna simetrija s obzirom na ishodište (vidi sliku 1.6).

[8] Radij-vektor je orijentirana dužina koja spaja ishodište s promatranom točkom.



Slika 1.5: Pribrajanje kompleksnog broja kao translacija ravnine (krajevi orijentiranih dužina predstavljaju rezultate pribrajanja broja $z = 2-i$ kompleksnim brojevima koji su njihovi početci, slika izrađena programom Geogebra).

Ponovimo bitno... Kompleksne brojeve zbrajamo tako da im zbrojimo realne odnosno kompleksne dijelove. U kompleksnoj ravnini zbrajanje dva kompleksna broja je zbrajanje njihovih radij-vektora po pravilu paralelograma. Funkcija $f(z) = z + z_0$ koja svim kompleksnim brojevima dodaje isti kompleksan broj z_0 može se interpretirati kao translacija kompleksne ravnine za radij-vektor od z_0, a funkcija $f(z) = -z$ koja svakom kompleksnom broju pridružuje njemu suprotni je centralna simetrija obzirom na ishodište.

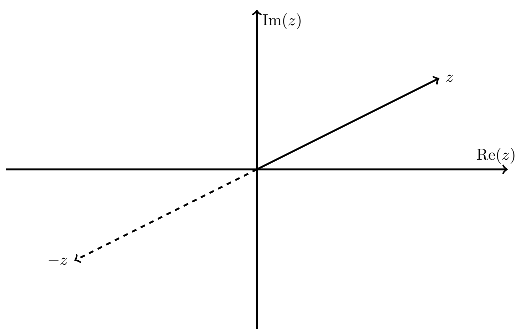
1.4.2 Apsolutna vrijednost kompleksnog broja i kompleksno konjugiranje

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = x + iy$ definira se kao

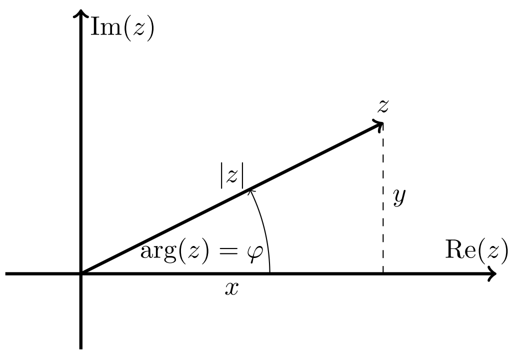
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(biramo nenegativni kvadratni korijen). Geometrijski gledano, to je udaljenost točke koja predstavlja broj z do ishodišta (slika 1.7).

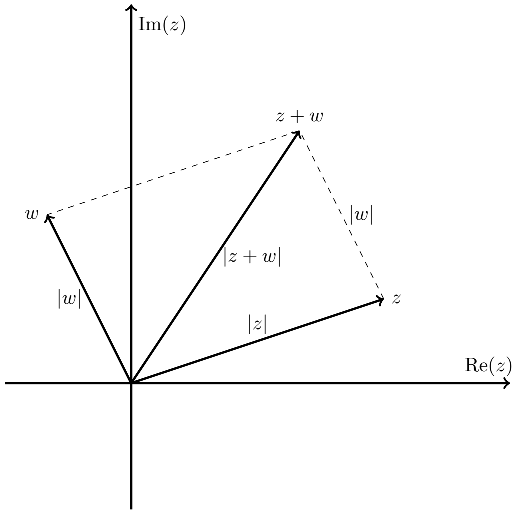
Primjer 10. *Ako je $z = 3 + 4i$, onda je $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.*



Slika 1.6: Suprotni broj kao centralna simetrija.



Slika 1.7: Apsolutna vrijednost i argument kompleksnog broja.



Slika 1.8: Nejednakost trokuta.

Kompleksni brojevi apsolutne vrijednosti 1 nalaze se na jediničnoj kružnici oko ishodišta, tj. u kompleksnoj ravnini jedinična kružnica oko ishodišta ima jednadžbu $|z| = 1$.

Za zbrajanje kompleksnih brojeva vrijedi tzv. nejednakost trokuta:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Nju je lako dokazati pomoću slike 1.8.

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ pridružen je njegov kompleksno konjugirani broj

$$\overline{z} = x - iy$$

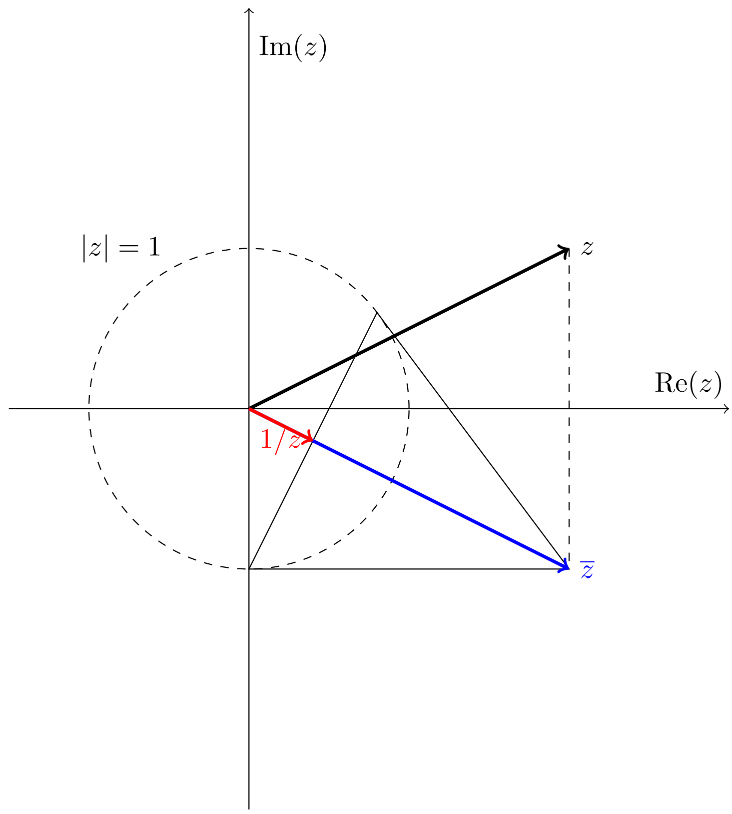
(promijeni se predznak imaginarnog dijela). Vrijedi

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

Primjer 11. *Ako je $z = 5 - 9i$, onda je $\overline{z} = 5 + 9i$.*

Napomena 3. *Par kompleksnih rješenja kvadratne jednadžbe je uvijek par kompleksno konjugiranih brojeva (vidi primjer 2).*

U kompleksnoj ravnini kompleksno konjugirani broj od z je njegova osno simetrična slika obzirom na realnu os, odnosno $f(z) = \overline{z}$ predstavlja zrcaljenje (osnu simetriju) s obzirom na realnu os (vidi sliku 1.9). Česta oznaka



Slika 1.9: Kompleksno konjugiranje i recipročni kompleksan broj.

za $\overline{z}$ je i z^*, iako se oznaka sa zvjezdicom više koristi u kontekstu kompleksnih funkcija:[9] Ako je dana kompleksna funkcija $\psi : D \to \mathbb{C}$, onda se s ψ^* označava kompleksna funkcija definirana s $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)}$.

Primjer 12. *Ako je* $\psi(z) = \overline{z}$, *onda je* $\psi^*(z) = \overline{\psi(z)} = \overline{\overline{z}} = z$.

Ponovimo bitno... Apsolutna vrijednost kompleksnog broja je njegova udaljenost do ishodišta u kompleksnoj ravnini, tj. pozitivni kvadratni korijen zbroja kvadrata realnog i imaginarnog dijela broja. Kompleksno konjugirani broj danog kompleksnog broja dobije se promjenom predznaka njegova imaginarnog dijela i on je osno simetričan polaznom broju s obzirom na realnu os.

1.4.3 Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Množenje dva kompleksna broja $z = x + yi$ i $z' = x' + y'i$ definirano je kao množenje binoma, što se svodi na formulu

$$zz' = (xx' - yy') + (xy' + yx')i.$$

Primjer 13.

$$(2 + 3i) \cdot (6 - i) = 2 \cdot 6 + 3i \cdot 6 - 2i - 3 \cdot i^2 = 12 + 18i - 2i + 3 = 15 + 16i.$$

Vrijedi sljedeća korisna jednakost:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

Dokažimo ju: Ako je $z = x + yi$, onda je $z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + xyi - xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Stoga je $\psi^*\psi$ za kompleksne funkcije isto što i $|\psi|^2$, što objašnjava korištenja izraza „kvadrat valne funkcije"[10] kad govorimo o funkciji oblika $\psi^*\psi$ u kvantnoj fizici i kemiji.

Primjer 14. *Kako je* $-1 = i^2$, *dijeljenjem s* $-i$ *dobivamo* $\frac{1}{i} = -i$.

---

[9] Kompleksne funkcije imaju mnoga „čudna" svojstva u odnosu na realne, no za osnovno baratanje s njima kakvo je potrebno primjerice u temeljnim kolegijima iz fizikalne kemije dovoljno je razumijevanje da se radi o funkcijama koje nekim objektima, recimo točkama prostora, pridružuju kompleksne brojeve.

[10] Naravno, pravilnije bi bilo reći: kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije.

Recipročni broj broja z je broj

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Točka koja predstavlja $1/z$ nalazi se na spojnici ishodišta i $\overline{z}$, kako je vidljivo na slici 1.9 (konstrukcijski, $1/z$ je sjecište radij-vektora od $\overline{z}$ s okomicom povučenom na njega iz dirališta tangente povučene iz $\overline{z}$ na jediničnu kružnicu).

Primjer 15. *Za $z = 3 - 4i$ imamo*

$$\frac{1}{z} = \frac{3+4i}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva je definirano kao množenje recipročnim brojem:

$$\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{|z'|^2}.$$

Primjer 16.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1-1+i+i}{2} = i.$$

Ponovimo bitno... Dva kompleksna broja množimo kao što množimo bilo koja dva dvočlana algebarska izraza, uzimajući u obzir da je $i^2 = -1$. Produkt kompleksnog broja z i njemu konjugiranog je kvadrat apsolutne vrijednosti od z. Dva kompleksna broja dijelimo tako da odgovarajući razlomak proširimo kompleksno konjugiranim nazivnikom.

1.4.4 Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Argument kompleksnog broja z je kut $\phi = \arg(z)$ u rasponu $\langle -\pi, \pi]$ (alternativno u rasponu $[0, 2\pi\rangle$) kojeg radij-vektor od z zatvara s pozitivnim dijelom realnom osi (slika 1.9).

Primjer 17. *Argument svakog pozitivnog realnog broja je 0, argument svakog negativnog realnog broja je π, argument svakog čisto imaginarnog broja s pozitivnim imaginarnim dijelom je $\frac{\pi}{2}$, a argument čisto imaginarnog broja s negativnim imaginarnim dijelom je $-\frac{\pi}{2}$ (alternativno $\frac{3\pi}{2}$). Nula nema jednoznačno definiran argument.*

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je prikaz broja $z = x + yi$ u obliku

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Sa slike 1.9 lako vidimo da je $x = |z|\cos\phi$ i $y = |z|\cos\phi$, odnosno da se φ može odrediti kao jedan od dva moguća kuta u rasponu $\langle -\pi, \pi]$ (alternativno u rasponu $[0, 2\pi\rangle$) takva da je $\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}$. Uočimo: Za svaki argument φ je $|\cos\phi + i\sin\phi| = 1$.

Primjer 18. *Ako je $z = -2 + 7i$, onda je $|z| = \sqrt{53}$ i $\theta = \pi - \operatorname{arctg}\frac{7}{2}$ (zašto ne $\operatorname{arctg}\frac{7}{2}$?), te je $z = \sqrt{53}\cdot(-\cos\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + i\sin\operatorname{arctg}\frac{7}{2})$.*

S druge strane, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Trigonometrijski prikaz bitno olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Korištenjem adicionih formula za sinus i kosinus lako je provjeriti da za $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$ i $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ vrijede formule

$$zw = |z||w|(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi-\theta) + i\sin(\phi-\theta)),$$

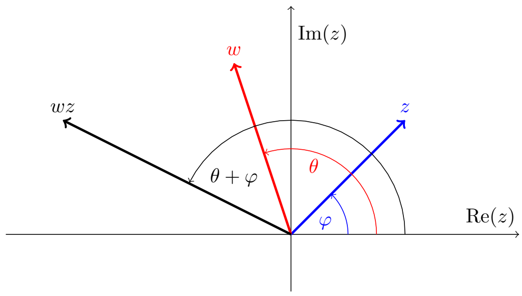
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\phi - i\sin\phi).$$

Iz posljednje formule se vidi da je argument recipročnog broja $1/z$ suprotan argumentu od z (odnosno, jednak je njegovoj razlici do 2π), kao što je i argument od $\overline{z}$. To je objašnjenje zašto su $1/z$ i $\overline{z}$ na istom pravcu kroz O (slika 1.9).

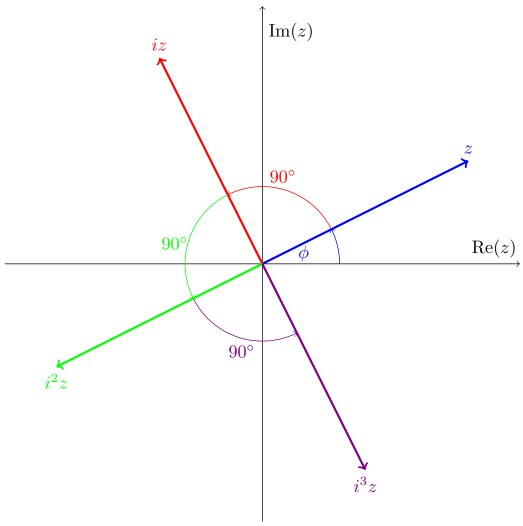
Primjer 19.

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}.$$

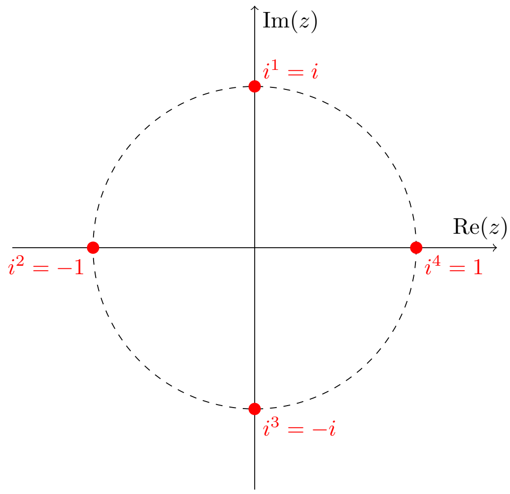
Sad se vidi da se množenje, geometrijski gledano, svodi na kombinaciju zbrajanja argumenata (slika 1.10) i množenja apsolutnih vrijednosti kompleksnih brojeva: Radij-vektor koji predstavlja produkt je po smjeru zarotirani radij-vektor jednog broja za kut jednak argumentu drugog, a po duljini je jednak produktu apsolutnih vrijednosti množenih brojeva. Specijalno, množenje kompleksnog broja nekim brojem kojem je apsolutna vrijednost jednaka 1 (funkcija $f(z) = z_0 z$ gdje je $|z_0| = 1$) interpretira se kao rotacija ravnine oko ishodišta za argument tog drugog broja (slika 1.11).



Slika 1.10: Množenje kompleksnih brojeva.



Slika 1.11: Množenje s i je rotacija za pravi kut.



Slika 1.12: Potencije broja i su ± 1 i $\pm i$.

Ponovimo bitno... Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja je njegov prikaz u obliku $z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdje je ϕ argument broja z tj. kut kojeg radij-vektor od z zatvara s pozitivnim dijelom realne osi. Trigonometrijski prikaz olakšava množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva: umnožak odnosno kvocijent dva kompleksna broja dana svojim trigonometrijskim prikazima je kompleksan broj čija apsolutna vrijednost je umnožak odnosno kvocijent apsolutnih vrijednosti brojeva koje množimo odnosno dijelimo, a čiji argument je zbroj odnosno razlika argumenata brojeva koje množimo odnosno dijelimo. Funkcija definirana s $f(z) = z_0 z$ gdje je $|z_0| = 1$, je rotacija ravnine za $\arg z_0$.

1.4.5 Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Promotrimo potencije broja i. Imamo:

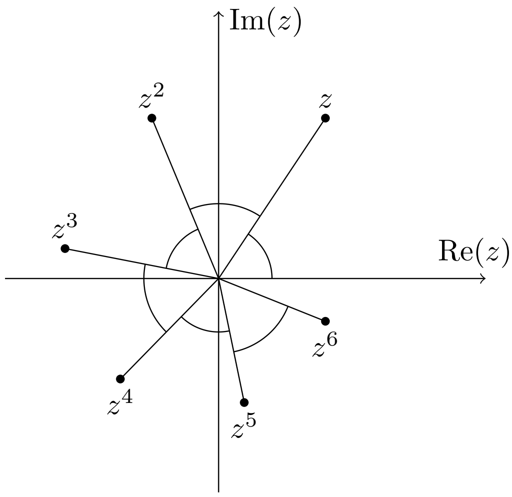
$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,$$

$$i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1, \ldots$$

Dakle, potenciranje broja i na višekratnik od 4 daje 1 i potencije se ciklički ponavljaju nakon svakog višekratnika od 4. Nadalje, potencije od i nalaze se na jediničnoj kružnici raspoređene kao vrhovi kvadrata (slika 1.12).

Za potenciranje kompleksnih brojeva na prirodne potencije n se koristi de Moivre-ova formula

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)).$$



Slika 1.13: Potencije kompleksnog broja (kojem je apsolutna vrijednost manja od 1).

Potencije od z se prema toj formuli dobivaju tako da potenciramo njegovu apsolutnu vrijednost, odnosno uvišerostručujemo njegov argument, što je ilustrirano slikom 1.13.

Primjer 20.

$$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4(\cos\pi + \sin\pi) = -4.$$

Primijetimo da de Moivreova formula vrijedi za sve cijele brojeve n. Naime, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)^n = \frac{1}{|z|^{2n}}\overline{z}^n =$$

$$= \frac{1}{|z|^{2n}} \cdot |z|^n(\cos(n\phi) - i\sin(n\phi)) = |z|^{-n}(\cos(-n\phi) + i\sin(-n\phi)).$$

Korjenovanje kompleksnih brojeva je kompliciranije jer svaki kompleksan broj z ima n n-tih korijena. U to je lako uvjeriti se krenemo li od sljedeće definicije:

Definicija 2 (n-ti korijen kompleksnog broja)**.** *Za dani kompleksan broj z, njegov n-ti korijen je svaki kompleksan broj w sa svojstvom $w^n = z$.*

Napomena 4. *Zamjenom riječî „kompleksan” s „realan” u gornjoj definiciji dobijemo definiciju korijena realnih brojeva. Primjerice, realan broj je kvadratni (drugi) korijen realnog broja 4 ako kvadriran daje 4. Kako samo 2 i -2 kvadrirani daju 4, slijedi da su 2 i -2 (svi) realni kvadratni korijeni od 4. Uočite važnost promatranog „ambijenta”: u kontekstu realnih brojeva, kao korijeni nas zanimaju samo realni brojevi, a u kontekstu kompleksnih kompleksni.*

Primjer 21. *Kako kompleksni brojevi 1, i, -1, $-i$ na četvrtu potenciju svi daju 1, vidimo da su svi oni kompleksni četvrti korijeni broja 1 (odnosno, slika 1.12 prikazuje sva četiri kompleksna $\sqrt[4]{1}$).*

Primjer 22. *Uzmimo $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Recimo da nas zanima(ju) njegov(i) treći korijen(i), tj. kompleksni brojevi $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sa svojstvom $w^3 = z$. De Moivreova formula povlači da mora biti zadovoljen uvjet*

$$w^3 = |w|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = 8\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = z.$$

Kako su apsolutne vrijednosti kompleksnih brojeva u zagradama jednake 1, zaključujemo prvo da mora vrijediti $|w|^3 = 8$, gdje $|w|$ mora biti nenegativan realan broj. On je stoga jednoznačno određen: $|w| = 2$.

Dalje mora vrijediti $\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Jedan kut φ koji tu jednakost sigurno zadovoljava je $\varphi = \frac{\pi}{12}$. No, kosinus i sinus su periodične funkcije temeljnog perioda 2π, te stoga i svaki kut koji zadovoljava $3\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, zadovoljava traženi uvjet. Slijedi da svi argumenti

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{1+8k}{12}\pi$$

zadovoljavaju tražene uvjete, tj. svi kompleksni brojevi oblika

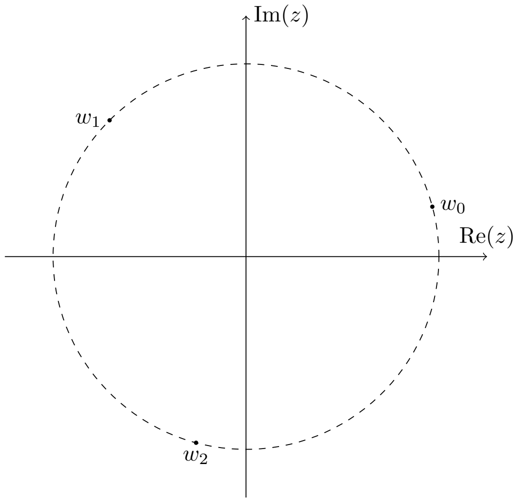
$$w_k = 2\left(\cos\left(\frac{1+8k}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1+8k}{12}\pi\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

su treći korijeni od z.

Na kraju, opet iz periodičnosti sinusa i kosinusa vidimo da su samo tri od beskonačno mnogo brojeva w_k različita, a to su w_0, w_1 i w_2. Stoga z ima tri kompleksna treća korijena:

$$w_0 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right),$$

$$w_1 = 2\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right),$$



Slika 1.14: Treći korijeni od $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$$w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right).$$

Predočavanjem tih triju brojeva u kompleksnoj ravnini (odnosno zato jer je razlika argumenata između svaka dva jednaka $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$*), vidimo da se radi o vrhovima pravilnog trokuta na kružnici polumjera* 2 *oko* O *(slika 1.14).*

Provođenjem slijeda zaključivanja kao u gornjem primjeru, ali za proizvoljne $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo: Svaki kompleksan broj z ima n kompleksnih n-tih korijena određenih formulom

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right),$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Geometrijski, ti se korijeni nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta na kružnici radijusa $\sqrt[n]{|z|}$ (tu gledamo pozitivni korijen u smislu njegovog značenja u realnim brojevima) kojoj je središte u ishodištu, s tim da prvi od njih ima argument $\frac{\phi}{n}$, a svaki sljedeći za $\frac{2\pi}{n}$ veći (sve dok se ne prijeđe jedan puni krug).

Primjer 23. *Treći korijeni iz* i *imaju apsolutnu vrijednost* $\sqrt[3]{1} = 1$*, a prvi po redu ima argument* $\frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$*. Svaki sljedeći ima argument veći za* $\frac{2\pi}{3}$ *te su treći korijeni od* i *redom*

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i.$$

Ponovimo bitno... Potencije z^n ($n \in \mathbb{N}$) kompleksnog broja z računaju se po de Moivreovoj formuli: apsolutna vrijednost od z^n je n-ta potencija apsolutne vrijednosti od z, a argument od z^n je n-terostruki argument od z. Svaki kompleksan broj z ima n n-tih korijena: to su kompleksni brojevi kojima je apsolutna vrijednost $\sqrt[n]{|z|}$, a argumenti su im redom $\frac{\phi+2k\pi}{n}$ za $k = 0, 1, \ldots, n-1$, gdje je ϕ argument od z (tj. to su vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu polumjera $\sqrt[n]{|z|}$, od kojih prvi vrh ima argument $\frac{\phi}{n}$).

1.4.6 Eulerova formula

Eulerova formula daje pregledniji oblik trigonometrijskog prikaza kompleksnih brojeva:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Stoga je svaki kompleksan broj z moguće zapisati u eksponencijalnom obliku kao

$$z = |z|e^{i\phi}.$$

Eksponencijalna funkcija u Eulerovoj formuli je eksponencijalna funkcija s bazom e proširena na kompleksne brojeve; ona ima mnoga specijalna svojstva, no osnovne formule za baratanje eksponencijalnim izrazima i dalje vrijede. Primijetimo da je ona periodična (vidi odjeljak 2.6.5) s temeljnim periodom 2π:

$$e^{i(\phi+2\pi)} = e^{i\phi+2\pi i} = e^{i\phi}\cdot e^{2\pi i} = e^{i\phi}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^{i\phi}.$$

Specijalno, imamo

$$e^{i\pi} = -1,$$
$$e^{i\pi/2} = i.$$

Primjer 24. *Zapišimo kompleksne brojeve $4+4i$ te -1 u eksponencijalnom obliku:*

Prikažemo li $4+4i$ u kompleksnoj ravnini kao točku s koordinatama $(4,4)$, očigledno je da je argument tog broja jednak $\frac{\pi}{4}$, a apsolutna vrijednost je po

Pitagorinom teoremu $|z| = \sqrt{4^4 + 4^4} = 2\sqrt{2}$, *dakle je* $4 + 4i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. *Slično, broju* -1 *odgovara točka s koordinatama* $(-1, 0)$, *koja je očigledno od ishodišta udaljena za* $|z| = 1$, *a kut u odnosu na pozitivni smjer realne osi je* π, *te je* $-1 = e^{i\pi}$.

Primjer 25. *Zapišimo kompleksne brojeve* $3e^{i\pi/2}$ *i* $\pi e^{i\pi/3}$ *u obliku* $x + yi$: *Prvi broj ima argument* $\frac{\pi}{2}$, *dakle je čisto imaginaran s pozitivnim imaginarnim dijelom. Kako mu je apsolutna vrijednost* 3, *slijedi da je to* $3i$. *Drugi broj je najbolje prikazati točkom koja je na kružnici polumjera* π *oko ishodišta (jer mu je apsolutna vrijednosti* π*), a čija spojnica s ishodištem je pod kutem* $\frac{\pi}{3}$ *u odnosu na pozitivni dio realne osi. Ucrtavanjem okomica iz te točke na koordinatne osi dobivamo pravokutni trokut iz koga elementarnom trigonometrijom dobivamo* $x = \pi \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ *i* $y = \pi \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, *tj.* $\pi e^{i\pi/3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} i$.

Vrijedi:

$$\overline{z} = |z|e^{-i\phi}.$$

Naime, kako kompleksno konjugiranje u kompleksnoj ravnini možemo shvatiti kao zrcaljenje s obzirom na realnu os, očigledno se ne mijenja apsolutna vrijednost broja, a argument postaje suprotan polaznom (ili jednak 2π minus polazni), te je

$$\overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} = re^{i(2\pi-\varphi)}.$$

Iz Eulerove formule dobiju se još preglednija pravila računa s kompleksnim brojevima:

$$zw = |z||w|e^{i(\phi+\theta)},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-i\phi},$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\phi-\theta)},$$

te de Moivreova formula

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Zbrojimo li i oduzmemo $e^{i\phi}$ i $e^{-i\phi}$ dobit ćemo i sljedeće dvije važne formule:

$$\mathrm{Re}(e^{i\phi}) = \cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\phi}) = \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}.$$

Primjer 26.

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0{,}208,$$

tj. i^i je realan broj! Uočimo: $e^{i\phi} = e^{i\phi+2k\pi}$. Stoga imamo beskonačno mnogo različitih vrijednosti od i^i, no i ostale su sve realne.

Primjer 27. *Gdje se u kompleksnoj ravnini nalaze peti korijeni broja*

$$z = 32e^{i\cdot 3\pi/2}?$$

Peti korijeni svakog kompleksnog broja svi leže na kružnici polumjera jednakom (realnom) petom korijenu njegove apsolutne vrijednost, dakle u našem slučaju leže na kružnici polumjera $\sqrt{32} = 2$ oko ishodišta. Ti korijeni moraju biti raspoređeni kao vrhovi pravilnog peterokuta na toj kružnici zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom e u kompleksnim brojevima (posljedica Eulerove formule). Prvi od pripadnih argumenata je $\frac{1}{5}$ od $\frac{3\pi}{2}$, dakle $\frac{3\pi}{10}$, a svaki sljedeći je u odnosu na prethodni veći za $\frac{2\pi}{5}$, dakle se naši korijeni nalaze pod kutevima $\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$, $\frac{7\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{10}$, $\frac{11\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{15\pi}{10} = \frac{3\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} = \frac{19\pi}{10}$.

Primjer 28. *Izračunajmo $\sqrt{(-3-4i)^{12}}$.*

Očito se traže oba kompleksna druga korijena od $(-3-4i)^{12}$. Za potenciranje (a i korjenovanje) je pogodniji eksponencijalni oblik. Prvo je $-3-4i = 5e^{i\varphi}$, gdje je φ onaj od dvaju mogućih kuteva između 0 i 2π koji odgovara točki u trećem kvadrantu (jer su i realni i imaginarni dio broja $-3-4i$ negativni), a to je $\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \approx 4{,}06889 \approx 233°13'$. Stoga je $(-3-4i)^{12} = (5e^{i\varphi})^{12} = 5^{12}e^{12\varphi i}$. Oba kvadratna korijena moraju imati istu apsolutnu vrijednost, koja je jednaka pozitivnom (realnom) kvadratnom korijenu apsolutne vrijednosti broja kojeg korjenujemo, dakle im je apsolutna vrijednost $\sqrt{5^{12}} = 5^6 = 15625$. Prvi od dva kvadratna korijena mora imati argument takav da udvostručen daje 12φ, dakle prvi od dva kvadratna korijena od $5^{12}e^{12\varphi i}$ ima argument $6\varphi \approx 24{,}4133$, dok drugi ima argument za pola kruga dalje, dakle $\pi + 6\varphi \approx 27{,}5549$. Zbog periodičnosti eksponencijalne funkcije s bazom e, s temeljnim periodom 2π, od izračunatih argumenata možemo oduzimati višekratnike od 2π dok ne dobijemo argumente između 0 i 2π, bez da smo time promijenili naša dva kvadratna korijena. Kako je $24{,}4133 - 6\pi = 5{,}56734 = \varphi_1 \in [0, 2\pi\rangle$ i $27{,}5549 - 8\pi = 2{,}42216 = \varphi_2 \in [0, 2\pi\rangle$, zaključujemo da su dva tražena kompleksna korijena $15625e^{i\varphi_1}$ i $15625e^{i\varphi_2}$.

Primjer 29. *Kristalne strukture su periodične u tri nezavisna smjera. Tu periodičnost opisuje kristalna rešetka (vidi odjeljak 6.2). Funkcije koje opisuju periodične strukture poput kristala moraju i same biti periodične.*

Jednodimenzionalna se rešetka sastoji od u parovima jednako udaljenih točaka na pravcu. Ako im je razmak a, svaka funkcija f čija je periodičnost u skladu s periodičnošću rešetke mora imati svojstvo $f(x+a) = f(x)$ za sve x iz domene. Najjednostavnije takve funkcije su $\sin(2\pi x/a)$ i $\cos(2\pi x/a)$, koje se u kompleksnom kontekstu svode na samo jednu funkciju

$$f(x) = e^{2\pi xi/a}.$$

U trodimenzionalnom se kontekstu periodična funkcija s periodima a, b i c (u tri nezavisna smjera) dobije množenjem takvih funkcija, tj. prototip takve funkcije je

$$f(x, y, z) = e^{2\pi xi/a} e^{2\pi yi/b} e^{2\pi zi/a}.$$

Primjer 30. *Kvantnomehanički opis krutog rotora u ravnini, koji se u kemiji koristi primjerice za opis rotacije planarne molekule, ima oblik*

$$-\frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\theta^2} = E\psi,$$

gdje je I moment inercije sustava, E kinetička energija rotacije, a θ (varijabla valne funkcije ψ) opisuje orijentaciju rotora u odnosu na koordinatni sustav. Gornja jednadžba je primjer obične diferencijalne jednadžbe (odjeljak 3.7 i poglavlje 9), o oznaka $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}$ predstavlja drugu derivaciju funkcije po θ (vidi odjeljak 3.2).

Uvrstimo li $\psi(\theta) = Ce^{ia\theta}$ u jednadžbu ($a^2 = 2IE/\hbar^2$), vidimo da ju zadovoljava. Da bi to rješenje imalo fizički smisao (tj. da stvarno opisuje rotaciju u ravnini), mora biti periodično s periodom 2π. Iz toga je lako dobiti uvjet da $2\pi a$ mora biti višekratnik od 2π, tj. $a = n \in \mathbb{Z}$. Stoga su fizikalno smislena rješenja naše jednadžbe

$$\psi_n(\theta) = Ce^{in\theta}$$

gdje je $n \in \mathbb{Z}$ „kvantni broj”, a odgovarajući iznosi energija su $E_n = \hbar^2 n^2/(2I)$.

Ponovimo bitno... Eulerova formula daje eksponencijalni zapis kompleksnog broja u obliku $z = |z|e^{i\phi}$, a ona glasi $\cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$. Za račun s kompleksnim brojevima prikazanim u eksponencijalnom obliku primjenjuju se uobičajena pravila za množenje, dijeljenje i potenciranje potencija, uz uzimanje u obzir periodiočnosti kompleksne eksponencijalne funkcije.

Poglavlje 2

Realne funkcije jedne varijable

2.1 Pojam funkcije i grafa funkcije

Pod funkcijom se obično — krivo — podrazumijeva pravilo kojim se nekim objektima pridružuju neki drugi objekti, tj. formula kojom se iz x izračuna $f(x)$. Što je krivo u tom shvaćanju? Svakako je pravilo pridruživanja bitan dio pojma funkcije, no nedostatak ovakve „definicije” je neisticanje skupa u kojem se nalaze elementi kojima pravilo nešto pridružuje i skupa u kojem se nalaze rezultati pridruživanja. Naime, isto pravilo se može odnositi na različite skupove objekata: tako se npr. masa može pridruživati u jednom kontekstu ljudima, a u drugom brašnu. Također, u „definiciji” da je funkcija samo pravilo pridruživanja nije istaknuto da ne smije biti višestrukog pridruživanja (pridruživanje više objekata jednom objektu).

Definicija 3 (Funkcija)**.** *Svaka funkcijase sastoji od tri komponente:*

1. *Domena: skup u kojem se nalaze objekti kojima se nešto pridružuje (skup u kojem se nalaze nezavisne varijable).*

2. *Kodomena: skup u kojem se nalaze rezultati pridruživanja (zavisne varijable).*

3. *Pravilo kojim se* svakom *elementu domene pridružuje* točno po jedan *element kodomene.*

Uobičajene oznake su D za domenu, K za kodomenu i f za samo pravilo, a funkciju tada označavamo

$$f : D \to K$$

i kažemo „f sa D u K”.

Napomena 5. *Oznaka f predstavlja „čitavu" funkciju, dok je $f(x)$ vrijednost funkcije za jedan element domene x, dakle $f(x)$ je jedan element kodomene funkcije f. Također, $f(x)$ u većini slučajeva možemo poistovjetiti s formulom, tj. pravilom djelovanja funkcije.*

Primjer 31. *Funkcija identiteta je funkcija $id : A \to A$ (gdje je A bilo kakav skup) koja „ništa ne radi", tj. svakom elementu pridružuje njega samog: $id(x) = x$ za sve $x \in A$.*

U primjenama je kodomena najčešće podskup skupa $\mathbb{R}$; takve funkcije zovemo realnim funkcijama. U ovom i sljedeća dva poglavlja bavit ćemo se isključivo realnim funkcijama jedne varijable, tj. funkcijama kojima su i domena i kodomena podskupovi od $\mathbb{R}$. Možemo reći da su to funkcije koje (realnim) brojevima pridružuju (realne) brojeve.

Često se koristi i pojam prirodne domene neke funkcije. To je najveći skup koji za dano pravilo može biti domena, tj. skup *svih* matematičkih objekata na koje se pravilo može smisleno primijeniti. Primjerice, za pravilo $f(x) = \frac{1}{x-5}$ prirodna domena skup $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ jer se jedino za $x = 5$ ne može izračunati $\frac{1}{x-5}$. Domena funkcije je uvijek podskup[1] prirodne domene koja odgovara pravilu kojim je opisano djelovanje funkcije. Ukoliko se funkcija zadaje samo formulom $f(x)$ podrazumijeva se da joj je domena prirodna domena.

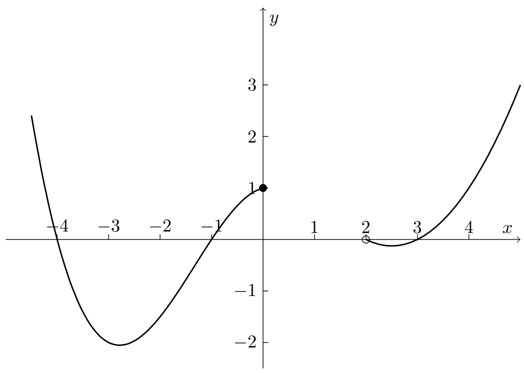
Realne funkcije jedne varijable možemo vizualizirati pomoću prikaza funkcijske ovisnosti u koordinatnom sustavu. Graf funkcije f čija varijabla je označena s x, a pridružena vrijednost s $f(x)$, je skup *svih*[2] uređenih parova

$$(x, f(x))$$

kad x prolazi domenom funkcije. Budući da uređene parove realnih brojeva možemo poistovjetiti s točkama u pravokutnom koordinatnom sustavu, graf realne funkcije jedne varijable možemo prikazati ucrtavanjem točaka s koordinatama $(x, f(x))$ u pravokutni koordinatni sustav. Pritom se domena vizualizira kao skup svih apscisa točaka grafa (dakle kao podskup x-osi), a rezultati, tj. elementi kodomene, nanose se na y-os. S obzirom na standardnost takvog prikaza grafa funkcije, uobičajeno je i njega nazivati grafom funkcije. Pritom se podrazumijeva da se u okviru nacrtane slike mogu uočiti sve bitne karakteristike slike, a da se izvan okvira graf nastavlja s istim trendom koji je naznačen na slici (primjerice, na slici 2.1 podrazumijevamo da je funkcija

[1] Svaki skup je sam sebi podskup. Za skup B kažemo da je podskup skupa A ako je svaki element od B ujedno element od A. Primjerice, skup svih ljudi rođenih u 20. stoljeću je podskup skupa svih ljudi koji su ikad živjeli.

[2] Dakle, ne samo onih koje smo stvarno u stanju nacrtati.



Slika 2.1: Određivanje nultočki i vrijednosti funkcije u nuli iz grafa.

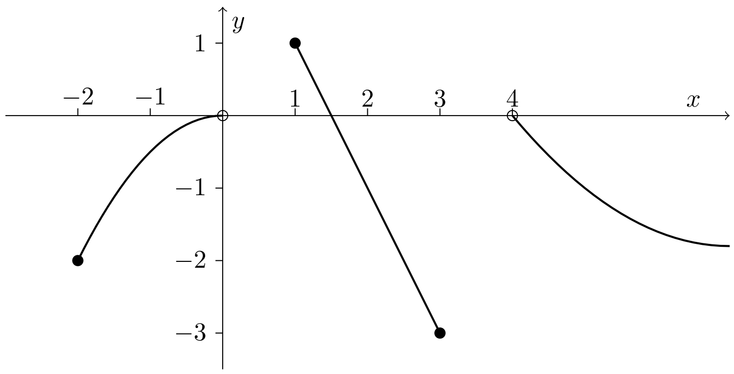
definirana i za sve brojeve manje od -4 odnosno veće od 4, i da pritom pada „udubljeno"[3] za $x < -4$, a da raste „udubljeno" za $x > 4$). Pune točke se koriste za naglašavanje kad je neka točka na grafu, bilo radi lakšeg očitanja odgovarajućih iznosa nezavisne i zavisne varijable, bilo radi naglašavanja da se radi o početnoj ili krajnjoj točci nekog dijela grafa koja je i sama dio grafa. Prazne točke se pak koriste za naglašavanje pozicija točaka koje su bitne za graf, ali nisu njegov dio. Tako je primjerice na slici 2.1 točka $(0, 1)$ označena puno da bi se istaknulo da je $f(0) = 1$ i da funkcija nije definirana za brojeve veće od 0 (sve do 2), dok je točka $(2, 0)$ označena prazno da se ne samo naglasi da f nije definirana u 2, nego i da lijevo od te točke nemamo točaka grafa (sve do $x = 0$), odnosno da f nije definirana za brojeve malo manje od 2.

Graf funkcije nikako ne valja miješati sa slikom funkcije. Slika funkcije je podskup kodomene koji se sastoji od onih rezultata (zavisnih varijabli) koji stvarno imaju original (koje su stvarno pridružene nekoj nezavisnoj varijabli). Primjerice, slika funkcije $f(x) = x^2$ je skup $[0, +\infty\rangle$ jer x^2 ne može postići negativnu vrijednost, ali može postići sve nenegativne. Ako nam je dan crtež grafa u pravokutnom koordinatnom sustavu, lako je očitati domenu i sliku funkcije: jednostavno projiciramo graf na os apscisa, odnosno na os ordinata.

Zadatak 2. *Na slici 2.2 je graf funkcije čija domena je* $[-2, 0\rangle \cup [1, 3] \cup \langle 4, +\infty\rangle$*, dok je slika te funkcije* $\langle -\infty, 1]$ *(desni dio grafa sugerira da funkcija nastavlja padati u beskonačnost kad* x *raste).*

Neke bitne posljedice definicije funkcije i njenog grafa na prikaz grafa u pravokutnom koordinatnom sustavu su sljedeće:

[3] Kasnije ćemo ovaj oblik grafa zvati konveksnim.



Slika 2.2: Određivanje domene i slike funkcija iz grafa.

- Svaka vertikala (paralela s osi ordinata) siječe graf najviše jednom (zašto?).

- Sjecište grafa s osi ordinata, ako postoji, je točka $(0, f(0))$, tj. njegova ordinata predstavlja vrijednost funkcije u nuli.

- Elementi domene kojima funkcija pridružuje nulu zovu se nultočke funkcije. Dakle, nultočke[4] funkcije f su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Svako sjecište grafa s osi apscisa kao apscisu ima neki $x \in D$, a kao ordinatu $0 = f(x)$, pa apscise sjecišta grafa s osi apscisa predstavljaju nultočke funkcije.

- Funkcija je pozitivna/negativna (u smislu: vrijednosti $f(x)$ su pozitivne/negativne) za one vrijednosti apscisa x za koje su pripadne točke grafa iznad/ispod x-osi.

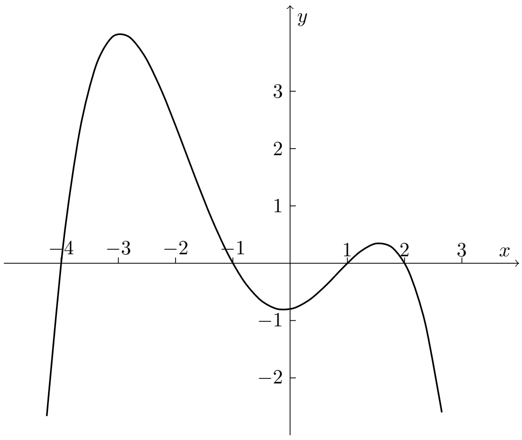
Zadatak 3. *Što znamo o funkciji ako njen graf ne siječe os ordinata?*

Zadatak 4. *Može li graf funkcije sječi neku horizontalu (paralelu s osi apscisa) više od jednom?*

Zadatak 5. *Ovisnost tlaka p o volumenu V idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi T i množini n, dana je formulom:*

$$p(V) = nRT \cdot \frac{1}{V}.$$

[4] Pod nultočkama ovdje podrazumijevamo *realne* nultočke.



Slika 2.3: Određivanje predznaka funkcije iz grafa.

Tako definirana funkcija p ima prirodnu domenu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no zbog konteksta kao domenu[5] *uzimamo $\langle 0, +\infty \rangle$. Tlak pri pozitivnom volumenu je očigledno pozitivan, pa će se graf ove funkcije nalaziti u prvom kvadrantu. Skicirajte pet točaka pripadnog grafa i komentirajte (ne)postojanje sjecišta s koordinatnim osima!*

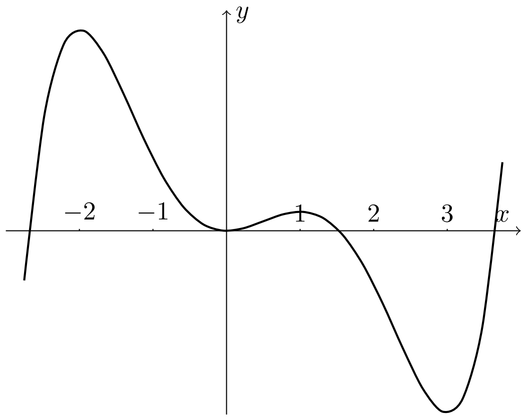
Zadatak 6. *Iz na slici 2.1 zadanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite koja joj je vrijednost u $x = 0$ i koje su joj nultočke. Na kojim intervalima ona poprima pozitivne vrijednosti?*

Ponovimo bitno... Funkcija se sastoji od domene, kodomene i pravila koje svakom elementu domene pridružuje po jedan element kodomene. Graf funkcije se sastoji od svih uređenih parova oblika (element domene, pridruženi element kodomene). Realne funkcije jedne varijable su funkcije kojima su domena i kodomena podskupovi skupa realnih brojeva. Za takve funkcije njihov graf je moguće vizualizirati crtanjem točaka koje su elementi grafa funkcije u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

2.2 Svojstva funkcija i njihovih grafova

Funkcija može biti rastuća ili padajuća na cijeloj domeni ili nekom njenom podintervalu. Funkcija raste na intervalu I (koji je podskup domene) ako

[5]Primijetimo da iako ovdje, nepravilno, volumene poistovjećujemo s realnim brojevima bez da smo definirali jedinicu, izjava o prirodnoj domeni je točna jer je svejedno želimo li reći da volumen mora biti veći primjerice od 0 L ili od 0 m^3.



Slika 2.4: Određivanje intervala rasta i pada iz grafa.

veće vrijednosti varijable iz I daju i veće rezultate:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Funkcija pada na intervalu I (koji je podskup domene) ako veće vrijednosti varijable iz I daju manje rezultate:

$$x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x') \quad (\text{za } x, x' \in I).$$

Rastuće i padajuće funkcije jednim imenom zovu se monotonim funkcijama. Ako su nejednakosti u gornjim definicijama stroge ($<$ umjesto $\leq$ odnosno $>$ umjesto $\geq$) govorimo o strogo rastućim odnosno padajućim funkcijama.

Budući da se veće vrijednosti ordinata u pravokutnom koordinatnom sustavu nalaze više gore od manjih, vizualno rast odnosno pad funkcije na intervalu I vidimo tako da gledajući slijeva udesno (nad intervalom I na osi apscisa) graf funkcije ide prema gore odnosno dolje.

Zadatak 7. *Temeljem na slici 2.4 prikazanog crteža grafa nepoznate funkcije f, odredite na kojim intervalima funkcija f pada.*

Drugo bitno svojstvo koje realna funkcija jedne varijable može imati je (ne)parnost. To svojstvo ima smisla provjeravati samo ako je domena funkcije simetrična s obzirom na nulu, npr. ako je domena $\mathbb{R}$, $[-5, 5]$ ili $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$. Funkcija f s takvom domenom je parna funkcija ako je svejedno uvrštavamo li u nju x ili $-x$ (promjena predznaka originala ne utječe na predznak rezultata): za sve x iz domene je

$$f(-x) = f(x).$$

Primjer parne funkcije je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Grafovi parnih funkcija su simetrični s obzirom na os ordinata (objasnite zašto!).

Funkcija f sa simetričnom domenom je neparna funkcija ako uvrštavanje $-x$ umjesto x promijeni predznak rezultata (promjena predznaka originala mijenja predznak rezultata): za sve x iz domene je

$$f(-x) = -f(x).$$

Primjer neparne funkcije je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Grafovi neparnih funkcija su simetrični obzirom na ishodište (zašto?).

Na koncu, spomenimo i svojstva injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti. Funkcija je injekcija ako različiti originali daju različite rezultate, tj. ako iz $f(x) = f(x')$ uvijek slijedi $x = x'$. Vizualno injektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da sve horizontale graf funkcije sijeku najviše jednom. Funkcija je surjekcija ako svaki element kodomene ima original, tj. ako za svaki $y \in K$ možemo naći $x \in D$ takav da je $f(x) = y$. Surjektivnost je u pravilu lako postići smanjivanjem kodomene: Ako stavimo da je slika funkcije njena kodomena, funkcija je automatski (štoviše, po definiciji) surjektivna.[6] Vizualno surjektivnost realne funkcije jedne varijable vidimo po tome da svaka horizontala kroz točke kodomene bar jednom siječe graf. Ako je funkcija injekcija i surjekcija kažemo da je bijekcija.

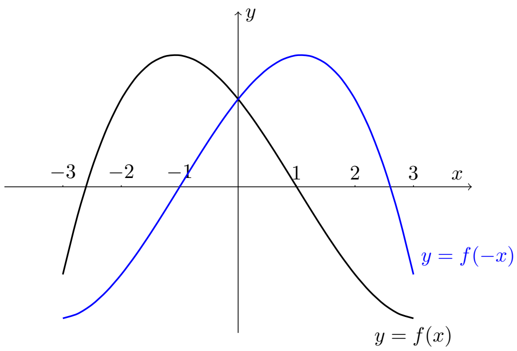
Ponovimo bitno... Osnovna svojstva koja mogu imati realne funkcije jedne varijable, a koja imaju značaj za njihove primjene, su rast i pad (na pojedinim intervalima), parnost i neparnost, injektivnost i surjektivnost.

2.3 Transformacije grafova

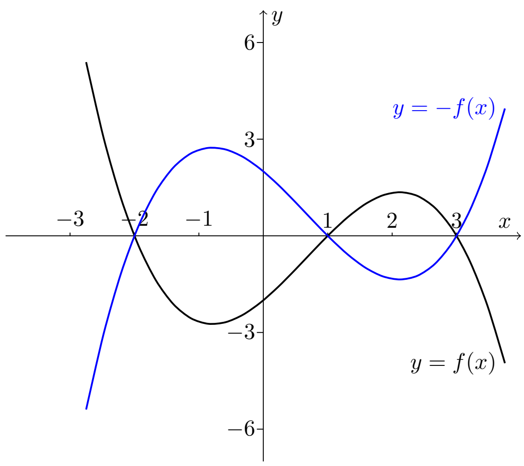
Ako znamo kako u Kartezijevom koordinatnom sustavu izgleda graf neke realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$, lako je skicirati grafove mnogih drugih iz nje izvedenih funkcija.

Prvi tip transformacije grafa je zrcaljenje (osna simetrija) s obzirom na jednu od koordinatnih osi uslijed promjene predznaka varijable. Ako se promjena predznaka odnosi na domenu (zamjena nezavisne varijable x s $-x$), zrcalimo s obzirom na os ordinata, a ako se odnosi na kodomenu (promjena predznaka zavisne varijable s $f(x)$ na $-f(x)$), onda zrcalimo s obzirom na os apsisa:

[6]Formalno, promjena kodomene znači i promjenu funkcije, no kako ta promjena ne utječe na graf funkcije, nećemo to posebno isticati.



Slika 2.5: Promjena predznaka (nezavisne) varijable.

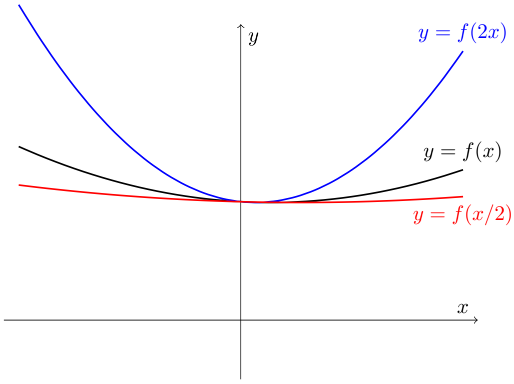


Slika 2.6: Promjena predznaka funkcije (zavisne varijable).

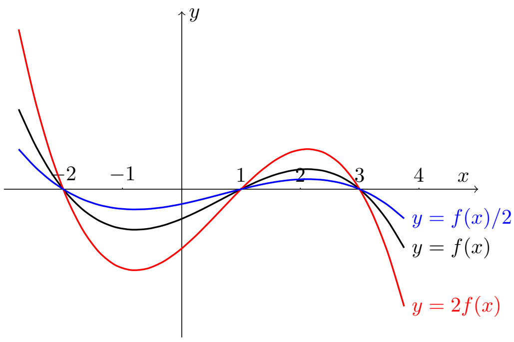
- Ako je $g(x) = f(-x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f s obzirom na os ordinata; vidi sliku 2.5.

- Ako je $g(x) = -f(x)$, graf funkcije g dobije se zrcaljenjem grafa od f s obzirom na os apscisa; vidi sliku 2.6.

Drugi tip transformacije je skaliranje (rastezanje odnosno stezanje) grafa u horizontalnom ili vertikalnom smjeru uslijed skaliranja (nezavisne) varijable (x zamjenjujemo s Ax pa se skaliranje odnosi na domenu, odnosno graf se horizontalno rasteže ili stišće) ili vrijednosti funkcije (zavisna varijabla $f(x)$ prelazi u $Af(x)$ pa se skaliranje odnosi na kodomenu, odnosno graf se vertikalno rasteže ili stišće). S obzirom na to da smo već opisali efekt



Slika 2.7: Skaliranje nezavisne varijable.

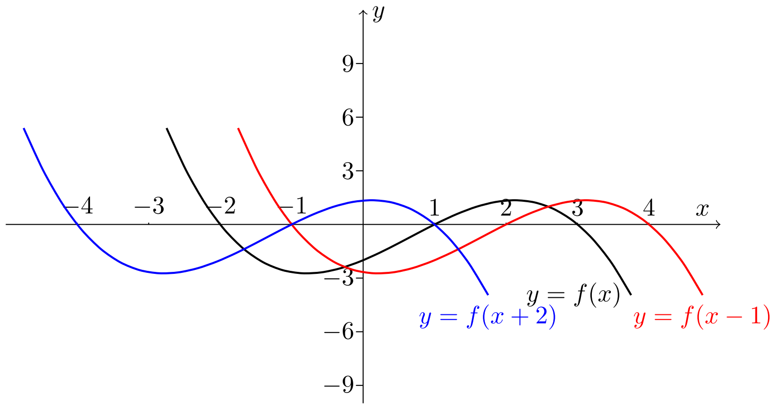


Slika 2.8: Skaliranje funkcije (zavisne varijable).

promjene predznaka funkcije na graf, ovdje je dovoljno razmatrati skaliranje pozitivnom konstantom $A > 0$:

- Ako je $g(x) = f(Ax)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i isto sjecište s osi ordinata (ako ga uopće ima), ali je horizontalno rastegnut (za $A < 1$, a za $A > 1$ je stisnut), vidi sliku 2.7. Primijetimo da skaliranjem s obzirom na domenu ne mijenjamo sjecište grafa s y-osi.
- Ako je $g(x) = Af(x)$, graf funkcije g ima isti oblik kao graf funkcije f i iste nultočke, ali je vertikalno rastegnut (za $A > 1$, za $A < 1$ graf je stisnut), vidi sliku 2.8. Primijetimo da skaliranjem s obzirom na kodomenu ne mijenjamo sjecišta grafa s x-osi.

Treći tip transformacije grafa je translacija, koja može biti horizontalna ako se odnosi na domenu (zamjena varijable x s varijablom $x+A$) ili vertikalna ako se odnosi na kodomenu (promjena vrijednosti funkcije s $f(x)$ na $f(x)+A$):



Slika 2.9: Horizontalna translacija grafa.

- Ako je $g(x) = f(x + A)$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A ulijevo (dakle, ako je A negativan pomak je udesno), vidi sliku 2.9.

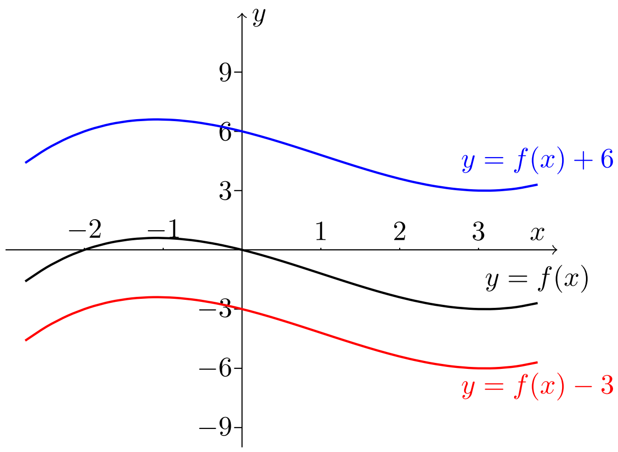
- Ako je $g(x) = f(x) + A$, graf funkcije g dobije se translacijom grafa od f za iznos A nagore (dakle, ako je A negativan, pomak je nadolje), vidi sliku 2.10.

Pomoću upravo opisanih pravila se iz poznavanja malog broja grafova (grafova elementarnih funkcija) mogu lako i dosta precizno nacrtati grafovi mnogih drugih funkcija. Primjerice, ako znamo nacrtati graf funkcije s formulom $f(x) = e^x$, temeljem gornjih pravila možemo nacrtati grafove funkcija s formulama e^{x+1}, $e^x - 2$, $-e^x$ i $3e^x$. Primijetimo da translacije i skaliranja s pozitivnim konstantama ne mijenjaju bitno izgled grafa, već samo njegovo pozicioniranje u koordinatnom sustavu.

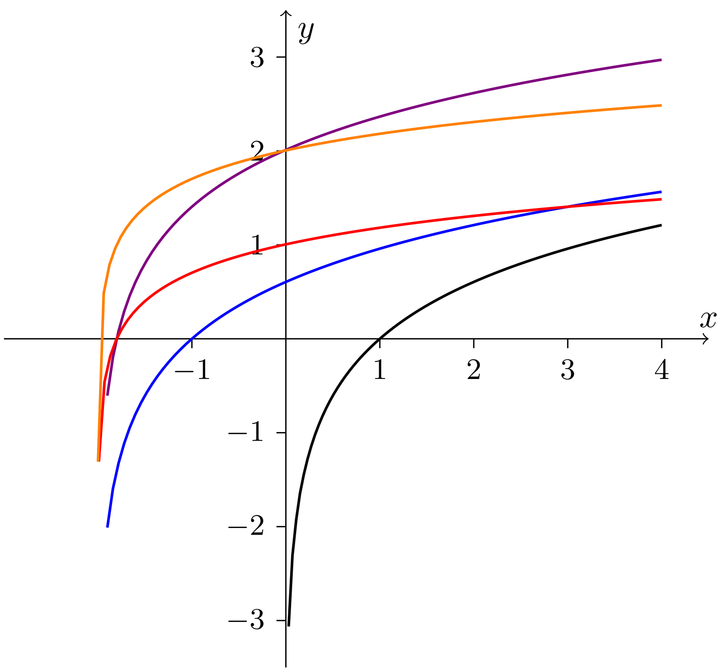
Primjer 32. *Na slici 2.11 crno u crnom koordinantom sustavu je nacrtan graf funkcije* $\log_\pi$ *(logaritam s bazom* π*). Nacrtajmo graf funkcije čije je pravilo* $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\log_\pi(10 + 5x)$*. Budući da nemamo promjenu predznaka ni u domeni ni u kodomeni, znamo da će graf funkcije* f *izgledati po obliku i orijentaciji jednako kao graf funkcije* $\log_\pi$*, ali će brojevi na osima i pozicije osi biti pomaknute jer imamo uključena sva četiri tipa transformacija koja na njih utječu.*

Kako bismo lakše pratili redoslijed transformacija, preoblikujmo formulu funkcije f *u*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\log_\pi(5 \cdot (x + 2)) + 3.$$



Slika 2.10: Vertikalna translacija grafa.



Slika 2.11: Graf funkcije $\log_\pi$ (crno) i njegova transformacija do grafa funkcije $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\log_\pi(5 + 4x)$ (narančasto)

Budući da množenje i dijeljenje imaju prednost pred zbrajanjem i oduzimanjem, te uzevši u obzir redoslijed uvrštavanja, imamo redom:

1. *Prvo se x poveća za 2, dakle se graf translatira za 2 ulijevo (plavo na slici 2.11 je graf funkcije $\log_\pi(x+2)$). Nultočka je sad -1 umjesto 1.*

2. *Zatim se $x+2$ skalira s faktorom 5, odnosno naš se graf horizontalno stegne 5 puta; s obzirom na oblik grafa, to znači strmiji rast (ljubičasto na slici 2.11 je graf od $\log_\pi(5x+10)$). Nultočka je sad $-9/5$ umjesto -1.*

3. *Zatim imamo skaliranje s faktorom $\frac{1}{2}$ u kodomeni, dakle se graf vertikalno dvostruko stisne (crveno na slici 2.11 je graf od $\frac{1}{2}\log_\pi(5x+10)$, nultočka se nije promijenila).*

4. *Naposlijetku imamo translaciju za 1 u kodomeni, tj. nagore – narančasti graf na slici 2.11 je graf funkcije f.*

U nastavku ćemo ukratko ponoviti elementarne funkcije. One se dijele na algebarske i transcendentne funkcije. To razlikovanje nije bitno samo za matematičare, nego i za prirodoznanstvenike: u algebarske funkcije mogu se uvrštavati fizikalne veličine (dakle, brojevi s jedinicama) i rezultat također ima jedinicu; u transcendentne funkcije mogu se uvrštavati samo brojevi i rezultat je čisti broj.

2.4 Algebarske funkcije

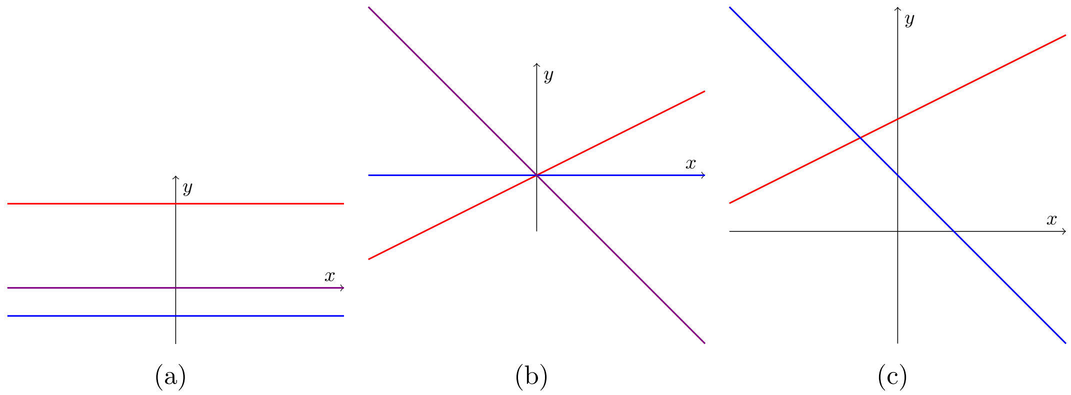
2.4.1 Afine funkcije

Afine funkcije (često nazivane i linearnim funkcijama) nezavisnu varijablu množe konstantom i tome pribrajaju još jednu konstantu. Formalnije:

Definicija 4 (Afina funkcija)**.** *Afina funkcija je realna funkcija s prirodnom domenom $\mathbb{R}$ kojoj je formula oblika*

$$f(x) = ax + b.$$

Graf afine funkcije je pravac: Sve točke oblika $(x, ax+b)$ za zadane a i b leže na istom pravcu, kojemu je a koeficijent smjera, a b slobodni član (slika 2.12, desno). Kako je $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, to je točka $(0, b)$ na grafu, tj. odsječak grafa afine funkcije na osi ordinata jednak je slobodnom članu. Afina funkcija kojoj je slobodni član nula zove se linearnom funkcijom (u užem smislu). Graf svake linearne funkcije prolazi kroz ishodište



Slika 2.12: Grafovi konstantnih (lijevo), linearnih (sredina) i općih afinih funkcija (desno).

(slika 2.12, sredina). Linearne funkcije opisuju proporcionalnost nezavisne i zavisne varijable: Par međuovisnih varijabilnih veličina zove se proporcionalnim (razmjernim) ako je omjer (konstanta proporcionalnosti) njihovih vrijednosti konstantan, tj. jednak za svaki par odgovarajućih vrijednosti. Ako je koeficijent smjera afine funkcije jednak nuli, govorimo o konstantnoj funkciji. U tom slučaju slika funkcije je jednočlani skup $\{b\}$, jer takva funkcija svim vrijednostima varijable pridružuje istu vrijednost b. Konstantna funkcija nije injekcija. Graf konstantne funkcije je paralelan s osi apscisa (slika 2.12, lijevo).

Primjer 33. *Identiteta $id(x) = x$ je linearna funkcija.*

Primjer 34. *Površina kruga je razmjerna kvadratu njegova polumjera, ali ne i polumjeru.*

Ako koeficijent smjera afine funkcije nije nula, afina funkcija je bijekcija s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ i ima točno jednu nultočku $-\frac{b}{a}$.

Zadatak 8. *Uz koji uvjet je afina funkcija parna (neparna)?*

Ovisno o predznaku koeficijenta smjera afina funkcija je rastuća, odnosno padajuća: za pozitivan koeficijent smjera oma raste, a za negativan pada.

Afine funkcije su vrlo česte u primjenama, iako su prave afine zavisnosti rijetke. Naime, često se pomoću afine funkcije aproksimira kompliciranija međuovisnost ili se pak (vidi odjeljak 2.8) neafine ovisnosti supstitucijama svode na afine.

Također, važno je uočiti da je u slučaju afine ovisnosti jedinica slobodnog člana uvijek jednaka jedinici zavisne varijable, a jedinica koeficijenta smjera je kvocijent jedinica zavisne i nezavisne varijable (zašto?).

Primjer 35. *Ovisnost koncentracije c_A reaktanta A o vremenu t u reakciji nultog reda opisana je jednadžbom*

$$c_\mathrm{A} = c_{\mathrm{A},0} - k_0 t.$$

Pritom je $c_{\mathrm{A},0}$ početna koncentracija od A, a $k_0 > 0$ je konstanta brzine reakcije. Očito bismo uz

$$x = t, \quad f(x) = c_\mathrm{A},$$

$$a = -k_0, \quad b = c_{\mathrm{A},0}$$

tu jednadžbu mogli interpretirati kao jednadžbu afine funkcije, s tim da joj domena ne bi bila cijeli skup $\mathbb{R}$ jer nas ne zanimaju vremena prije reakcije i nakon što reakcija stane. Primijetimo da je ovisnost c_A o t padajuća. Stoga je domena ove funkcije segment oblika $[0, T]$, gdje je T trajanje reakcije, recimo u sekundama, a T je nultočka funkcije c_A.

Ovdje zapravo treba biti malo oprezan. Kad govorimo o domeni i kodomeni funkcije te iznosima koje nanosimo na koordinatne osi, govorimo o čistim brojčanim iznosima (vidi odjeljak 1.3). Kad na horizontalnu os nanosimo vrijeme te os označimo primjerice s t/s, znamo da apscise u tom koordinatnom sustavu predstavljaju broj sekundi; stoga je i domena neke funkcije vremena (ovdje koncentracije) u tom slučaju neki interval brojeva, a ne vremenski interval. Efektivno to znači da kad smo gore rekli $x = t$ zapravo mislimo reći $x = t/\mathrm{s}$ i podrazumijevamo da su sve jedinice u svakom članu formule izdvojene.

Primjerice, ako imamo $c_\mathrm{A} = 0{,}100\,\mathrm{mol\,L^{-1}} - 0{,}667\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}\,t$, zapravo nije $x = t$, $f(x) = c_\mathrm{A}$, $a = -0{,}667\,\mathrm{mol\,L^{-1}\,s^{-1}}$ i $b = 0{,}100\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$, nego je

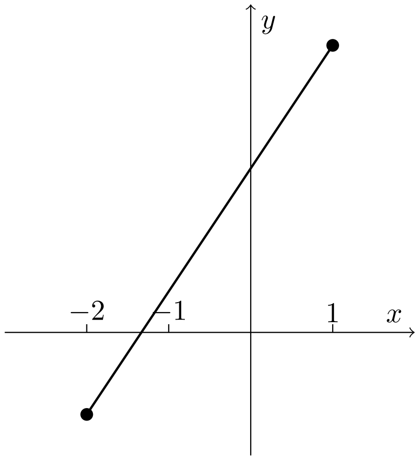
$$x = t\,\mathrm{s}^{-1},$$

$$f(x) = c_\mathrm{A}\,\mathrm{mol^{-1}\,L},$$

$$a = -0{,}667,$$

$$b = 0{,}100$$

(tj. $a = -k_0\,\mathrm{mol^{-1}\,L\,s}$ i $b = c_{\mathrm{A},0}\,\mathrm{mol^{-1}\,L}$). Pritom će raspon nezavisne varijable biti od 0 (početak reakcije) do $T\,\mathrm{s}^{-1} = 100/667$ (kraj reakcije).



Slika 2.13: Graf funkcije $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1{,}5x + 2$.

Primjer 36. *Tlak idealnog plina kao funkcija recipročne vrijednosti volumena ($p = nRT \cdot \frac{1}{V}$) može se shvatiti kao*

$$y = ax + b$$

uz $y = p/\mathrm{Pa}$, $x = \frac{1}{V}/(1/\mathrm{m}^3)$, $a = nRT/\mathrm{J}$ i $b = 0$. Možemo reći i: Tlak idealnog plina proporcionalan je recipročnoj vrijednosti volumena.

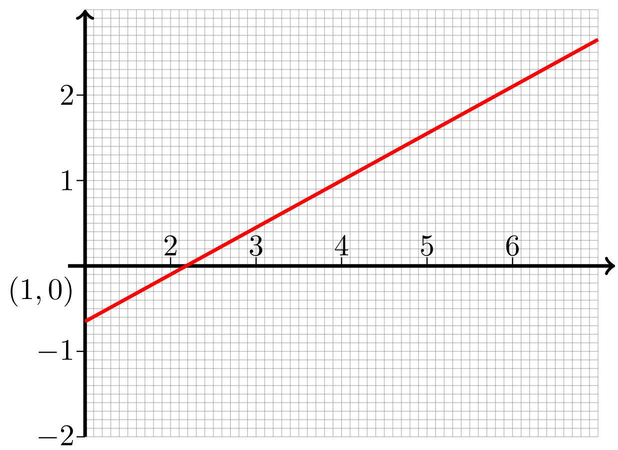
Primjer 37. *Za kemijske reakcije prvog reda u jedanaestom poglavlju izvest ćemo sljedeću vezu ovisnosti koncentracije*[7] *[A] reaktanta A o vremenu:*

$$\ln \frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}} = \ln \frac{[\mathrm{A}]_0}{c^{\ominus}} - k_1 t.$$

Pritom je $[\mathrm{A}]_0$ početna koncentracija, a k_1 konstanta (koeficijent brzine reakcije). Uz $y = \ln \frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}}$, $x = t/s$, $a = -k_1 \cdot s$ i $b = \ln \frac{[\mathrm{A}]_0}{c^{\ominus}}$ opet imamo prikaz neafine ovisnosti pomoću afine.

Kao u primjeru 35, u primjenama je često potrebno afinu funkciju promatrati tako da joj je domena samo neki segment, a ne cijeli skup realnih brojeva. Općenito, ako je domena neke funkcije segment $[a, b]$, onda odgovarajući graf sadrži samo točke s apscisama između a i b. Specijalno, graf afine funkcije kojoj je kao domena uzet segment $[a, b]$ je dužina koja je dio pravca koji predstavlja graf te funkcije između točaka s apscisama a i b, vidi sliku 2.13.

[7] U izrazima pod logaritmima koncentracije su dijeljene sa standardnom koncentracijom $c^{\ominus} = 1\ \mathrm{mol\ L^{-1}}$ jer se logaritmi mogu računati samo od čistih brojeva.



Slika 2.14: Odredite koeficijent smjera i slobodni član!

Zadatak 9. *Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 3$, $f(x) = 2x$ i $f(x) = 3-5x$. Precizno odredite sva sjecišta s koordinatnim osima.*

Zadatak 10. *Što preciznije izračunajte koeficijent smjera i slobodni član pravca prikazanog na slici 2.14.*

Ponovimo bitno... Afine funkcije su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Graf svake afine funkcije je pravac koji os ordinata siječe u b. Ovisno o koeficijentu smjera a afine funkcije su rastuće ($a > 0$), konstantne ($a = 0$) ili padajuće ($a < 0$).

2.4.2 Kvadratne funkcije

Definicija 5 (Kvadratna funkcija)**.** *Opća kvadratna funkcija je realna funkcija s prirodnom domenom $\mathbb{R}$, koja je zadana formulom oblika*

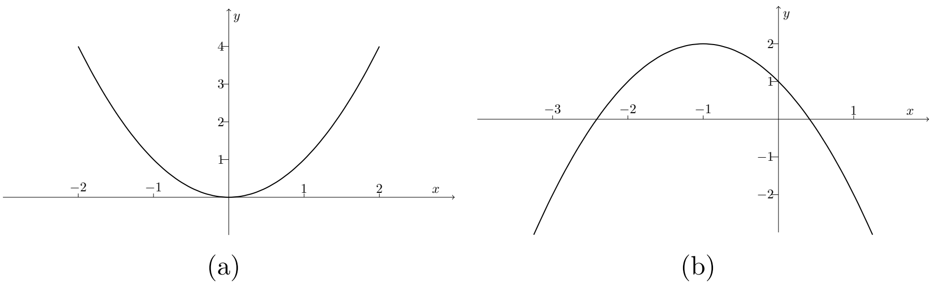
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdje su a, b, c zadane konstante (koeficijenti). Koeficijent $a \neq 0$ zove se vodećim koeficijentom, a c je slobodnim članom.

Primjer 38. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = x^2$$

je prototip kvadratne funkcije (s vodećim članom 1 i ostala dva koeficijenta jednaka nuli). Njen graf prikazan je slikom 2.15 (lijevo). Grafovi svih ostalih



Slika 2.15: Grafovi kvadratnih funkcija (lijevo: $f(x) = x^2$, desno: $f(x) = -x^2 - 2x + 1 = -(x+1)^2 + 2$).

kvadratnih funkcija mogu se izvesti iz njega koristeći opisane transformacije grafova (odjeljak 2.3) i svođenje na potpun kvadrat (slika 2.15 desno).

Graf svake kvadratne funkcije ima oblik parabole, a predznak vodećeg koeficijenta određuje je li „otvorena prema gore" (za $a > 0$) ili „prema dolje" (za $a < 0$). U prvom slučaju se najniža, a u drugom najviša točka grafa zove tjemenom parabole. Njegova apscisa je $x_T = -\frac{b}{2a}$. Kvadratna funkcija raste na $\langle -\infty, x_T\rangle$ i pada na $\langle x_T, +\infty\rangle$ ako $a < 0$, odnosno pada do tjemena i raste od tjemena ako $a > 0$. Graf kvadratne funkcije je uvijek simetričan s obzirom na paralelu s osi ordinata povučenu kroz tjeme. Kvadratna funkcija nije injekcija.

Kao i kod afinih funkcija, iz jednakosti $f(0)$ i slobodnog člana, slijedi da sjecište grafa kvadratne funkcije s osi ordinata ima ordinatu jednaku slobodnom članu c.

Kao što smo rekli, nultočke svake funkcije (sjecišta s osi apscisa) su rješenja jednadžbe $f(x) = 0$, a ona je u ovom slučaju kvadratna jednadžba

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Njena rješenja su dana formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

gdje je $D = b^2 - 4ac$ tzv. diskriminanta. Vidimo da graf kvadratne funkcije ne siječe os apscisa ako $D < 0$, siječe (dira) ju u samo jednoj točki (i to u tjemenu) ako $D = 0$, a ima dva sjecišta s osi apscisa ako $D > 0$.

Zadatak 11. *Odredite formulu za ordinatu tjemena. Nakon toga odredite sliku kvadratne funkcije.*

Primjer 39. *Neka je kvadratna funkcija zadana formulom*

$$f(x) = -x^2 - 2x + 1.$$

Tada je $a < 0$ pa će odgovarajuća parabola biti otvorena prema dolje. Sjecište s osi ordinata je u ordinati 1. Nultočke funkcije f se dobiju rješavanjem jednadžbe $-x^2 - 2x + 1 = 0$ i one su $-1 \pm \sqrt{2}$ (to su apscise sjecištâ grafa s osi apscisa). Tjeme ima apscisu $-(-2)/(2 \cdot (-1)) = -1$ i ordinatu $f(-1) = 2$. Odgovarajući graf je prikazan slikom 2.15 (desno).

Zadatak 12. *Skicirajte grafove funkcija $f(x) = 4x^2 + 7$, $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ i $f(x) = x^2 + 4x + 4$, ali tako da je svakoj od njih domena segment $[-1, 4]$.*

Zadatak 13. *Ako je $f(x) = ax^2 + bx + c$ i nezavisna varijabla x ima jedinicu $\forall$, a zavisna varijabla $f(x)$ ima jedinicu $\exists$, koje su jedinice koeficijenata a, b i c?*

Ponovimo bitno... Kvadratne funkcije su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graf im je parabola, okrenuta prema gore ili dolje ovisno o predznaku vodećeg koeficijenta a. Sjecište s osi ordinata je u c, a sjecišta s osi apscisa su rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ (njih 0, 1 ili 2).

2.4.3 Polinomi

Monom stupnja $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja broju pridružuje njegovu n-tu potenciju pomnoženu s nekim brojem:[8]

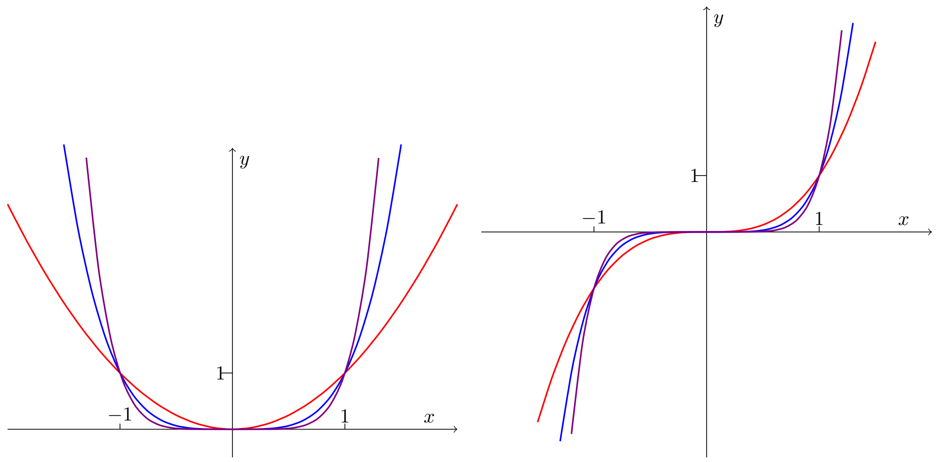
$$m(x) = ax^n.$$

Ako je n paran i $a > 0$, m ima svojstva i graf sličan funkciji $f(x) = x^2$. Ako je pak n neparan i $a > 0$ radi se o strogo rastućoj funkciji čiji prototip je funkcija $f(x) = x^3$. Grafovi monoma parnih odnosno neparnih stupnjeva s vodećim koeficijentom $a = 1$ prikazani su slikom 2.16.

Polinom je zbroj konačno mnogo monoma. Najveći od njihovih stupnjeva zove se stupnjem polinoma. Primjeri polinoma su $f(x) = x^3 + 6x - 9$ (polinom stupnja 3) i $g(t) = 4t^5 - 7t^6 + 3{,}2t - 1{,}45367$ (polinom stupnja 6). Uočimo: Polinom stupnja 0 je konstantna funkcija, a polinom stupnja 1 je afina funkcija s koeficijentom smjera različitim od nule. Kvadratne funkcije su polinomi stupnja 2.

Preciznije:

[8] Strogo uzevši, monom je samo funkcija potenciranja, ali smo ovdje definiciju malo proširili.



(a) (b)

Slika 2.16: Grafovi monoma parnog stupnja (lijevo) i neparnog stupnja (desno), za $a = 1$.

Definicija 6 (Polinom)**.** *Polinom stupnja n je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Brojevi $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ su unaprijed zadani (dakle, konstante) i zovu se koeficijentima polinoma f, pri čemu se koeficijent a_n zove vodećim koeficijentom. Član a_0 zove se slobodnim člano, polinoma i predstavlja vrijednost $f(0)$, dakle sjecište pripadnog grafa s osi ordinata.

Broj α je nultočka polinoma f točno ako je f djeljiv s $(x - \alpha)$. Ukoliko je polinom f djeljiv s polinomom $(x - \alpha)^m$ za neki realan broj α i prirodan broj m, a pritom nije djeljiv s $(x - \alpha)^{m+1}$, kažemo da je α m-struka nultočka polinoma f; pritom broj m zovemo kratnošću nultočke α. Višestruke nultočke su one kojima je kratnost veća od 1. Zbroj svih kratnosti svih realnih nultočaka polinoma ne može biti veći od njegovog stupnja.

Primjer 40. *Polinom zadan formulom*

$$p(x) = 5x^8 - 5x^7 - 15x^6 + 25x^5 - 10x^4$$

je djeljiv s $(x - 1)$, $(x + 2) = (x - (-2))$ i s $x = (x - 0)$:

$$p(x) : (x - 1) = 10x^4 - 15x^5 + 5x^7,$$

$$p(x) : (x + 2) = -5x^4 + 15x^5 - 15x^6 + 5x^7,$$

$$p(x) : x = -10x^3 + 25x^4 - 15x^5 - 5x^6 + 5x^7.$$

Stoga su 1, -2 *i* 0 *njegove nultočke.*

Polinom p *je osim s* $(x-1)$ *djeljiv i s* $(x-1)^2$ *i s* $(x-1)^3$*, ali nije djeljiv s* $(x-1)^4$*. Stoga je* 1 *njegova trostruka nultočka. Polinom* p *nije djeljiv s nikojom višom potencijom od* $(x+2)$ *pa je* -2 *njegova jednostruka nultočka. Polinom* p *osim s* x *djeljiv i s* x^2 *i s* x^3 *i s* x^4*, ali nije djeljiv s* x^5*. Stoga je* 0 *njegova četverostruka nultočka.*

Primjer 41. *Neka je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana s*

$$f(x) = 0{,}1x^4 + 0{,}2x^3 - 1{,}3x^2 - 1{,}4x + 2{,}4.$$

Radi se o polinomu sa slobodnim članom $2{,}4$ *pa je sjecište s* y*-osi u* $2{,}4$*.*

Za određivanje sjecišta s osi apscisa treba riješiti jednadžbu

$$f(x) = 0{,}1(x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24) = 0.$$

Kako su djeljitelji[9] *od* 24 *brojevi* $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$*, pokušavamo među njima naći nultočke. Lako vidimo da je* $f(1) = 0$ *i* $f(-2) = 0$*, pa dijeljenje* $f(x)$ *s* $0{,}1(x-1)(x+2)$ *daje* $x^2 + x - 12$*, što pak ima nultočke* 3 *i* -4*. Dakle, graf funkcije* f *siječe* x*-os u* -4*,* -2*,* 1 *i* 3*.*

Ako su $x_1, \ldots, x_k$ sve (realne) nultočke polinoma p, redom s kratnostima $m_1, \ldots, m_k$, te ako je zbroj svih kratnosti jednak stupnju polinoma ($m_1 + \cdots + m_k = n$), možemo p zapisati u faktoriziranom obliku

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}.$$

Ako je zbroj kratnosti svih realnih nultočaka manji od stupnja polinoma, znači da se u njemu pojavljuje bar još jedan kvadratni faktor bez realnih nultočaka.

Primjer 42. *Zbroj kratnosti nultočaka polinoma iz primjera 40 je* $3+1+4 = 8$*, što je stupanj polinoma* p *pa se on može zapisati kao*

$$p(x) = 5(x-1)^3(x+2)x^4.$$

Primjer 43. *Polinom zadan formulom* $p(x) = (x^2 + x + 1)(x-3)(x+4)$ *ima dvije realne nultočke (obje jednostruke) – to su* 3 *i* -4*. Zbroj njihovih kratnosti je* $1 + 1 = 2$*, što je manje od stupnja polinoma (4). Faktor* $x^2 + 1$ *nema realnih nultočki (diskriminanta mu je* -3*) pa* p *ne možemo do kraja faktorizirati na faktore oblika* $(x - c)^m$*.*

---

[9] Ako polinom ima cjelobrojne koeficijente, njegove cjelobrojne nultočke su (ako ih ima) među djeljiteljima slobodnog člana.

Polinom stupnja n ima najviše[10] n nultočaka. Graf polinoma je krivulja koja ima konačno mnogo prijevoja (promjena rasta u pad i obrnuto) – njih najviše $n-1$ – i konačno mnogo sjecišta s osi apscise – njih najviše n. Polinom neparnog stupnja uvijek ima bar jednu realnu nultočku tj. ako je stupanj polinoma neparan, graf mu ima bar jedno sjecište s x-osi, a ako je paran graf sjecišta grafa s x-osi ne moraju postojati.

Ako je n neparan i vodeći koeficijent $a_n > 0$, onda lijevi kraj grafa ide prema dolje, desni prema gore (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom raste); ako je n paran i vodei koeficijent $a_n > 0$, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema gore (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom pada, a za jako velike raste). Za negativne vodeće koeficijente pravila su obrnuta: Ako je n neparan $a_n < 0$, onda lijevi kraj grafa ide prema gore, desni prema dolje (za jako male i za jako velike vrijednosti nezavisne varijable polinom pada); ako je n paran i $a_n < 0$, onda i lijevi i desni kraj grafa idu prema dolje (za jako male vrijednosti nezavisne varijable polinom raste, a za jako velike pada).

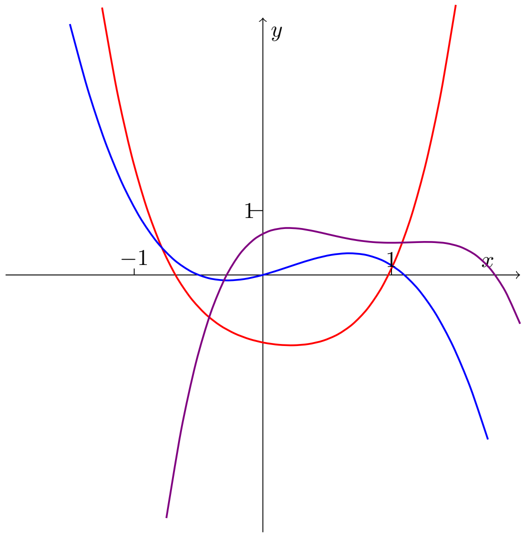
Zadatak 14. *Sa slike 2.17 odredite koji grafovi prikazuju polinome parnog, a koji neparnog stupnja te predznake njihovih vodećih koeficijenata.*

Ponovimo bitno... Polinomi su funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čije formule su zbrojevi potencija varijable (s prirodnim eksponentima) pomnoženih s konstantama. Oni uključuju afine i kvadratne funkcije. Stupanj polinoma je najveći eksponent s kojim se varijabla pojavljuje u njemu. Polinomi imaju najviše onoliko nultočaka koliki im je stupanj. Graf polinoma os ordinata siječe u slobodnom članu (tj. konstantnom pribrojniku u polinomu).

2.4.4 Racionalne funkcije

Dvije veličine su obrnuto proporcionalne ako im je umnožak konstantan. Primjerice, tlak i volumen idealnog plina su obrnuto proporcionalni. Primijetimo da kod obrnute proporcionalnosti ima smisla zahtijevati da te veličine ne postižu vrijednost nula (ako bi uz konstantan xy primjerice x bio 0, slijedilo bi da je$xy = 0$ za sve y, drugim riječima, stalno bi bar jedna od veličina morala biti 0).

[10] Da računamo u kompleksnim brojevima: Polinom stupnja n ima točno n nultočaka, s tim da neke mogu biti višestruke. U tom slučaju vrijedi: Ako su $x_1, \dots, x_k$ sve (kompleksne) nultočke polinoma p, redom s kratnostima $m_1, \dots, m_k$, zbroj svih kratnosti jednak je stupnju polinoma ($m_1 + \cdots + m_k = n$), i polinom se može zapisati u faktoriziranom obliku $p(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}$.



Slika 2.17: Grafovi nekih polinoma.

Ako su x i y obrnuto proporcionalne i y shvatimo kao funkciju od x, radi se o ovisnosti tipa $f(x) = \frac{a}{x}$. Ona očigledno nije polinom jer nije definirana za $x = 0$. Ako malo bolje promotrimo, radi se o funkciji koja je kvocijent polinoma stupnja 0 i polinoma stupnja 1. Za razliku od zbroja, razlike i umnoška dvaju polinoma (koji ponovno daju polinom), kvocijent polinoma općenito neće biti polinom.

Definicija 7 (Racionalne funkcije)**.** *Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma.*

Njihovu prirodnu domenu čine svi realni brojevi koji nisu nultočke nazivnika (dakle, ako nazivnik nema realnih nultočaka, prirodna domena im je cijeli skup $\mathbb{R}$). Pritom treba pripaziti: Prirodnu domenu određujemo prije eventualnog skraćivanja.

Primjer 44. *Funkcija zadana s*

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

nije isto što i polinom zadan s $g(x) = x + 2$. Naime, kraćenje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem (u našem primjeru to je $(x - 2)$), što smijemo činiti samo ako smo sigurni da taj broj nije nula. Stoga je potrebno prvo odrediti prirodnu domenu za dano pravilo. Za x iz te domene *onda nazivnik neće biti nula i moći ćemo kratiti, ali za x koji nije u toj domeni, funkcija nije definirana.*

Konkretno, prirodna domena funkcije f je skup $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Za x iz te domene je $f(x) = x + 2$, tj. graf joj je do na jednu točku jednak grafu afine funkcije zadane pravilom $g(x) = x + 2$. Funkcija f je stoga racionalna, a ne afina funkcija. Ta točka koja čini razliku između grafova funkcija f i g je točka $(2, 3)$, koja je na grafu funkcije g, ali nije na grafu funkcije f koji izgleda kao da smo „iščupali" točku $(2, 3)$ iz grafa funkcije g, tj. kao graf od g, ali s praznom točkom na poziciji $(2, 3)$.

Prototip racionalnih funkcija su funkcije zadane formulom oblika

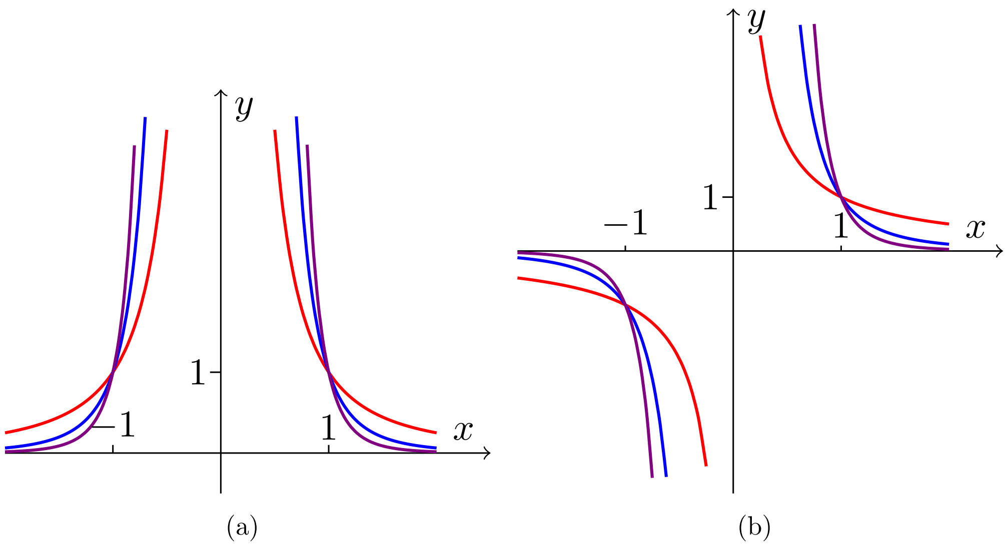
$$r_n(x) = \frac{1}{x^n}$$

gdje je $n \in \mathbb{N}$, dakle „monomi s negativnim cijelim eksponentima". Njima je prirodna domena $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$ te im grafovi ne sijeku os ordinata. Kako je razlomak jednak nuli točno ako mu je brojnik jednak nuli, a brojnik ovakve funkcije je 1, slijedi da ove funkcije nemaju nultočki pa im grafovi ne sijeku ni os apscisa. Iz formule je vidljivo da za n neparan ove funkcije poprimaju pozitivne vrijednosti za pozitivne x, a negativne vrijednosti za negativne x, pa im je graf u I. i III. kvadrantu. Za paran n one poprimaju samo pozitivne vrijednosti pa im je graf u I. i II. kvadrantu (vidi sliku 2.18).

Na slikama 2.18 vidljivo je da za funkcije r_n postoje po dva pravca u ravnini koji se ističu time da grafovi priliježu uz njih. Ti pravci su njihove asimptote. Općenito, asimptota krivulje je pravac koji ima svojstvo da su mu točke krivulje sve bliže što su dalje od ishodišta. Primijetimo da to ujedno znači i da je svaki pravac sam sebi asimptota. Vezano za grafove funkcija obično se ističu tri vrste asimptota: horizontalne, vertikalne i kose. Precizne definicije svih tih vrsta asimptota biti će dane u poglavlju 4.1, a ovdje ćemo se samo intuitivno upoznati s horizontalnim i vertikalnim asimptotama.

Horizontalna asimptota krivulje je horizontalni pravac $y = L$ u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više lijevo ili desno, tj. krivulja se približava horizontalnoj asimptoti s porastom i/ili padom vrijednosti apscise (ako je x jako velik ili jako mali,[11] $f(x) \approx L$). Graf funkcije može imati najviše dvije različite horizontalne asimptote, jednu lijevu i jednu desnu (objasnite zašto!). Sve racionalne funkcije oblika r_n imaju svojstvo da je $r_n(x) \approx 0$ za jako velike i jako male x, tj. pravac $y = 0$ (x-os) im je horizontalna asimptota. Kod

[11] Jako mali broj ne znači da se radi o broju blizu nule, nego o „jako negativnom" broju.



Slika 2.18: Grafovi racionalnih funkcija $r_n(x) = \frac{1}{x^n}$ za paran n (a) i za neparan n (b).

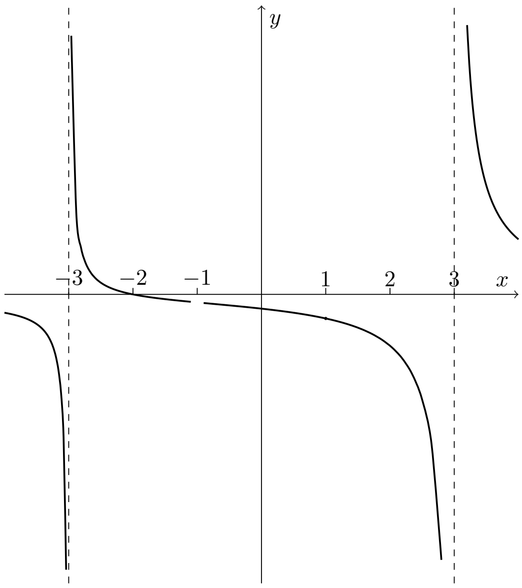
racionalnih funkcija se ili pojavljuje jedna obostrana horizontalna asimptota ili je uopće nema. Vrijede sljedeća pravila:

- Ako je nazivnik racionalne funkcije r strogo većeg stupnja od brojnika, pravac $y = 0$ je obostrana horizontalna asimptota od r.

- Ako su nazivnik i brojnik racionalne funkcije r jednakih stupnjeva, pravac $y = L$ je obostrana horizontalna asimptota od r, gdje je L kvocijent vodećeg koeficijenta brojnika i vodećeg koeficijenta nazivnika.

- Ako je nazivnik racionalne funkcije r manjeg stupnja od brojnika, r nema horizontalnu asimptotu.

Također, grafovi funkcija r_n imaju y-os (pravac $x = 0$) kao vertikalnu asimptotu. Vertikalna asimptota krivulje je vertikalni pravac $x = c$ u pravokutnom koordinatnom sustavu koji ima svojstvo da je ta krivulja sve bliža tom pravcu što su joj točke više gore ili dolje, tj. krivulja se sve više približava vertikalnoj asimptoti što je apscisa točke krivulje bliža c (ako je $x \approx c$, $f(x)$ je jako velik ili jako mali). Vertikalnih asimptota graf funkcije može imati proizvoljno mnogo — koliko ih je, ovisi i o pravilu i o domeni. Općenito, vertikalne asimptote se u pravilu (no ne uvijek) pojavljuju u „rupama u domeni" (slučajevi kad samo jedan broj iz nekog intervala nije u domeni, recimo gore



Slika 2.19: Graf racionalne funkcije zadane formulom $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2-9x-9}$.

je 0 „rupa u domeni" svih funkcija r_n) ili na (otvorenim) rubovima domene. Kod racionalnih funkcija vertikalne asimptote se pojavljuju kad nazivnik (nakon maksimalnog skraćivanja formule funkcije) ima realnih nultočki (tada su vertikalne asimptote točno pravci $x = c$ gdje su c redom nultočke nazivnika).

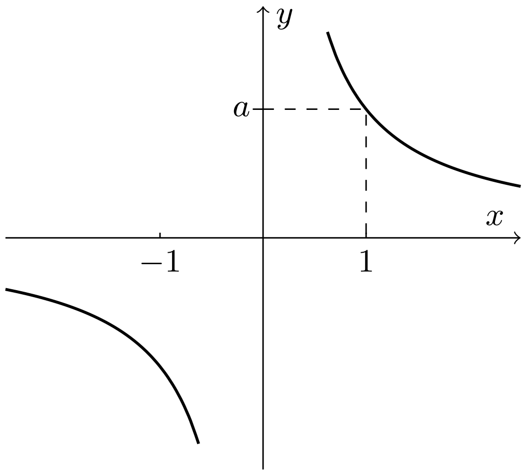
Primjer 45. *Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ima „rupu u domeni", ali njen graf nema vertikalnu asimptotu $x = 2$. Uzrok anomalije, tj. nepojavljivanja vertikalne asimptote u nultočki nazivnika je u tome što se algebarski razlomak koji predstavlja formulu funkcije mogao skratiti tako da rezultat do na jednu točku ispadne polinom, kako smo vidjeli u primjeru 44.*

Primjer 46. *Racionalna funkcija zadana formulom*

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+x^2-9x-9} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$$

za prirodnu domenu ima skup $\mathbb{R}$ bez brojeva -1, 3 i 3. Kako joj je nazivnik većeg stupnja nego brojnik, ona za horizontalnu asimptotu ima pravac $y = 0$ (x-os). Nadalje, kako joj se formula može skratiti do oblika $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)(x+3)}$, ona ima dvije vertikalne asimptote ($x = 3$ i $x = -3$). Graf ove funkcije prikazan je na slici 2.19.

Posljednja dva primjera racionalnih funkcija su pomalo „egzotični" i situacije kakve su u njima opisane su rijetke, osobito u primjenama. Stoga



Slika 2.20: Graf funkcije $f(x) = a/x$ za $a > 0$.

se je dobro zapamtiti da načelno u nultočkama nazivnika imamo vertikalne asimptote, ali ne u potpunosti zaboraviti da ne mora tako biti.

Primjer 47. *Ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina, pri konstantnoj temperaturi i množini, opisana je s*

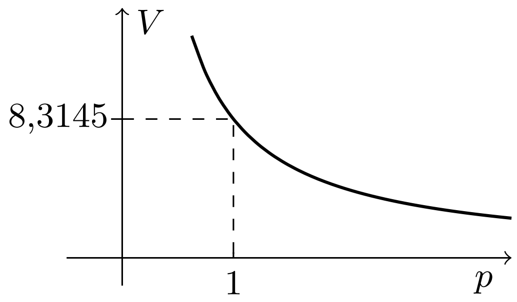
$$p(V) = \frac{nRT}{V},$$

tj. uz odabir $x = V$, $y = p$ i $a = nRT$ se radi o racionalnoj funkciji zadanoj s pravilom oblika

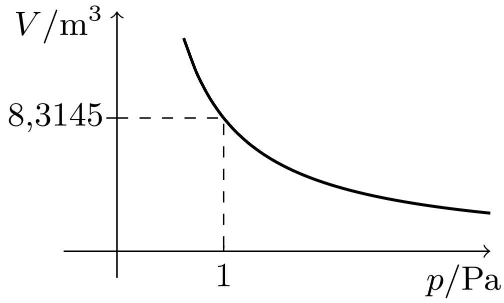
$$y = \frac{a}{x},$$

s $a > 0$. Graf takve funkcije dobije se iz grafa funkcije $f_1(x) = \frac{1}{x}$ (crvena istostrana hiperbola na slici 2.18 (b)) u skladu s pravilima za transformaciju grafa (vidi poglavlje 2.3), vidi sliku 2.20.

Mnogi bi graf na slici 2.20 prihvatili kao graf funkcije tlaka idealnog plina za $a = nRT$. No, u našem konkretnom slučaju trebamo uzeti u obzir da se ne radi o apstraktnoj matematičkoj funkciji u kojoj su x, y i a samo realni brojevi. Ovdje su to iznosi konkretnih fizičkih veličina i ne mogu biti negativni. Stoga je za taj slučaj besmisleno crtati obje grane grafa — lijeva grana odnosi se na negativne vrijednosti x, tj. ticala bi se negativnih iznosa volumena te je ona suvišna. Uz to, x i y nemaju jednoznačnu i s kontekstom povezanu interpretaciju te bi trebalo odgovarajuće promijeniti oznake. Stoga bi prikaz na slici 2.21 bio bolji prikaz grafa ovisnosti tlaka idealnog plina o



Slika 2.21: Ne baš korektno prikazana ovisnost tlaka o volumenu idealnog plina pri $n = 0{,}01$ mol i $T = 100$ K.

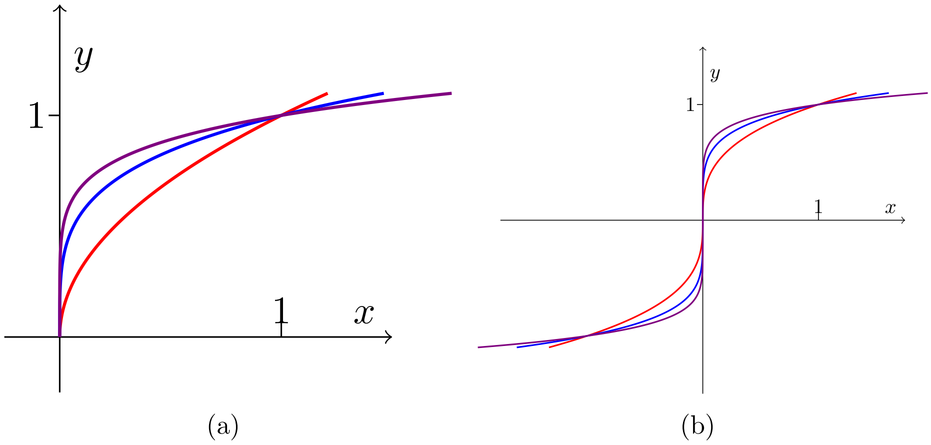


Slika 2.22: Pravilno prikazana visnost tlaka o volumenu idealnog plina pri $n = 0{,}01$ mol i $T = 100$ K.

volumenu, ako je množina primjerice $n = 0{,}01$ mol *i temperatura* $T = 100$ K.

Prikaz na slici 2.21 ima jednu prirodoznanstvenu i jednu matematičku nekonzistentnost. Brojevi na koordinatnim osima nisu volumen i tlak, nego samo njihovi iznosi za odabrane jedinice. Stoga na slici 2.21 osi nisu korektno označene — os apscisa prikazuje iznose V/m^3*, a os ordinata iznose* p/Pa*. No, ako tako samo promijenimo oznake, nismo više u skladu s početnim odabirom* $x = V$ *i* $y = p$*. Što je krivo? Ovaj problem već smo spomenuli u primjeru 35. Naime, umjesto* $x = V$, $y = p$ *i* $a = nRT$ *preciznije smo trebali pisati* $x = V/\mathrm{m}^3$, $y = p/\mathrm{Pa}$ *i* $a = nRT/\mathrm{J}$*, ali smo dogovorno podrazumijevali da naš odabir* x, y *i* a *upravo to znači. Tek uz takvu interpretaciju matematičkih veličina* x, y *i* a *imamo korektan matematički model prirodoznanstvenog odnosa. Pravilan prikaz vidljiv je na slici 2.22.*

Zadatak 15. *Virijalna jednadžba stanja plina (njena prva dva člana, vidi*



Slika 2.23: Funkcije zadane s $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ za n paran (a) i n neparan (b).

primjer 479) ima oblik

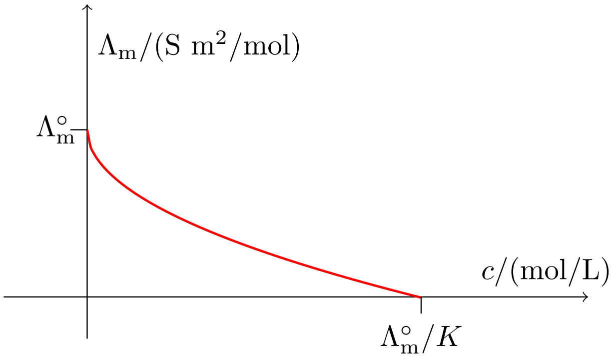
$$pV = nRT\left(1 + \frac{Bn}{V}\right),$$

gdje je B (ne nužno pozitivan) koeficijent ovisan o vrsti plina. Kako sve može izgledati graf ovisnosti p o V ako je stanje plina opisano virijalnom jednadžbom?

Ponovimo bitno... Racionalne funkcije su kvocijenti dvaju polinoma, a prirodna domena im je skup realnih brojeva bez nultočaka nazivnika. Često posjeduju asimptote, tj. pravce kojima se graf vizualno približava kako se točka grafa udaljava od ishodišta. Racionalna funkcija ima horizontalnu asimptotu ako joj nazivnik nije manjeg stupnja od brojnika, a vertikalne asimptote ima u nultočkama nazivnika (nakon eventualnog kraćenja zajedničkih faktora brojnika i nazivnika).

2.4.5 Korijeni

Neka je $y = x^n$. Ako je n neparan, onda je vrijednost od x jedinstveno određena vrijednošću y i kažemo da je $x = \sqrt[n]{y}$. Primjerice, $2^3 = 8$ znači da je $2 = \sqrt[3]{8}$. Budući da je (za neparan n) x^n za pozitivan broj pozitivan broj, a za negativan negativan, slijedi da su neparni korijeni definirani za sve realne brojeve te ih možemo shvatiti kao funkcije $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Radi se o rastućim funkcijama čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu (slika 2.23 (b)).



Slika 2.24: Ovisnost molarne provodnosti jakog elektrolita o njegovoj koncentraciji.

Ako je n paran, onda iz $y = x^n$ (recimo, $y = x^2$) slijedi da je $y \geq 0$. Uz to, vrijednost od x nije jedinstveno određena vrijednošću y (primjerice, $(-3)^2 = 3^2 = 9$). Stoga se često piše $\sqrt{9} = \pm 3$. No, želimo li korijene promatrati kao funkcije, njihova vrijednost mora biti jedinstveno određena te se dogovorno uzima da parni korijeni, promatrani kao funkcije, pozitivnih brojeva daju pozitivne brojeve. Imamo dakle $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ za n paran. I ovo su rastuće funkcije, čiji grafovi sijeku koordinatne osi samo u ishodištu, no graf se zbog prirodne domene $[0, +\infty\rangle$ nalazi samo u prvom kvadrantu Kartezijevog kooordinatnog sustava (slika 2.23 (a)).

Zadatak 16. *Kohlrauschov zakon opisuje ovisnost molarne provodnosti Λ_{m} o koncentraciji c jakog elektrolita i glasi*

$$\Lambda_{\mathrm{m}} = \Lambda_{\mathrm{m}}^{\circ} - \mathcal{K}\sqrt{c}.$$

Pritom su $\Lambda_{\mathrm{m}}^{\circ}$ i $\mathcal{K}$ konstante. Koristeći transformacije grafova objasnite zašto pripadni graf ima oblik prikazan slikom 2.24.

Ponovimo bitno... Korijeni su rastuće realne funkcije. Neparni korijeni kao prirodnu domenu imaju cijeli skup $\mathbb{R}$, a u prirodnoj domeni parnih korijena su samo nenegativni brojevi.

2.5 Kompozicija funkcija i inverne funkcije

Mnoge funkcije djeluju tako da prvo nezavisnu varijablu transformiraju po jednom pravilu u neku međuvrijednost, a onda tu međuvrijednost transformiraju u konačnu vrijednost funkcije. Takvom kombinacijom pravila (uvrštavanjem jednog pravila u drugo) dobivamo novu funkciju koju možemo i ne moramo gledati kao sastavljenu od polazne dvije.

Primjer 48. *Ako želimo odrediti masu otopljene tvari u otopini poznate množinske koncentracije c i poznatog volumena V, možemo prvo iz c i V odrediti množinu otopljene tvari prema pravilu $n = cV$, a zatim iz množine odrediti masu prema pravilu $m = nM$, gdje je M molarna masa otopljene tvari: Dobili smo kompoziciju funkcija množine u ovisnosti o koncentraciji i volumenu s funkcijom mase u ovisnosti o množini. Alternativno, mogli smo odmah iskombinirati formule tako da dobijemo pravilo $m = cMV$, čime izbjegavamo računanje međurezultata n ako nam on nije od značaja.*

Preciznije,

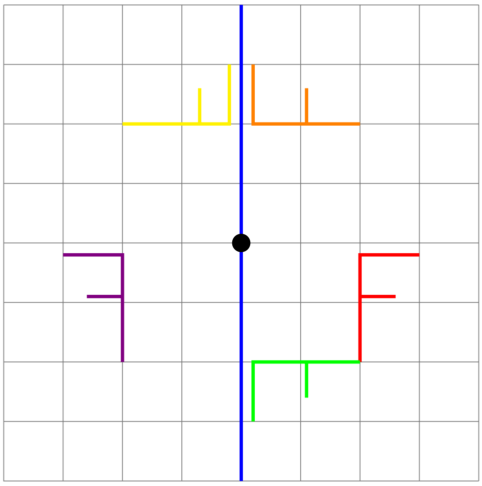
Definicija 8 (Kompozicija funkcija)**.** *Kompozicija funkcija $f : A \to B$ i $g : C \to D$ je funkcija $f \circ g$ čije pravilo je dano s*

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

No, da ne zaboravimo da funkciju čine i domena i kodomena, što je domena, a što je kodomena od $f \circ g$? Rezultati od $f \circ g$ su negdje gdje su rezultati od f jer se dobiju uvrštavanjem nečega ($g(x)$-ova) u funkciju f. Dakle, kodomena od $f \circ g$ je kodomena od f, tj. B. S druge strane, u $f \circ g$ uvrštavamo x-eve koje prvo moramo uvrstiti u g da bismo mogli izračunati $f(g(x))$, dakle su x-evi iz domene od g odnosno domena od $f \circ g$ je C. Sve skupa nam daje $f \circ g : C \to B$. No, pritom skupovi A i D ne smiju biti bilo kakvi. Budući da je D kodomena od g, znamo da je $g(x) \in D$ (za sve $x \in C$). Nadalje, kako $g(x)$ moramo moći uvrstiti u f slijedi da $g(x)$ mora biti u domeni A od f, tj. mora vrijediti $D \subseteq A$ da bi kompozicija $f \circ g$ bila smislena. U praksi se to lako vidi: Ukoliko izračunati $g(x)$ ne možemo uvrstiti u f, kompozicija $f \circ g$ nije definirana u x.

Primjer 49. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s $f(x) = 2x + 1$, a $g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ s $g(x) = \sqrt{x}$, onda imamo da je $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1$ i koji god nenegativan x uzmemo to je moguće izračunati te je $f \circ g : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$.*

Zamijenimo li redoslijed, nailazimo na probleme. Formalno, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \sqrt{2x + 1}$ te se sve čini smisleno. No, kao domenu od f uzeli smo $\mathbb{R}$ te bi $g \circ f$ trebala također biti definirana na $\mathbb{R}$. Za neke realne x, primjerice za $x = -5$, broj $2x + 1$ je negativan te se ne može izračunati $g \circ f(x)$ za takve x. Stoga $g \circ f$ nije definirana uz početni odabir domene od f. Ako bi nam pak bilo dovoljno za domenu od f uzeti skup $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ (tj. brojeve x za koje je $2x + 1 \geq 0$), onda bi i $f \circ g$ i $g \circ f$ bile dobro definirane (ali različite).



Slika 2.25: Nekomutativnost kompozicije funkcija

Prethodni primjer važan je ne samo jer upozorava na oprez pri baratanju domenama kod kompozicije, nego na još jednu bitnu stvar: kod kompozicije funkcija treba paziti na redoslijed. Čak i ako su definirane obje kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$, one u pravilu nisu iste funkcije. Neformalnije rečeno, nije svejedno koje pravilo uvrštavamo u koje.

Primjer 50. *Ako su x sastojci za kolač, f miješanje, g pećenje, onda je $f(x)$ tijesto za kolač, a $g(f(x)) = g \circ f(x)$ je ispečeni kolač, dok su $g(x)$ spečeni sastojci, a $f(g(x)) = f \circ g(x)$ su izmiješani prethodno ispečeni sastojci.*

Primjer 51. *Pogledajte crveno slovo* F *na slici 2.25. Ako ga prvo zrcalimo preko plavog pravca (ljubičasto) i zatim zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke, doći će u zelenu poziciju. Ako ga pak prvo zarotiramo u pozitivnom smjeru za pravi kut oko crne točke (narančasto), a zatim zrcalimo s obzirom na plavu os, doći će u žutu poziciju. Dakle, kompozicija osne simetrije i rotacije za $90°$ oko točke na osi nije komutativna.*

U nekim slučajevima desi se da kod uzastopnog primjenjivanja dva pravila rezultat na kraju izgleda kao početak — što je prvo pravilo promijenilo, drugo je vratilo u polazno stanje.

Primjer 52. *Ako crveno slovo* F *iz prethodnog primjera (slike 2.25) prvo zarotirate za $90°$ u pozitivnom smjeru oko crne točke (narančasta pozicija), a zatim oko iste točke za $270°$ (isto u pozitivnom smjeru), doći će u polaznu, crvenu poziciju.*

U takvim slučajevima kažemo da je druga funkcija inverzna prvoj i prva inverzna drugoj. Preciznije,

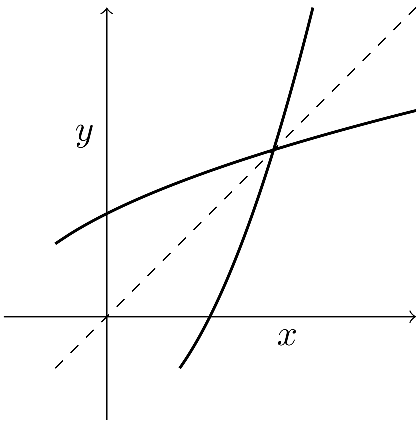
Definicija 9 (Inverzna funkcija). *Inverzna funkcija funkcije $f : A \to B$ je funkcija $g : B \to A$ (ako takva postoji) takva da je $f \circ g(x) = x$ za sve $x \in B$ i $g \circ f(x) = x$ za sve $x \in A$. Tada pišemo $g = f^{-1}$.*

Možemo reći: ako f x-u pridružuje y (recimo, broju 2 broj -3), onda f^{-1} y-u pridružuje x (broju -3 broj 2).

Nemaju sve funkcije inverze: Funkcija ima inverz ako i samo ako je bijekcija, tj. injekcija i surjekcija. Zašto su ta dva svojstva bitna? Injektivnost znači da različitim x-evima pridružujemo različite y. Kad bi funkcija f imala inverz, a da pritom dvama x-evima x_1 i x_2 bude pridružen isti y, onda bi inverz f^{-1} morao tom y-u pridružiti i x_1 i x_2, tj. f^{-1} ne bi bio funkcija. Surjektivnost znači da je svaki y iz kodomene B pridružen nekom x-u iz domene A, dakle se može uzeti taj x kao $f^{-1}(y)$, tj. moguće je definirati pravilo pridruživanja s domenom B.

Dosad smo se susreli s jednim važnim primjerom inverznih funkcija, korijenima. Pritom smo imali dva slučaja. Neparni korijeni su inverzne funkcije neparnih monoma, recimo $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je inverzna funkcija bijekcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, jer za sve realne brojeve x i y vrijedi $\sqrt[3]{x^3} = x$ (tj. $f^{-1} \circ f(x) = x$) i $(\sqrt[3]{y})^3 = y$ (tj. $f \circ f^{-1}(y) = y$). S druge strane, parni monomi nisu bijekcije s $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Uzmimo primjerice kvadriranje. Ono nije injekcija jer recimo -2 i 2 kvadrirani oba daju isti rezultat 4, a nije ni surjekcija jer se negativni brojevi ne mogu napisati kao kvadrati realnih brojeva. Surjektivnost lako postignemo: promijenimo kodomenu $\mathbb{R}$ u sliku te funkcije $[0, +\infty\rangle$. Time smo, formalno gledajući, promijenili funkciju (funkcija je osim pravilom određena i domenom i kodomenom), ali ta promjena je prilično nebitna jer nas ni u kom smislu ne ograničava. Injektivnost se ne može postići bez „zahvata" u domeni, točnije sužavanja domene. Takva promjena funkcije u novu kod koje se mijenja samo domena, i to na manji skup, zove se restrikcija funkcije. Restrikcije ćemo označavati jednako kao i polazne funkcije. U slučaju kvadriranja ako za domenu uzmemo $[0, +\infty\rangle$, onda smo dobili injekciju: kvadrati različitih nenegativnih brojeva su različiti. Stoga $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ doduše nema inverza, ali $f : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$, $f(x) = x^2$ ga ima i to je točno funkcija drugog korijena.

Ako znamo graf bijekcije f u Kartezijevom koordinatnom sustavu, onda je lako nacrtati graf njezine inverzne funkcije: Graf od f^{-1} je zrcalno simetričan grafu od f s obzirom na pravac $y = x$ (slika 2.26; vizualno je ta simetrija vidljiva samo ako su odabrane jedinice na x- i y-osi jednake, tj. ako koristimo pravi Kartezijev koordinatni sustav!). Usporedite primjerice grafove funkcije kubiranja i funkcije trećeg korijena (vidi slike 2.16 (b) i 2.23 (b)).



Slika 2.26: Grafovi dviju međusobno inverznih funkcija.

Korisno je zapamtiti još i sljedeće: ako je funkcija rastuća njen inverz je također rastuća funkcija, a ako je funkcija padajuća njen inverz je padajuća funkcija.

Sad konačno možemo reći i što su algebarske funkcije: To su sve funkcije koje se iz monoma mogu dobiti s osnovne četiri računske operacije i korjenovanjem te kompozicijama.

Primjer 53. *Funkcija zadana formulom*

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x^2+1}} - x - \sqrt{x}$$

je primjer algebarske funkcije.

Ponovimo bitno... Kompozicija funkcija f i g je definirana s $f \circ g(x) = f(g(x))$. Domena joj je jednaka domeni „unutrašnje” funkcije g, a kodomena joj je jednaka kodomeni „vanjske” funkcije f. Inverzna funkcija bijekcije $f : A \to B$ je bijekcija $f^{-1} : B \to A$ sa svojstvom da su $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$ identitete. Graf inverzne funkcije f^{-1} je u Kartezijevom koordinatnom sustavu zrcalno simetričan grafu od f obzirom na pravac $y = x$.

2.6 Transcendentne funkcije

Elementarne funkcije koje nisu algebarske, tj. čija pravila pridruživanja ne možemo izraziti konačnim brojem operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja s racionalnim eksponentima zovu se transcendentne.

Najvažnije među njima su eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije.

Razlika algebarskih i transcendentnih funkcija ima i svoju fizikalnu interpretaciju: algebarske funkcije su one u koje ima smisla uvrštavati i fizikalne jedinice, dok u transcendentne funkcije ima smisla uvrštavati samo „čiste" brojeve.

Zadatak 17. *Ako varijabla x ima jedinicu $\heartsuit$, koju jedinicu treba imati konstanta a da bi izraz $f(x) = 2x^2 - \frac{a}{\sqrt{x}}$ bio smislen, te koja je tada jedinica od $f(x)$?*

2.6.1 Eksponencijalne funkcije

Dosad smo se susreli s funkcijama koje računaju cjelobrojne potencije varijable (monomi i kvocijenti monoma) te racionalne potencije (korijeni i njihove kompozicije s monomima), tj. s funkcijama koje varijabli x pridružuju x^a gdje ju a racionalan broj. Ukratko, varijabla nam je bila u bazi, a (racionalni) eksponent je bio fiksiran. Funkcije kod kojih je (ne nužno racionalna) baza fiksirana, a eksponent je varijabla, zovu se eksponencijalnim funkcijama. Preciznije:

Definicija 10 (Eksponencijalne funkcije)**.** *Eksponencijalna funkcija s bazom a je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom*

$$f(x) = a^x.$$

Pritom baza a ne može biti bilo kakav realan broj. Kao prvo, ako bi bilo $a = 0$ imali bismo $f(x) = 0$ za $x \neq 0$ i $f(0)$ ne bi bio definiran[12], dakle nešto poput konstantne funkcije s „rupom" u domeni (to bi točno bila funkcija $f(x) = \frac{0}{x}$). Ako bismo uzeli $a = 1$, dobili bismo pravu konstantnu funkciju $f(x) = 1$. Dakle, baza ne smije biti ni 0 ni 1.

Može li baza eksponencijalne funkcije biti negativna? Ne. Najjednostavniji primjer da bi nam to izazvalo probleme je pokušaj definiranja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s $f(x) = (-1)^x$. Kako je u definiciji navedeno, mi želimo da prirodna domena bude cijeli $\mathbb{R}$, tj. da kao x možemo uvrstiti bilo koji realan broj. Ako primjerice uvrstimo $x = -\frac{1}{2}$, dobili bismo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^{1/2} = \sqrt{-1}$, što nije realan broj, dakle takva funkcija ne bi bila realna funkcija. Sve skupa nam daje uvjet: baza eksponencijalne funkcije mora biti pozitivan broj različit od 1 (kratko: $a > 0$ i $a \neq 1$).

[12]Kao što nije definirano $0/0$, nije definirano ni 0^0.

Primjer 54. *Funkcija zadana formulom* $f(x) = \frac{1}{3^{-x}}$ *na prvi pogled nije eksponencijalna, no koristeći pravila o transformiranju algebarskih izraza lako je uvjeriti se da se zapravo radi o eksponencijalnoj funkciji s bazom* 3.

Slično, funkcija zadana pravilom $g(x) = 4^{2x}$ *je eksponencijalna funkcija s bazom* $4^2 = 16$.

Napomena 6. *Osvrnimo se ovdje na neke česte pogreške. Prvo, ne govorimo o eksponencijalnoj* funkciji *nego o eksponencijalnim* funkcijama — *za svaku dozvoljenu bazu imamo po jednu eksponencijalnu funkciju. Drugo, kad govorimo o konkretnoj eksponencijalnoj funkciji, njena baza* a *je fiksna — ona definira funkciju o kojoj govorimo — te je u kontekstu grafova besmisleno „tražiti" tu bazu po osi apscisa*[13] *odnosno reći da je prirodna domena eksponencijalne funkcije skup pozitivnih realnih brojeva različitih od* 1.

Posvetimo se sad osnovnim svojstvima eksponencijalnih funkcija i njihovim grafovima. Ovisno o tome je li baza veća ili manja od 1 dobit ćemo rastuću ili padajuću eksponencijalnu funkciju: Eksponencijalne funkcije s bazom $a > 1$ su rastuće, a one za koje je $0 < a < 1$ su padajuće. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija os ordinata sijeku u točki $(0, 1)$ jer je za sve njih $f(0) = a^0 = 1$.

Zadatak 18. *U kojoj točki graf funkcije s formulom* $f(x) = Ca^x$ *siječe os ordinata?*

Eksponencijalne funkcije nemaju nultočaka, štaviše: rezultati su im strogo pozitivni, tj. slika svake eksponencijalne funkcije je $\langle 0, +\infty\rangle$ (graf im je uvijek iznad osi apscisa). Uz modifikaciju kodomene na taj skup, eksponencijalne funkcije su bijekcije.

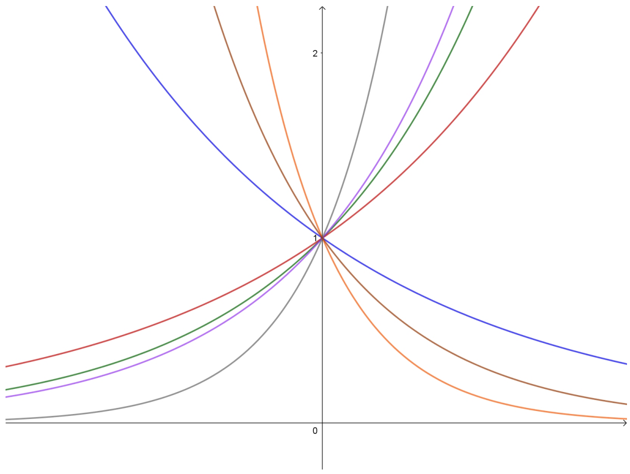
Os apscisa je horizontalna asimptota za svaku eksponencijalnu funkciju: ako je baza $a > 1$, radi se o asimptoti na lijevoj strani (brojevi a^x za jako negativne x su jako blizu nule), a ako je baza $a < 1$, radi se o asimptoti na desnoj strani (brojevi a^x za jako velike x su jako blizu nule). Grafovi eksponencijalnih funkcija vidljivi su na slici 2.27.

Primjer 55. 1s-*orbitala vodikovog atoma je skalirana eksponencijalna funkcija formule*

$$\phi_{1\mathrm{s}}(\rho) = \sqrt{\frac{1}{a_0^3\pi}}e^{-\rho/2},$$

gdje je $\rho = 2r/a_0$ *(*r *je udaljenost elektrona do jezgre, a* $a_0 = 52{,}9$ pm *je Bohrov radijus). Općenito, formule svih atomskih orbitala (atomske orbitale*

[13] Osim naravno ako u $f(x) = a^x$ želimo uvrstiti $x = a$, no i tad se na apscisi traži vrijednost varijable koja se uvrštava, a ona je slučajno jednaka bazi.



Slika 2.27: Grafovi eksponencijalnih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

su kompleksne funkcija) su oblika $f(x, y, z) \exp(-ar)$, gdje je $f(x, y, z)$ neko pravilo koje ovisi o poziciji (x, y, z) elektrona u prostoru, a a je neka pozitivna konstanta.

Najčešće se koristi eksponencijalna funkcija s bazom e. Broj e je matematička konstanta i iracionalan je, a iznosi približno 2,718. Umjesto e^x često se koristi oznaka $\exp(x)$.

Na kraju, spomenimo još dva svojstva eksponencijalnih funkcija, a to su da za sve vrijednosti varijabli $x, x' \in \mathbb{R}$ vrijede formule

$$f(x + x') = a^{x+x'} = a^x a^{x'} = f(x)f(x'),$$

$$f(x - x') = a^{x-x'} = a^x : a^{x'} = f(x) : f(x').$$

Ponovimo bitno... Eksponencijalne funkcije su realne funkcije s prirodnom domenom $\mathbb{R}$ zadane formulom oblika $f(x) = a^x$. Pritom je baza a konstanta koja mora biti pozitivan broj različit od 1. Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija raste i ima x-os kao horizontalnu asimptotu lijevo, a za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija pada i ima x-os kao horizontalnu asimptotu desno. Grafovi svih eksponencijalnih funkcija sijeku y-os u 1 i ne sijeku x-os.

2.6.2 Logaritamske funkcije

Rekli smo da je svaka eksponencijalna funkcija injekcija te da joj je slika skup $\langle 0, +\infty\rangle$, tj. eksponencijalna funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$, $f(x) = a^x$ je bijekcija i stoga ima inverznu funkciju $f^{-1} : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Logaritamska funkcija s bazom a definira se kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom i označava se s $\log_a : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Opisno rečeno, smisao logaritma broja po danoj bazi je da odredi eksponent na koju treba „dići" tu bazu da bi se dobio polazni broj. Budući da je prirodna domena svake logaritamske funkcije $\langle 0, +\infty\rangle$ znači da nema smisla „vaditi" logaritme iz negativnih brojeva i nule.

Primjer 56. *Iz definicije slijedi:*

$$\log_7 1 = \log_7 7^0 = 0,$$

$$\log_{451} 451 = \log_{451} 451^1 = 1,$$

$$\log_{0,25} 4 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = -1,$$

a $\log_5 0$ *nema smisla jer* 5 *ni na koju potenciju ne daje nulu.*

Po definiciji za svaku dozvoljenu bazu a ($a > 0$, $a \neq 1$) imamo po jedan par eksponencijalne i logaritamske funkcije za koje vrijede formule koje izražavaju njihovu inverznost:

$$\log_a a^x = x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a y} = y, \quad y > 0.$$

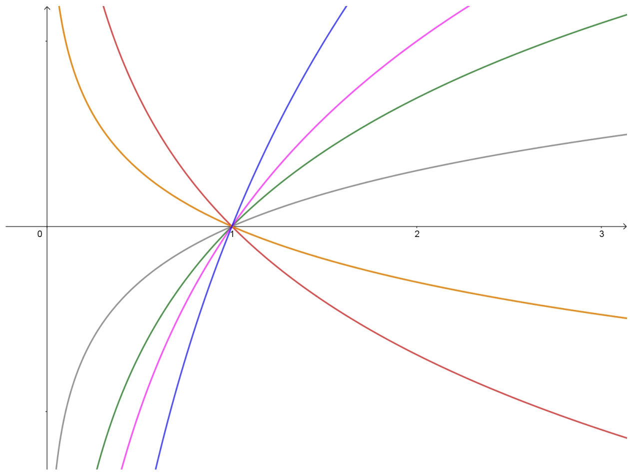
Za sve logaritme vrijedi

$$\log_a 1 = 0$$

jer je $a^0 = 1$ za svaku dozvoljenu bazu a. Stoga je 1 nultočka, i to jedina, svake logaritamske funkcije; to znači da grafovi svih logaritamskih funkcija os apscisa sijeku u točki $(1, 0)$. Logaritamske funkcije s bazama većim od 1 su rastuće, a one s bazama manjim od 1 su padajuće, kao i njima odgovarajuće inverzne eksponencijalne funkcije. Stoga imamo dva tipa grafova logaritamskih funkcija, kako je prikazano na slici 2.28. S grafova vidimo da je za sve logaritamske funkcije y-os vertikalna asimptota: Za baze manje od 1 logaritmi brojeva blizu nule su jako veliki, a za baze veće od 1 su jako mali (jako negativni).

Dva osnovna svojstva logaritamskih funkcija su dualna na kraju prethodnog poglavlja navedenim dvama svojstvima eksponencijalnih funkcija:

$$f(x \cdot x') = \log_a(xx') = \log_a x + \log_a x' = f(x) + f(x'),$$



Slika 2.28: Grafovi logaritamskih funkcija (slika izrađena programom Geogebra).

$$f(x : x') = \log_a \frac{x}{x'} = \log_a x - \log_a x' = f(x) - f(x').$$

Te dvije formule vrijede za $x, x' > 0$.

Možemo ih zapamtiti ovako: logaritmi su povijesno uvedeni da bi olakšali komplicirane račune s „ružnim" decimalnim brojevima. Kako je lakše zbrojiti nego pomnožiti dva decimalna broja, pamtimo: logaritam umnoška je zbroj logaritama (logaritam pretvara množenje u zbrajanje); analogno vrijedi za dijeljenje i oduzimanje.

Za dvije posebno česte baze logaritmi imaju posebne oznake: logaritam s bazom 10 (dekadski logaritam) se označava jednostavno s log (vrlo rijetko s $\log_{10}$), a logaritam s bazom e (prirodni logaritam) se umjesto s $\log_{\mathrm{e}}$ obično označava s ln.

Dekadski logaritam broja daje nam njegov red veličine: $\log(1{,}25 \cdot 10^{12}) = \log(1{,}25) + 12$, što je broj između 12 i 13 (dekadski logaritam je rastući pa iz $1 < 1{,}25 < 10$ zaključujemo $0 < \log 1{,}25 < 1$).

Povremeno je od koristi sljedeća formula za promjenu baze logaritma:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

koja vrijedi za sve dozvoljene baze a i b. Specijalno, vrijedi

$$\log_{1/a} x = -\log_a x.$$

Napomena 7. *Uz poznavanje logaritama, svaku eksponencijalnu funkciju* *možemo svesti na eksponencijalnu funkciju s bazom* e *od skalirane varijable:*

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Primjer 57. *Najpoznatija pojava pojma logaritma u kemiji je definicija* p[H] *otopine:*[14]

$$\mathrm{p[H]} = -\log \frac{c(\mathrm{H}^+)}{c^{\ominus}},$$

gdje je s $c^{\ominus}$ *označena standardna množinska koncentracija od* 1 mol/L. *Stoga mjerenjem* p[H] *možemo odrediti koncentraciju* $c(\mathrm{H}+)$*:*

$$c(\mathrm{H}^+) = 10^{-\mathrm{p[H]}} \cdot \mathrm{mol/L}.$$

Uobičajeno je gornju definiciju riječima izreći ovako: p[H] *je* negativan *dekadski logaritam iznosa koncetracije hidronijevih iona u otopini, mjerene u molima po litri. Riječ* negativan *ovdje je naglašena jer bi korektnije bilo reći* suprotan*: vrijednosti* pH *su (u pravilu) pozitivni brojevi i definicija je takva kakva jest upravo jer su logaritmi* $\log \frac{c(\mathrm{H}^+)}{c^{\ominus}}$ *u otopinama najčešće negativni brojevi (koncentracije* H+ *iona su u pravilu manje od standardne te je razlomak pod logaritmom po vrijednosti između* 0 *i* 1*).*

Kako je dekadski logaritam rastuća funkcija svog argumenta, a promjena predznaka funkcije pretvara rastuću u padajuću funkciju, slijedi da je p[H] *padajuća funkcija od* $c(\mathrm{H}^+)$*, tj.* p[H] *za kiseliju otopinu je manji nego za manje kiselu. Sâm simbol* p *može se tumačiti kao oznaka za* $-\log$*.*

Zadatak 19. *Ako je konstanta disocijacije (slabe) kiseline HA definirana kao*

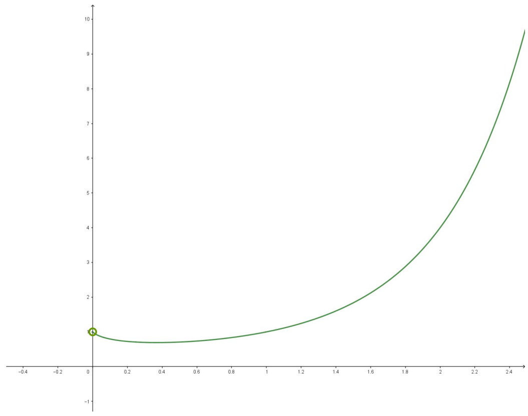
$$K_\mathrm{a} = \frac{c(\mathrm{H}^+)c(\mathrm{A}^-)}{c(\mathrm{HA})},$$

pokažite da za par (slabe) kiseline HA i njene konjugirane baze A^- *vrijedi Henderson-Hasselbalchova jednadžba*

$$\mathrm{p[H]} = \mathrm{p}K_\mathrm{a} + \log \frac{c(\mathrm{A}^-)}{c(\mathrm{HA})}.$$

Ponovimo bitno... Logaritam s bazom a je inverzna funkcija eksponencijalne funkcije s istom bazom. Stoga je definiran samo za pozitivne brojeve, raste ili pada točno kad odgovarajuća eksponencijalna funkcija raste odnosno pada i ima y-os za vertikalnu asimptotu (prema dolje ili gore ovisno o tom je li $a > 1$ ili $a < 1$). Logaritam produkta je zbroj logaritama, a logaritam kvocijenta je razlika logaritama.

[14]Definicija „pravog" pH glasi: pH je suprotna vrijednost dekadskog logaritma relativne aktivnosti vodikovih iona u otopini. Kako se obično pod pH misli na p[H], kojeg smo upravo definirali, mi ćemo koristiti p[H] umjesto pH.



Slika 2.29: Opća potencija $y = x^x$ (slika izrađena programom Geogebra).

2.6.3 Opća potencija

Ponekad se susreću funkcije eksponencijalnog oblika čije pravilo sadrži nezavisnu varijablu i u bazi i u eksponentu. Takva je primjerice funkcija zadana pravilom

$$f(x) = x^x.$$

Takve funkcije nisu ni monomi ni eksponencijalne funkcije, nego spadaju u tzv. opće potencije. Formula takve funkcije je općenito oblika $f(x) = u(x)^{v(x)}$, a definira se kao

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Iz te se definicije vidi da je prirodna domena takve funkcije skup svih realnih brojeva x za koje je $u(x) > 0$.

Primjerice, $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ za prirodnu domenu ima skup $\langle 0, +\infty \rangle$ jer je tu $u(x) = x$. Graf te funkcije prikazan je na slici 2.29.

Ponovimo bitno... Opća potencija $f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ je definirana na skupu realnih rješenja nejednadžbe $u(x) > 0$.

2.6.4 Hiperbolne funkcije

Nešto rjeđe od eksponencijalnih i logaritamskih funkcija se u primjenama pojavljuju i četiri hiperbolne funkcije. Njihove definicije su kako slijedi:

- sinus hiperbolni: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

- kosinus hiperbolni: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- tangens hiperbolni: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
- kotangens hiperbolni: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Kako su brojevi e^x i e^{-x} smisleni i pozitivni za sve realne brojeve, očito je prirodna domena za prve tri funkcije cijeli skup $\mathbb{R}$. Kod kotangensa hiperbolnog u prirodnoj domeni nisu x-evi za koje je $e^x = e^{-x}$, tj. $e^{2x} = 1$. Takav broj je samo $x = 0$ pa je prirodna domena kotangensa hiperbolnog skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Napomena 8. *Imena hiperbolnih funkcija potječu od toga što bi se mogle definirati slično kao i trigonometrijske funkcije (vidi sljedeći odjeljak), s tim što bi se umjesto jedinične kružnice*[15] $X^2 + Y^2 = 1$ *uzela istostrana hiperbola* $X^2 - Y^2 = 1$.

Također, kao što smo vidjeli u odjeljku 1.4, formule sinusa i kosinusa hiperbolnog analogne su formulama sinusa i kosinusa, s razlikom da se za hiperbolne funkcije koristi realna, a za trigonometrijske kompleksna eksponencijalna funkcija.

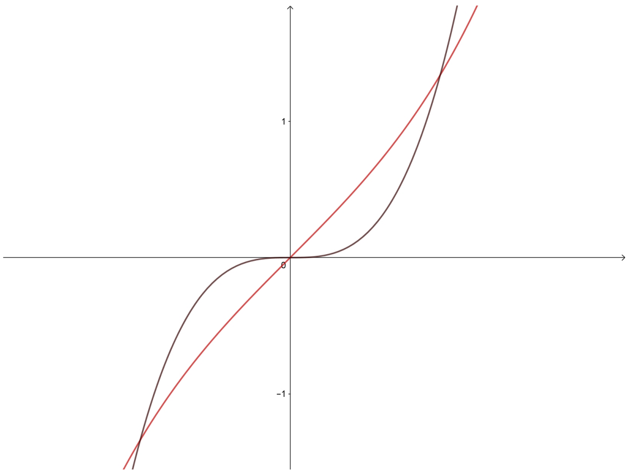
Sinus hiperbolni je neparna rastuća funkcija čiji graf podsjeća na graf funkcije kubiranja, no usporedbom tih grafova (slika 2.30) vidi se da je oko ishodišta graf sinusa hiperbolnog sličniji pravcu $y = x$, dok se krivulja $y = x^3$ oko ishodišta više priljubljuje uz x-os.

Kosinus hiperbolni je parna funkcija čiji graf se naziva lančanica i podsjeća na parabolu $y = x^2 + 1$ (slika 2.31).

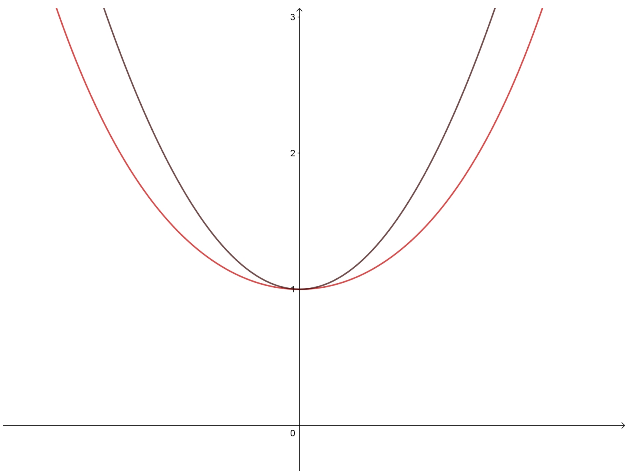
Grafovi tangensa i kotangensa hiperbolnog (slika 2.32) imaju dvije horizontalne asimptote: lijevo $y = -1$ i desno $y = 1$. Tangens hiperbolni je rastuća, kotangens hiperbolni padajuća funkcija, a oba su neparne funkcije.

Ponovimo bitno... Hiperbolne funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens hiperbolni, definirane s $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ i $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Prve tri su definirane na cijelom $\mathbb{R}$, a kotangens hiperbolni je definiran na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sve osim kosinusa hiperbolnog su neparne funkcije, a kosinus hiperbolni je parna. Sinus i tangens hiperbolni su rastuće funkcije, a kotangens hiperbolni je padajuća funkcija.

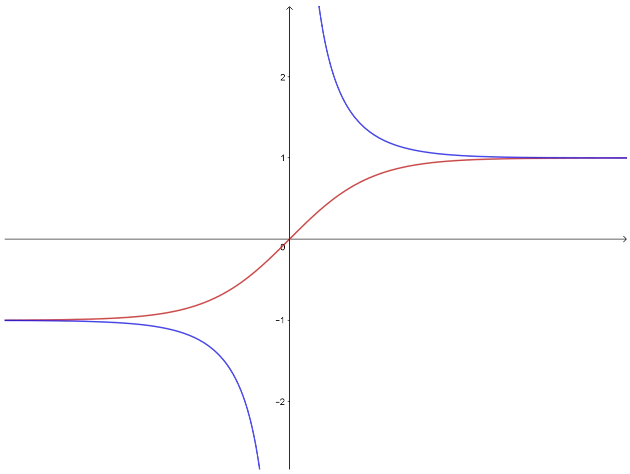
[15] U jednadžbama su apscisa i ordinata označene velikim umjesto malim slovima X i Y kako bi se izbjeglo poistovjećivanje apscise kružnice/hiperbole s varijablom koju uvrštavamo u trigonometrijsku/hiperbolnu funkciju, a koju obično označavamo s x.



Slika 2.30: Graf funkcije sh (crveno) i njegova usporedba s (crnim) grafom funkcije kubiranja (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.31: Graf funkcije cosh (crveno) i njegova usporedba s (crnom) parabolom $y = x^2 + 1$ (slika izrađena programom Geogebra).



Slika 2.32: Graf funkcije th (crveno) i cth (plavo); slika izrađena programom Geogebra.

2.6.5 Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

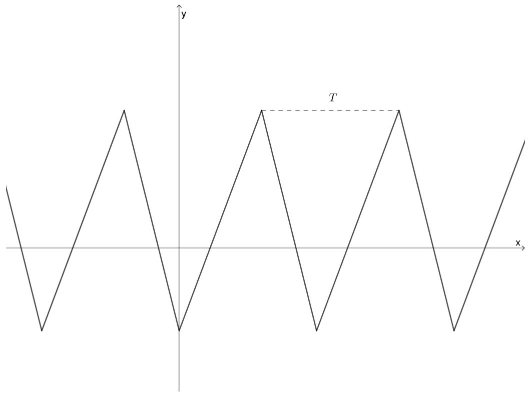
Trigonometrijske funkcije su sinus, kosinus, tangens i kotangens. Sve one spadaju u periodične funkcije: periodična funkcija (jedne varijable) je funkcija f sa svojstvom da se može naći broj $T > 0$ (period) takav da za sve x iz domene od f vrijedi

$$f(x + T) = f(x).$$

Najmanji pozitivan period, ako postoji, naziva se temeljnim periodom funkcije.[16] Uvrstimo li $x - T$ na mjesto broja x dobivamo da mora vrijediti i $f(x) = f(x - T)$; analogno bi se vidjelo da ako gornja jednakost vrijedi za sve x, onda mora vrijediti i $f(x + nT) = f(x)$ za sve x *i* za sve $n \in \mathbb{Z}$. Domena periodične funkcije za svaki x kojeg sadrži mora sadržavati i sve brojeve $x + nT$. Stoga je jedna moguća domena periodične funkcije skup $\mathbb{R}$. Alternativno, domena periodične funkcije može biti beskonačna unija intervala I_n ($n \in \mathbb{Z}$), gdje I_n sadrži brojeve između $a + nT$ i $b + nT$. Pritom intervali I_n mogu biti otvoreni, zatvoreni ili poluotvoreni i $0 \le a < b \le T$. Pojednostavljeno rečeno, takva domena sastoji se od svih za višekratnik od T ulijevo ili udesno translatiranih kopija osnovnog intervala unutar $[a, b]$ na kojem je funkcija definirana.

Primjer 58. *Unija* $\ldots \langle -5, 4] \cup \langle -3, 2] \cup \langle -1, 0] \cup \langle 1, 2] \cup \langle 3, 4] \cup \ldots$ *je moguća domena neke periodične funkcije.*

[16] Ako je varijabla periodične funkcije vrijeme, temeljni period je uobičajeno zvati valnom duljinom i označiti s λ.



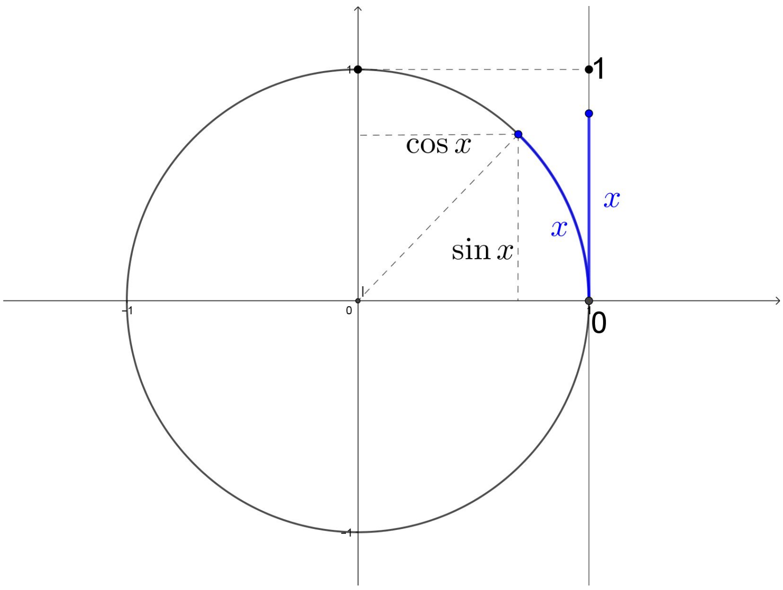
Slika 2.33: Graf periodične funkcije s istaknutim temeljnim periodom T; slika izrađena programom Geogebra.

Vizualno, periodičnost funkcije se očituje u ponavljanju jednog dijela grafa (koji je širine perioda) u jednakim razmacima ulijevo i udesno, i to u beskonačnost. Primjer grafa periodične funkcije vidi se na slici 2.33. Na njoj je označen temeljni period T — ako bismo uzeli bilo koji uži dio grafa ne bismo njegovim ponavljanjem ulijevo i udesno mogli rekonstruirati čitav graf.

Najpoznatije periodične funkcije su trigonometrijske funkcije. Iako ne najprecizniji[17], svakako najjednostavniji način definiranja prve dvije od njih — sinusa i kosinusa — je pomoću jedinične kružnice. Radi se o kružnici polumjera 1 nacrtanoj u koordinatnoj ravnini[18]. Takva kružnica prikazana je na slici 2.34. Ako je x duljina luka te kružnice od točke $A = (1, 0)$ do neke promatrane točke B na kružnici, onda je apscisa te točke jednaka $\cos x$ (kosinus broja x), a ordinata je $\sin x$ (sinus broja x). Pritom x uzimamo kao pozitivan ako je luk gledan od točke $(1, 0)$ u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, a negativan ako je gledan u smjeru kazaljke na satu. Ovdje je zgodno podsjetiti: Isto je reći „x je duljina luka od točke A do točke B na jediničnoj kružnici" i „kut $\angle AOB$ ima x radijana". Dakle, ako nas zanima vrijednost sinusa ili kosinusa nekog broja, potrebno je naći točku B na jediničnoj kružnici tako da je duljina luka od A do B jednaka tom broju; taj proces poznat je kao namatanje brojevnog pravca na jediničnu kružnicu, pri čemu zamišljamo da je točka 0 tog pravca stavljena na točku A te da se pozitivni dio pravca namotava ulijevo, a negativni udesno na kružnicu.

[17] Precizna definicija ovih funkcija koristi redove potencija, vidi odjeljak 11.3.1.

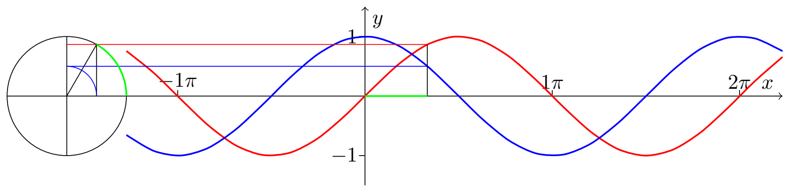
[18] Oprez: Radi opasnosti od zabune nikako nemojte koordinatne osi jedinične kružnice u definiciji sinusa i kosinusa zvati x-os i y-os; dovoljno ih je zvati osi apscisa i ordinata.



Slika 2.34: Definicija sinusa i kosinusa; slika izrađena programom Geogebra.

Iz definicije sinusa i kosinusa odmah se vide njihova glavna svojstva:

- Brojevi $\sin x$ i $\cos x$ mogu se odrediti za sve realne brojeve x jer kružnicu možemo obilaziti u oba smjera proizvoljno mnogo puta: prirodna domena funkcija sinus i kosinus je cijeli skup $\mathbb{R}$.
- Apscise točaka na jediničnoj kružnici su brojevi između -1 i 1, a isto tako i ordinate. Stoga su za svaki broj x brojevi $\sin x$ i $\cos x$ između -1 i 1 ili, preciznije rečeno, slika funkcija sinus i kosinus je segment $[-1, 1]$.
- Obilaskom kružnice točke se ponavljaju nakon svakog „punog kruga", tj. nakon što se prijeđe opseg 2π jedinične kružnice. Stoga su sinus i kosinus periodične funkcije s temeljnim periodom 2π.
- Za $x = 0$ nalazimo se u točki $(\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ tj. $\cos 0 = 1$ i $\sin 0 = 0$.
- Općenito, $\sin x$ je 0 kad god broju x odgovara jedna od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, a to se dešava kad god je x višekratnik od π: nultočke funkcije sinus su svi brojevi $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Kosinus je nula kad god broju x odgovara jedna od točaka $(0, 1)$ i $(0, -1)$, a to se dešava kad god je x neparni višekratnik od $\frac{\pi}{2}$: nultočke funkcije kosinus su svi brojevi $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.



Slika 2.35: Grafovi funkcija sinus (crveno) i kosinus (plavo).

- Primjenom Pitagorina poučka[19] na trokut određen ishodištem, točkom $(\cos x, 0)$ i točkom $(\cos x, \sin x)$ (dakle, pravokutni trokut s katetama duljina $\cos x$ i $\sin x$ te hipotenuzom duljine 1) dobivamo osnovnu formulu koja povezuje sinus i kosinus:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

- Ako bismo zamijenili ulogu osi, vidimo da bi došlo do zamjene uloga sinusa i kosinusa, ali bi slika u biti izgledala isto. Pomnijim promatranjem zaključili bismo da je jedina bitna razlika između sinusa i kosinusa u jednom pravom kutu (iznosu luka $\frac{\pi}{2}$). Formulama se to izražava ovako:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

  Stoga i grafovi tih funkcija izgledaju gotovo jednako — razlika je u horizontalnom pomaku za $\frac{\pi}{2}$ (vidi sliku 2.35).

- Sinus je neparna, a kosinus je parna funkcija.

Od važnijih formula za sinus i kosinus ovdje navodimo još samo četiri. Formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta glase

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Adicione formule za sinus i kosinus su

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

[19] Trokut sa stranicama duljina a, b, c $(a, b < c)$ je pravokutan ako i samo ako je $a^2 + b^2 = c^2$.

Kao što smo rekli, oblici grafova sinusa i kosinusa su podjednaki, samo su različito pozicionirani u koordinatnom sustavu. Općenito, valovi sinusoidalnog oblika temeljnog perioda T i amplitude (polovice razlike visina najviše i najniže točke vala) A mogu se opisati formulom oblika

$$C + A\cos(\omega t + \delta),$$

gdje je C prosječna visina vala (tj. val se nalazi između horizontala $y = C \pm A$), $\omega = 2\pi/T$ je (kutna) frekvencija, a δ je fazni (horizontalni) pomak. Varijablu smo ovdje označili s t umjesto s x jer je u primjenama varijabla periodične funkcije najčešće vrijeme.

Funkcije tangens i kotangens su kvocijenti sinusa i kosinusa:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

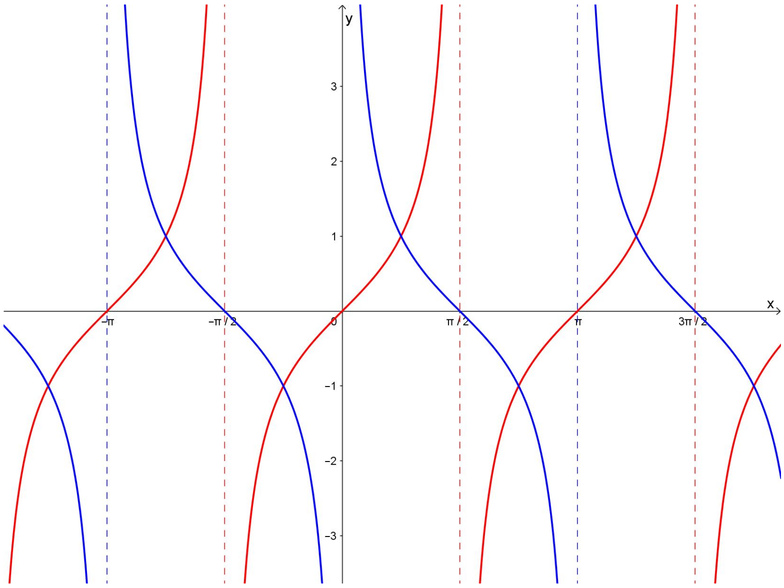
$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

S obzirom na nultočke funkcija sinus i kosinus, vidimo da je prirodna domena funkcije tangens skup $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez neparnih višekratnika broja $\pi/2$), a prirodna domena funkcije kotangens je skup $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (realni brojevi bez svih višekratnika broja π). Lako je provjeriti da su i tangens i kotangens neparne periodične funkcije s temeljnim periodom π. Na svakom od intervala koji čine njenu domenu, funkcija tangens je rastuća, a kotangens padajuća. Grafove funkcija tangens i kotangens prikazuje slika 2.36. Istaknute su i njihove vertikalne asimptote, koje se pojavljuju u svim točkama u kojima nisu definirane.

Periodična funkcija ne može imati horizontalne asimptote (zašto?). Također, periodična funkcija ne može biti injekcija, jer se po njenoj definiciji za beskonačno mnogo vrijednosti varijable postižu iste vrijednosti funkcije. Stoga nijedna od trigonometrijskih funkcija nema inverznu funkciju. No, ako odaberemo njihove restrikcije na pogodne manje domene, moguća je definicija arkus-funkcija, tj. ciklometrijskih funkcija, koje mnogi (nepravilno) nazivaju inverznim trigonometrijskim funkcijama.

Ako umjesto sinusa $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (surjekcija, nije injekcija) gledamo njegovu restrikciju $\operatorname{Sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, a umjesto kosinusa $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (isto surjekcija, nije injekcija) gledamo restrikciju $\operatorname{Cos} : [0,\pi] \to [-1,1]$, onda smo dobili dvije bijekcije, čiji grafovi su prikazani na slici 2.37. Arkus-sinus i arkus-kosinus su inverzne funkcije funkcija Sin i Cos:

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Slika 2.36: Grafovi funkcija tangens (crveno) i kotangens (plavo). Slika je izrađena programom Geogebra.

je definiran s

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Sin} y,$$

a

$$\arccos\, : [-1, 1] \to [0, \pi]\,,$$

je definiran s

$$\arccos x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Cos} y.$$

Odgovarajući grafovi prikazani su na slici 2.38. Iz definicije je očito da treba biti oprezan s korištenjem arkus-sinusa i arkus-kosinusa: Za zadani broj između -1 i 1 one određuju samo po jedan od beskonačno mnogo iznosa čiji je taj zadani broj sinus odnosno kosinus.

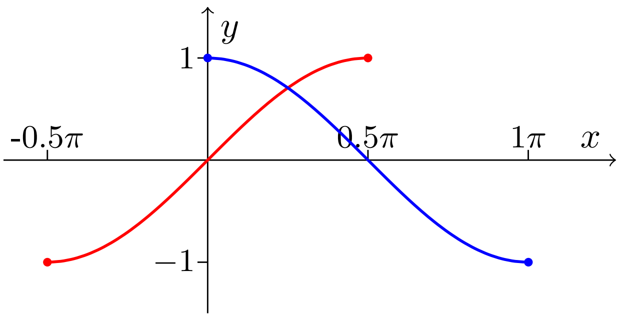
Slično se definiraju arkus-tangens i arkus-kotangens. Prvo se uzmu restrikcije $\operatorname{Tg} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ i $\operatorname{Ctg} : \langle 0, \pi \rangle \to \mathbb{R}$, koje su bijekcije, a njihovi inverzi su arkus-tangens i arkus-kotangens:

$$\operatorname{arctg}\, : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle,$$

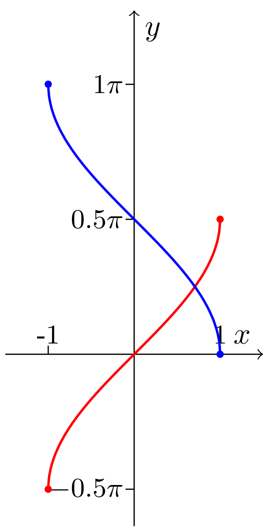
$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Tg} y,$$

$$\operatorname{arcctg}\, : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle,$$

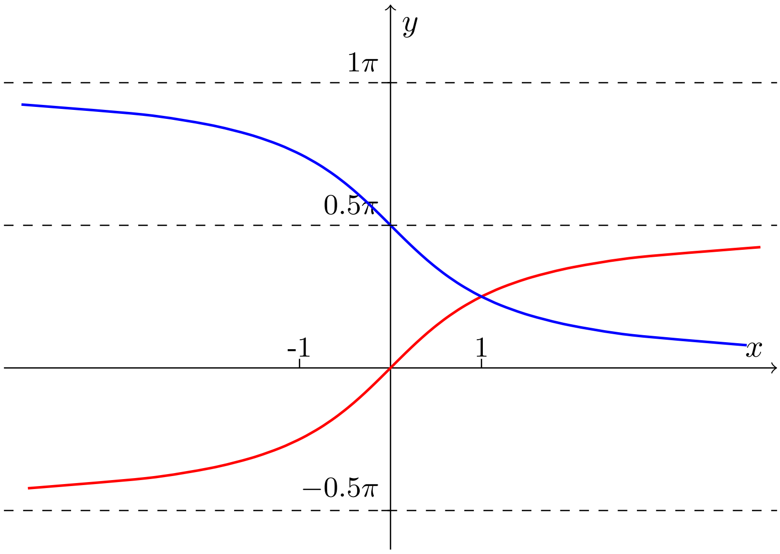
$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{Ctg} y.$$



Slika 2.37: Grafovi restrikcija sinusa (crveno) i kosinusa (plavo) tako da se dobiju bijekcije.



Slika 2.38: Grafovi funkcija arkus-sinus (crveno) i arkus-kosinus (plavo).

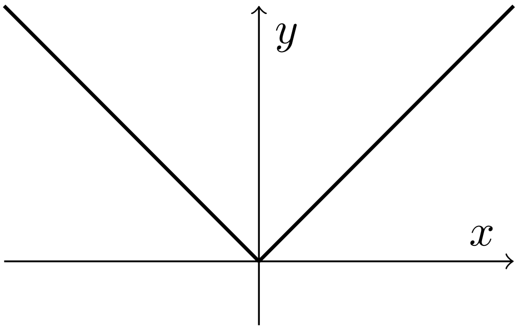


Slika 2.39: Grafovi funkcija arkus-tangens (a) i arkus-kotangens (b).

Odgovarajući grafovi vidljivi su na slici 2.39. Budući da grafovi funkcija tanges i kotangens imaju vertikalne asimptote, grafovi funkcija arkus-tangens i arkus-kotangens imaju horizontalne asimptote (arkus-tangens lijevo ima horizontalnu asimptotu $y = \frac{\pi}{2}$, a desno $y = \frac{\pi}{2}$, a arkus-tangens kao lijevu horizontalnu asimptotu ima $y = \pi$, a desnu $y = 0$).

Uočimo i da su arkus-sinus i arkus-tangens rastuće, a arkus-kosinus i arkus-kotangens padajuće funkcije. Arkus-tangens je neparna funkcija, dok ostale ciklometrijske funkcije nisu ni parne ni neparne.

Ponovimo bitno... Periodične funkcije imaju svojstvo da im se vrijednosti ponavljaju u jednakim razmacima T: $f(x+T) = f(x)$ za sve x iz domene. Trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens su periodične funkcije. Sinus i kosinus realnog broja x definiraju se kao ordinata i apscisa točke B na jediničnoj kružnici takve da je kut $\angle BOA$ iznosa x radijana, pri čemu je A točka $(1, 0)$. Tangens je definiran s $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, a kotangens s $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Tangens nije definiran u neparnim višekratnicima od $\pi/2$, a kotangens u višekratnicima od π. Temeljni period funkcija sinus i kosinus je 2π, a temeljni period funkcija tangens i kotangens je π. Sinus, tangens i kotangens su neparne funkcije, a kosinus je parna funkcija. Ciklometrijske funkcije su inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija restringiranih na manje domene, tako da su nakon restrikcije dobivene funkcije bijekcije.



Slika 2.40: Graf funkcije apsolutne vrijednosti.

2.7 Neke neelementarne funkcije

Ponekad su potrebne i funkcije koje se zadaju „po dijelovima": na jednom dijelu domene pravilo za izračunavanje vrijednosti funkcije je jedno, na drugom dijelu drugo. Sve takve funkcije (i ne samo one) spadaju u neelementarne funkcije. Zadajemo ih ovako:

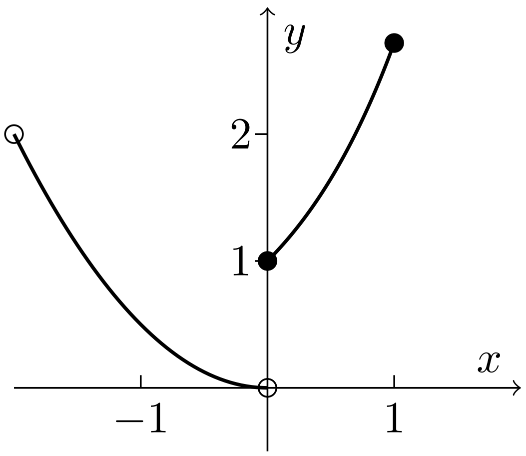
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A, \\ f_2(x) & x \in B, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Takav zapis znači: ako je x iz A, onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_1; ako je x iz B, onda se $f(x)$ izračuna tako da se x uvrsti u f_2 itd. Unija svih skupova $A, B, \dots$ je domena funkcije f (i pritom skupovi $A, B, \dots$ moraju biti disjunktni tj. ne smiju imati zajedničkih elemenata). Graf funkcije f dobiva se „lijepljenjem" grafova funkcija $f_1, f_2, \dots$.

Najjednostavnija, a često korištena, neelementarna funkcija je funkcija apsolutne vrijednosti koja nenegativne brojeve ne mijenja, a negativnima promijeni predznak. Formalno, to je funkcija $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Za negativne brojeve (lijevi dio koordinatnog sustava) vidimo da se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_1(x) = -x$, a za nenengativne (desni dio koordinatnog sustava) se pravilo podudara s linearnom funkcijom $f_2(x) = x$. Stoga se ukupni graf sastoji od ta dva dijela. Kako se f_1 i f_2 podudaraju u „točki lijepljenja" $(x, f(x)) = (0, 0)$, ukupni graf biti će „u komadu", a prikazan je na slici 2.40.



Slika 2.41: Primjer grafa funkcije zadane „po dijelovima” (uz primjer 59).

Primjer 59. *Neka funkcija f zadana je s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 & -2 < x < 0 \end{cases}$$

Ona je definirana za $x \in \langle -2, 0\rangle \cup [0, 1] = \langle -2, 1]$, a graf joj je prikazan slikom 2.41. Praznim kružićima istaknute su točke koje nisu dio grafa, a punim one koje jesu.

Ponovimo bitno... Funkcije možemo zadati po dijelovima tako da za vrijednosti varijable iz različitih intervala definiramo različita pravila. Takve funkcije nisu elementarne. Najjednostavnija po dijelovima zadana funkcija je funkcija apsolutne vrijednosti, koja pozitivne brojeve ne mijenja, a negativnima mijenja predznak.

2.8 Prikaz neafinih funkcija pomoću afinih

U kemiji i drugim prirodnim znanostima često želimo neku funkcionalnu ovisnost $Y = f(X)$ prikazati pomoću pravca u koordinantoj ravnini. Razlozi mogu biti različiti, a jedan od češćih je mogućnost uspoređivanja eksperimentalno dobivenih podataka s pretpostavljenom funkcijom f ili korištenje metode najmanjih kvadrata (vidi odjeljak 10.1.5). Ako funkcija f nije afina, graf joj nije pravac, ali se sama ovisnost uz odgovarajuću transformaciju varijabli često lako prevodi u afinu: iz varijabli X i Y koje nas zapravo zanimaju izvodimo formule novih varijabli x i y za koje vrijedi veza $y = ax + b$, a da pritom supstitucijom dobivamo izvornu ovisnost $Y = f(X)$. Uobičajeno je (no ne uvijek i najzgodnije!) uzeti da y ovisi samo o konstantama i Y, a x samo o konstantama i X. Važnije je postići da se iz nacrtanog ili izračunatog para (x, y) može lako odrediti izvorni par (X, Y). To posebno znači da na razmatranom skupu funkcije koje povezuju x s X (i Y), odnosno y s Y (i X), moraju biti bijektivne.

Primjer 60. *Ostwaldov zakon za slabe elektrolite glasi*

$$\frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c\Lambda_\mathrm{m}}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}.$$

Pritom je Λ_m molarna provodnost elektrolita (u $\mathrm{S\ cm^2\ mol^{-1}}$), Λ_m° granična molarna provodnost (konstanta za promatrani elektrolit pri fiksnoj temperaturi), K je konstanta disocijacije slabog elektrolita (u $\mathrm{mol\,cm^{-3}}$), a c je koncentracija (u $\mathrm{mol\,dm^{-3}}$). Označimo li

$$y = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}}, \quad x = c\Lambda_\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{S}},$$

$$a = \frac{1}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2} \cdot \frac{\mathrm{S^2\,cm}}{\mathrm{mol}}, \quad b = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}^\circ} \cdot \frac{\mathrm{S\,cm^2}}{\mathrm{mol}},$$

zakon poprima oblik

$$y = ax + b.$$

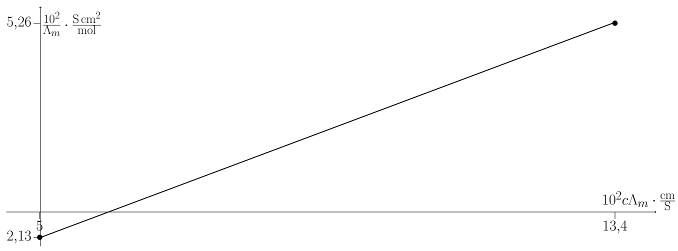
Konkretno, ako su eksperimentom pri $25°\mathrm{C}$ za octenu kiselinu utvrđivane molarne provodnosti za neki raspon koncentracija i ako su poznate teorijske vrijednosti za graničnu molarnu provodnost i konstantu disocijacije za otopine octene kiseline pri $25°\mathrm{C}$ ($\Lambda_\mathrm{m}^\circ = 390{,}7\ \mathrm{S\,cm^2mol^{-1}}$ i $K = 1{,}75 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{mol\,dm^{-3}}$) dobivamo $a = 374{,}348$ i $b = 2{,}5595 \cdot 10^{-3}$.

Ako su pri tom eksperimentu dobivene molarne provodnosti u rasponu od 19 do $47\ \mathrm{S\,cm^2mol^{-1}}$, vidimo da se vrijednosti y kreću između $y_1 = \frac{1}{47} \approx 0{,}02128$ i $y_2 = \frac{1}{19} = 0{,}05263$ pa je razuman raspon na y-osi npr. od $0{,}02$ do $0{,}055$.

Kako je $y = ax+b$, znači da je $x = (y-b)/a$. Stoga je raspon x-eva između $x_1 = (y_1 - b)/a \approx 0{,}0000500$ i $x_2 = (y_2 - b)/a \approx 0{,}000134$. Stoga je prikladan raspon za x-os recimo od $5 \cdot 10^{-5}$ do $14 \cdot 10^{-5}$. Uz te raspone, odgovarajući graf kojim je prikazan Ostwaldov zakon u danoj konkretnoj situaciji prikazan je slikom 2.42.

Savjet: pokušajte ne komplicirati. Primjerice, moglo se Ostwaldov zakon prevesti redom u oblike

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} = \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}\Lambda_\mathrm{m}^\circ} + \frac{c}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2},$$



Slika 2.42: Ostwaldov zakon prikazan pomoću afine funkcije.

$$\frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}\Lambda_\mathrm{m}^\circ} = \frac{c}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2},$$

te definirati

$$y = \frac{1}{\Lambda_m^2} - \frac{1}{\Lambda_\mathrm{m}\Lambda_\mathrm{m}^\circ}$$

i $x = c$, $b = 0$, $a = \frac{1}{K(\Lambda_\mathrm{m}^\circ)^2}$, što bi doduše dalo vrlo jednostavan x te pravac kroz ishodište, ali bi y-os bila neprikladna za utvrđivanje osnovnih vrijednosti u danom kontekstu (c i Λ_m). Recimo da ste u takvom prikazu očitali da je pri nekoj koncentraciji $y = 2,372 \cdot 10^{-3}$, koliko biste morali računati da dobijete Λ_m? Probajte ako Vam nije očito. Dakle: Ukoliko ima više mogućnosti što zvati x-om, a što y-om (u pravilu ima), odaberite ih tako da se iz koordinata, tj. iz x i y mogu lako dobiti vrijednosti promatranih međuzavisnih veličina X i Y (u ovom primjeru bio je X koncentracija, a Y molarna provodnost). Ako i dalje imate više „zgodnih” izbora, onda prednost dajte onome kod kojeg je $x = X$.

Primjer 61. *Arrheniusov zakon za ovisnost koeficijenta brzine reakcije o temperaturi glasi*

$$k = Ae^{-\frac{E_\mathrm{a}}{RT}}.$$

Uočimo da k i A uvijek imaju istu jedinicu, dok je jedinica od E_a jednaka jedinici od RT (dakle, J/mol*).*

Kad se žele usporediti eksperimentalno (i računski) dobiveni parovi (T, k) s tom ovisnošću, najčešće s ciljem određivanja vrijednosti E_a (energije aktivacije) obično je lakše crtati ovisnost $\ln k$ o $\frac{1}{T}$:

$$\ln k = \ln A - \frac{E_\mathrm{a}}{RT}.$$

Pritom je $y = \ln \frac{k}{\text{jed.}}$, $b = \ln \frac{A}{\text{jed.}}$, $a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}$ (jedinica: K*) i $x = \frac{1}{T}$ (jedinica:* K^{-1}*).*

Ponovimo bitno... Kad intepretiramo neku fizikalnu ili kemijsku jednadžbu kao pravac $y = ax + b$ potrebno je konstante i varijable u toj jednadžbi grupirati tako da njihovom zamjenom s x, y, a i b dobijemo jednadžbu pravca. Pritom b i y moraju imati istu jedinicu, varijabilne veličine trebaju biti raspoređene u x i y, a konstantne u a i b.

Poglavlje 3

Diferencijalni račun za realne funkcije jedne varijable

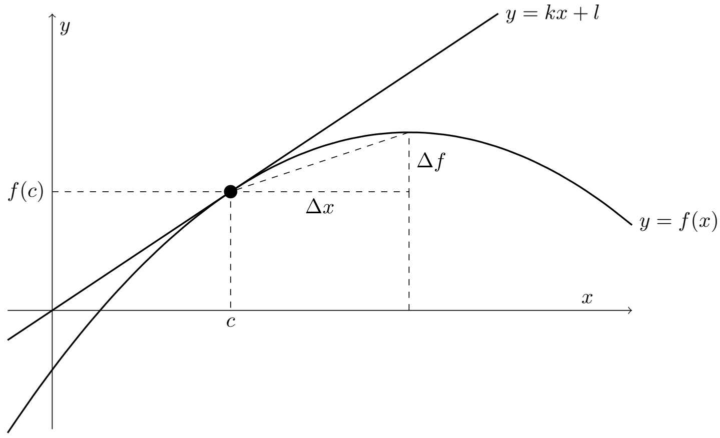
3.1 Deriviranje funkcija

Limesi, deriviranje i integriranje spadaju u područje matematike poznato kao infinitezimalni račun. Pojam derivacije funkcije središnji je pojam više matematike. No, za stjecanje sposobnosti računanja s derivacijama i primjenjivanja istih u mnogim jednostavnim situacijama nije nužna precizna definicija derivacije. Stoga smo se ovdje odlučili za donekle nekonvencionalni pristup derivacijama, kako bi studenti čim ranije bili sposobni iste koristiti na fizikalnim kolegijima, koje studenti kemije u pravilu slušaju istovremeno s matematičkim. Prvo ćemo dati intuitivnu „definiciju" derivacije i zatim temeljem iste razraditi tehnike deriviranja, svojstva i primjene derivacija, a tek nakon toga ćemo obraditi limese funkcija i dati preciznu definiciju derivacije (definicija 17).

U ostatku ovog poglavlja neka je I otvoren interval, a $f : I \to \mathbb{R}$ neka funkcija i $c \in I$ neki fiksan broj. Oznaka za derivaciju funkcije f u točki c je $f'(c)$; derivacija $f'(c)$ je uvijek broj odnosno skalarna veličina (broj pomnožen s fizikalnom jedinicom). Postoje bar tri intuitivne „definicije" derivacije funkcije u točki c.

Derivacija kao opis relativne promjene iznosa funkcije: Ukoliko je $f(x) = ax+b$ onda je omjer promjene vrijednosti funkcije $\Delta f = f(x)-f(c) = a(x-c)$ u odnosu na promjenu vrijednosti varijable[1] $\Delta x = x-c$ jednak $\frac{\Delta f}{\Delta x} = a$, tj. kod afine funkcije koeficijent smjera daje relativnu promjenu funkcije u odnosu na početnu vrijednost c za svaku promjenu varijable. Derivacija $f'(c)$ može se shvatiti kao poopćenje te ideje: to je procjena relativne promjene funkcije

[1]Uočite: povećanje varijable daje pozitivan Δx, a smanjenje negativan.



Slika 3.1: Derivacija kao relativna promjena vrijednosti funkcije i kao koeficijent smjera tangent

f ako je promjena varijable (Δx) približno jednaka nuli (slika 3.1):

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (\text{za } \Delta x \approx 0).$$

Iz ovog opisa derivacije lako zaključujemo: Derivacija afine funkcije u bilo kojoj točki jednaka je njenom koeficijentu smjera. Specijalno, derivacija konstantne funkcije je svuda nula.

Vezano za gornju „definiciju” lako je zapamtiti još jednu oznaku za derivaciju funkcije: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Ta se oznaka najčešće koristi u nekim fizikalnim kontekstima kad želimo pratiti jedinice u kojima su izražene f i x, tj. kad želimo odmah uz numeričku vrijednost derivacije imati i jedinicu koja treba ići uz izračunati broj (vidi primjer 62).

Za razliku od afinih funkcija, iz gornje „definicije” teško bismo izveli formule ili načine računanja derivacija za bilo kakve druge funkcije. No, pogledamo li sliku 3.1, vidimo da za mali razmak Δx omjer $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ neće biti bitno različit od koeficijenta smjera tangente povučene na graf funkcije f u točki s apscisom c. Napomenimo ovdje da je tangenta na neku krivulju u danoj točki (recimo na graf funkcije) pravac koji najbolje „prianja” uz tu krivulju oko te točke (na uskom dijelu oko promatrane točke zanemariva je razlika između krivulje i tangente, tj. to je pravac koji od svih pravaca koji prolaze tom točkom najbolje aproksimira krivulju u blizini te točke). Nije točno da je tangenta pravac koji krivulju siječe u samo jednoj točki, primjerice pravac $y = 1$ siječe, štoviše tangira, sinusoidu u beskonačno mnogo točaka.

Derivacija kao koeficijent smjera tangente: Prema navedenom, poboljšana verzija „definicije” derivacije $f'(c)$ glasi: To je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f povučene u točki s apscisom c. Iz ovakvog pristupa derivaciji odmah vidimo: Ako funkcija f raste na nekom intervalu oko c, onda je $f'(c) > 0$, a ako pada je $f'(c) < 0$ i obrnuto, ako je $f'(c) < 0$, f pada na nekom intervalu oko c, a ako je $f'(c) > 0$ f raste na nekom intervalu oko c. Formalnije iskazano:

Teorem 1 (Veza između predznaka prve derivacije i rasta i pada funkcije)**.** *Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu prvu derivaciju, ona raste na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu prvu derivaciju, ona pada na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: Rastuće derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a padajuće derivabilne funkcije negativnu prvu derivaciju (na intervalu na kojem rastu, odnosno padaju).*

Iz opisanog slijedi i da je jednadžba tangente na graf funkcije f u točki s apscisom c jednadžba pravca s koeficijentom $f'(c)$ kroz točku $(c, f(c))$, tj.

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c).$$

Bitno je spomenuti da je ovakva interpretacija derivacije funkcije moguća samo ako su x i y uobičajene Kartezijeve koordinate u ravnini, jer je pojam koeficijenta smjera pravca smislen samo za pravce u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Ukoliko je fizikalno značenje nezavisne varijable vrijeme, onda imamo još jednu mogućnost intuitivne „definicije” derivacije.

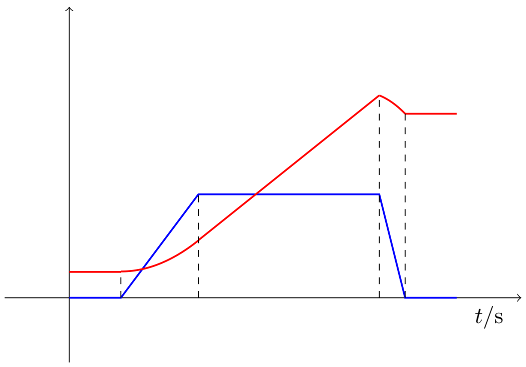
Derivacija kao trenutna brzina: Ako promatramo funkciju f, recimo poziciju točke na pravcu, kojoj je varijabla t iznos proteklog vremena u primjerice sekundama, onda je za svaki vremenski interval Δt (u odnosu na fiksirani trenutak t_0) prosječna brzina promjene vrijednosti funkcije f u tom intervalu jednaka $\frac{\Delta f}{\Delta t}$. Ukoliko skraćujemo vremenski interval, bit ćemo sve bliži trenutnoj brzini promjene f u trenutku t_0 te možemo reći: Derivacija od f u t_0 je trenutna brzina u tom trenutku. U ovom kontekstu se često umjesto oznake $f'(t_0)$ koristi oznaka[2] $\dot{f}(t_0)$.

Primjer 62. *Kod reakcije prvog reda koncentracija (c u mol L^{-1}) reaktanta R u trenutku t (izraženom u sekundama) iznosi*

$$c = c_0 e^{at},$$

gdje je a konstanta pri danoj temperaturi i reakciji i po iznosu je jednaka umnošku stehiometrijskog koeficijenta reaktanta (po definiciji, stehiometrijski koeficijenti reaktanata su pozitivni, a stehiometrijski koeficijenti produkata su

[2]Oznaka derivacije oblika $\dot{f}$ potječe od sir I. Newtona, a oznaka f' od J.-L. Lagrangea.



Slika 3.2: Pozicija i brzina, ilustracija uz zadatak 20.

negativni!) i koeficijenta brzine reakcije (dakle, $a < 0$ i a ima dimenziju recipročnog vremena odnosno jedinicu s^{-1}*). Koncentracija reaktanta se u tom slučaju smanjuje te će* $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dt}}$ *u svakom trenutku biti negativnog iznosa.*

Ukoliko imamo samo jedan reaktant kojemu je stehiometrijski koeficijent jednak ν, brzina reakcije se definira kao

$$v = \frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dt}},$$

dakle, brzina reakcije je u svakom trenutku pozitivnog iznosa. Zapravo, tako možemo definirati brzinu reakcije u svakom slučaju, neovisno o broju reaktanata i redu reakcije: bitno je samo da je ν stehiometrijski koeficijent reaktanta čiju koncentraciju c pratimo.

Kako je jedinica od Δc ista kao i od c (dakle, mol/L), a od Δt ista kao i od t (dakle, s), podrazumijevamo da je $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dt}}$ fizikalna veličina za koju smo jedinice izlučili još u kvocijentu $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ koji opisuje prosječnu brzinu te $\frac{\mathrm{dc}}{\mathrm{dt}}$ ima jedinicu kao i taj kvocijent, a to je mol L^{-1} s^{-1}.

Zadatak 20. *Ako znate da od dvije krivulje na slici 3.2 jedna prestavlja ovisnost udaljenosti točke koja se giba po pravcu o vremenu od neke fiksirane pozicije, a druga brzinu, koja je koja? Argumentirajte!*

Koju god od gornjih „definicija" odabrali, trebamo biti svjesni da se ne radi o pravoj definiciji već su to zapravo svojstva derivacije koja slijede iz njene prave definicije (vidi str.). Ipak, za razumijevanje smisla derivacije i njenu primjenu, čak i uz poznavanje njene egzaktne definicije, neophodno je znati gornje tri interpretacije.

Ako bismo odredilit $f'(c)$-ove za sve moguće c (recimo, sve $c \in I$), derivaciju možemo shvatiti kao novu funkciju $f' : I \to \mathbb{R}$. To se i radi u svim tablicama i formulama, kao i primjenama derivacija.

Primjer 63. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3$, onda je $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $f'(x) = 4$ jer je u svakoj mogućoj točki derivacija od f jednaka 4.*

Primjer 64. *Niže ćemo u tablici derivacija imati pravilo da je za $f(x) = \sin x$ derivacija dana s $f'(x) = \cos x$. To znači da za svaki konkretan broj c vrijedi $f'(c) = \cos c$, primjerice $f'(\pi) = \cos \pi = -1$.*

Za rad s derivacijama nužna je tablica derivacija:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

Primjer 65. *Za sve smislene vrijednosti varijable x vrijedi*

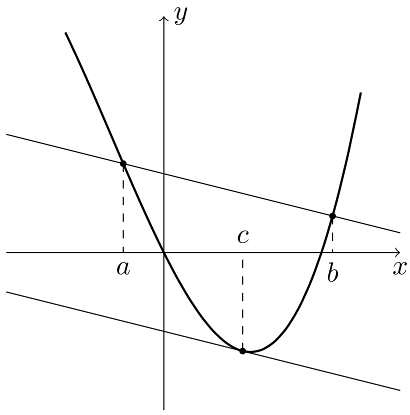
$$x' = \left(x^1\right)' = 1x^0 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = \left(x^{-3}\right)' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2},$$

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1},$$

$$\left(e^x\right)' = e^x \ln e = e^x,$$



Slika 3.3: Lagrangeov teorem srednje vrijednosti.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

Uočite pritom da je u svim osim u trećem slučaju derivacija definirana za iste x kao i funkcija koju deriviramo: u pravilu se pri deriviranju ne mijenja prirodna domena. Ipak, treći primjer (derivacija trećeg korijena) upućuje na oprez: treći korijen je definiran za sve $x \in \mathbb{R}$, dok njegova derivacija nije definirana za $x = 0$. Dakle, čak i elementarna funkcija ne mora biti derivabilna u svakoj točki svoje domene (vidi odjeljak 3.3).

Funkcije koje su derivabilne u svakoj točki svoje domene, zovu se jednostavno derivabilne funkcije. Navedimo ovdje, naravno bez dokaza, jedan od najvažnijih teorema o derivabilnim funkcijama:

Teorem 2 (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti)**.** *Ako je funkcija f derivabilna na otvorenom intervalu I, onda za svaka dva broja $a, b \in I$ $(a < b)$ postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometrijski gledano, teorem kaže da ćemo za derivabilnu funkciju i njenu proizvoljnu sekantu moći naći točku na grafu (između točaka koje određuju sekantu) takvu da je tangenta u toj točki paralelna toj sekanti (vidi sliku 3.3). Fizikalno gledamo, teorem kaže da za svaku vremenski ovisnu veličinu postoji trenutak u kojem je trenutna brzina promjene te veličine jednaka prosječnoj brzini tokom cijelog promatranog vremenskog intervala.

Ponovimo bitno... Derivacija funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ definira se pojedinačno u svakom $c \in I$ i označava s $f'(c)$. Taj broj se može interpretirati kao aproksimacija relativne promjene vrijednosti funkcije u odnosu na promjenu varijable, za male promjene varijable u odnosu na c, ili pak kao koeficijent smjera tangente povučene na graf od f u točki $(c, f(c))$. Ako nezavisna varijabla od f ima interpretaciju vremena, onda je $f'(c)$ trenutna brzina promjene veličine f (u trenutku c).

3.2 Višestruke derivacije

Deriviranjem funkcije f' dobivamo drugu derivaciju f'', deriviranjem druge derivacije treću derivaciju itd. Oznake za prvu, drugu i treću derivaciju su redom f', f'', f'''. Daljnje derivacije (n-ta za $n > 3$) u pravilu se označavaju s $f^{(n)}$.

U kontekstu brzina, drugu derivaciju funkcije možemo interpretirati kao akceleraciju (ubrzanje): Ako je $x(t)$ pozicija (na pravcu) u trenutku t, onda je $\dot{x}(t)$ trenutna brzina, a $\ddot{x}(t)$ je akceleracija u tom trenutku.

Ako koristimo oznaku tipa $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ za prvu derivaciju, onda je oznaka za drugu derivaciju $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, za treću $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$ itd.

Primjer 66. *Druga derivacija funkcije iz primjera 63 je $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f''(x) = 0$ (nulfunkcija) jer je to derivacija konstantne funkcije f'. Treća i sve daljnje derivacije su također nulfunkcije.*

Ponovimo bitno... Više derivacije su derivacije derivacija. Općenito je $(n+1)$-va derivacija $f^{(n+1)}$ jednaka (prvoj) derivaciji n-te derivacije $f^{(n)}$.

3.3 Kad derivacija ne postoji?

Neispravno je reći da derivacija u primjeru 66 ne postoji — ona postoji i svuda je jednaka nuli! Kad kažemo da derivacija ne postoji želimo reći da se ona ne može izračunati. Ako je ona jednaka nuli, znači da se mogla izračunati, dakle postoji.

Primjer 67. *Uzmimo funkciju sedmog korijena. U njenoj prirodnoj domeni su svi realni brojevi, no njena prva derivacija ($f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$) nije definirana u nuli. Zaključujemo da funkcija sedmog korijena nije derivabilna u nuli.*

Ovdje ćemo se pozabaviti pitanjem kako nepostojanje derivacije prepoznajemo temeljem grafa funkcije prikazanog u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Podsjetimo se: Derivacija se može interpretirati kao koeficijent smjera tangente na graf funkcije (u promatranoj točki grafa). Stoga da bi postojala derivacija $f'(c)$, točkom $(c, f(c))$ treba prolaziti tangenta čija jednadžba je oblika $y = kx + l$.

Problem u primjeru 67 je što graf funkcije sedmog korijena u točki $(0, 0)$ ima vertikalnu tangentu, tj. tangenta je u ovom slučaju pravac kojemu koeficijent smjera nije definiran.

Drugi problem može nastati ako graf ima „špicu" u nekoj točki. Očito nijedan od pravaca kroz „špicu" nije tangenta, jer je tangenta pravac koji se najbolje priljubljuje uz krivulju oko te točke. U slučaju „špice" mogla bi se naći dva pravca koji bi bili tangente „slijeva" i „zdesna", no nijedan od njih se ne priljubljuje uz graf na drugoj od dvije strane u odnosu na „špicu" te stoga nema tangente i time niti derivacije u pripadnoj apscisi.

Primjer 68. *Funkcija apsolutne vrijednosti ima derivaciju jednaku* -1 *u svim* $x < 0$*, jednaku* 1 *u svim* $x > 0$*, a u* 0 *nema derivaciju.*

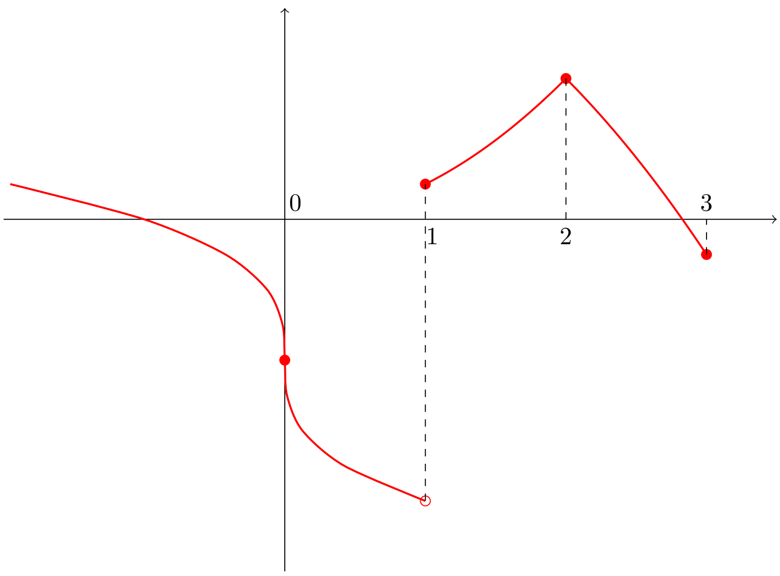
Treći mogući problem nastaje ako je u nekoj točki grafa graf „pukao" — i tada iz razloga analognih gore navedenima ne postoji tangenta u toj točki. O ovom će više riječi biti u odjeljku 4.2. Bitno je opet naglasiti da se mora raditi o točki grafa, dakle pripadna apscisa mora biti u domeni funkcije.

Također, ukoliko je domena poluotvoren ili zatvoren interval ili pak ako je domena unija disjunktnih intervala od kojih su neki poluotvoreni ili zatvoreni, funkcija (po definiciji) nije derivabilna u nikojem od rubova tih intervala (naravno, onih rubova koji su uključeni u domenu). Primjerice, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neovisno o pripadnom pravilu nije derivabilna u a i b. Možemo to tumačiti ovako: za lijevi rub mogli bismo naći „desnu" tangentu, no kako funkcija nije definirana lijevo od lijevog ruba, slijeva se taj pravac ne priljubljuje uz graf funkcije (jer grafa tamo ni nema); analogno vrijedi za desni rub.

Slika 3.4 prikazuje graf funkcije koja u četiri točke domene nije derivabilna, po jednoj za svaki od navedenih četiriju mogućih razloga nederivabilnosti.

Ponovimo bitno... Ako je c element domene funkcije f, onda $f'(c)$ ne postoji u sljedećim slučajevima:

- U c graf ima „špicu";
- U c se graf razdvaja;
- U c je tangenta vertikalna;
- c je rub nekog od disjunktnih intervala koji u uniji čine domenu.



Slika 3.4: Graf funkcije koja u četiri točke (0, 1, 2 i 3) nije derivabilna.

3.4 Osnovna svojstva derivacija

Najvažnije svojstvo deriviranja je linearnost. Linearnost deriviranja je zapravo spoj dva pravila, aditivnosti i homogenosti. Aditivnost deriviranja znači da je derivacija zbroja funkcija zbroj njihovih derivacija:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Homogenost deriviranja je pravilo da je derivacija produkta konstante i funkcije jednaka produktu te konstante i derivacije funkcije:

$$(Cf(x))' = Cf'(x).$$

Uočimo da iz gornjih svojstava slijedi i da je derivacija razlike funkcija razlika njihovih derivacija:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = f'(x) + ((-1) \cdot g(x))' =$$

$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Primjer 69. *Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\left(x^5 - \pi \sin x + \sqrt{5}\right)' = (x^5)' - \pi(\sin x)' + (\sqrt{5})' = 5x^4 - \pi \cos x.$$

Zadatak 21. *Koristeći linearnost deriviranja izvedite formule za derivacije sinusa hiperbolnog i kosinusa hiperbolnog.*

Korisno je primijetiti da se koristeći linearnost deriviranja lako uvjeriti da vrijedi: Prva derivacija polinoma stupnja n je polinom stupnja $n-1$. Ako bismo n puta derivirali polinom stupnja n, dobit ćemo konstantnu funkciju; sve daljnje derivacije polinoma su nulfunkcije.

Za slučaj da trebamo derivirati funkciju koja je produkt ili kvocijent dviju funkcija potrebne su malo kompliciranije formule.

Primjer 70. *Uzmimo $f(x) = x^2$ i $g(x) = 2x$. Tada je $f'(x) = 2x$ i $g'(x) = 2$.*

Umnožak funkcija f i g je funkcija h formule $h(x) = x^3$. Njena derivacija je $h'(x) = 3x^2$, što je različito od $f'(x)g'(x) = 2x$, dakle derivacija umnoška funkcija nije umnožak njihovih derivacija.

Također, kvocijent funkcije f i g je funkcija formule $k(x) = x/2$ i njena je derivacija $k'(x) = \frac{1}{2}$, što je različito od $f'(x) : g'(x) = x$, dakle derivacija kvocijenta funkcija nije kvocijent njihovih derivacija.

Pravilne formule za derivacije produkta i kvocijenta funkcija su:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Napominjemo da je $g^2(x)$ uobičajena oznaka za kvadriranu vrijednost $g(x)$, tj. $g^2(x) = (g(x))^2$.

Primjer 71. *Prirodna domena funkcije zadane s $f(x) = x \ln x - \dfrac{x}{e^x}$ je skup svih pozitivnih brojeva. Za sve $x > 0$ vrijedi*

$$f'(x) = (x \ln x)' - \left(\frac{x}{e^x}\right)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - \frac{(x)'e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \ln x + 1 - \frac{1-x}{e^x}.$$

Zadatak 22. *Koristeći formulu za deriviranje kvocijenta funkcija izvedite formule za derivacije tangensa i kotangensa.*

Primjer 72. *Derivirajmo funkciju $f(x) = \exp(3x)$. Kako je $f(x) = (e^3)^x$, možemo ju derivirati po pravilu za derivaciju eksponencijalne funkcije s bazom e^3:*

$$f'(x) = \left(e^3\right)^x \cdot \ln e^3 = 3\left(e^3\right)^x = 3e^{3x}.$$

Slično, ako bismo trebali derivirati $g(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, mogli bismo primijeniti pravilo za derivaciju produkta i dobili bismo

$$g'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x).$$

No, što da smo trebali derivirati $h(x) = (\ln x)^{1000}$*? Potencija je prevelika da bismo uzastopno primijenjivali pravilo za deriviranje produkta. Ili: kako derivirati* $l(x) = (\cos x)^{\pi}$*?*

U gornjem primjeru radilo se o kompozicijama nekih elementarnih funkcija s potenciranjem na fiksnu potenciju. Općenito, pravilo za deriviranje kompozicije funkcija glasi $(g \circ f)'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$, gdje je $y = f(x)$. To se pravilo često piše u obliku

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ovo pravilo poznato je i pod nazivom lančano pravilo.

Primjer 73. *Derivirajmo sad* $h(x) = (\ln x)^{1000}$*. To je kompozicija „vanjske funkcije” potenciranja na 1000-tu (*$g(y) = y^{1000}$*) i „unutrašnje funkcije” prirodnog logaritma (*$y = f(x) = \ln x$*). Stoga je*

$$h'(x) = 1000y^{999} \cdot \frac{1}{x} = 1000\,\frac{(\ln x)^{999}}{x}.$$

Analogno je derivacija od $l(x) = (\cos x)^{\pi}$ *dana s* $l'(x) = -\pi\,(\cos x)^{\pi-1} \sin x$*.*

Često dobro dođe zapamtiti specijalni slučaj pravila za derivaciju kompozicije funkcija, za slučaj da je „vanjska” funkcija prirodni logaritam:

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Primjena gornje formule, tj. određivanje derivacije funkcije tako da ju prvo logaritmiramo, pa onda deriviramo logaritmiranu funkciju, zove se logaritamsko deriviranje.

Primjer 74. *Derivirajmo opću potenciju* $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$ *logaritamskim deriviranjem. Prvo logaritmiramo funkciju:*

$$\ln f(x) = x \ln x.$$

Sad deriviramo logaritmiranu funkciju (deriviramo $\ln f(x)$*) i iz dobivenog izrazimo* $f'(x)$*:*

$$(\ln f(x))' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 + \ln x,$$

$$f'(x) = (1 + \ln x) f(x) = (1 + \ln x) x^x.$$

Za slučaj kad je f bijekcija i $g = f^{-1}$ njena inverzna funkcija, po definiciji imamo[3]

$$(g \circ f)(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x,$$
$$(g \circ f)'(x) = 1,$$

pa uz

$$y = f(x),$$

iz formule

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

dobivamo pravilo za derivaciju inverzne funkcije

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primjer 75. *Izvedimo pravilo za derivaciju arkus-sinusa, koji je inverzna funkcija funkcije* Sin. *Za* $x \in I = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ *je* $y = f(x) = \operatorname{Sin} x = \sin x, f'(x) = \cos x$ *i* $y \in \langle -1, 1 \rangle$. *Stoga je po gornjoj formuli*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}.$$

U zadnjoj formuli biramo predznak + jer je $\cos x > 0$ *za* $x \in I$ *pa imamo*

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Za kraj ovog dosta tehničkog poglavlja, navedimo zapise svih navedenih formula za slučaj da se koristi notacija $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ umjesto $f'(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}(y \pm z)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$
$$\frac{\mathrm{d}(yz)}{\mathrm{d}x} = z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y}{z} = \frac{z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{z^2},$$

lančano pravilo poprima oblik

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

[3]Podsjećamo da je ovaj, kao i gotovo svi izvodi i dokazi u ovom udžbeniku, pojednostavljena verzija egzaktnog matematičkog izvoda odnosno dokaza.

(pri čemo mislimo na $z = z(x) = z(y(x))$), a pravilo za derivaciju inverzne funkcije se onda zapisuje ovako:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}.$$

Primjer 76. *Neka je $y(x) = \exp(x)$. Odredimo*

$$\frac{\mathrm{d}(y/x)}{\mathrm{d}(1/x)},$$

tj. derivaciju kvoacijenta $\frac{y}{x} = \frac{\exp(x)}{x}$ po varijabli $t = \frac{1}{x}$. Imamo

$$\frac{\mathrm{d}(y/x)}{\mathrm{d}(1/x)} = \frac{\mathrm{d}(y/x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(1/x)} =$$

$$= \frac{\exp(x) \cdot x - \exp(x) \cdot 1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}(1/x)}{\mathrm{d}x}} =$$

$$= \exp(x) \cdot \frac{x-1}{x^2} \cdot \frac{1}{-1/x^2} = (1-x)\exp(x).$$

Ponovimo bitno... Derivacije elementarnih funkcija u svim točkama njihove prirodne domene u kojima postoje navode se u tablicama derivacija. Najvažnije od derivacija elementarnih funkcija su $C' = 0$ (derivacija konstantne funkcije je nulfunkcija), $(x^n) = nx^{n-1}$ (derivacija potencije dobije se spuštanjem eksponenta i njegovim smanjivanjem za 1), $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(e^x)' = e^x$ i $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Deriviranje je linearno: derivacija zbroja ili razlike funkcije je zbroj odnosno razlika njihovih derivacija i derivacija od funkcije pomnožene s nekom konstantom jednaka je derivaciji te funkcije pomnožene s tom konstantom. Produkt funkcija se derivira tako da se derivira svaki član produkta i pomnoži s nederiviranim ostalim članovima te se tako dobiveni izrazi zbroje. Derivacija kvocijenta jednaka je razlici derivacije brojnika pomnožene s nazivnikom i derivacije nazivnika pomnožene s brojnikom, sve skupa podijeljeno s kvadratom nazivnika. Kompozicija funkcija se derivira tako da se uzastopno množe derivacije funkcija koje čine funkciju, pri čemu su u derivaciju pojedine funkcije uvršteni isti izrazi koji su u nju uvršteni prije deriviranja. Derivacija inverzne funkcije recipročna je derivaciji polazne funkcije, pri čemu je nezavisna varijabla polazne funkcije izražena preko zavisne (koja je sad nezavisna za inverznu funkciju).

3.5 Određivanje ekstrema funkcije

Neka je zadana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$. Jedno od najčešćih pitanja u primjenama matematike u kojima se kao model koriste realne funkcije je: Gdje ta funkcija postiže ekstreme i koliko oni iznose? Problematika određivanja ekstrema funkcija naziva se i optimizacijom.

Što su to uopće ekstremi funkcije? Postoje dvije vrste ekstrema: lokalni i globalni. Globalni ekstremi se odnose na čitavu domenu funkcije, dok se lokalni odnose samo na njen dio. Preciznije:

Definicija 11 (Globalni ekstremi)**.** *Točka globalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (za minimum: $f(c) \leq f(x)$)* za sve $x \in D$. *Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove globalni maksimum (minimum) funkcije f.*

Geometrijski, točka globalnog maksimuma odnosno minimuma je apscisa najviše odnosno najniže točke na čitavom grafu. Funkcija može imati više točaka globalnih maksimuma (ili više minimuma), ali tada svi moraju biti „na istoj visini", tj. imati isti iznos (globalni minimum/maksimum je jedinstven, ali točka globalnog minimuma/maksimuma to ne mora biti).

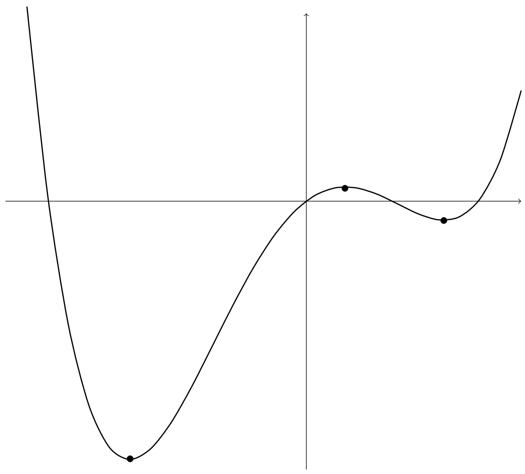
Primjer 77. *Svi brojevi $c = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) su točke globalnog maksimuma za funkciju kosinus, u svima njima kosinus postiže globalni maksimum $\cos(2k\pi) = 1$.*

Definicija 12 (Lokalni ekstremi)**.** *Točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije f je element c iz njene domene D takav da je $f(c) \geq f(x)$ (za minimum: $f(c) \leq f(x)$) za sve x iz nekog otvorenog intervala (točnije, iz presjeka nekog otvorenog intervala s domenom od f) koji sadrži c. Iznos $f(c)$ se u tom slučaju zove lokakni maksimum (minimum) funkcije f.*

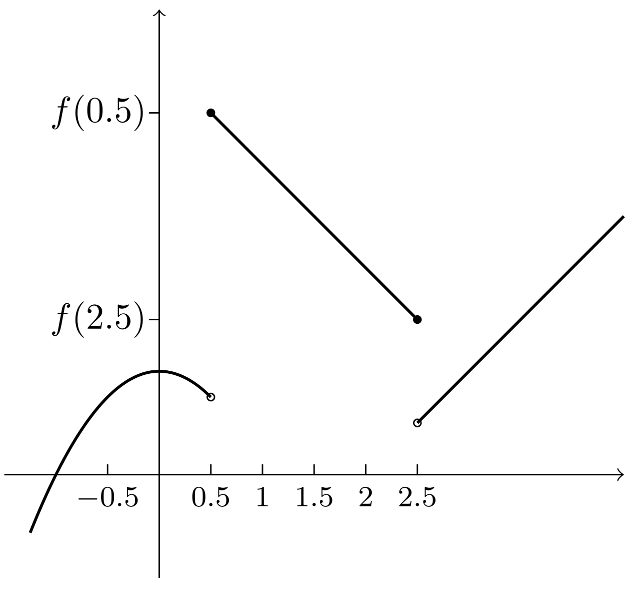
Primjer 78. *Funkcija čiji je graf prikazan na slici 3.5 ima dvije točke lokalnog minimuma, od kojih je jedna ujedno točka globalnog minimuma, te jednu točku lokalnog maksimuma. Ta funkcija ne postiže globalni maksimum.*

Primjer 79. *Za funkciju čiji graf je prikazan slikom 3.6, točka $0{,}5$ jest točka lokalnog (štoviše, globalnog) ekstrema (mamksimuma) jer je $f(0{,}5)$ veće od vrijednosti funkcije oko $c = 0{,}5$, no $2{,}5$ nije točka lokalnog ekstrema jer $f(2{,}5)$ nije ni veće ni manje od svih vrijednosti funkcije oko $c = 2{,}5$ (malo lijevo od $2{,}5$ vrijednosti su veće, a malo desno su manje od $f(2{,}5)$).*

Iako se na prvi pogled globalni ekstremi s praktične strane čine važnijim, prvo ćemo se pozabaviti pitanjem određivanja lokalnih ekstrema. Prvo što



Slika 3.5: Lokalni i globalni ekstremi.



Slika 3.6: Lokalni i globalni ekstremi.

možemo uočiti sa slike 3.5 jest da u slučaju da imamo element domene (apscisu točke na grafu) tako da u njemu dolazi do promjene rasta u pad ili obrnuto, u toj točki funkcija postiže lokalni ekstrem. Formalnije iskazano:

Propozicija 1. *Ako je f definirana na nekom intervalu oko c, c je točka lokalnog maksimuma ako f raste na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$ i pada na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$.*

Ako je f definirana na nekom intervalu oko c, c je točka lokalnog minimuma ako f pada na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$ i raste na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$.

Kako za derivabilne funkcije rast i pad vidimo iz predznaka prve derivacije (teorem 1), možemo zaključiti: Ako u nekoj točki c domene D funkcije f njezina prva derivacija mijenja predznak, ona je točka c točka lokalnog ekstrema za f.

Očito je nemoguće za svaki element domene provjeravati zadovoljava li taj uvjet. Stoga je zgodno prvo odabrati „listu kandidata”, tj. moguće točke lokalnih ekstrema i onda samo za njih provjeriti dolazi li u njima do promjene predznaka prve derivacije funkcije. Ta „lista kandidata” zove se skup kritičnih točakafunkcije.

Definicija 13 (Stacionarne i kritične točke)**.** *Stacionarna točka funkcije je element domene u kojemu je derivacija funkcije jednaka nuli (nultočka prve derivacije).*

Kritične točke su stacionarne točke i oni elementi domene u kojima funkcija nije derivabilna.

Dakle, želimo li znati gdje funkcija postiže lokalne ekstreme, prvo treba odrediti kritične točke. U većini standardnih primjera jedine kritične točke su stacionarne točke. No, ne smijemo zaboraviti i na ostale kritične točke. Osobito česte kritične točke koje nisu stacionarne su rubovi a i b domene kad je domena segment $[a, b]$.

Primjer 80. *Neka je $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$, $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$. Tada je*

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

te su stacionarne točke rješenja jednadžbe $3x^2 - 2x - 1 = 0$, tj. $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$. No, x_2 ne uzimamo u obzir jer nije u domeni. Stoga je jedina stacionarna točka ove funkcije $x_1 = 1$.

Nadalje, funkcija je polinom 3. stupnja. Stoga nema točaka u kojima nije derivabilna osim rubova domene te je skup svih kritičnih točaka ove funkcije $\{0, 1, 2\}$.

Iz opisnih definicija derivacije vidi se da su stacionarne točke one u kojima je tangenta na graf horizontalna. One često jesu točke lokalnih ekstrema, no to ne mora uvijek biti tako.

Primjer 81. *Za funkciju kubiranja ($f(x) = x^3$) je $c = 0$ stacionarna točka ($f'(0) = 0$), no iz grafa funkcije vidljivo je da to nije točka ekstrema.*

Slično ni ostale kritične točke ne moraju biti točke lokalnih ekstrema te nam preostaje odgovoriti na pitanje kako za pojedinu kritičnu točku provjeriti radi li se o točki lokalnog ekstrema ili ne. U osnovi imamo dva postupka, jedan koji koristi drugu derivaciju, a drugi koji analizira promjene predznaka prve derivacije.

Da bismo mogli iskoristiti drugu derivaciju od f za određivanje lokalnih ekstrema potrebno je prvo opisati geometrijsku interpretaciju njezina predznaka. Budući da je druga derivacija f'' prva derivacija od f', slijedi da pozitivna druga derivacija znači rast prve derivacije, a negativna druga derivacija znači pad prve derivacije. Kako prva derivacija predstavlja koeficijent smjera tangente u pojedinoj točki, znači da se pozitivna druga derivacija očituje u porastu koeficijenata smjera tangenti na graf, a negativna druga derivacija očituje u padu koeficijenata smjera tangenti na graf (gledano slijeva udesno). To je prikazano na slici 3.7: Na intervalu lijevo od točke c koeficijenti smjera tangenti padaju (smanjuju se), a na intervalu desno rastu (povećavaju se), odnosno na intervalu lijevo od točke c druga derivacija funkcije f je negativna, a desno pozitivna.

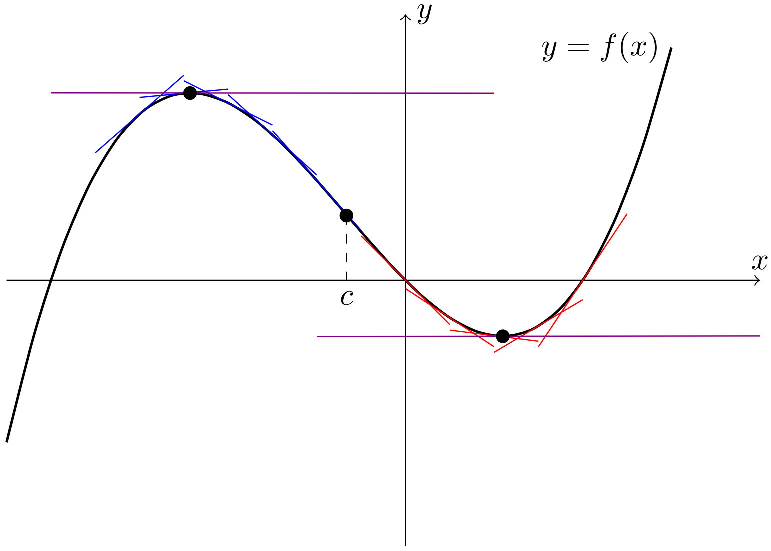
Sa slike 3.7 je vidljivo da se promjena predznaka druge derivacije vizualno očituje u promjeni zakrivljenosti grafa funkcije iz „udubljenog" u „izbočeni" (ili obrnuto). Službeni termini za te načine zakrivljenosti su konveksnost i konkavnost. Kao i rast i pad, konveksnost i konkavnost se definiraju bez referenciranja na derivacije, ali se za (dvaput) derivabilne funkcije mogu provjeravati pomoću derivacija.

Definicija 14 (Konveksnost i konkavnost funkcije)**.** *Funkcija f je na intervalu I konveksna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Funkcija f je na intervalu I konkavna ako za svaka dva broja $x_1 < x_2$ iz tog intervala vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$



Slika 3.7: Lijevo od c funkcija f je konkavna, a desno konveksna. U lokalnom maksimumu funkcija je konkavna, a u lokalnom minimumu konveksna.

Dakle, konveksna funkcija u aritmetičkoj sredini bilo kojih dviju svojih nezavisnih varijabli (unutar promatranog intervala) ne postiže vrijednost veću od aritmetičke sredine tim nezavisnim varijablama pridruženih iznosa, a konkavna funkcija u aritmetičkoj sredini bilo kojih dviju svojih nezavisnih varijabli (unutar promatranog intervala) ne postiže vrijednost manju od aritmetičke sredine tim nezavisnim varijablama pridruženih iznosa.

Kako su u primjenama većina funkcija dvaput derivabilne u (gotovo svim) točkama svoje domene, kao što teorem 1 daje uvjet kako iz predznaka prve derivacije zaključiti o rastu ili padu funkcije, sljedeći teorem nam daje, gore naslućeni, uvjet kako iz predznaka druge derivacije zaključiti o konveksnosti ili konkavnosti funkcije:

Teorem 3 (Veza između predznaka druge derivacije i konveksnosti i konkavnosti funkcije)**.** *Ako funkcija na nekom intervalu ima pozitivnu drugu derivaciju, ona je konveksna na tom intervalu, a ako na nekom intervalu ima negativnu drugu derivaciju, ona je konkavna na tom intervalu. Vrijedi i obrnuto: konveksne dvaput derivabilne funkcije imaju pozitivnu, a konkavne dvaput derivabilne funkcije negativnu drugu derivaciju (na intervalu na kojem su konveksne, odnosno konkavne).*

Ono što su za prvu derivaciju točke lokalnih ekstrema (točke u kojima dolazi do promjene predznaka prve derivacije, tj. rasta u pad ili obrnuto), za drugu derivaciju su točke infleksije (točke u kojima dolazi do promjene predznaka druge derivacije, tj. konveksnosti u konkavnost ili obrnuto). Na slici 3.7 točka c je točka infleksije funkcije f.

Definicija 15 (Točka infleksije)**.** *Točka infleksije funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ je element c njezine domene sa svojstvom da je na nekom intervalu $\langle a, c\rangle \subseteq D$ funkcija f konkveskna, a na nekom intervalu $\langle c, b\rangle \subseteq D$ konkavna, ili obrnuto.*

Napomena 9. *Pitanje konveksnosti i konkavnosti nije samo geometrijsko. Primjerice, ako nam graf opisuje poziciju $x(t)$ točke koja se u jednom smjeru giba po pravcu (gdje nam je t proteklo vrijeme), onda se sigurno radi o rastućoj funkciji (točka je sve dalje od ishodišne pozicije). No, graf će biti konveksan iznad onih vremenskih intervala na kojima je točka ubrzavala, a konkavan iznad onih vremenskih intervala na kojima je točka usporavala. Slično, ako se radi o prikazu pozicije nekog trkača, onda će graf u pravilu do nekog trenutka T biti konveksan, a zatim konkavan: značenje trenutka T (točke infleksije) je ovdje da je to onaj trenutak u kojem se počeo očitovati umor trkača.*

Kao što nultočka prve derivacije (stacionarna točka) ne mora biti točka lokalnog ekstrema, tako ni nultočka druge derivacije ne mora biti točka infleksije (razmotrite primjerice funkciju $f(x) = x^4$).

Vratimo se sad na temu našeg poglavlja. Kako je vidljivo sa slike 3.7, u točki lokalnog maksimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga negativna (funkcija je konkavna). Slično, u točki lokalnog minimuma dvaput derivabilne funkcije prva derivacija je nula (tangenta je horizontalna), a druga pozitivna (funkcija je konveksna). To nam daje sljedeći teorem:

Teorem 4. *Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, onda je c točka lokalnog minimuma funkcije f.*

Ako je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, onda je c točka lokalnog maksimuma funkcije f.

Primjer 82. *Primijenimo gornje pravilo na funkcije istog pravila $f(x) = x^3 - x^2 - x - \frac{1}{2}$ kao u primjeru 80, ali na njezinoj prirodnoj domeni $\mathbb{R}$. Tada je $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ te su stacionarne točke $x_1 = 1$ i $x_2 = -\frac{1}{3}$. Kako je funkcija derivabilna za sve $x \in \mathbb{R}$, slijedi da su to jedine kritične točke.*

Druga derivacija te funkcije je $f''(x) = 6x - 2$. Uvrstimo x_1 i x_2 u f'': $f''(1) = 4 > 0$ i $f''(-1/3) = -4 < 0$. Stoga je 1 točka lokalnog minimuma, a $-1/3$ točka lokalnog maksimuma.

Vidimo da je postupak određivanja lokalnih ekstrema na temelju teorema 4 lako zapamtiti, a u pravilu je i vrlo efikasno provediv. On se stvarno i najčešće koristi u standardnim zadacima određivanja lokalnih ekstrema. No, ovaj postupak ima nedostataka:

- Što ako je c stacionarna točka ($f'(c) = 0$) u kojoj je i druga derivacija jednaka nuli? U tom slučaju nam teorem 4 ne daje odgovor radi li se o točki ekstrema ili ne. U matematičkoj literaturi može se naći proširenje ovog postupka korištenjem viših derivacija, no u to ovdje nećemo ulaziti.

- Što ako je c stacionarna točka u kojoj druga derivacija ne postoji? Što ako je c kritična točka koja nije stacionarna ($f'(c)$ ne postoji), u kojem slučaju također ni $f''(c)$ ne postoji?

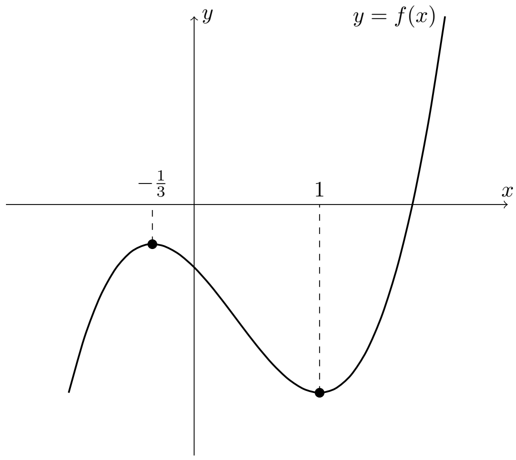
U slučajevima kad test pomoću druge derivacije iz gornjih razloga nije primjenjiv, ili pak ako je druga derivacija komplicirana za izračunati, ili štoviše za sve funkcije koje imaju prvu derivaciju koja je neprekidna[4] osim eventualno u konačno mnogo točaka (a takve su više-manje sve koje se pojavljuju u praksi, vidi primjer 86) postoji drugačiji, na prvi pogled nešto kompliciraniji, postupak, popularno zvan određivanjem lokalnih ekstrema pomoću tablice.

Neka je dana funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ u neka su $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sve njezine kritične točke. U prvi red tablice označen s x unosimo te kritične točke (i dodatno sve rubove disjunktnih intervalâ od kojih se sastoji domena D). Drugi red tablice označava se s $f(x)$, a treći s $f'(x)$. U tom trećem redu označimo 0 ispod svake stacionarne točke, odnosno neki simbol (primjerice $*$) ispod ostalih kritičnih točaka. Za svaki podinterval određen po dvama x-evima u prvom redu u trećem redu označimo predznak f' na tom intervalu, što činimo tako da u f' uvrstimo po jednu točku domene (nezavisnu varijablu) između po dva susjedna x_i-a (ili pak analizom formule f'). Naposlijetku prikladnim strelicama u redu $f(x)$ označimo rast i pad funkcije te je lako zaključiti koje kritične točke su točke lokalnih minimuma, koje lokalnih maksimuma, a koje nijedno. Detalji postupka biti će jasniji iz primjera.

Primjer 83. *Odredimo lokalne ekstreme funkcije iz primjera 82 pomoću tablice. Jedine kritične točke bile su njezine stacionarne točke* $x_1 = 1$ *i* $x_2 = -\frac{1}{3}$*, a domena je* $\mathbb{R}$*. Odgovarajuća tablica je*

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

[4]Pojam neprekidnosti definirat ćemo u poglavlju 4.2.



Slika 3.8: Ilustracija uz primjere 82 i 83.

Pritom smo predznake od $f'(x)$ u pojedinim intervalima odredili uvrštavanjem po jednog x koji je manji od $-1/3$, jednog između $-1/3$ i 1 i jednog većeg od 1 u $f'(x)$ (npr. $f'(-1) = 4 > 0$, $f'(0) = -1 < 0$ i $f'(2) = 20 > 0$). S obzirom na to da je $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ mogli smo to i brže zaključiti: f' je kvadratna funkcija pozitivnog vodećeg koeficijenta s dvije realne nultočke pa je negativna između njih, a pozitivna inače.

Dakle, funkcija f ima točku lokalnog maksimuma $-\frac{1}{3}$ i točku lokalnog minimuma 1. Odgovarajući graf prikazan je slikom 3.8.

Primjer 84. *Neka je funkcija zadana po dijelovima s*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & -2 < x < 1, \\ \log(3x + 2 - x^2), & 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{x^2+1}, & x \ge 3 \end{cases}.$$

Domena te funkcije je $\langle -2, 2\langle \cup [3, +\infty\rangle$.

Deriviramo li $x^3 - x^2$, dobivamo $3x^2 - 2x$, što ima dvije nultočke, 0 i $\frac{2}{3}$. Obje su unutar intervala $\langle -2, 1\rangle$ pa su stacionarne točke za funkciju f. Uočimo da je $3x^2 - 2x = x(3x-2)$ negativno između tih stacionarnih točaka, a pozitivno inače.

Deriviramo li $\log(3x + 2 - x^2)$, dobivamo $\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$ s nultočkom $\frac{3}{2}$ koja je unutar $\langle 1, 2\rangle$, pa smo dobili još jednu stacionarnu točku, no kako je domena drugog pravila $[1, 2\rangle$, ono u 1 nije derivabilno pa je 1 kritična točka.[5] Kako

[5]Formalno, 1 je zapravo točka prekida i to je stvarni razlog zašto se uvrštava u popis kritičnih točaka.

$\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$ *nigdje nije* 0 *unutar* $\langle 1,2\rangle$, *ta derivacija ne mijenja predznak i on je jednak u svakoj točki tog intervala. Uvrstimo li npr.* 1,25 *i* 1,75 *u* $\frac{3-2x}{3x+2-x^2}$ *vidimo da je taj predznak pozitivan lijevo od* $\frac{3}{2}$ *i negativan desno.*

Deriviramo li $\frac{1}{x^2+1}$, *dobivamo* $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ *s nultočkom* 0 *koja nije unutar* $\langle 3,+\infty\rangle$, *ali kao i s drugim dijelom pravila od* f, *iako nismo dobili novu stacionarnu točku, dobili smo novu kritičnu točku* 3 *jer se drugo pravilo odnosi na* $[3,+\infty\rangle$. *Budući da je nazivnik od* $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ *uvijek pozitivan, a za pozitivne* x *(posebno za one veće od* 3*) je negativan, slijedi da je* $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ *negativno na* $[3,+\infty\rangle$.

Imamo dakle četiri kritične točke: 0, $\frac{2}{3}$, 1 *i* 3. *Uz njih ćemo u prvi red tablice unijeti i rubove intervala od kojih se sastoji domena (*-2 *i* 2, *te* 3 *kojeg već imamo). Dobivamo tablicu (sa* $*$ *smo označili interval unutar kojeg* f *i* f' *nisu definirane):*

x	-2		0		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{3}{2}$		2		3	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$*$		$\searrow$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$+$		$-$		$*$		$-$

Vidimo da do promjene rasta u pad dolazi samo u 0 *i* $\frac{3}{2}$ *pa su to točke lokalnih maksimuma za* f, *a do promjene pada u rast dolazi samo u* $\frac{2}{3}$ *pa je to jedina točka lokalnog minimuma za* f. *Kritična točka* 1 *nije točka lokalnog ekstrema, ali kritična točka* 3 *to jest jer zadovoljava uvjet iz definicije 12: postoji otvoreni interval (npr.* $\langle \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\rangle$*) tako da za* x*-eve iz njegovog presjeka s domenom vrijedi da* $f(3)$ *nije manje od* $f(x)$ *(*f *pada na* $[3, \frac{7}{2}\rangle$*). Stoga je* 3 *točka lokalnog maksimuma funkcije* f.

Svi dosad opisani postupci odnosili su se na određivanje lokalnih ekstrema. No, što je s određivanjem globalnih ekstrema?

Prva što bismo mogli pomisliti je da globalni maksimum (ili minimum) možemo odrediti tako da među točkama lokalnih maksimuma (minimuma) odaberemo onu u kojoj funkcija postiže najveću (najmanju) vrijednost. Također, mnogi će pomisliti da ako imamo samo jednu točku lokalnog ekstrema da se radi o točki globalnog ekstrema. No, takvo zaključivanje je krivo.

Primjer 85. *Funkciji čiji graf je prikazan slikom 3.8 u primjerima 82 i 83 smo odredili točke lokalnih ekstrema, no sa slike je vidljivo da jedini lokalni maksimum nije globalni maksimum jer funkcija poprima proizvoljno velike vrijednosti za velike vrijednosti varijable* x. *Isto tako, jedini lokalni minimum nije globalni minimum jer funkcija poprima proizvoljno male vrijednosti za male vrijednosti varijable* x.

Općenito, za određivanje globalnih ekstrema potrebno je ispitati cijeli tok funkcije (odjeljak 3.6), posebno intervale rasta i pada te asimptote. No, nerijetko se globalni ekstremi mogu odrediti i jednostavnije.

Primjer 86. *Lennard-Jonesov potencijal opisuje ovisnost potencijalne energije V dviju nenabijenih čestica o njihovoj udaljenosti r. On se može izraziti formulom*

$$\frac{V}{\varepsilon} = \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^{6},$$

Pritom je ε jedinica energije čiji ćemo smisao sada otkriti.

Uz supstituciju

$$y = \frac{V}{\varepsilon},\ x = \frac{r}{r_{\min}}$$

fomula Lennard-Jonesovog potencijala svodi se na

$$y = \frac{1}{x^{12}} - \frac{2}{x^6}.$$

Tu formulu ne gledamo na njenoj prirodnoj domeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nego samo na za ovaj primjer prikladnoj domeni $\langle 0, \infty\rangle$.

Derivirajmo y:

$$y' = -\frac{12}{x^{13}} + \frac{12}{x^7} = 12 \cdot \frac{x^6 - 1}{x^{13}}.$$

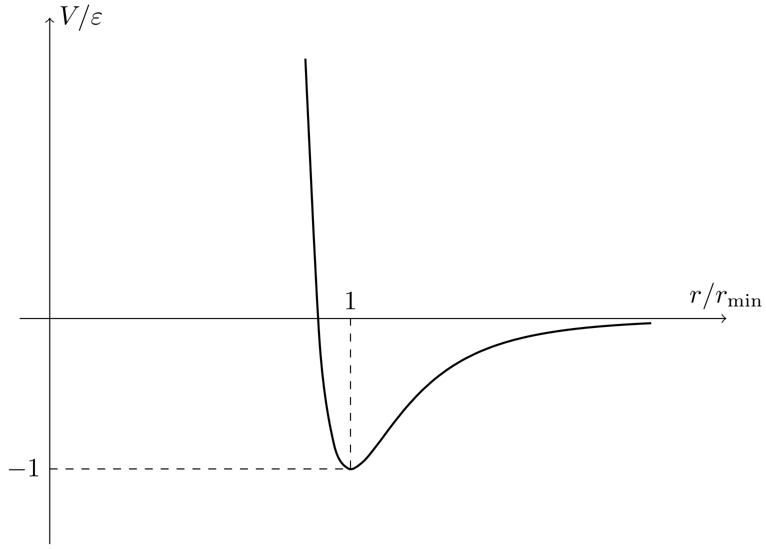
Vidimo da je y' definirana svuda gdje i y, dakle će jedine kritične točke biti stacionarne točke koje dobijemo rješavanjem jednadžbe $y' = 0$. Lako se dobije da je jedina stacionarna točka, dakle jedini kandidat za točku ekstrema, $x = 1$ (što odgovara $r = r_{\min}$). Iz formule za y' odmah vidimo da je $y' > 0$ za $x > 1$, a $y' < 0$ za $0 < x < 1$, dakle je točka 1 sigurno točka lokalnog minimuma. No, saznali smo i više: Funkcija na cijeloj domeni lijevo od 1 pada, a desno raste, pa zaključujemo da se ujedno radi o točki globalnog minimuma.

Kako je $y(1) = -1$, vidimo da je za $r = r_{\min}$ iznos Lennard-Jonesovog potencijala $V = -\varepsilon$, dakle je jedinica ε suprotna vrijednost dubine tzv. potencijalnog bunara (vidi sliku 3.9).

Situacija iz prethodnog primjera može se generalizirati: Ako je domena funkcije f interval i ako funkcija unutar tog intervala samo u jednoj kritičnoj točki mijenja rast u pad ili pad u rast, radi se o točki globalnog ekstrema.

Ipak, u jednom — u primjenama vrlo čestom — slučaju postoji „šablonski” postupak za određivanje globalnih ekstrema. Taj postupak se oslanja na sljedeći teorem:[6]

[6] Drugačija, ekvivalentna, formulacija ovog teorema je: Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna i nije konstantna, onda je slika te funkcije segment.



Slika 3.9: Graf Lennard-Jonesovog potencijala.

Teorem 5 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna*[7]*, onda f postiže i globalni minimum i globalni maksimum i sve međuvrijednosti između njih.*

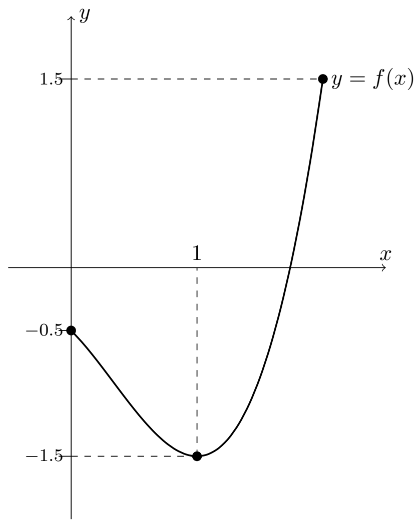
Za funkcije koje su zadane na segmentu, neprekidne su i uz to derivabilne unutar segmenta (a takve su sve funkcije koje dobijemo iz elementarnih funkcija restrikcijom na segment) dovoljno je odrediti sve kritične točke u segmentu i usporediti vrijednosti funkcije u njima. Stoga imamo:
Postupak za određivanje globalnih ekstrema za neprekidne funkcije kojima je za domenu uzet segment $[a, b]$:

1. Derivirajte funkciju i odredite joj stacionarne točke (unutar $\langle a, b\rangle$).

2. U kritične točke dodaju se i rubovi segmenta, tj. brojevi a i b (i eventualne druge točke unutar $\langle a, b\rangle$ u kojima funkcija nije derivabilna).

3. Za svaku kritičnu točku c izračuna se $f(c)$. One točke c za koje $f(c)$ ima najmanju vrijednost su točke globalnog minimuma. One točke c za koje $f(c)$ ima najveću vrijednost su točke globalnog maksimuma.

[7] Precizno ćemo to definirati kasnije, zasad uzimamo: Ako je funkcija zadana na segmentu, ona je neprekidna ako joj se graf sastoji samo od jednog dijela, tj. može se nacrtati u jednom potezu.



Slika 3.10: Ilustracija uz primjere 80 i 87.

Primjer 87. *Nastavimo primjer 80. Tamo smo za zadanu funkciju „obavili" prve tri točke gornjeg postupka, tj. utvrdili da je skup kritičnih točaka skup* $\{0, 1, 2\}$. *Stoga treba ta tri broja uvrstiti u* f*:*

$$f(0) = 0{,}5,$$

$$f(1) = -1{,}5,$$

$$f(2) = 1{,}5.$$

Vidimo da najmanju vrijednost funkcija postiže u 1 *te joj je to točka globalnog mimimuma, a najveća je vrijednost u* 2 *te joj je to točka globalnog maksimuma. Odgovarajući graf vidljiv je na slici 3.10.*

Primijetimo da nam i ovaj primjer, povezano s primjerom 85, ponovno pokazuje da nam funkciju ne čini samo pravilo, već i njena domena (i kodomena) — za dvije različite domene uz isto pravilo jednom smo imali funkciju bez globalnih ekstrema, a drugi put s globalnim ekstremima.

Ponovimo bitno... Točke globalnih ekstrema funkcije su elementi domene u kojima f postiže najmanju ili najveću vrijednost. Točke lokalnih ekstrema funkcije su oni elementi c iz domene u kojima funkcija poprima najmanju ili najveću vrijednost na nekom intervalu oko c. Neprekidna funkcija zadana na segmentu sigurno postiže globalni minimum i globalni maksimum. Lokalne ekstreme određujemo tako da prvo odredimo kritične točke, a onda za svaku provjerimo radi li se o lokalnom ekstremu. Kritične točke su stacionarne točke, tj. nultočke prve derivacije i točke u kojima funkcija nije derivabilna. Provjera je li kritična točka točka lokalnog ekstrema provodi se ili utvrđivanjem intervala rasta i pada ili pomoću druge derivacije. Predznak prve derivacije funkcije govori o njenom rastu ili padu (pozitivna prva derivacija znači rast funkcije, a negativna pad), a predznak druge derivacije govori o obliku zakrivljenosti funkcije (pozitivna druga derivacija znači konveksnost funkcije, a negativna konkavnost).

3.6 Ispitivanje toka funkcije

Pod ispitivanjem toka funkcije podrazumijeva se skupljanje svih potrebnih podataka za crtanje njenog grafa. Prvi korak određivanja toka funkcije je određivanje njene prirodne domene (ako domena nije zadana). Prirodna domena za formulu $y = f(x)$ određuje se uzimajući u obzir prirodne domene elementarnih funkcija, tj. u logaritme smiju biti uvršteni samo pozitivni brojevi, u arkus-sinus i arkus-kosinus smiju biti uvršteni samo brojevi između -1 i 1; pod parnim korijenima ne smiju biti negativni brojevi i ne smije se dijeliti s nulom.

Primjer 88. *Formulom*

$$f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$$

zadana je realna funkcija jedne varijable. Prvo (zbog arkus-sinusa) mora biti $x \in [-1, 1]$. *Nadalje,* $\arcsin x$ *ne smije biti negativan jer je pod kvadratnim korijenom, dakle mora biti* $x \geq 0$, *tj. ostaje nam* $x \in [0, 1]$. *Na kraju, izraz pod logaritmom,* $\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x}}$, *mora biti pozitivan, a to vrijedi za* $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} > 0$, *tj.* $\sqrt{\arcsin x} < \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. *Kako su tu prema prethodnom pod korijenima pozitivni brojevi, zadnju nejednakost smijemo kvadrirati te dobivamo* $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$. *Dakle, mora biti* $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Zaključujemo da je prirodna domena funkcije* f *skup* $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$.

Nakon što je određena domena određuje se vrijednost funkcije u nuli (naravno, ako je nula u domeni) te se, ukoliko je moguće, odrede nultočke funkcije. Time određujemo sjecišta grafa s koordinatnim osima.

Primjer 89. *Nastavljamo primjer 88. Funkcija je definirana u* 0 *i iznos joj je* $f(0) = \log \sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 0{,}052$.

Logaritam je 0 ako je u njega uvršten 1, dakle je naša funkcija 0 ako je izraz pod logaritmom jednak 1, a on je jednak 1 ako je $\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} = 1$*. No, rješenje ove jednadžbe ne nalazi se u domeni naše funkcije te funkcija* f *nema nultočaka.*

Ako ne znamo točno odrediti nultočke funkcije, za procjenu intervala u kojem se neka od nultočki nalazi često je od pomoći sljedeće pravilo: Ako je funkcija f neprekidna (primjerice, ako je elementarna) na segmentu $[a, b]$ i ako su predznaci od $f(a)$ i $f(b)$ različiti, onda između a i b postoji bar jedna nultočka od f.

Primjer 90. *Funkcija iz primjera 82 os ordinata siječe u* $f(0) = -0{,}5$.

Uvrštavanjem djeljitelja slobodnog člana 12 u funkciju vidjet ćemo da nijedan od njih nije nultočka te funkcije, dakle ona nema cjelobrojnih nultočki.

No, uvrstimo li u funkciju redom cijele brojeve od primjerice -5 *do* 5*, primijetit ćemo da je* $f(-3) < 0$*, a* $f(-2) > 0$*, pa budući da se radi o polinomu (neprekidnoj funkciji) slijedi da ova funkcija ima bar jednu nultočku između* -3 *i* -2*. Iz daljnjih razmatranja toka funkcije moći ćemo zaključiti da je to jedina nultočka funkcije* f*.*

U sljedećem koraku se, pomoću prve derivacije, određuju intervali rasta i pada i ekstremi funkcije. Nakon toga se pomoću druge derivacije odrede intervali konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije. Postupak je opisan u prethodnom odjeljku.

Primjer 91. *Nastavimo s funkcijom iz primjera 82 i 90. Iz prve i druge derivacije funkcije* f *dobivamo tablicu*

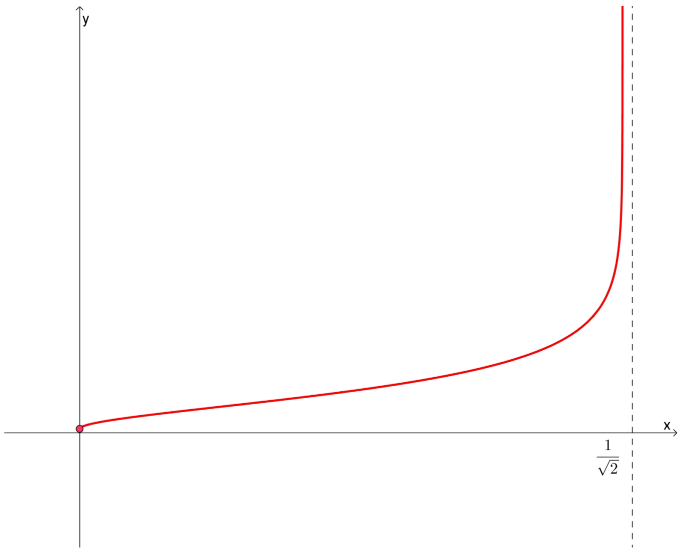
x		$-\frac{1}{3}$		1		$\frac{1}{3}$	
$f(x)$	$\nearrow$	lok.maks.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$		$\nearrow$
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x) = 6x - 2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Vidimo: funkcija raste za $x < -\frac{1}{3}$ *i za* $x > 1$*, a između* $-\frac{1}{3}$ *i* 1 *pada. Iz toga, budući da je* $f\left(-\frac{1}{3}\right) > f(1) > 0$*, zaključujemo da funkcija nema nultočki većih od* $-\frac{1}{3}$*.*

Funkcija je konveskna za $x > \frac{1}{3}$ *i konkavna za* $x < \frac{1}{3}$ *te je* $\frac{1}{3}$ *točka infleksije. Usporedimo li to sa slikom 3.11, vidimo da ta slika stvarno prikazuje graf funkcije* f*.*

Primjer 92. *Prva derivacija funkcije iz primjera 88 je*

$$f'(x) = \frac{1}{2 \ln 10 \sqrt{(1 - x^2) \arcsin x} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}} - \sqrt{\arcsin x} \right)}.$$



Slika 3.11: Graf funkcije iz primjera 88 (slika izrađena programom Geogebra).

Zbog uvjeta iz kojih smo odredili domenu od f, svi članovi u nazivniku su pozitivni, pa je $f'(x) > 0$ za sve x u domeni (osim u 0, gdje derivacija nije definirana). Slijedi da je naša funkcija strogo rastuća na domeni pa joj je (globalni) minimum u 0, a globalnog maksimuma nema (desni rub domene nije u domeni). Zbog kompliciranosti izraza za f' nećemo određivati drugu derivaciju od f.

Gore opisanim postupkom možemo saznati gotovo sve o grafu funkcije, osim ima li asimptota (i ako da, koje su to). Da bi se mogle odrediti asimptote potreban nam je pojam limesa, koji je ujedno u pozadini precizne definicije derivacije. Ipak, iz poznavanja svojstava elementarnih funkcija kako su opisane u prvom poglavlju, u nekim slučajevima možemo već sad (neformalno) zaključiti o postojanju asimptota.

Primjer 93. *Završimo primjer 88. Funkcija je elementarna i domena joj je $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ pa ne može imati horizonatalnih asimptota, a vertikalna je moguća samo slijeva u $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kako logaritmi imaju vertikalnu asimptotu u 0, a što je x bliži $\frac{1}{\sqrt{2}}$, nazivnik izraza pod logaritmom postaje sve veći te 1 podijeljen s njime postaje sve bliži 0, vidimo da naša funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (slijeva zbog domene i prema gore zbog rasta). Graf ove funkcije prikazan je slikom 3.11.*

Ponovimo bitno. . . Ispitivanje toka funkcije uključuje: određivanje prirodne domene (ako domena nije zadana), određivanje sjecištâ grafa s koordinatnim osima, određivanje intervala rasta i pada i lokalnih ekstrema, određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti i točaka infleksije te određivanje asimptota.

3.7 Uvod u diferencijalne jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe posredno opisuju nepoznatu funkciju preko veze između nje, njezine nezavisne varijable i njezinih derivacija. Rješenje diferencijalne jednadžbe je svaka funkcija koja uvrštavanjem u jednadžbu daje jednakost koja je istinita za sve vrijednosti nezavisne varijable. Primjerice, $y = Ce^x$ je za svaku konstantu C rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$ jer za svaki x vrijedi $(Ce^x)' = Ce^x$.

Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi bavit ćemo se u poglavlju 9, a ovdje ćemo samo primjerima pokazati kako za neku funkciju provjeriti je li ona rješenje dane diferencijalne jednadžbe i kako iskoristiti tzv. početne uvjete.

Primjer 94. *Promotrimo diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Uzmimo da je $y = (1 + x)e^{4x}$. *Tada je* $y' = e^{4x} + 4(1 + x)e^{4x} = (5 + 4x)e^{4x}$ *i* $y'' = 4e^{4x} + 4(5 + 4x)e^{4x} = (24 + 16x)e^{4x}$. *Uvrstimo li* y, y' *i* y'' *u jednadžbu imamo*

$$(24 + 16x)e^{4x} - 8(5 + 4x)e^{4x} + 16(1 + x)e^{4x} = 0.$$

Kako je $e^{4x} > 0$ *za sve* x, *prethodnu jednakost možemo podijeliti s* e^{4x} *te dobijemo* $24 + 16x - 40 - 32x + 16 + 16x = 0$, *što je istinito za sve* x. *Stoga je* $y = (1 + x)e^{4x}$ *jedno rješenje jednadžbe* $y'' - 8y' + 16y = 0$. *Sva rješenja jednadžbe su oblika* $y = (C_1 + C_2x)e^{4x}$ *za različite konstante* C_1 *i* C_2 *— lako je uvrštavanjem provjeriti da to jesu rješenja, teže je dokazati da nema drugih.*

Diferencijalna jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija pojavljuje samo jednom derivirana je prvog reda, a ako se (kao u zadnjem primjeru) pojavljuje i druga derivacija nepoznate funkcije, onda je drugog reda. Općenito, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda sadrže jednu neodređenu konstantu, a rješenja jednadžbi drugog reda sadrže dvije (C_1 i C_2 u gornjem primjeru).

U fizikalnom kontekstu najčešće se radi o povezivanju osnovne funkcije (puta, koncentracije, ...) s brzinom njezine promjene (prvom derivacijom) i eventualno njenom akceleracijom (drugom derivacijom). Podsjetimo se ovdje da za slučajeve kad je nezavisna varijabla označena s t (posebice kad ona predstavlja vrijeme) uobičajeno prvu i drugu derivaciju funkcije y ovisne o t označavati s $\dot{y}$ i $\ddot{y}$.

Primjer 95. *Promatramo li titranje objekta mase m na vertikalno visećoj opruzi s koeficijentom elastičnosti k, u svakom trenutku možemo bilježiti vertikalni odmak z tijela od ravnotežnog položaja $z = 0$ (recimo, pozitivni z znači pomak nadolje, a negativni nagore). Prema drugom Newtonovom zakonu, u svakom trenutku je $ma(t) = -kz(t)$, tj. $m\ddot{z} = -kz$. Time smo dobili diferencijalnu jednadžbu za opis ovisnosti pozicije z o vremenu.*

Primjer 96. *Poznato je da je brzina promjene temperature sustava ϑ (u $^\circ C$) u svakom trenutku proporcionalna razlici temperature okoline i sustava.*

Recimo da je sustav patka koju želimo ispeći u pećnici (dakle, pećnica je okolina). Neka je pećnica zagrijana na konstantnih $200^\circ\mathrm{C}$. Vrijeme ćemo mjeriti u minutama.

Prema opisanom, mora postojati konstanta k takva da je

$$\dot{\theta} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta).$$

Provjerimo da je ovisnost temperature patke o vremenu opisana s

$$\vartheta(t) = 200^\circ\mathrm{C} - Ce^{-kt},$$

gdje je C neka konstanta nepoznatog iznosa.

Ako smo točno pretpostavili da je to rješenje diferencijalne jednadžbe $\dot{\theta} = k(200^\circ\mathrm{C} - \vartheta)$, onda uvrštavanje te funkcije u jednadžbu mora dati identitet koji vrijedi za sve trenutke t. Da bismo uvrstili ϑ u jednadžbu trebamo i derivaciju te funkcije po vremenu:

$$\dot{\theta} = Cke^{-kt}.$$

Uvrstimo u jednadžbu:

$$Cke^{-kt} = k(200^\circ\mathrm{C} - 200^\circ\mathrm{C} + Ce^{-kt})$$

što daje

$$Cke^{-kt} = Cke^{-kt},$$

a to je očito istinito za sve trenutke t.

Da bi diferencijalna jednadžba jednoznačno opisivala nepoznatu funkciju potrebni su i tzv. početni uvjeti.

Primjer 97. *Ukoliko znamo da je patka iz primjera 96 na početku izvađena iz hladnjaka i stoga imala temperaturu* $2°\mathrm{C}$ *, znamo da je* $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2°\mathrm{C}$ *— to je početni uvjet za naš problem.*

Već smo provjerili da je ovisnost temperature patke o vremenu je dana s $\vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - Ce^{-kt}$*, pri čemu imamo dvije konstante* C *i* k *nepoznatih iznosa. Početni uvjet* $\vartheta(0\,\mathrm{min}) = 2°\mathrm{C}$ *uvrstimo u formulu za* ϑ*:*

$$2°\mathrm{C} = \vartheta(0\,\mathrm{min}) = 200°\mathrm{C} - Ce^{-k\cdot 0\,\mathrm{min}} = 200°\mathrm{C} - C.$$

Vidimo dakle da je $C = 198°\mathrm{C}$*, tj.*

$$\vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-kt}.$$

Početni uvjet nam nije dovoljan da odredimo obje nepoznate konstante. Za određivanje konstante k*, koja potječe (za razliku od* C*) ne od rješavanja diferencijalne jednadžbe, nego od njegovog postavljanja, treba nam još jedan podatak o temperaturi patke u nekom trenutku nakon što smo ju stavili u pećnicu. Recimo, nakon* 30 *minuta izmjerili smo joj temperaturu i dobili da je tada bila na* $16°\mathrm{C}$*, dakle* $\vartheta(30\,\mathrm{min}) = 16°\mathrm{C}$*. Ponovimo postupak kao kad smo koristili početni uvjet, ali sa zadnjim određenim oblikom funkcije* ϑ*:*

$$16°\mathrm{C} = \vartheta(30\,\mathrm{min}) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-k\cdot 30\mathrm{min}}.$$

Rješavanje gornje eksponencijalne jednadžbe daje

$$k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\mathrm{min}^{-1} \approx 0{,}00244438\,\mathrm{min}^{-1}.$$

Stoga je temperatura patke u svakom trenutku

$$\vartheta(t) = 200°\mathrm{C} - 198°\mathrm{C}e^{-0{,}00244438t\,\mathrm{min}^{-1}}.$$

Želimo li znati kad će patka biti pečena, tj. kad će joj temperara biti $\vartheta(t) = 80°\mathrm{C}$*, uvrstimo to u zadnju formulu i odredimo* t*. Ispasti će da se patka treba peći približno* 204,868 *minuta, tj. otprilike* 3 *sata i* 25 *minuta.*

Primjer 98. *U kemijskoj kinetici se reakcije drugog reda, na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant* R*, mogu opisati zakonom brzine koji je diferencijalna jednadžba prvog reda oblika*

$$\frac{1}{\nu}\dot{c} = kc^2,$$

gdje je ν *stehiometrijski koeficijent (negativan) reaktanta* R*, a* $c = c(t)$ *njegova množinska koncentracija, ovisna o vremenu* t*.*

Lako je provjeriti da je $c(t) = \dfrac{C}{1 - C\nu kt}$ *rješenje gornje diferencijalne jednadžbe. Kako je na lijevoj strani množinska koncentracija, a nazivnik na desnoj strani čisti broj, slijedi da je fizikalna dimenzija od* C *množinska koncentracija. Uvrštavanjem* $t = 0$ *vidimo da je* C *točno početna koncentracija od* R. *Ako nju označimo s* c_0*, dobivamo sljedeći oblik opisa vremenske ovisnosti koncentracije reaktanta, koju nazivamo i integriranim zakonom brzine reakcije:*

$$c(t) = \frac{c_0}{1 - c_0\nu kt}.$$

Ako je poznato da su koncentracije reaktanta mjerene, recimo, svakih 50 s *od početka reakcije i iznosile su redom* 1,00 mol/L, 0,905 mol/L, 0,820 mol/L, 0,741 mol/L, *. . . , a želimo provjeriti hipotezu da se radi o reakciji drugog reda, posljednja formula nam nije od velike pomoći, odnosno umjesto da pokušamo podesiti* k *u toj formuli tako da redom za* $t = 0, 50, 100, 150, \ldots$ s *dobijemo upravo navedene iznose koncentracije* c*, lakše je promotriti gornju diferencijalnu jednadžbu. Naime, ako je točna pretpostavka da se radi o reakciji drugog reda, onda ta jednadžba kaže da je u svakom trenutku trenutna brzina koncentracije razmjerna kvadratu koncentracije, odnosno da prosječna brzina promjene koncentracije (na dovoljno kratkim vremenskim intervalima) podijeljena s kvadratom koncentracije na početku pojedinog vremenskog intervala uvijek daje aproksimativno jednaku vrijednost.*

Dakle, ako je naša reakcija drugog reda, moralo bi biti $\frac{0{,}905-1{,}00}{50\cdot 1{,}00^2} \approx \frac{0{,}820-0{,}905}{50\cdot 0{,}905^2} \approx \frac{0{,}741-0{,}820}{50\cdot 0{,}820^2} \approx \ldots$ *. U našem slučaju dobivamo redom kvocijente* $-1{,}90 \cdot 10^{-3}$, $-2{,}07 \cdot 10^{-3}$, $-2{,}34 \cdot 10^{-3}$, *. . . , što, čini se, sugerira da se ne radi o reakciji drugog reda (no, uzmimo u obzir da su vremenski intervali od* 50 *sekundi dosta dugi te bi mjerenja obavljena u kraćim razmacima mogla dati drugačiji odgovor).*

Primjer 99. *Prema drugom Kirchhoffovom zakonu, zbroj svih napona u strujnoj petlji jednak je nuli. Za jednostavni* LR*-strujni krug (s jednim otpornikom konstantnog otpora* R[8] *i zavojnicom konstantnog induktiviteta* L[9]*) koji se napaja konstantnim naponom* E *drugi Kirchhoffov zakon poprima oblik*

$$L\dot{I} + RI = E, \quad I = I(t),$$

s početnim uvjetom

$$I(0) = 0.$$

[8] To dovodi do pada napona RI.

[9] To dovodi do pada napona $L\dot{I}$.

Lako se provjeri da je ovisnost jakosti struje I o vremenu t dana formulom

$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp(-Rt/L)\right).$$

Ponovimo bitno... Diferencijalne jednadžbe indirektno opisuju funkciju preko veze između nje i njenih derivacija. Funkcija je rješenje diferencijalne jednadžbe ako njenim uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo jednakost istinitu za sve vrijednosti varijable.

3.8 Neki problemi optimizacije u fizikalnoj kemiji

U fizikalnoj se kemiji u svrhu određivanja ravnotežnog stanja često određuju (globalni) minimumi funkcija koje su poznate pod nazivom termodinamički potencijali. S obzirom na to da su njihove formule, ako su uopće poznate, u pravilu „ružne", najčešće je jednostavnije primijeniti postupak određivanja ekstrema „pomoću tablice" nego pomoću druge derivacije (posebice zato jer potonji nikad ne daje odgovor o globalnim ekstremima).

Primjer 100. *Gibbsova energija G smjese dvaju enantiomera, u ovisnosti o množinskoj koncentraciji c jednog od njih, uz oznaku $x = \frac{c}{c^{\ominus}}$, opisana je formulom*

$$G = G^{\circ} + RTc\ln\frac{c}{c^{\ominus}} + RT\left(\frac{c_0}{c^{\ominus}} - \frac{c}{c^{\ominus}}\right)\ln\left(\frac{c_0}{c^{\ominus}} - \frac{c}{c^{\ominus}}\right).$$

Tu je c_0 (konstantan) zbroj koncentracija tih dvaju enantiomera. Vrijednost G° je također konstantna. Pri kojim koncentracijama enantiomera je (pri konstantnoj temperaturi) Gibbsova energija najmanja?

Očigledno je funkcija G, uz prikladne supstitucije, funkcija oblika

$$f(x) = a + bx\ln x + b(x_0 - x)\ln(x_0 - x).$$

Pritom $x = \frac{c}{c^{\ominus}}$ mora biti pozitivan, ali i manji od $x_0 = \frac{c_0}{c^{\ominus}}$ (i iz fizikalnih i iz matematičkih razloga). Dakle, domena od f je $\langle 0, x_0\rangle$. Deriviranjem dobijemo

$$f'(x) = b + \ln x - b - b\ln(x_0 - x) = b\ln\frac{x}{x_0 - x}.$$

Ta je derivacija definirana svuda gdje i f, pa će jedini kandidati za točke ekstrema biti stacionarne točke. Derivacija je 0 kad je $\frac{x}{x_0 - x} = 1$, dakle je *jedina stacionarna točka* $x^* = \frac{x_0}{2}$. *Za* $x < x^*$ *je* $f'(x) < 0$, *a za* $x > x^*$ *je* $f'(x) > 0$, *dakle* G *pada za koncentracije* c *manje od pola zbroja koncentracija i raste za veće, odnosno Gibbsova energija je minimalna kad su koncentracije oba enantiomera jednake i iznosi* $G(x^*) = G^\circ + RTc_0 \ln \frac{c_0}{2c^\ominus}$.

Sličan je i sljedeći primjer.

Primjer 101. *Pri dvofaznoj reverzibilnoj adijabatskoj kompresiji idealnog plina je iznos* pV^γ *konstantan. Pritom je* $\gamma = \frac{C_{p,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}$ *omjer izobarnog i izohornog molarnog toplinskog kapaciteta. Rad pri takvom procesu opisan je formulom*

$$w = nRT\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \left(\frac{p_2}{p}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 2\right).$$

Pritom su p_1 *i* p_2 *početni odnosno konačni tlak, a* n, R, T, *i* $\gamma \in \langle 0, 1\rangle$ *su konstante. Pri kojem je tlaku izvršeni rad minimalan?*

Imamo prvo (uz $a = nRT$, $g = \frac{\gamma-1}{\gamma}$*)*

$$w(p) = \frac{a}{g}\left(\frac{p^g}{p_1^g} + p_2^g p^{-g} - 2\right),$$

a domena funkcije w *je interval između* p_1 *i* p_2, *koji je podskup od* $\mathbb{R}^+$. *Deriviranjem dobijemo*

$$w'(p) = \frac{a}{g}\left(g\frac{p^{g-1}}{p_1^g} - gp_2^g p^{-g-1}\right).$$

Jedina stacionarna točka funkcije w *i stoga, jer je* w *derivabilna na domeni, jedini kandidat za točku minimuma je geometrijska sredina početnog i konačnog tlaka*

$$p^* = +\sqrt{p_1 p_2}.$$

Za $p < p^*$ *je* w' *negativan, a za* $p > p^*$ *pozitivan, pa se stvarno radi o točki globalnog minimuma.*

Problemi određivanja ekstrema i, ponekad, toka funkcije pojavljuju se i u kvantnoj teoriji i u statističkoj termodinamici.

Primjer 102. *U statističkoj termodinamici se vjerojatnost da se, pri temperaturi* T, *molekula plina mase* m *kreće brzinom iznosa* v *opisuje formulom*

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right).$$

To je formula Maxwellove (Maxwell-Boltzmannove) funkcije gustoće vjerojatnosti. Tu je M molarna masa razmatrane molekule, a R je opća plinska konstanta. Funkcija f je definirana za $v \geq 0$.

Često se u zadacima postavlja pitanje poput sljedećeg: Koja je najvjerojatnija brzina dušikove molekule pri temperaturi 20°C? Takva formulacija pitanja nije korektna. Naime, kad se opisuje vjerojatnost da neko opažanje poprimi neku vrijednost unutar nekog intervala realnih brojeva, onda je vjerojatnost pogađanja svakog konkretnog, pojedinačnog iznosa uvijek jednaka 0.[10] *Smisao funkcije gustoće vjerojatnosti je da za svaku brzinu v iznos $f(v)\Delta v$ (ako je Δv dovoljno malen) opisuje vjerojatnost da za neku molekulu plina njena brzina iznosi približno v. Korektno postavljen zadatak o maksimumu glasio bi: Odredite točku maksimuma v^* funkcije f za dušikove molekule pri temperaturi 20°C. Dobivena vrijednost v^* biti će brzina za koju je najvjerojatnije da slučajno odabrana dušikova molekula ima vrijednost blizu v^*.*

Označimo $\smiley = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}$, $\frownie = \frac{M}{2RT}$. Sad naša funkcija ima pregledniji oblik $f(v) = \smiley v^2 \exp(-\frownie v^2)$ te je

$$f'(v) = 2\smiley v \exp(-\frownie v^2)(1 - \frownie v^2).$$

Kritične točke su 0 (rub domene) i stacionarna točka $v_1 = +\sqrt{\frac{1}{\frownie}}$. Za v između 0 i v_1 je $f'(v) > 0$, a za $v > v_1$? je $f'(v) < 0$ pa je $v^* = v_1 = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ tražena točka globalnog maksimuma od f. Za dušik pri zadanoj temperaturi ($M = 28{,}0134\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, $T = 298{,}15\,\mathrm{K}$) ona iznosi $v^* = 420{,}70\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

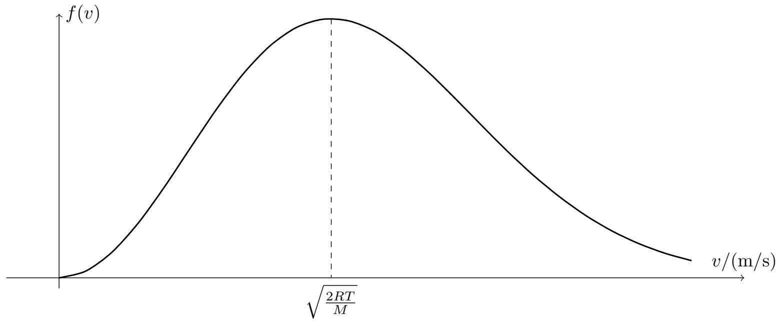
Zadatak 23. *Ispitajte tok Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti i uvjerite se da je njen graf uvijek oblika prikazanog na slici 3.12.*

3.9 Deriviranje implicitno zadanih funkcija

Već smo se upoznali s jednim načinom opisa krivulja u koordinatnoj ravnini: Krivulja kao graf realne funkcije jedne varijable. No, očito takav način nije dovoljan jer neke krivulje, primjerice kružnica u Kartezijevom koordinatnom sustavu, nisu grafovi funkcija jedne varijable.

Kako je općenito brzina tangencijalna na putanju, a i inače je problem određivanja tangente u točki krivulje zanimljiv, u ovom i sljedeća dva odjeljka bavit ćemo se pitanjem određivanja tangenti na krivulje u ravnini koje su zadane drugačijim jednadžbama od onih oblika $y = f(x)$.

[10] Više o tome u odjeljku 5.6.



Slika 3.12: Graf Maxwell-Boltzmannove funkcije gustoće vjerojatnosti.

Općenito krivulju u (koordinatnoj) ravnini možemo opisati jednom[11] jednadžbom oblika

$$F(x, y) = 0.$$

Tako je recimo uz $F(x, y) = x^2+y^2-1$ gornjom jednadžbom opisana jedinična kružnica sa središtem u ishodištu.

Vidimo da smo ovdje istakli ovisnost izraza F o dvije varijable, x i y, a budući smo rezultat $F(x, y)$ uspoređivali s brojem nula, znači da je $F(x, y)$ broj. Time pomalo zadiremo u jednu temu kojom ćemo se baviti u poglavlju 10.1, a to su skalarne funkcije više varijabli. No, za potrebe ovog poglavlja sasvim je dovoljno shvatiti da je gornjom jednadžbom opisana nekakva veza između x i y koja se može zapisati kao formula. U nekim slučajevima, recimo za $F(x, y) = x^2 + y$, moguće je iz te jednadžbe izraziti y i priču svesti na graf realne funkcije jedne varijable, no češće to nije moguće — već u slučaju jedinične kružnice $x^2+y^2 = 1$ imamo dva izbora: y zapisati kao $y = +\sqrt{x^2-1}$ ili kao $y = -\sqrt{x^2-1}$.

S druge strane, primijetimo da iako se iz jednadžbe $x^2 + y^2 = 1$ ne može jednoznačno izraziti y (tj. kružnica nije graf neke funkcije $y = f(x)$), dijelovi te krivulje jesu grafovi funkcija: Osim gornje dvije mogućnosti (uz domenu $[-1, 1]$) imamo beskonačno mnogo drugih. Zapravo, svaki luk te kružnice, ukoliko ne sadrži unutar sebe neku od točaka $(-1, 0)$ i $(1, 0)$, je graf neke funkcije. Preciznije, vrijedi[12]

Teorem 6 (Teorem o implicitnoj funkciji)**.** *Neka je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $F(x, y) = 0$ i neka je (x_0, y_0) neki par koji zadovoljava jednadžbu $F(x_0, y_0) = 0$ (tj. (x_0, y_0) je točka na toj krivulji).*

---

[11] Jedna, priznajmo: ne bilo kakva, jednadžba u ravnini, a ona je dimenzije 2, određuje „nešto" dimenzije $2 - 1 = 1$.

[12] Zapravo se ovdje radi o specijalnom slučaju općenitijeg teorema.

Označimo $G(y) = F(x, y)$ (dakle, privremeno smatramo x konstantom). Ako je $G'(y_0) \neq 0$ (tangenta u promatranoj točki krivulje nije vertikalna), onda neki dio krivulje oko točke (x_0, y_0) predstavlja graf neke realne funkcije jedne varijable $y = f(x)$.

U situaciji iz prethodnog teorema kažemo da je jednadžbom $F(x, y) = 0$ (oko bilo koje točke (x_0, y_0) u kojoj tangenta na tu krivulju nije vertikalna) implicitno zadana funkcija $y = f(x)$.

Primijetimo da teorem ne tvrdi da ćemo moći naći izraz za f, no za pitanje određivanja jednadžbe tangente na krivulju jednadžbe $F(x, y) = 0$ u njenoj točki (x_0, y_0) to nije niti potrebno — ta je jednadžba sigurno oblika $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ pa nam nije potrebna formula za f, štoviše niti za f', nego samo iznos $f'(x_0)$. Njega pak možemo odrediti tako da po x deriviramo jednadžbu $F(x, y) = 0$ koristeći standardna pravila deriviranja, a uzimajući u obzir da je y funkcija od x pa koristimo lančano pravilo, tj. kad god deriviramo y množimo derivaciju s y'. Takvo deriviranje se naziva implicitnim deriviranjem.

Primjer 103. *Izvedimo jednadžbu tangente na kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$ (u njenoj točki (x_0, y_0)).*

Ukoliko je tangenta u (x_0, y_0) vertikalna, a to se dešava samo u točkama $(x_0 \pm p, q)$, tangenta je pravac $x = x_0$.

Inače možemo uzeti da je u blizini od (x_0, y_0) luk kružnice funkcija $y = f(x)$, pa deriviranjem jednadžbe kružnice po x dobijemo

$$2(x - p) + 2(y - q)y' = 0,$$

te je

$$y' = -\frac{y - q}{x - p}, \quad x \neq p.$$

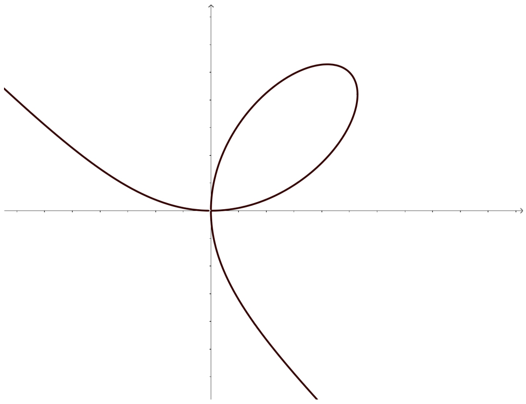
Slijedi da tražena jednadžba tangente za $x_0 \neq p$ glasi

$$(x - p)(x_0 - p) + (y - p)(y_0 - q) = r^2.$$

Primjer 104. *Jedna poznata implicitno zadana krivulja je Kartezijev list. Njegova je jednadžba*

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

s pozitivnim a. Lako je vidjeti da $(0, 0)$ zadovoljava jednadžbu Kartezijevog lista, dakle on prolazi kroz ishodište i to mu je jedino sjecište s koordinantim osima. Nadalje, nijedna točka Kartezijevog lista nije u trećem kvadrantu jer ako su $x, y < 0$ lijeva strana jednadžbe je negativna, a desna pozitivna. S obzirom na to da zamjenom x s y jednadžba ne mijenja oblik, zaključujemo



Slika 3.13: Kartezijev list.

da je simetričan s obzirom na pravac $y = x$. Kartezijev list prikazan je slikom 3.13.

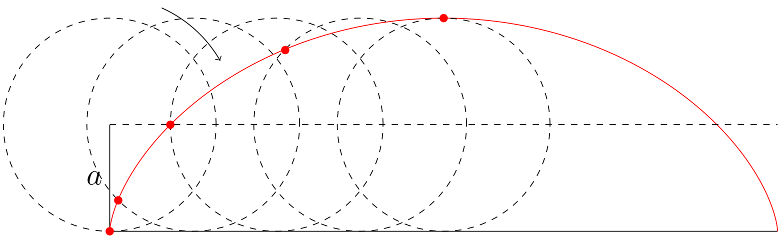
Želimo li odrediti njegovu tangentu u njegovoj točki (x_0, y_0), trebamo implicitno derivirati jednadžbu Kartezijevog lista. Dobijemo prvo $3x^2 + 3y^2y' = 3ay + 3axy'$, i odatle

$$y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax},$$

odnosno koeficijent smjera tangente je $\frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0}$. Vidimo da tangenta nije vertikalna ako je $y_0^2 \neq ax_0$ i tada joj je jednadžba

$$y - y_0 = \frac{ay_0 - x_0^2}{y_0^2 - ax_0} \cdot (x - x_0).$$

Ponovimo bitno... Jednadžbom oblika $F(x, y) = 0$ zadaju se krivulje u koordinatnoj ravnini. U okolini točaka te krivulje u kojima tangenta nije vertikalna dio krivulje je uvijek moguće shvatiti kao graf funkcije za koju onda kažemo da je implicitno zadana, a njenu derivaciju određujemo deriviranjem jednadžbe $F(x, y) = 0$ koristeći standardna pravila deriviranja. Pritom deriviranje izraza s y prema lančanom pravilu rezultira dodatnim faktorom y'.



Slika 3.14: Jedan luk cikloide.

3.10 Parametarski zadane krivulje

Drugi način kojim možemo opisati krivulje u ravnini[13] je parametarski: Za različite vrijednosti nekog parametra t, koji prolazi nekim intervalom realnih brojeva, eksplicitno definiramo koordinate krivulji pripadnih točaka $(x(t), y(t))$. To je jednostavnije fizikalno zamisliti ovako: Za svaki trenutak t iz nekog intervala bilježimo apscisu $x(t)$ i ordinatu $y(t)$ trenutne materijalne točke koja se giba po ravnini.

Primjer 105. *Putanja točke koja se giba u koordinatnoj ravnini tako da joj je u svakom trenutku (vrijeme mjerimo u sekundama) apscisa jednaka (po iznosu) kosinusu tog trenutka, a ordinata sinusu, je — po definiciji sinusa i kosinusa — jedinična kružnica.*

Općenito,

- kružnica polumjera r sa središtem u (p, q) ima parametarske jednadžbe $x(t) = p + r\cos t$, $y(t) = q + r\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$;
- Elipsa s poluosima a i b i središtem u ishodištu ima parametarske jednadžbe $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$.

Primjer 106. *Krivulja cikloida prati poziciju točke na rubu „kotača” polumjera a koji se kotrlja po pravcu (slika 3.14). Parametarske jednadžbe cikloide su*

$$x(t) = a(t - \sin t),$$
$$y(t) = a(1 - \cos t).$$

Neka je s $x = x(t)$ i $y = y(t)$ parametarski zadana krivulja, gdje je t iz intervala I. Što tada predstavljaju derivacije $\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$? U fizikalnoj interpretaciji krivulje kao trajektorije točke, u svakom trenutku t brojevi

[13] Definicija krivulje u prostoru bit će dana na str. 240.

$\dot{x}(t)$ i $\dot{y}(t)$ predstavljaju iznose horizontalne odnosno vertikalne komponente brzine u trenutku t. Uređeni par $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ predstavlja vektor brzine u tom trenutku. Iznos brzine je $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$. Koeficijent smjera tangente u istoj točki (a na toj tangenti leži vektor brzine) je $\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

Primjer 107. *Odredimo iznos brzine u točki cikloide. Imamo* $\dot{x}(t) = a(1 - \cos t)$ *i* $\dot{y}(t) = a \sin t$ *te je* $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = a\sqrt{2 - 2\cos t}$. *Budući da kosinus poprima vrijednosti između* -1 *i* 1, *ividmo da iznos brzine varira od* 0 *(kad god je* $\cos t = 1$, *tj. za* $t = 2k\pi$, *a to su točke za koje je* $y = 0$, *dakle točke cikloide koje su na* x*-osi) do* $2a$ *(kad god je* $\cos t = -1$, *dakle za* $t = (2k+1)\pi$, *a to su točke za koje je* $y = 2a$, *tj. točke maksimuma).*

Zadatak 24. *Provjerite da cikloida zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* $(\dot{y})^2 = \frac{2a-y}{y}$.

Napomenimo da svaki graf funkcije $y = f(x)$ možemo zapisati u parametarskom obliku ako uzmemo $t = x$ ako kao parametarske jednadžbe uzmemo $x(t) = t$ i $y(t) = f(t)$.

Primjer 108. *Jednadžbu parabole* $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, *možemo parametarski zapisati kao*

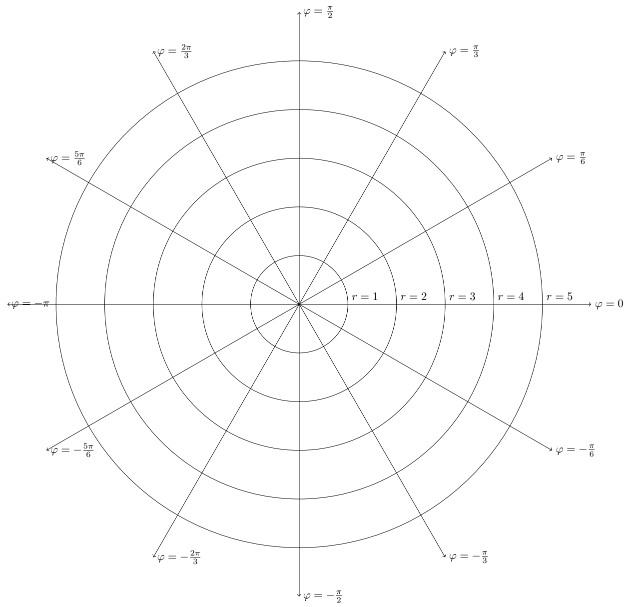
$$x = t, \quad y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ponovimo bitno... Parametarske jednadžbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in I)$ opisuju krivulju u Cartesiusovom koordinatnom sustavu koja se sastoji od točaka $(x(t), y(t))$. Koeficijent smjera tangente u promatranoj točki iznosi $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$.

3.11 Polarne koordinate u ravnini

Treći važan način opisa krivulja u ravnini je pomoću polarnih koordinata. U osnovi ovo je isto kao trigonometrijski odnosno eksponencijalni oblik kompleksnog broja (poglavlje 1.4), samo što točke ravnine sad ne interpretiramo kao kompleksne brojeve.

Polarni koordinatni sustav u ravnini je sustav u kojem se točke shvaćaju kao uređeni parovi dva broja, od kojih je prvi udaljenost r do referentne točke (ishodišta O), a drugi broj je kut φ, mjeren u pozitivnom smjeru (tj. obrnuto od kazaljke na satu) između spojnice točke s ishodištem i polarne osi. Polarna os je polupravac s početkom u ishodišu; on se obično poistovjećuje s pozitivnim dijelom osi apscisa. Polarni kut φ se najčešće gleda unutar



Slika 3.15: Polarni koordinatni sustav u ravnini.

raspona $\langle -\pi, \pi]$ ili $[0, 2\pi\rangle$ (jedan puni krug), ali načelno φ može biti bilo koji realan broj, dok r ne može biti negativan.

Na slici 3.15 prikazan i polarni analog mreže horizontalnih i vertikalnih pravaca u pravokutnom koordinatnom sustavu (ta je mreža zadana jednadžbama $x =$const., $y =$const., a ova s $r =$const., $\varphi =$const.). Naime, jednadžba, primjerice, $r = 2$ u polarnom koordinatnom sustavu predstavlja kružnicu polumjera 2 sa središtem u ishodištu, a jednadžba, primjerice, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vertikalni prema gore usmjeren polupravac. Želimo li u polarnom sustavu ucrtati npr. točku s koordinatama $(r, \varphi) = (2, \pi/3)$, nađemo kružnicu polumjera 2 oko ishodišta i na njoj točku koja se nalazi na polupravcu koji ima kut $\pi/3$ prema polarnoj osi.

Veza između polarnih i Kartezijevih koordinata u ravnini, uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i preklapanja polarne osi s pozitivnim dijelom x-osi, dana je formulama:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Primijetimo da zbog svojstava funkcije tangens isti kvocijent $\frac{y}{x}$ određuje dva moguća polarna kuta φ unutar jednog kruga, pa ovisno o predznaku od x odabiremo pravi.

Primjer 109. *Točka* $(-2, 1)$ *ima polarne koordinate* $r = \sqrt{5}$ *i* $\varphi = 180° - 26{,}57°$.

Tehnički gledano, zadavanje krivulja u polarnim koordinatama je vrlo slično shvaćanju krivulje kao grafa realne funkcije jedne varijable, samo umjesto $y = f(x)$ i shvaćanja para (x, y) kao točke u Kartezijevom koordinatnom sustavu imamo $r = f(\varphi)$ i shvaćanje para (r, φ) kao točke u polarnom koordinatnom sustavu. U oba slučaja je f realna funkcija jedne varijable. Ovaj prikaz može se poopćiti na krivulje koje su u polarnom koordinatnom sustavu implicitno zadane jednadžbom oblika $F(r, \varphi) = 0$.

Kad kažemo da je krivulja opisana u polarnom sustavu s $r = f(\varphi)$, želimo reći da se ta krivulja sastoji od točaka s koordinatama[14] $(\varphi, f(\varphi))$ za φ iz domene funkcije f.

Polarne koordinate su osobito zgodne za opis kružnice sa središtem u ishodištu: ona ima jednadžbu oblika

$$r = R,$$

gdje je R polumjer kružnice, jer udaljenost točke na kružnici do njenog središta ne ovisi o polarnom kutu φ[15].

Primjer 110. *Zadan je polupravac* o *s početkom u ishodištu* O*. Arhimedova spirala je putanja točke koja se od* O *jednoliko giba po* o*, ako pritom* o *jednoliko rotira oko* O*. Iz te definicije slijedi jednadžba Arhimedove spirale u polarnim koordinatama* $r = a\varphi$*.*

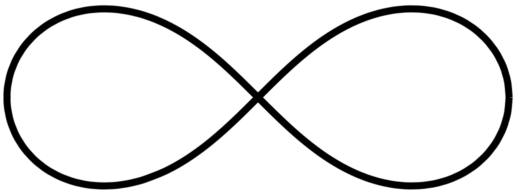
Zadatak 25. *Skicirajte nekoliko točaka hiperbolične spirale zadane jednadžbom* $r = 1/\varphi$*. Možete li naslutiti njen oblik?*

Zgodno je uočiti da vrijede sljedeća pravila za krivulje zadane s $r = f(\varphi)$ u polarnim koordinatama:

- Točke krivulje pojavljuju se samo unutar onih raspone kutova φ za koje je f nenegativna.

[14] Zgodno je uočiti da se i ovdje radi o vizualizaciji grafa realne funkcije jedne varijable, samo na nestandardan način: Skup svih parova $(X, f(X))$ kad je X element domene funkcije f je njen graf, koji uz interpretaciju X kao apscise i $f(X)$ kao ordinate točke u pravokutnom koordinatnom sustavu poprima standardni izgled grafa funkcije, dok uz interpretaciju X kao polarnog kuta i $f(X)$ kao udaljenosti od ishodišta poprima nestandardni oblik u polarnom koordinatnom sustavu. Primijetimo da ovaj drugi tip vizualizacije grafa funkcije ima smisla *samo* za nenegativne funkcije f.

[15] U duhu prethodne bilješke: graf konstantne funkcije prikazan standardno u Kartezijevom koordinatnom sustavu je pravac paralelan s osi apscisa, dok prikazan nestandardno u polarnom koordinatnom sustavu poprima izgled kružnice sa središtem u ishodištu.



Slika 3.16: Bernoullijeva lemniskata.

- Ako je f periodična s (ne nužno temeljnim) periodom 2π, krivulja je zatvorena. Ako je f periodična s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{n}$, gdje je n prirodan broj, onda je krivulja ne samo zatvorena, nego posjeduje o rotacijsku simetriju reda n.
- Ako je f parna funkcija, krivulja $r = f(\varphi)$ je simetrična s obzirom na polarnu os.
- Ako je za sve φ iznos $f(\varphi) \leq M$, onda se krivulja nalazi unutar kružnice polumjera M oko ishodišta.

Primjer 111. *Odredimo oblik Bernoullijeve lemniskate* $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$. *Primijetimo da je* $\cos(2\varphi)$ *parna funkcija kuta* φ. *Zbog parnosti je* $r(-\varphi) = r(\varphi)$, *primjerice za* $\varphi = \pi/6$ *i* $\varphi = -\pi/6$ *dobit ćemo isti* r. *Dakle, Bernoullijeva lemniskata je simetrična obzirom na horizontalu.*

Nadalje, $\cos(2\varphi)$ *je periodična funkcija od* φ, *temeljnog perioda* π. *Kako kut* π *opisuje pola kruga, slijedi da se udaljenosti* r *ponavljaju svakih pola kruga, dakle se krivulja nakon pola kruga zatvori i unutar punog kruga imamo dva njena zatvorena dijela (povezana rotacijskom simetrijom s kutom* $180°$.

Budući da je za smislenost jednadžbe $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$ *nužno da je* $\cos(2\varphi) \geq 0$, *zaključujemo da se unutar jednog punog kruga (kojeg možemo opisati primjerice s* $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$*) točke krivulje dobivaju samo ako je* $\cos(2\varphi) \geq 0$, *tj. za* $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\varphi}{4}$ *i za* $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\varphi}{4}$.

Ucrtavanjem nekoliko točaka lemniskate i koristeći gornje činjenice možemo zaključiti da je izgled Bernoullijeve lemniskate takav kako je prikazano slikom 3.16.

Zadatak 26. *Skicirajte grafove sljedećih krivulja zadanih u polarnim koordinatama:*

$$r = 1 + \cos\varphi,$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\vartheta,\ \vartheta \in [0, 2\pi\rangle,$$

$$r = \frac{\sqrt{10}}{4}(3\cos^2\vartheta - 1),\ \vartheta \in [0, \pi].$$

Skicirajte i grafove funkcija $|r|$ za gornja dva slučaja.

Ako deriviramo funkciju $r = f(\varphi)$ po φ, to je obično deriviranje funkcije jedne varijable. Primjerice, za $r = a\varphi$ je $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = a$. No, interpretacija iznosa derivacije ovdje ne odgovara nagibu tangente na promatranu krivulju jer je to pojam vezan za prikaz u Kartezijevom koordinatnom sustavu.[16] Želimo li odrediti taj koeficijent u točki (r_0, ϑ_0), pretpostavljajući standardnu vezu polarnog i Kartezijevog koordinatnog sustava, koeficijent dobijemo formulom

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0\mathrm{tg}\,\varphi_0}.$$

Tu formulu dobijemo ovako:

$$k = y'(x_0) = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}} = \frac{r'(\varphi_0)\sin(\varphi_0) + r_0\cos(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)\cos(\varphi_0) - r_0\sin(\varphi_0)} : \frac{\cos(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}.$$

Zadatak 27. *Odredite jednadžbu tangente (u Kartezijevim koordinatama) na krivulju*

$$r = \varphi\sin\varphi$$

u točki $(r_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ponovimo bitno... Polarne koordinate u ravnini opisuju točke s dva broja $r \geq 0$ i $\varphi \in \mathbb{R}$, od kojih prvi predstavlja udaljenost točke do ishodišta, a drugi kut spojnice točke s ishodištem prema polarnoj osi (polupravcu kroz ishodište). Jednadžba kružnice polumjera R sa središtem u ishodištu u polarnim koordinatama je $r = R$.

[16] Primijetimo da koeficijent smjera ima smisla samo ako se odnosi na pravac (ovdje: tangentu) u Kartezijevom koordinatnom sustavu, te gornja formula podrazumijeva da krivulju $r = f(\varphi)$ gledamo istovremeno u polarnom i Kartezijevom koordinatnom sustavu (sa zajedničkim ishodištem i polarnom osi koja se poklapa s pozitivnim dijelom osi apscisa).

Poglavlje 4

Limesi, asimptote i neprekidnost funkcija

4.1 Limesi funkcija

Zajedničko svim varijantama limesa (graničnih vrijednosti) funkcije je da se opisuju (procjenjuju) vrijednosti zadane funkcije u okolini neke vrijednosti njezine nezavisne varijable.

Primjer 112. *Promotrimo sliku 4.1. Za funkciju čiji graf je prikazan na toj slici vrijedi: Kad su x-evi blizu -3, vidljivo je da su $f(x)$-evi blizu -1, iako je $f(-3) = 3$. S druge strane, kad su x-evi blizu 0, $f(x)$-evi su blizu $-4 = f(0)$.*

Nadalje, vidljivo je da 1 nije u domeni funkcije jer ta apscisa nema pridružene točke na grafu, ali ipak možemo identificirati ordinatu negdje između -4 i -3 ($-\frac{11}{3}$) kao onu za koju vrijedi da kad je x blizu 1, $f(x)$-evi su blizu nje.

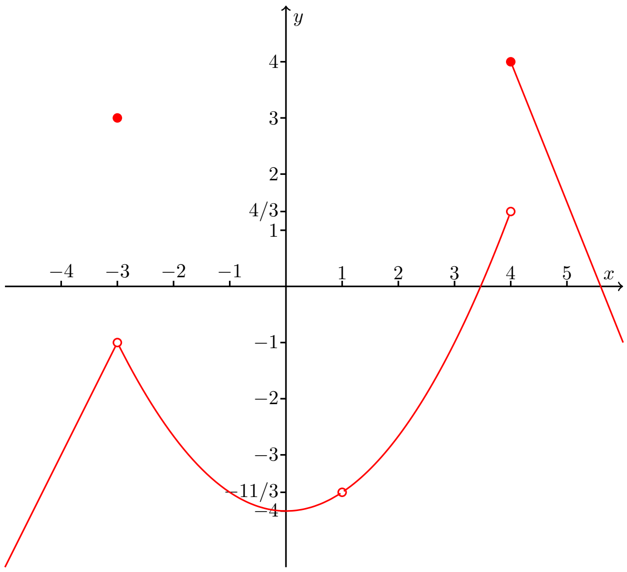
Pišemo:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -4,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{11}{3}.$$

Iz primjera 112 vidimo dvije stvari. Prvo, vrijednosti $f(x)$ oko neke točke c iz domene funkcije mogu i ne moraju biti bliske vrijednostima $f(c)$. Drugo, ponekad se ima smisla pitati kakvi su $f(x)$-evi za x-eve blizu nekog c čak i ako c nije u domeni od f.



Slika 4.1: Ilustracija uz primjer 112.

Primjer 113. *Činjenicu da što je množina n neke tvari bliža* 1 mol, to je njena masa m bliža njenoj molarnoj masi M zapisat ćemo formulom

$$\lim_{\frac{n}{\mathrm{mol}} \to 1} m = M.$$

Vidimo dakle da simbolika limesa ima opću strukturu oblika

$$\lim_{x \to c} f(x) = L. \tag{4.1}$$

Gornju formulu čitamo: Limes funkcije f kad x teži u c je L. Pritom je x nezavisna varijabla funkcije f (dakle, x je u domeni funkcije f), a simboli c i L mogu biti realni brojevi ili neki od dva simbola $\pm\infty$.

4.1.1 Limes funkcije u točki

Pozabavimo se prvo slučajem kad je u formuli 4.1 c realan broj. Oznaka $x \to c$ (čita se: „x teži k c") znači da se x približava k c. Pritom podrazumijevamo da x ne postiže vrijednost c ($x \neq c$), ali da može doći proizvoljno blizu c. Drugim riječima, ima smisla pitati se za iznos limesa od $f(x)$ kad x teži k c (u oznaci $\lim\limits_{x \to c} f(x)$) kad god domena od f sadrži dva intervala, jedan tipa $\langle a, c\rangle$ za neki $a < c$, a drugi tipa $\langle c, b\rangle$ za neki $b > c$ (kaže se i: f je definirana na nekom otvorenom intervalu oko c osim eventualno u c).

Primjer 114. *Za funkciju zadanu pravilom* $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ *ima smisla tražiti* $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$*, ali nema smisla tražiti* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$*, jer je (prirodna) domena te funkcije skup* $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$ *pa nezavisna varijabla* x *ostajući u domeni ne može doći proizvoljno blizu* 0*.*

Smisleni limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ može i ne mora imati određenu vrijednost L. Pod limesom koji postoji podrazumijevamo samo smisleni limes kojemu na mjestu L možemo napisati realan broj, dakle kod kojeg možemo reći da je što je x (apscisa) bliži c, iznos $f(x)$ (ordinata) je sve bliži broju L. Možemo dakle pojednostavljeno „definirati": Funkcija f ima limes $L \in \mathbb{R}$ u točki c ako što je njezina nezavisna varijabla bliža c, bez da pritom poprimi vrijednost c, vrijednost funkcije f postaje sve bliža L. Stoga iznos limesa $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ grafički određujemo tako da nađemo ordinatu L (ako se takva može naći) sa svojstvom da sve točke grafa od f za x blizu c (osim eventualno točke s apscisom c) imaju ordinate blizu L.

Precizna definicija limesa funkcije f u točki $c \in \mathbb{R}$ glasi:

Definicija 16 (Limes funkcije u točki)**.** *Neka je* f *definirana na nekom otvorenom intervalu* I *oko* c*, osim eventualno u* c*. Kažemo da je broj* L *je limes funkcije* f *u točki* c *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad je* $x \in I$ *i* $0 < |x - c| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - L| < \varepsilon$*. U tom slučaju pišemo* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$*.*

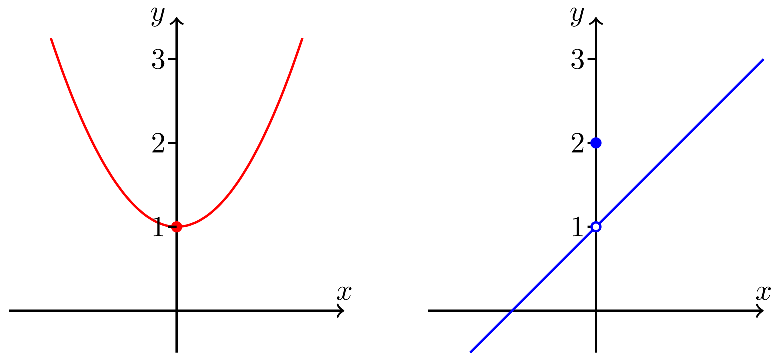
Podsjetimo se da je za dva realna broja x i y broj $|x - y|$ jednak njihovoj udaljenosti (na brojevnom pravcu). Smisao broja ε u prethodnoj definiciji je opis udaljenosti $|f(x) - L|$ od $f(x)$ do L, za koju želimo da može postati proizvoljno mala; zato u definiciji tražimo da „za svaki $\varepsilon > 0$", tj. za svaku zamislivu udaljenost od L možemo postići da udaljenost $|f(x) - L|$ bude manja od te udaljenosti ε. Pritom nas blizina $f(x)$ i L zanima samo za x blizu točke c u kojoj tražimo limes. To je opisano srednjim dijelom definicije „postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in I$ i $0 < |x - c| < \delta$": možemo naći $x \neq c$ blizu c (udaljen za manje od nekog δ od c) tako da je $f(x)$ na udaljenosti od L manjoj od na početku proizvoljno male zadane kao ε.

Dva korisna limesa funkcije u točki koja vrijedi znati, ali ih nećemo dokazivati, su

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dana funkcija ne može imati dva različita limesa u istoj točki:

Teorem 7 (Jedinstvenost limesa)**.** *Ako postoji broj* L *takav da je* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$*, onda je taj broj jedinstven.*



Slika 4.2: Primjer dviju funkcija s istim limesom, ali različitim vrijednostima u $c = 0$.

Dvije funkcije mogu u nekoj točki c imati različite vrijednosti, a ipak isti limes.

Primjer 115. *Pogledajmo sliku 4.2 koja prikazuje grafove funkcija zadanih formulama* $f(x) = x^2 + 1$ *(crveno) i*

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

(plavo). Sa slike je vidljivo da obje te funkcije imaju limes 1 *u točki* 0 *iako je* $f(0) = 1$*, a* $g(0) = 2$*.*

Jedan izuzetno važan slučaj limesa u točki je egzaktna definicija derivacije.

Definicija 17 (Derivacija)**.** *Ako je* c *točka domene funkcije* f *i postoji limes*[1]

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \tag{4.2}$$

onda se taj limes zove derivacijom funkcije f *u točki* c *i označava s* $f'(c)$ *ili* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$*.*

Funkcija koja je derivabilna u svakoj točki svoje domene zove se derivabilnom (ili diferencijabilnom) funkcijom.

Kad se govori o derivaciji funkcije, bez da naglasimo u kojoj točki, misli se na funkciju f' koja je definirana u svakoj točki c u kojoj je f derivabilna i koja svakoj takvoj točki pridružuje iznos derivacije $f'(c)$.

[1] Uočite da se radi o limesu koeficijenta smjera sekante kroz točke $(c, f(c))$ i $(x, f(x))$ u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Uočimo da je limes u definiciji derivacije (formula 4.2) uvijek tipa $\frac{0}{0}$, odnosno i brojnik i nazivnik u tom limesu teže u 0, osim ako brojnik $f(x) - f(c)$ ne teži u 0. To je slučaj kad u c imamo prekid ili vertikalnu tangentu, o čemu ćemo govoriti na str. **??**.

Već smo rekli, moguće je i da $\lim_{x\to c} f(x)$ ne postoji. O tome govorimo kad god u gornjim definicijama ne možemo dobiti *broj* L. Jedan od mogućih razloga takve pojave vidimo na slici 4.1. Za x-eve koji su blizu 4 a koji su malo manji od 4, ordinate točaka grafa su blizu $\frac{4}{3}$, dok su za x-eve blizu 4 a koji su malo veći od 4 ordinate točaka grafa blizu 4. Dakle, limes $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 ne postoji, no kad bismo se ograničili na približavanje x-eva k 4 samo s jedne (lijeve ili desne) strane mogli bismo identificirati po jednu ordinatu koja bi bila limes. Takve situacije opisuju se pomoću jednostranih limesa.

Dakle, ako promatramo što se dešava s $f(x)$ kad su x-evi sve bliži c, ali isključivo manji (ili isključivo veći) od c, govorimo o jednostranim limesima. Približavanje x-eva broju c slijeva označavamo s

$$x \to c-,$$

a približavanje x-eva broju c zdesna označavamo s

$$x \to c+\,.$$

Limes funkcije f u točki c slijeva je (ako takav postoji) broj L takav da što je x bliži c, a da je pritom $x < c$, to je $f(x)$ bliži L. Tada pišemo $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = L$. Analogno, limes funkcije f u točki c zdesna je (ako takav postoji) broj L takav da što je x bliži c, a da je pritom $x > c$, to je $f(x)$ bliži L. Tada pišemo $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = L$.

Tako npr. za funkciju čiji graf je prikazan na slici 4.1 pišemo

$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \frac{4}{3}, \quad \lim_{x\to 4+} f(x) = 4.$$

Formalnije:

Definicija 18 (Jednostrani limesi)**.** *Neka je f definirana na nekom intervalu $\langle a, c\rangle$. Kažemo da je*

$$\lim_{x\to c-} f(x) = L,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad je $x \in \langle a, c\rangle$ i $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Neka je f definirana na nekom intervalu $\langle c, b\rangle$. Kažemo da je

$$\lim_{x\to c+} f(x) = L,$$

ako za svaki $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad je* $x \in \langle c, b\rangle$ *i* $0 < |x - c| < \delta$ *vrijedi* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ukratko, definicija jednostranih limesa funkcije f u točki c je jednaka definiciji limesa u točki c, uz dodatak $x < c$ odnosno $x > c$.

Korisno je znati, a intuitivno je jasno da vrijedi:

Teorem 8. *Limes* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *postoji ako i samo ako postoje oba jednostrana limesa* $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ *i jednaki su. U tom slučaju vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c-} f(x) = \lim_{x\to c+} f(x).$$

Primjer 116. *Neka je*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}$$

Odredimo jednostrane limese u $c = 0$ *i* $c = -1$*. Imamo:*

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = (\text{pravilo za } x < 0 \text{ je } x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = (\text{za}\, x \approx 0 \text{ je } x^2 \approx 0) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = (\text{pravilo za } x > 0 \text{ je } e^x) = \lim_{x\to 0} e^x = (\text{za}\, x \approx 0 \text{ je } e^x \approx 1) = 1.$$

Dakle, ne postoji limes $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *jer se jednostrani limesi u nuli razlikuju. S druge strane,*

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = (\text{pravilo za } x < -1 \text{ je } x{+}2) = \lim_{x\to -1} (x{+}2) = (\text{za}\, x \approx -1 \text{ je } x{+}2 \approx 1) = 1;$$

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = (\text{pravilo za } x > -1 \text{ je } x^2) = \lim_{x\to -1} x^2 = (\text{za}\, x \approx -1 \text{ je } x^2 \approx 1) = 1.$$

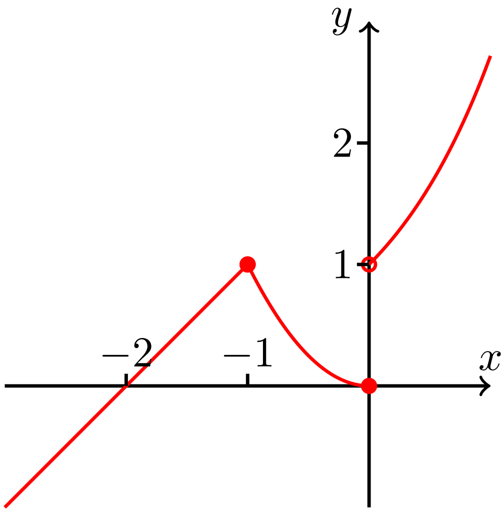
Dakle, postoji limes $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ *i jednak je* 1 *jer su jednostrani limesi u* -1 *jednaki. Odgovarajući graf prikazan je na slici 4.3.*

Primijetimo sad da se razlika u lijevom i desnom limesu može dogoditi u limesu iz definicije derivacije (formula 4.2).

Primjer 117. *Funkcija apsolutne vrijednosti* $f(x) = |x|$ *nije derivabilna u točki* $c = 0$*:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x},$$

što je slijeva jednako $\lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1$*, a zdesna* $\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$.



Slika 4.3: Ilustracija uz primjer 116.

Ukoliko je dakle $\lim_{x\to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = a \neq b = \lim_{x\to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, onda oko c graf funkcije izgleda kao da slijeva ima tangentu koeficijenta smjera a, a zdesna tangentu drugog koeficijenta smjera b, odnosno dobivamo graf sa „špicom” u točki c. Analogno zaključujemo i u slučaju kad se domena od f može rastaviti na disjunktne[2] intervale od kojih su jedan ili više njih poluotvoreni ili zatvoreni. Tada ni u kojem od „zatvorenih” rubova c derivacija ne postoji, jer u c jedan od jednostranih limesa od $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ nema smisla, pa ne može postojati limes iz definicije 4.2. Dakle, sad smo potvrdili da za dva od četiri slučaja navedena na str. 101 derivacija ne postoji.

Uz slučaj kad se lijevi i desni limes u točki c razlikuju, postoji još jedna situacija kad ne možemo naći broj L takav da je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, tj. kad taj limes ne postoji, a ipak postoji određena pravilnost ponašanja funkcije f blizu c.

Primjer 118. *Za vrijednosti varijable x blizu nule vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ postaju proizvoljno velike — ma koliko velik broj M zamislili, možemo naći $x \approx 0$ takav da je $\frac{1}{x^2} > 0$. Primjerice, za „preskočiti” vrijednost $M = 1000$ možemo uzeti $x = 0{,}01$ i dobit ćemo $f(x) = f(0{,}01) = 10000 > 1000 = M$. Analogno, za prirodne brojeve n limesi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$$

[2] Disjunktan znači da nema zajedničkih elemenata s drugima.

ne postoje, jer — kako je vidljivo sa slike 2.18 — ne možemo identificirati ordinatu (iznos) kojoj je $\frac{1}{x^n}$ sve bliži ako se x približava k 0.

U slučajevima poput gornjeg se na mjestu L u formuli 4.1 može pisati neki od simbola $+\infty$ ili $-\infty$. Primjerice, u situaciji iz prethodnog primjera ćemo pisati

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Odnosno, notacija

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

se koristi kad što je x bliži c, to iznos $f(x)$ postaje sve veći, i pritom nema ograničenja na porast tog iznosa — on može postati proizvoljno velik. Analogno,

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

znači da što je x bliži c, to iznos $f(x)$ postaje sve manji (negativan), i pritom nema ograničenja na pad tog iznosa — on može postati proizvoljno malen. Matematički precizna definicija beskonačnih limesa je

Definicija 19 (Beskonačni limesi u točki)**.** *Kažemo da je $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ vrijedi*

$$f(x) > M$$

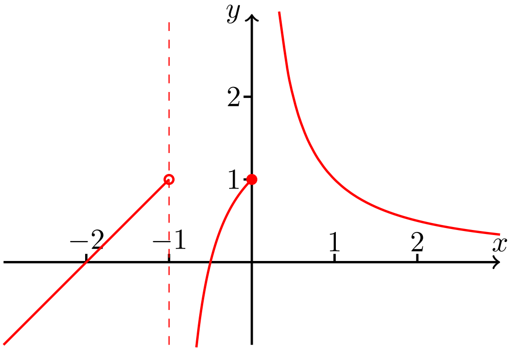
odnosno

$$f(x) < -M.$$

Ideja gornje definicije je: za proizvoljno zadanu granicu M vrijednosti za funkciju možemo naći interval oko c (širine po δ ulijevo i udesno) takav da uvrštavanje x-eva iz tog intervala u funkciju daje rezultate veće od M odnosno manje od $-M$.

Definiciju beskonačnog limesa u točki c uz ograničenje na $x < c$ ili $x > c$ lako prilagodimo u definiciju jednostranog beskonačnog limesa: $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$ ako što je x bliži c i pritom je $x < c$, to $f(x)$ postaje sve veći. Analogno se mogu opisati ostale tri definicije. Tako je recimo $x = 0$ vertikalna asimptota za $f(x) = \frac{1}{x}$ jer je $\frac{1}{x}$ jako velik kad je x blizu nule i pozitivan, a jako mali kad je x blizu nule i negativan: $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ i $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Formalno,

Definicija 20 (Jednostrani beskonačni limesi)**.** *Kažemo da je $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$ ako vrijedi: za svaki $M > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da kad god je $0 < |x - c| < \delta$ i $x < c$ vrijedi $f(x) > M$.*



Slika 4.4: Ilustracija uz primjer 119.

Kažemo da je $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = +\infty$ *ako vrijedi: za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad god je* $0 < |x - c| < \delta$ *i* $x > c$ *vrijedi* $f(x) > M$.

Kažemo da je $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = -\infty$ *ako vrijedi: za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad god je* $0 < |x - c| < \delta$ *i* $x < c$ *vrijedi* $f(x) < -M$.

Kažemo da je $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = -\infty$ *ako vrijedi: za svaki* $M > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da kad god je* $0 < |x - c| < \delta$ *i* $x > c$ *vrijedi* $f(x) < -M$.

Primjer 119. *Za funkciju* f *čiji graf je prikazan slikom 4.4 imamo*

$$\lim_{x \to -1-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to -1+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty.$$

Primijetimo da iz primjera 119 vidimo dvije bitne stvari: Prvo, moguće je da funkcija posjeduje vertikalnu asimptotu $x = c$ čak i ako je c element domene od f (u primjeru 119 $c = 0$ je u domeni, a imamo vertikalnu asimptotu $x = 0$). Drugo, moguće je da pravac $x = c$ bude vertikalna asimptota za funkciju samo s jedne strane (u primjeru 119 to vrijedi i za $x = 0$ i za $x = 1$).

Usporedbom s ranijim opisom pojma vertikalnih asimptota vidimo da kao definiciju vertikalne asimptote sad možemo dati sljedeću:

Definicija 21 (Vertikalne asimptote). *Pravac* $x = c$ *je vertikalna asimptota za funkciju* $y = f(x)$ *ako je bar jedan od jednostranih limesa* $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ *jednak* $+\infty$ *ili* $-\infty$.

Primjer 120. *Vrijedi*

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Od beskonačnih limesa, korisno je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ paran}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a}{x^n} = -\infty \quad (n \in \mathbb{N}, n \text{ neparan}, a > 0),$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \quad (a > 1).$$

Također vrijedi:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

(posljednji limes je definicija broja e).

Vrijedi i: Ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq 0$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{0} = \infty \quad (\text{za } a \neq 0).$$

Ovo naravno ne znači da je sad dozvoljeno dijeljenje s nulom, već oznaka $\frac{a}{0}$ znači da se broj blizu a dijeli brojem koji je blizu 0, ali *nije* jednak 0.

Primjer 121. *Uzmimo funkciju pravila $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i izračunajmo za nju limes iz definicije derivacije:*

$$\lim_{x\to c} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{c}}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{x - c}{(x - c)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2})} = \lim_{x\to c} frac\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2}$$

(u prvom koraku smo kvocijent proširili s $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xc} + \sqrt[3]{c^2}$, a u drugom smo smjeli kratiti jer gledamo limes kad $x \to c$, dakle $x \neq c$).

Za $x = 0$ gornji limes je tipa $\frac{1}{0}$, dakle je limes beskonačan: Funkcija trećeg korijena nije derivabilna u 0. Intuitivno, tu bi koeficijent smjera tangente bio „beskonačan”, odnosno – kao što već znamo – u 0 funkcija trećeg korijena ima vertikalnu tangentu.

Kao u primjeru vrijedi i općenito: Ako je limes iz definicije derivacije (formula 4.2) beskonačan, funkcija nije derivabilna u promatranoj točki (i ondje ima vertikalnu tangentu).

Nadalje, ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. To se kratko zapisuje s

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

(za $a \in \mathbb{R}$). I ovo ne znači da je ∞ broj s kojim možemo dijeliti, već oznaka $\frac{a}{\infty}$ znači da broj blizu a dijelimo jako velikim ili jako malim brojem.

Kod racionalnih funkcija potencijalne vertikalne asimptote odnosno beskonačni limesi funkcije mogu se pojaviti u „rupama u domeni" (nultočkama nazivnika). Već smo rekli da će se vertikalna asimptota $x = c$ kod racionalne funkcije pojaviti točno u onim slučajevima u kojima je nakon skraćivanja svih zajedničkih faktora brojnika i nazivnika broj c nultočka nazivnika, ali ne i brojnika. Skraćivanje[3] faktora $(x - c)$ iz brojnika i nazivnika pod limesom je dozvoljeno jer u limesu $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ podrazumijevamo da je x blizu c, ali $x \neq c$ te je $x - c \neq 0$. Stoga je skraćivanje zajedničkih faktora brojnika i nazivnika prvi korak u izračunavanju limesa racionalne funkcije u točki c koja je nultočka nazivnika.

Primjer 122. *Izračunajmo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)}.$$

Zajednički faktor brojnika i nazivnika je x, a on pri izračunavanja limesa u točki 0 nije jednak nuli. Stoga nakon skraćivanja dobivamo

$$\frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)}.$$

Brojnik tog izraza za $x \approx 0$ je približno jednak $(0-1)(0+2)^2 = -4$, tj.

$$\lim_{x\to 0}(x-1)(x+2)^2 = -4.$$

Nazivnik $x(x+5)$ postaje sve bliži nuli što je x bliži nuli, tj.

$$\lim_{x\to 0} x(x+5) = 0.$$

Stoga imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{\text{limes tipa } \frac{-4}{0}\right\} = \infty$$

[3]Skraćivanje razlomka je dijeljenje brojnika i nazivnika istim brojem, dakle možemo skratiti samo one faktore za koje smo sigurni da nisu jednaki nula.

i to $+\infty$ slijeva (za $x < 0$, a blizu 0, je $x(x+5)$ negativno, a i brojnik je negativan: -4), a $-\infty$ zdesna (za mali $x > 0$ je $x(x+5)$ pozitivno). Kratko ovaj račun obično pišemo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)(x+2)^2}{x^2(x+5)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x(x+5)} = \left\{ \frac{-4}{0} \right\} = \pm\infty.$$

Ukoliko je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, onda je $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limes tipa $\frac{0}{0}$ koji spada u tzv. neodređene izraze. To znači da limes $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ovisno o funkcijama f i g može poprimiti različite vrijednosti.

Primjer 123. *Limesi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x}$ i $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$ su oba tipa $\frac{0}{0}$. Za prvi imamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$$

(jer je $x+1$ blizu 1 kad je x blizu 0), a za drugi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

(jer je $\frac{1}{x+1}$ blizu $\frac{1}{2}$ kad je x blizu 1). Vidimo dakle da limesi tipa $\frac{0}{0}$ mogu davati različite konačne rezultate.

Vidimo dakle da limesi tipa $\frac{0}{0}$ mogu davati različite konačne rezultate. Takve tipove limesa zovemo neodređenim izrazima. Osim $\frac{0}{0}$ u neodređene izraze spadaju i $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, 1^∞, 0^∞, $+\infty - \infty$.

Ponovimo bitno... Limes funkcije f u nekoj točki c (koju gledamo na osi apscisa) je, ako postoji, broj L (kojeg vidimo na osi ordinata) takav da što je x bliži c, to je $f(x)$ bliži L. Pritom je nebitno je li f definirana u c (ali mora biti definirana oko c), a ako i jest, moguće je i da je $f(c) = L$ i da $f(c) \neq L$.

U slučajevima da definiciju limesa funkcije u točki c možemo zadovoljiti uz dodatni uvjet da gledamo samo $x < c$ ili samo $x > c$, govorimo o jednostranom — lijevom odnosno desnom — limesu funkcije u točki c. Ponekad oni postoje i različiti su; tada funkcija nema limes u točki c. Ako i lijevi i desni limes postoje i podudaraju se, onda postoji i „obični" obostrani limes i jednak im je (i obrnuto, ako znamo da limes od f u c postoji, onda postoje i oba jednostrana limesa u c i jednaki su mu).

Isto je reći da funkcija f ima vertikalnu asimptotu $x = c$ i da je bar jedan od jednostranih limesa od f u točki c beskonačan. Kažemo da je limes od f u c beskonačan ako što je x bliži c (bez da je pritom $x = c$) vrijednosti $f(x)$ postaju proizvoljno velike ili proizvoljno male.

Derivacija funkcije f u točki c definirana je s

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

4.1.2 Limes funkcije u beskonačnosti

Razmotrimo sad slučaj kad je u formuli 4.1 c neki od simbola $-\infty$ ili $+\infty$. Tada govorimo o limesu u beskonačnosti. Ako je $c = \infty$ ili $c = -\infty$, onda približavanje $x \to c$ shvaćamo kao neograničeni rast odnosno pad nezavisne varijable („što je x veći/manji”), dakle domena od f mora sadržavati neki interval tipa $\langle -\infty, b\rangle$ za prvi, odnosno $\langle a, \infty\rangle$ za drugi slučaj. Drugim riječima, formulom

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \tag{4.3}$$

bilježimo rečenicu „što je x veći, i pritom postaje neograničeno veći, to su vrijednosti $f(x)$ bliže broju L”. Analogno

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \tag{4.4}$$

znači „što je x manji, i pritom postaje neograničeno malen (negativan!), to su vrijednosti $f(x)$ bliže broju L”.

Primjer 124. *Limes* $\lim_{x \to +\infty} \ln(-x)$ *nema smisla jer domena od* $f(x) = \ln(-x)$ *ne sadrži nikoji interval tipa* $\langle a, +\infty\rangle$.

Primjer 125. *Tijekom kemijske reakcija množinska koncentracija c bilo kojeg njezinog produkta neće neograničeno rasti, nego će se s vremenom sve više približavati nekoj ravnotežnoj vrijednosti* c_∞*: Što je vrijeme t veće (bez ograničenja!), to će c biti bliži* c_∞*. Pišemo:*

$$\lim_{t \to \infty} c = c_\infty.$$

Precizna definicija za slučaj $c = \pm\infty$ glasi:

Definicija 22 (Limes funkcije u beskonačnosti)**.** *Neka je* f *definirana na nekom intervalu* $\langle -\infty, b\rangle$. *Kažemo da je broj L je limes funkcije* f *kad* x *teži* *u* $-\infty$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $M > 0$ *takav da kad je* $x < b$ *i* $x < M$ *vrijedi* $|f(x) - L| < \varepsilon$. *U tom slučaju pišemo* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Neka je f *definirana na nekom intervalu* $\langle a, +\infty\rangle$. *Kažemo da je broj* L *je limes funkcije* f *kad* x *teži u* $+\infty$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $M > 0$ *takav da kad je* $x > a$ *i* $x > M$ *vrijedi* $|f(x) - L| < \varepsilon$. *U tom slučaju pišemo* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

U oba dijela gornje definicije smisao broja ε je da opisuje udaljenost $f(x)$ do L za koju želimo da bude proizvoljno mala, a da pritom možemo s x „otići dovoljno daleko" lijevo odnosno desno (što je regulirano postojanjem broja M). Možemo to izreći i drugačije: Za proizvoljno zadanu maksimalnu grešku aproksimacije ε možemo naći vrijednost varijable (M odnosno $-M$) počevši od koje (udesno odnosno ulijevo) aproksimacija vrijednosti $f(x)$ s L daje grešku manju od zadane.

Kao i za limese u točki, teorem 7 vrijedi i ako je $c = \pm\infty$. Ako pak usporedimo upravo definirane limese u beskonačnosti s ranijim opisom horizontalnih asimptota, vidimo:

Definicija 23 (Horizontalne asimptote)**.** *Pravac* $y = L$ *je horizontalna asimptota lijevo odnosno desno za funkciju* $y = f(x)$ *ako vrijedi* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *odnosno* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -L$.

Od limesa u beskonačnosti, korisno je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} C = C,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n > 0),$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1),$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a > 1).$$

Nadalje, kod racionalnih funkcija lako je odrediti limese u beskonačnosti. Ideja postupka je da kad je x jako velik (ili jako mali) onda u iznosu polinoma dominira vodeći član (primjerice: ako je $f(x) = x^2 + 3x + 2$ onda za jako velike x imamo $x^2 >> 3x + 2$ te je $f(x) \approx x^2$). Stoga imamo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Posljednji limes je 0 ako $n < m$, a za $n = m$ je jednak $\frac{a_n}{b_m}$. Stoga sve racionalne funkcije kojima nazivnik nema manji stupanj od brojnika imaju horizontalne asimptote (i to istu lijevo i desno). Ako je nazivnik većeg stupnja od brojnika ta asimptota je x-os (pravac $y = 0$), a ako su brojnik i nazivnik istog stupnja horizontalna asimptota je $y = \frac{a_n}{b_m}$ (kvocijent vodećih koeficijenata brojnika i nazivnika).

Kao i limesi u nekoj točki $c \in \mathbb{R}$, limesi u beskonačnosti također ne moraju postojati. Jedan takav slučaj su beskonačni limesi u beskonačnosti. Ako $f(x)$ postaje proizvoljno velik (malen) što je x veći, pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ odnosno $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Analogno, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ znači da što je x manji, to je $f(x)$ veći i postaje proizvoljno velik, a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ znači da što je x manji, to je $f(x)$ manji i postaje proizvoljno malen.

Od beskonačnih limesa u beskonačnosti, dobro je zapamtiti sljedeće:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty \qquad \text{za paran } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \pm\infty \qquad \text{za neparan } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (0 < a < 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \quad (a > 1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \quad (0 < a < 1).$$

Može se dogoditi i da se limes funkcije u beskonačnosti ne može opisati niti kao beskonačan.

Primjer 126. *Limesi* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ *ne postoje: očito nisu beskonačni jer kosinus poprima samo vrijednosti između* -1 *i* 1*, a zbog periodičnosti se ne može identificirati nikoji broj kojem bi se vrijednosti* $\sin x$ *približavale za jako velike ili jako male vrijednosti varijable.*

Ponovimo bitno... Broj L je limes funkcije f u beskonačnosti ($+\infty$ odnosno $-\infty$) ako što je varijabla x veća odnosno manja, to je $f(x)$ bliži L. Postojanje limesa u beskonačnosti istoznačno je s postojanjem horizontalne asimptote.

4.1.3 Svojstva limesa

Osim jedinstvenosti, limesi imaju još neka bitna svojstva koja olakšavanju njihovo izračunavanje.

Intuitivno je jasno da ako su za x blizu broja c (ili pak postaje jako velik odnosno mali, tj. $x \to \pm\infty$) vrijednosti $f(x)$ blizu L_1, a $g(x)$ blizu L_2, da je onda i $f(x) \pm g(x)$ blizu $L_1 \pm L_2$, $f(x)g(x)$ blizu $L_1 L_2$ i $\frac{f(x)}{g(x)}$ blizu $\frac{L_1}{L_2}$ (ovo posljednje naravno samo za $L_2 \neq 0$ jer su iznosi limesa realni brojevi za koje nije dozvoljeno dijeljenje s nulom). Kao i obično u matematici, svojstva na koja nas intuicija navodi da bi morala vrijediti moraju se dokazati. Vjerovali ili ne, gornja svojstva se stvarno mogu dokazati te vrijedi

Teorem 9. *Neka postoje* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, *gdje je* $c \in \mathbb{R}$, $c = +\infty$ *ili* $c = -\infty$. *U tom slučaju postoje i limesi* $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \pm g(x))$ *i* $\lim\limits_{x\to c} (f(x) \cdot g(x))$ *te vrijedi:*

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x),$$

$$\lim_{x\to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x),$$

i

$$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

Nadalje, ako je $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, *postoji i* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i jednak je* $\dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.

Zapravo, ta smo svojstva već koristili u opisu postupka za računanje limesa racionalnih funkcija, a slijedi još jedan primjer.

Primjer 127. *Treba izračunati* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x^2 e^x}{\cos x}$. *Kad je* x *blizu* 0, *kosinus mu je blizu* 1 *te je limes nazivnika* 1. *Kad je* x *blizu nule, onda su* x *i* x^2 *blizu nule, a* e^x *je blizu* 1 *te je brojnik blizu* $0 + 0 \cdot 1$ *odnosno limes brojnika je* 0 *(kad* x *teži u nulu). Stoga je*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 e^x}{\cos x} = \frac{0 + 0 \cdot 1}{1} = 0.$$

Primjer 128. *Limes* $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ *ne postoji (u užem smislu, tj. ne može se odrediti ni kao jednostrani ni kao beskonačni limes) jer kad* $x \to 0\pm$, *onda* $\frac{1}{x} \to \pm\infty$, *a znamo da ne postoji limes funkcije sinus u beskonačnosti (primjer 126).*

Primjer 129. *Izvedimo svojstvo aditivnosti derivacija iz definicije derivacije. Neka su f i g derivabilne u c te neka je $h = f + g$ tj. za sve x je $h(x) = f(x) + g(x)$. Tada iz definicijske formule 4.2 imamo:*

$$h'(c) = \lim_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) + g(x) - f(c) - g(c)}{x - c} =$$

$$= \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} = f'(c) + g'(c),$$

tj. pokazali smo da je $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.

Zadatak 28. *Dokažite svojstvo homogenosti, tj. formulu $(Af)'(c) = A \cdot f'(c)$ (A je konstanta, f je funkcija derivabilna u c, a Af je funkcija definirana s $(Af)(x) = A \cdot f(x)$).*

Kako bismo izračunali limes $\lim_{x \to 0} \sqrt{\sin x}$? Nije primjenjivo nijedno od četiri pravila iz gornjeg teorema jer u teoremu nije navedeno pravilo za određivanje limesa kompozicije funkcija. No, opet će se potvrditi ono na što nas intuicija navodi: kad je x blizu 0, onda je $\sin x$ blizu 0 te je $\sqrt{\sin x}$ blizu $\sqrt{0} = 0$, tj. naš limes iznosi nula. Može se dokazati da vrijedi

Teorem 10. *Neka postoje limes $\lim_{x \to c} f(x) = L$ i $\lim_{y \to L} g(y) = L'$. Tada je*

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(\lim_{x \to c} f(x)) = L'.$$

Pomoću gornja dva teorema mogu se izračunati mnogi limesi, no problemi nastaju ako pravila ne primjenjujemo u skladu s gornjim teoremima, tj. ne pazimo na uvjet o postojanju limesa.

Primjer 130. *Neka je $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \frac{1}{\sin x}$. Za $x \to \pm\infty$ ne postoji niti limes $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ niti $\lim_{x \to \pm\infty} g(x)$, ali postoji $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} 1 = 1$.*

Dakle, moguće je da postoji limes produkta iako pojedinačni limesi ne postoje (jedan ili oba). Isto vrijedi i za ostala svojstva iz teorema.

Ponekad indirektno možemo zaključiti koliki je limes, primjenom tzv. „teorema o sendviču". On u bîti kaže da ako znamo da je za x-eve iz nekog intervala oko c

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

i ako znamo da je

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L,$$

onda je i

$$\lim_{x \to c} g(x) = L.$$

Primjer 131. *Znamo da je za svaki* x

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

Stoga je i za sve $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Kako je $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ *slijedi i da je*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

Analogno bi se vidjelo da je i

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cos x}{x} = 0.$$

Primjer 132. *Izračunajmo* $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ *i* $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$*:*

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot1^2 = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \{y = \ln(1+x)\} = \lim_{y\to0}\frac{y}{e^y-1} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)\cdot(-1)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2}.$$

Ponovimo bitno... Limes zbroja/razlike/produkta/kvocijenta funkcija jednak je zbroju/ razlici/produktu/kvocijentu limesa tih funkcija (ako oni postoje).

4.1.4 Kose asimptote

Ponekad se za graf funkcije može uočiti pravac koji nije horizontalan, a ima svojstvo da se graf uz njega priljubljuje sve više što su vrijednosti varijable veće ili manje. Tada govorimo o kosoj asimptoti.

Kada će pravac $y = kx + l$ biti kosa asimptota za funkciju $y = f(x)$, recimo desno? Za početak, f mora biti definirana za proizvoljno velike vrijednosti varijable x i ne smije postojati desna horizontalna asimptota (ne smije postojati $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$). Želimo da bude $f(x) \approx kx + l$ za jako velike x, tj. da bude $\frac{f(x)}{x} \approx k + \frac{l}{x} \approx k$ i $f(x) - kx \approx l$ za jako velike x. Stoga imamo definiciju:

Definicija 24 (Kose asimptote)**.** *Pravac $y = kx+l$ je kosa asimptota desno za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Analogno, pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota lijevo za funkciju $y = f(x)$ ako vrijedi

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

i

$$l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

Primjer 133. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$. Tada je*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-5x} = 1,$$

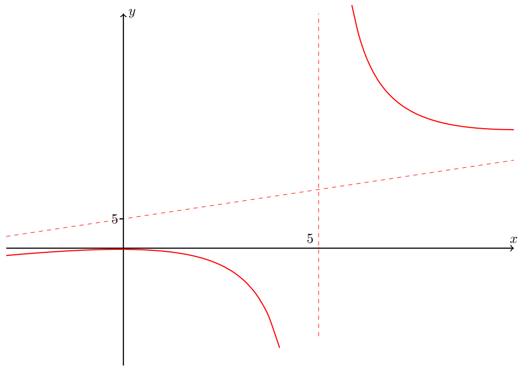
dakle $k = 1$. Sad možemo dalje računati

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-5} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x+1}{x-5} = 5,$$

tj. $l = 5$. Stoga je pravac $y = x + 5$ kosa asimptota (i lijevo i desno) za funkciju f, što je ilustrirano slikom 4.5.

Napomenimo da se može desiti da se može izračunati k, ali ne može izračunati l. U tom slučaju naravno nema kose asimptote.

Za kraj priče o ponašanju funkcija u beskonačnostima, zaključimo: horizontalne i kose asimptote, ako postoje, omogućuju aproksimaciju funkcije konstantnom odnosno afinom funkcijom. Na jednoj (lijevoj ili desnoj) strani funkcija može imati najviše jednu asimptotu, dakle ne može imati istovremeno horizontalnu i kosu. S druge strane, lijeva i desna asimptota ne moraju se poklapati te imamo sljedeće moguće kombinacije:



Slika 4.5: Primjer funkcije ($f(x) = \frac{x^2+1}{x-5}$) s kosom asimptotom ($y = x + 5$).

- Funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu za obje strane;
- Funkcija ima samo jednu horizontalnu ili kosu asimptotu, ali samo lijevo ili samo desno, a na drugoj strani nema asimptota;
- Funkcija ima dvije asimptote, jednu lijevu i jednu desnu, a svaka je ili horizontalna ili kosa.

Ponovimo još jednom: horizontalne i kose asimptote nema smisla tražiti ako funkcija nije definirana za proizvoljno male vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti lijevu) odnosno za proizvoljno velike vrijednosti varijable (tada nema smisla tražiti desnu). Specijalno, za dva slučaja najčešća u primjenama, ako je domena funkcije segment, ona ne može imati ni horizontalnih ni kosih asimptota, a ako je definirana na $\langle 0, +\infty\rangle$ ili na $[0, +\infty\rangle$, onda može imati samo desnu horizontalnu ili kosu asimptotu.

Ponovimo bitno... Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota funkcije f ako što je x veći i/ili manji, to je $f(x) - kx$ bliži broju l. Postojanje kose asimptote lijevo odnosno desno znači da se za jako male odnosno velike vrijednosti x funkcija f može aproksimirati afinom funkcijom $y = kx + l$.

4.1.5 L'Hôpitalovo pravilo

Čest problem pri izračunavanju limesa su tzv. neodređeni izrazi $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Već smo rekli da se ti izrazi nazivaju neodređenima jer daju različite konačne rezultate ovisno o funkcijama zbog kojih su se pojavili te nije moguće direktno zaključiti koji je konačni rezultat limesa. U neodređene izraze spadaju i $0\cdot\infty$, $+\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, 0^∞ i još neki, no većina se uz određene manipulacije mogu svesti na tipove $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Iako se u nekim slučajevima, primjerice kod računanja limesa racionalnih funkcija, dosta lako „ispetljati" iz problema i izračunati takve limese do kraja, ipak se često radi o dosta mukotrpnim računima koji se obično mogu izbjeći korištenjem L'Hôpitalovog pravila[4]

Teorem 11 (L'Hôpitalovo pravilo)**.** *Neka su oba limesa* $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *i* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ *jednaka* 0 *ili su pak oba beskonačna (pri čemu je* $c\in\mathbb{R}$ *ili* $c=\pm\infty$*). Ako postoji limes* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *ili ako je jednak* $\pm\infty$*, te ako je* $g'(x)\neq 0$ *za* x*-eve iz nekog intervala oko* c*, onda vrijedi*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primjer 134. *Limes* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\ln x}{x-1}$ *je tipa* $\frac{0}{0}$*. Primjena L'Hôpitalova pravila daje:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{x}}{1}=2.$$

U teoremu treba naglasiti uvjet „ako postoji" jer postoje situacije kad limes $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, ali ipak postoji limes $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Primjer 135. *Pokušaj izračunavanja limesa*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

(koji je tipa $\frac{\infty}{\infty}$*) l'Hôpitalovim pravilom daje:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(1+\cos x).$$

Posljednji limes ne postoji iako postoji $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ *i jednak je* 1 *(jer za jako velike* x *dodavanje sinusa - koji je broj između* -1 *i* 1 *- nema bitan utjecaj na limes pa vrijedi* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x}=1$*).*

[4] Pravilo je nazvano po francuskom matematičaru Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpitalu (1661.–1704.), autoru prvog udžbenika matematičke analize u kojem se nalazi i ovo pravilo. Pravilo otkrio je zapravo otkrio švicarski matematičar Johann Bernoulli (1667.–1748.). Prezime l'Hôpital se često piše i l'Hospital, kako se pisalo u 17. i 18. stoljeću, te se pravilo nalazi i pod nazivom l'Hospitalovo pravilo.

Također, treba paziti na to da se l'Hôpitalovo pravilo smije primjenjivati samo na limese kvocijenata funkcija koji su tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Primjer 136. *Imamo* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-5} = -\dfrac{1}{4}$ *jer je 1 u prirodnoj domeni funkcije kojoj računamo limes. Da smo išli primijeniti l'Hôpitalovo pravilo bez provjere uvjeta da se radi o limesu tipa* $\frac{0}{0}$ *ili* $\frac{\infty}{\infty}$ *(a ovdje to nije slučaj) dobili bismo krivi rezultat* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-5} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{1} = 2.$

Pomoću l'Hôpitalova pravila možemo pokazati da eksponencijalna funkcija s bazom $a > 1$ brže raste od svake potencije tj. da vrijedi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1). \tag{4.5}$$

Primjer 137. *Molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena opisan je formulom*

$$C_{V,\mathrm{m}} = \frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}.$$

Pritom su R, h, k i ν konstante. Želimo li opisati molarni toplinski kapacitet pri vrlo niskim temperaturama, treba izračunati $\lim\limits_{T\to(0\,\mathrm{K})+} C_{V,\mathrm{m}}$ *tj.*

$$\lim_{T\to(0\,\mathrm{K})+} \left(\frac{5}{2}R + \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) =$$

$$\frac{5}{2}R + \lim_{T\to(0\,\mathrm{K})+} \left(\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/(kT)}}{\left(e^{h\nu/(kT)}-1\right)^2}\right) = \diamondsuit$$

Radi lakšeg računanja označimo $x = \frac{h\nu}{kT}$*. Ako* $T \to (0\,\mathrm{K})+$*, onda* $x \to +\infty$*. Stoga je*

$$\diamondsuit = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \textit{(L'Hôpital)} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+x^2)e^x}{2e^x(e^x-1)} =$$

$$= \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+x^2}{2e^x-2} = \textit{(L'Hôpital)} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{2+2x}{2e^x} =$$

$$= \textit{(L'Hôpital)} = \frac{5}{2}R + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2e^x} = \frac{5}{2}R + 0 = \frac{5}{2}R.$$

Dakle, pri vrlo niskim temperaturama molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena iznosi približno $\frac{5}{2}R$*.*

Zadatak 29. *Kakav je molarni toplinski kapacitet dvoatomnog idealnog plina konstantnog volumena za jako visoke temperature?*

Zadatak 30. *Ovisnost koncentracije c produkta C reakcije $A + B \longrightarrow C$ o vremenu u slučaju reakcije drugog reda (parcijalno prvog obzirom i na A i na B) dana je formulom*

$$c(t) = ab\frac{1 - e^{(b-a)kt}}{a - be^{(b-a)kt}}.$$

Pritom je a početna koncentracija reaktanta A, b je početna koncentracija reaktanta B, a k je koeficijent brzine reakcije (ima pozitivan iznos i jedinicu $\mathrm{L\,mol\,s^{-1}}$*). Odredite ravnotežnu koncentraciju c_∞ produkta C , tj. koncentraciju kad „reakcija ode do kraja”. Uputa: Odvojeno promatrajte slučajeve $a > b$, $a = b$ i $a < b$.*

Ponovimo bitno... L'Hôpitalovo pravilo često pomaže kod traženja limesa kvocijenta dviju funkcija, ukoliko je taj limes tipa $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Prema tom pravilu, ako umjesto početnog limesa izračunamo limes kvocijenta derivacija polaznih funkcija, taj limes jednak je početnom limesu.

4.2 Neprekidnost funkcija

Na početku ovog poglavlja, gledajući sliku 4.1, vidjeli smo smo da kad je točka c u kojoj tražimo limes funkcije f u domeni te funkcije, limes u c može i ne mora biti jednak vrijednosti funkcije u njoj. Tako smo sa slike 4.1 utvrdili da je $\lim_{x\to-3} f(x) = -1 \neq 3 = f(-1)$ te da $\lim_{x\to 4} f(x)$ ne postoji, dok je $f(4) = 4$. S druge strane, $\lim_{x\to 0} f(x) = -4 = f(0)$. Posljednja situacija je češća, a i ljepša — sa slike vidimo da pri crtanju grafa prolaskom kroz točku s apscisom 0 ne moramo podići ruku s papira odnosno da graf „prirodno” prolazi kroz odgovarajuću točku. Takvo svojstvo zove se neprekidnost u točki. Preciznije:

Definicija 25 (Neprekidnost)**.** *Funkcija f je neprekidna u točki c svoje domene ako vrijedi*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c). \tag{4.6}$$

Ako je c u domeni od f i $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$, onda kažemo da f ima prekid u c (c je točka prekida funkcije f).

Funkciju koja je neprekidna u svakoj točki svoje domene jednostavno zovemo neprekidnom funkcijom.

Kao što vidimo iz definicije, ako u c imamo prekid funkcije f, onda je $\lim\limits_{x\to c} f(x)-f(c) \neq 0$, pa u definiciji derivacije brojnik ne teži u 0 (vidi str. 141). Stoga funkcije ne posjeduju derivacije u svojim točkama prekida. Time smo konačno do kraja argumentirali da $f'(c)$ ne postoji točno u slučajevima koje smo naveli na str. 101. Vidimo dakle da bez neprekidnosti nema derivabilnosti, odnosno preciznije

Teorem 12. *Ako funkcija ima derivaciju u nekoj točki, onda je i neprekidna u toj točki.*

Obrat ne mora vrijediti, tj. postoje neprekidne funkcije koje nemaju derivaciju u nekoj točki. Najjednostavniji primjer je funkcija apsolutne vrijednosti, a malo kompliciraniji je 140.

Uobičajeno je točke prekida identificirati kao apscise mjesta na kojima smo pri crtanju grafa morali podići ruku s papira. Primijetimo da se pitanje (ne)prekidnosti funkcije odnosi samo na elemente domene. Dakle, funkcija sa slike 4.1 nema prekid u točki 1 jer tamo nije definirana.

Primjer 138. *Funkcija* $f(x) = \frac{1}{x}$ nema prekid u 0 iako pri crtanju grafa kod apscise 0 moramo podići olovku s papira. Naime, 0 nije u domeni pa je besmisleno pitanje ima li ili nema f prekid u 0.

S obzirom na definiciju, postoje dva moguća uzroka prekida funkcije f u nekoj točki c iz domene:

- Ne postoji limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ pa ne može biti jednak $f(c)$. Primjer takvog prekida je u točki $c = 4$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom 4.1. Ako pritom postoje jednostrani limesi $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$, onda govorimo o prekidu prve vrste ili skoku, a ako bar jedan od ta dva jednostrana limesa ne postoji (ili je beskonačan), govorimo o prekidu druge vrste ili bitnom prekidu;

- Limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ postoji, ali je različit od $f(c)$. Primjer takvog prekida imamo u točki $c = -3$ za funkciju čiji graf je prikazan slikom **??**. U ovakvom slučaju govorimo o uklonjivom prekidu jer bismo promjenom definicije $f(c)$ iz trenutne vrijednosti u vrijednost $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ dobili funkciju neprekidnu u c.

Sve elementarne funkcije su neprekidne u svim točkama svoje domene.

Primjer 139. *Funkcija iz primjera 59 ima prekid samo u* 0*, kako je vidljivo i na slici 2.41. Naime, za* $x < 0$ *njeno pravilo je elementarna funkcija, a tako i za* $x > 0$*, dakle je jedina moguća točka prekida* 0.

Vrijednost funkcije u 0 *je* $f(0) = e^0 = 1$*. Odredit ćemo lijevi i desni limes u* 0*:*

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0} e^x = 1,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

(za $x < 0$ *pravilo je* $f(x) = e^x$ *pa kad računamo limes slijeva gledamo limes od* e^x*, dok je za* $x > 0$ *pravilo* $f(x) = x^2$ *pa za limes zdesna gledamo limes od* x^2*). Vidimo da se lijevi i desni limes u* 0 *razlikuju, a* 0 *je u domeni, pa funkcija ima prekid u* 0*.*

Funkcija zadana po dijelovima može biti neprekidna, kao što je to primjerice funkcija apsolutne vrijednosti. Štoviše, funkcija zadana po dijelovima može biti i derivabilna.

Primjer 140. *Drugi primjer neprekidne funkcije zadane po dijelovima je* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana s*

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0, \\ x + 1, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - (x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

I za $c = 0$ *i za* $c = 1$ *podudaraju se* $f(c)$*,* $\lim_{x\to c-} f(x)$ *i* $\lim_{x\to c+} f(x)$ *(provjerite to sami), dakle je funkcija neprekidna, što je vidljivo i iz njenog grafa na slici 4.6.*

No, u 0 *je ova funkcija i derivabilna, iako se tamo mijenja pravilo:*

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

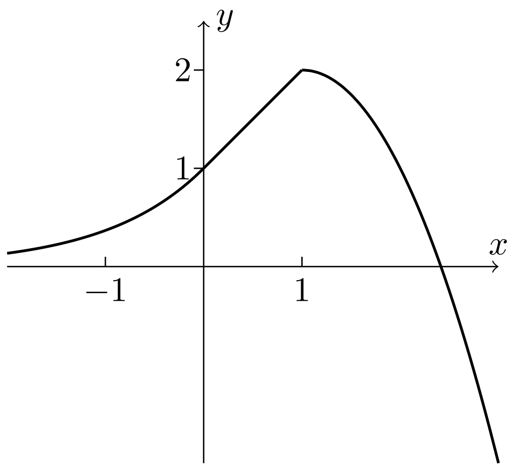
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1) - 1}{x} = 1,$$

dakle je $f'(0) = 1$*. U* 1 *funkcija nije derivabilna – provjerite to sami.*

Posljedica svojstava limesâ je da se neprekidne funkcije „pristojno” ponašaju kad ih kombiniramo. Preciznije:

Teorem 13. *Ako su funkcije* f *i* g *neprekidne u točki* c*, onda su i njihov zbroj, razlika i produkt funkcije neprekidne u* c*. Ako je uz to i* $g(c) \neq 0$*, onda je i kvocijent* f/g *također funkcija neprekidna u točki* c*.*

Ako je funkcija f *neprekidna u točki* c *i funkcija* g *neprekidna u točki* $f(c)$*, onda je i kompozicija* $g \circ f$ *neprekidna u* c*.*



Slika 4.6: Primjer funkcije zadane po dijelovima koja je neprekidna i svuda osim u jednoj točki derivabilna.

Najvažniji teorem o neprekidnim realnim funkcijama jedne varijable je Bolzano-Weierstraßov teorem 5, koji nam je bio temelj postupka za određivanje globalnih ekstrema za neprekidne funkcije zadane na segmentu: Neprekidna funkcija kojoj je domena segment $[a, b]$ postiže svoj globalni minimum i globalni maksimum i sve međuvrijednosti između minimuma i maksimuma, a jedine moguće točke promjene predznaka funkcije su njezine nultočke.

Velika većina funkcija koje se pojavljuju u primjenama matematike u kemiji i fizici su neprekidne. Ipak, postoje i neke iznimke. One se najčešće pojavljuju u obliku skokova, tj. prekida prve vrste jer se obično radi o nagloj promjeni vrijednosti neke fizikalne ili kemijske veličine. Najtipičnije točke prekida imamo na granicama faza odnosno pri faznoj tranziciji.

Primjer 141. *Promotrimo ovisnost gustoće ρ neke čiste tvari o temperaturi T (pri konstantnom tlaku). Tada ρ ima dvije točke prekida (skoka), i to pri temperaturama ledišta i vrelišta (T_f i T_b). Skok (pad gustoće) pri T_f (razlika lijevog i desnog limesa od ρ u T_f) je u pravilu manji od onog pri T_b. Unutar pojedine faze se gustoća mijenja neprekidno u ovisnosti o T.*

Primijetimo ovdje da zbog mogućnosti supostojanja dviju faza ovdje nemamo pravu funkciju — temperaturama T_b i T_f pridružene su dvije gustoće koje odgovaraju dvjema supostojećima fazama promatrane tvari pri toj temperaturi.

Gotovo sve funkcije koje susrećemo u primjenama su na većem dijelu domene neprekidne i imaju najviše konačno mnogo prekida. Takve funkcije zovemo po dijelovima neprekidne funkcije.

Ponovimo bitno... Funkcija je neprekidna u nekoj točki svoje domene ako je u toj točki svejedno računamo li limes ili ju uvrstimo u funkciju. U suprotnom govorimo o točki prekida. Nema smisla reći da je c točka prekida funkcije f (niti da je u c funkcija f neprekidna) ako c nije u domeni od f. Neprekidne funkcije su one koje su neprekidne u svim točkama domene. U primjenama najčešća vrsta prekida je skok, tj. prekid kod kojeg lijevi i desni limes u točki prekida postoje, ali su različiti. Svaka derivabilna funkcija je neprekidna, ali obrat ne mora vrijediti.

Poglavlje 5

Integralni račun za realne funkcije jedne varijable

5.1 Neodređeni integrali

Često je poznata derivacija funkcije, a nije poznata „početna” funkcija. Primjeri takvih situacija su brojni, a određivanje pozicije u ovisnosti o vremenu ako je poznata ovisnost brzine o vremenu je zasigurno najpoznatiji takav primjer. Stoga je prirodno pitanje: Možemo li odrediti funkciju ako joj je poznata derivacija?

Definicija 26 (Antiderivacija (primitivna funkcija))**.** *Antiderivacija (primitivna funkcija) zadane funkcije $F : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I otvoren interval) je svaka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa svojstvom $f'(x) = F(x)$ za sve $x \in I$.*

Primjer 142. *Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $F(x) = 3x^2$ kao antiderivaciju ima npr. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. No, uočimo da su primjerice i $f_2(x) = x^3 - 10$ i $f_3(x) = x^3 + \pi$ također antiderivacije od F.*

Teorem 14. *Ako funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ ima antiderivaciju, onda ih ima beskonačno mnogo. Ako je f jedna antiderivacija od F, onda su sve antiderivacije od F dane formulom $f_C(x) = f(x) + C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta.*

Prvi dio dokaza gornjeg teorema je lagan: Ako je f antiderivacija od F, tj. $f' = F$, onda je zbog aditivnosti deriviranja $(f_C)'(x) = (f(x) + C)' = f'(x) + C' = F(x)$ za sve $x \in I$ pa je i f_C antiderivacija od F.

Ni drugi dio nije težak, a oslanja se na jednu posljedicu Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti koja kaže: Ako je derivacija neke funkcije jednaka nuli na nekom intervalu, ta je funkcija na tom intervalu konstantna.

Sad imamo sljedeći tok zaključivanja: Tvrdimo da F nema drugih antiderivacija osim onih oblika f_C. Neka je onda g bilo koja druga antiderivacija od F (dakle, znamo $f' = g' = F$ i f, g i F su definirane na istom intervalu I). Tvrdimo da je g oblika f_C za neko C. Pogledajmo funkciju $g-f$. Njena derivacija za $x \in I$ je dana s $(g-f)'(x) = g'(x)-f'(x) = F(x)-F(x) = 0$. Prema gore spomenutom, zaključujemo da je $g-f$ konstantna funkcija na I, tj. da je $(g-f)(x) = C$ za sve $x \in I$. Dobili smo što smo htjeli: $g(x) = f(x)+C$ za sve $x \in I$, i dokaz je završen.

Fizikalno interpretirano, postoji beskonačno mnogo funkcija pozicije ako nam je jedini poznati podatak o gibanju iznos brzine u svakom trenutku — to je razlog zašto se u takvim fizikalnim primjenama obično zadaje i početni uvjet koji omogućuje odabir točno jedne od svih antiderivacija.

Primjer 143. *Ako je brzina čestice pri slobodnom padu dana s $v_z(t) = -gt$, onda se lako vidi da je pozicija opisana sa $z(t) = -\frac{g}{2}t^2+C$ za neku konstantu C. Ukoliko znamo da je početna pozicija (u trenutku $t=0$) bila $z(0)=h$, onda mora biti $z(0) = 0+C = C = h$ pa je antiderivacija (funkcija pozicije) koja zadovoljava taj početni uvjet jedinstveno određena sa $z(t) = h - \frac{g}{2}t^2$.*

Prije nego uvedemo pojam neodređenog integrala, upozorimo na jedan detalj iz definicije antiderivacije. U definiciji se zahtijeva da su funkcija i njena antiderivacija zadane na istom otvorenom intervalu. Uvjet otvorenosti je posljedica potrebe za deriviranjem antiderivacije (kako znamo, derivacije nisu definirane u „zatvorenim rubovima" intervala). No, ovdje je bitniji naglasak na *istom* intervalu.

Primjer 144. *Uzmemo li funkciju $F(x) = \frac{1}{x}$, lako bismo pogodili da su njene antiderivacije oblika $f_C(x) = \ln x + C$. No, $\ln$ je definiran na $I = \langle 0, +\infty\rangle$, a F za prirodnu domenu ima $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$!*

Ovdje se ne radi samo o tome da želimo da po mogućnosti f i F imaju istu domenu (izgleda kao da smo pri antideriviranju „izgubili" pola domene). Da smo F gledali kao funkciju zadanu na I, onda bi f_C stvarno bile sve njene antiderivacije.

Kako je F zadana na uniji dva intervala, ona na svakom od njih ima drugačiju formulu antiderivacije. Na $I' = \langle -\infty, 0\rangle$ jedna antiderivacija od F bila bi zadana formulom $g(x) = \ln(-x)$ jer je $g'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ za $x \in I'$. Dakle, možemo definirati da su antiderivacije od F (na njezinoj prirodnoj domeni) dane s

$$f_C(x) = \begin{cases} C + \ln x, & x > 0 \\ C + \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$$

ili kraće zapisano, antiderivacije su dane s

$$f_C(x) = C + \ln|x|, \quad x \in I' \cup I = \mathbb{R}.$$

Sad možemo definirati prvi tip integrala.

Definicija 27 (Neodređeni integral)**.** *Neodređeni integral funkcije F je skup svih njenih antiderivacija. Oznaka neodređenog integrala funkcije F, ako joj je varijabla označena s x, je*

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcija F zove se podintegralna funkcija.

Temeljem gornjeg teorema i definicije, trebali bismo pisati: $\int F(x)\,\mathrm{d}x = \{f_C : C \in \mathbb{R}\}$. Iz praktičnih razloga uobičajen je jednostavniji zapis:

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Primjer 145. *Pišemo npr.*

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + C.$$

Tablicu neodređenih integrala sad možemo shvatiti kao tablicu derivacija sa zamijenjenim stupcima, uz dodavanje konstante integriranja C.

$F(x)$	$\int F(x)\,\mathrm{d}x$
K	$Kx + C$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$

Napomena 10. *U slučaju neodređenog integrala konstantu integriranja je nužno pisati; u suprotnom ne samo da se ne poštuje smisao neodređenog integrala kao skupa svih antiderivacija, nego se mogu dobiti i krivi rezultati. Primjerice, ako je ubrzanje u svakom trenutku dano s $a_z(t) = -g$, onda je brzina opisana kao neodređeni integral $v_z(t) = \int a_z(t)\,\mathrm{d}t = -gt + C$. Ako bismo ovdje izostavili konstantu integriranja dobili bismo $v_z(t) = -gt$, što je točno samo ako je početna brzina nula.*

Sjetimo li se da je deriviranje imalo svojstvo linearnosti (derivacija zbroja funkcija je zbroj derivacija i derivacija konstante pomnožene s funkcijom je ta konstanta pomnožena s derivacijom te funkcije) te uzeši u obzir da je neodređeni integral definiran preko antiderivacije, lako se vidi da vrijedi

Teorem 15 (Linearnost neodređenog integrala). *Neka su funkcije F i G zadane na istom intervalu te K neka konstanta. Tada vrijedi:*

$$\int (F(x) + G(x))\, \mathrm{d}x = \int F(x)\, \mathrm{d}x + \int G(x)\, \mathrm{d}x$$

(aditivnost integriranja) i

$$\int KF(x)\, \mathrm{d}x = K \int F(x)\, \mathrm{d}x$$

(homogenost integriranja).

Pod tabličnim integriranjem podrazumijeva se integriranje temeljem osnovne tablice integrala uz eventualno korištenje svojstva linearnosti i transformacija podintegralne funkcije formulama iz elementarnije matematike.

Primjer 146. *Odredimo* $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x$. *Znamo da je* $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ *pa imamo*

$$\int \cos^2 \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

Napomena 11. *Iz prethodnog je vidljivo da su u određenom smislu deriviranje i integriranje međusobno inverzne operacije. Preciznije, vrijedi*

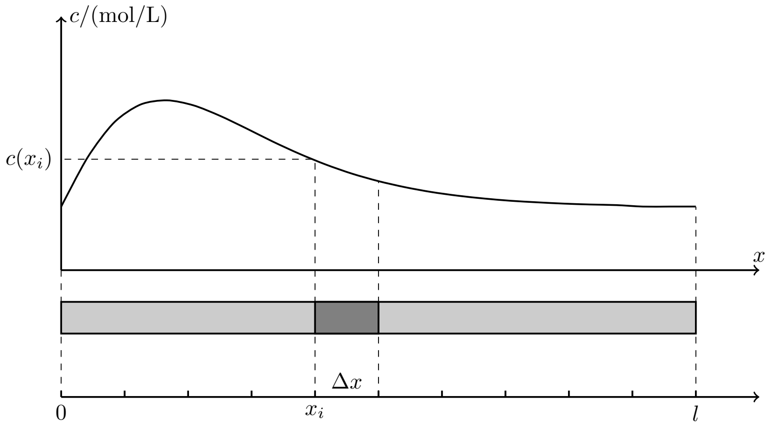
$$\left(\int F(x)\, \mathrm{d}x\right)' = F(x),$$

$$\int f'(x)\, \mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Uz oznaku deriviranja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *gornje formule poprimaju još lakše pamtljive oblike*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\, \mathrm{d}x\right) = F(x),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = f(x) + C.$$



Slika 5.1: Problem množine tvari u cijevi uzdužno varirajuće koncentracije (primjer 147).

Ponovimo bitno... Antiderivacija funkcije je funkcija koja derivirana daje zadanu funkciju; obje moraju biti definirane na istom intervalu. Ako funkcija posjeduje antiderivaciju f, onda su sve njene antiderivacije oblika f plus konstanta te ih ima beskonačno mnogo. Neodređeni integral funkcije je skup svih njenih antiderivacija.

5.2 Određeni integrali

Promotrimo prvo dva naizgled različita problema.

Primjer 147. *Ravna cijev, duljine l i površine presjeka A, napunjena je nekom otopinom poznate množinske koncentracije c. Kolika je množina otopljene tvari koja se nalazi u cijevi?*

Ako bi otopina u cijevi posvuda imala jednaku koncentraciju, zadatak je elementarno-aritmetički: $n = cV = cAl$.

No, što ako c varira ovisno o poziciji uzduž cijevi? (Napomenimo ovdje da bi se mogao razmatrati i problem slučaja kad c varira ne samo uzdužno, nego u sva tri prostorna smjera, no to bi bio problem vezan za višestruke integrale, o kojima će biti riječi u poglavlju **??***).*

Ovdje dakle uzimamo da je za poziciju $0 \leq x \leq l$ (gledanu od jednog kraja cijevi) koncentracija otopljene tvari jednaka $c(x)$. Kako sad dobiti n?

Aproksimativno, mogli bismo napraviti ovo: Podijelimo cijev na puno kratkih dijelova duljine Δx. Volumen svakog takvog dijela je onda $A\Delta x$. Ako *svaki takav dio počinje pozicijom x_i (slika 5.1), procijenimo koncentraciju unutar tog dijela tom dijelu sa $c(x_i)$ (alternativno, s bilo kojim $c(x)$ za $x_i \leq x \leq x_i + \Delta x = x_{i+1}$). S obzirom na to da su svi dijelovi jednako dugi, ako početak označimo s x_0 (dakle, $x_0 = 0$), očito je $x_i = i\Delta x$, dakle je $c(x_i) = c(i\Delta x)$.*

Stoga množinu možemo procijeniti s

$$n \approx A\Delta x \sum_i c(x_i) = A\Delta x \sum_i c(i\Delta x).$$

Kad bismo zamislili da cijev dijelimo na sve tanje dijelove, dakle kad bi pustili da $\Delta x \to 0+$, onda je intuitivno jasno da gornja aproksimacija postaje sve točnija, tj. gornja suma bi se približavala točnoj množini:

$$n = \lim_{\Delta x \to 0+} \left(A\Delta x \sum_i c(i\Delta x) \right).$$

Primjer 148. *Kolika je površina koju s x-osi zatvara graf pozitivne neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, a koja je omeđena vertikalama $x = a$ i $x = b$?*

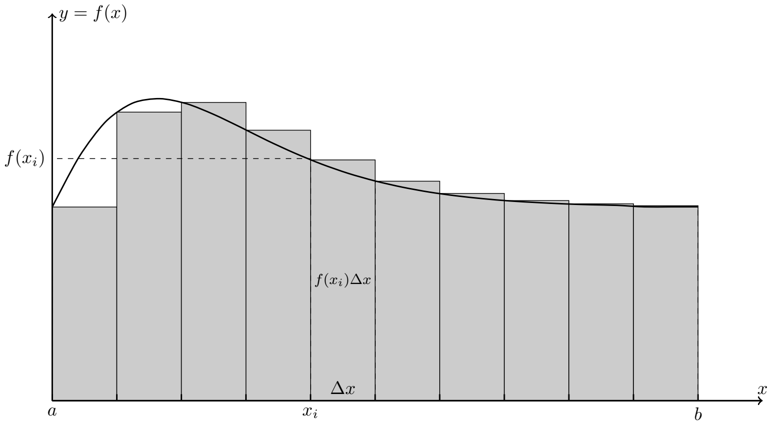
Ako f nije afina, nema jednostavnog načina za izračunavanje takve površine. Aproksimativno, mogli bismo interval $[a, b]$ podijeliti na puno dijelova širine Δx i ukupnu površinu aproksimirati zbrojem površina pravokutnika širine Δx i visine $f(x_i)$ (slika 5.2). Kao u primjeru 147, uz zamjenu Ac s f i n s P, dobili bismo

$$P = \lim_{\Delta x \to 0+} \left(\Delta x \sum_i f(x_i) \right).$$

Definicija određenog integrala temelji se na ideji iz prethodna dva primjera. Najjednostavniji pristup je preko problema površine, slično kao u prethodnom primjeru. Određeni integral određen je ne samo funkcijom, nego i segmentom na kojem funkciju promatramo. Pritom je bitno istaknuti da je cilj moći integrirati što širu klasu funkcija, a u gornjim primjerima imali smo samo pozitivne i neprekidne funkcije. Dok su neprekidne funkcije u pravilu dovoljne za primijenjene situacije, pozitivne nikako to nisu. Ovdje ćemo dati dva pristupa. Čisto geometrijski, koji je u osnovi dovoljan za sve primjene integrala u kemiji i fizici (nešto poput intuitivnih „definicija" derivacije na početku poglavlja 3.1) i egzaktan matematički pristup.

Uvedimo prvo oznaku određenog integrala. Ona je slična oznaci neodređenog integrala, uz isticanje raspona nezavisne varijable na koji se odnosi integral:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$



Slika 5.2: Površina kao limes zbroja površina pravokutnika.

je određeni integral podintegralne funkcije F od a do b, dakle za $x \in [a, b]$. Segment $[a, b]$ u ovom slučaju nazivamo i područjem integriranja, a njegov smisao je da za integriranje f ovdje zamišljamo da x prolazi vrijednosti od a do b.

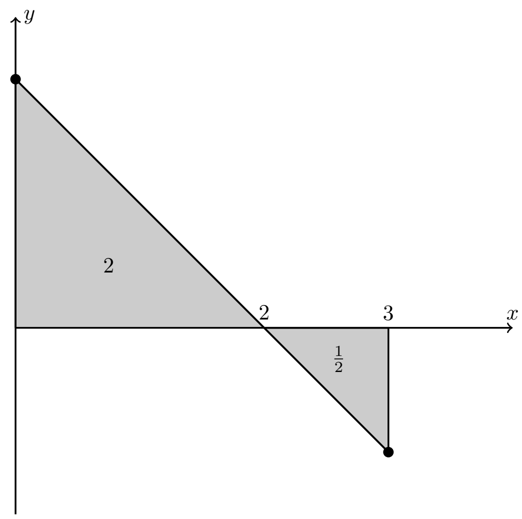
Nadalje, za pozitivne neprekidne funkcije F oznaka $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ predstavlja točno površinu omeđenu s osi apscisa, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te grafom $y = F(x)$. Ovu „definiciju" proširujemo prvo na funkcije koje su također neprekidne, ali su većim ili manjim dijelom negativne na intervalu $[a, b]$. Dobivamo sljedeću „definiciju" određenih integrala za neprekidne funkcije:

Određeni integral kao površna (neprekidni slučaj): Neka je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna. Ako s P^+ označimo sve dijelove površine omeđene s osi apscisa, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te grafom $y = F(x)$ koji se nalaze *iznad* osi apscisa, a s P^- one koji se nalaze ispod osi apscisa, onda je $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = P^+ - P-$. Ukratko: površine dijelova ispod osi apscisa pribrajaju se s negativnim predznakom.

Primjer 149. *Za funkciju zadanu s $f(x) = 2 - x$ na $[0, 3]$ površina omeđena njezinim grafom, vertikalama $x = 0$ i $x = 3$ te s osi apscisa iznosi $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ (vidi sliku 5.3), ali je* $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

Proširimo sad gornju „definiciju" na po dijelovima neprekidne funkcije.

Određeni integral po dijelovima neprekidne funkcije: Ako je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima neprekidna funkcija, dakle funkcija koja ima najviše konačno



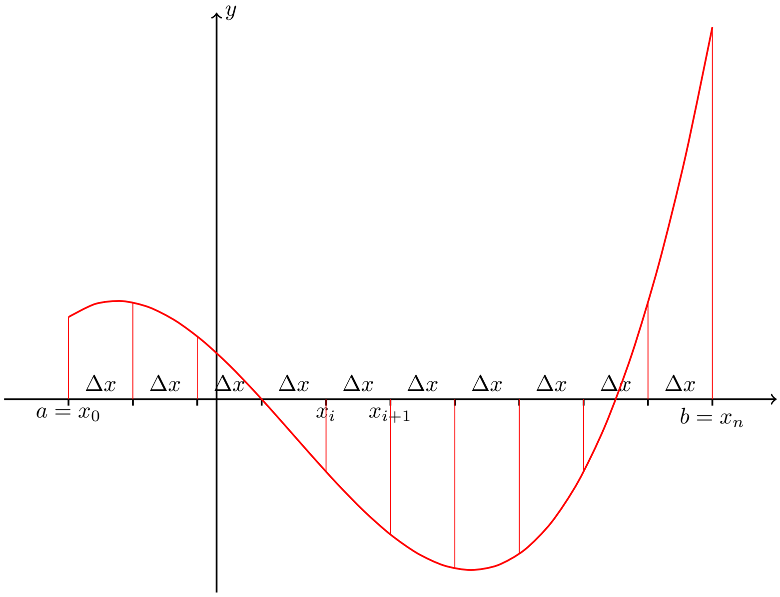
Slika 5.3: Razlika između određenog integrala i površine.

mnogo točaka prekida $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ u segmentu $[a, b]$, onda je ona neprekidna na svakom tako dobivenom podintervalu. Stoga na svakom podintervalu ima definiran određen integral (vidi gore) pa definiramo da je

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_1}^{c_2} F(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int_{c_m}^b F(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (5.1)$$

S ovime smo definirali određene integrale za sve slučajeve koje susrećemo u praktičnim situacijama. No, gornja „definicija” ima isti problem kao „definicija” derivacije kao koeficijenta smjera tangente: Kaže nam smisao dobivenog rezultata, ali u općem slučaju ne pomaže za njegovo izračunavanje. Prava definicija određenog integrala u usporedbi s gornjom „definicijom” analogna je pravoj definiciji derivacije (koeficijenta smjera tangente) kao limesa relativnih prirasta (koeficijenata smjera sekanti). I ovdje nam je ideja da sad znamo što želimo dobiti i tražimo način da se tome kroz aproksimacije približimo. Za definiciju određenog integrala ideja tog pristupa sadržana je u početnim primjerima ovog poglavlja: Integralu $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ se približavamo preko određenih suma vertikalnih pravokutnika, pri čemu tražimo da ti pravokutnici budu što „tanji”.

Da bismo uopće započeli definiciju određenog integrala, moramo uvesti nekakav minimalni zahtjev na podintegralnu funkciju. To će biti da je ona ograničena na području integriranja. Funkcija F je ograničena na skupu S (ovdje: $S = [a, b]$) ako postoje realni brojevi m i M takvi da je $m \leq F(x) \leq$



Slika 5.4: Prvi korak definicije određenog integrala.

M za sve $x \in S$ (grafički to znači da se dio grafa od F koji ima apscise iz S nalazi između horizontalnih pravaca $y = m$ i $y = M$).

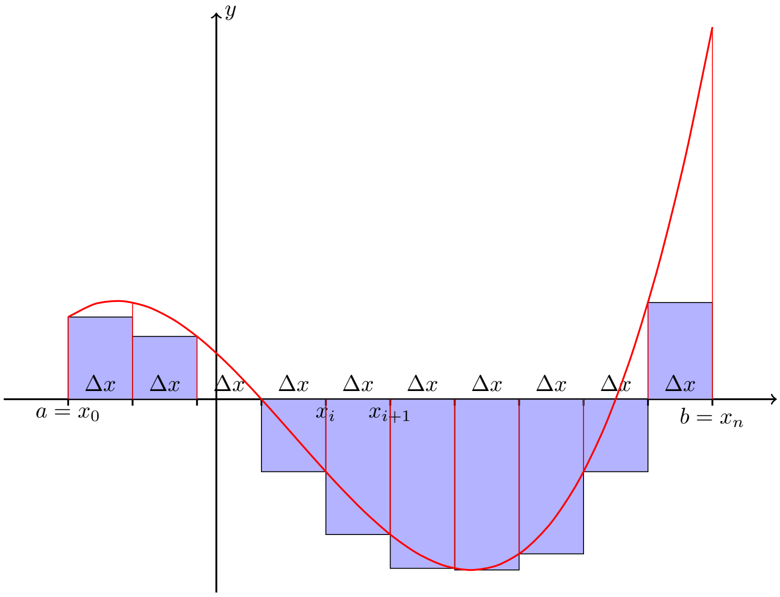
Prvi korak u definiciji određenog integrala $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ je podjela područja integriranja na manje dijelove. To se zove subdivizija. Unutar $[a, b]$ birat ćemo $x_1, \ldots, x_{n-1}$ takve da je $x_1 < \ldots < x_{n-1}$. Dodatno, stavljamo $x_0 = a$ i $x_n = b$. Svaki takav skup $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zove se subdivizijom segmenta $[a, b]$. Da bi nam bilo lakše, ograničit ćemo se na takozvane ekvidistantne subdivizije,[1] tj. razmaci između svaka dva susjedna x_i-a bit će jednaki. Širinu tih razmaka označit ćemo s Δx. Dakle: Imamo n podintervala širine $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1}$, vidi sliku 5.4.

Umjesto da sad površine aproksimiramo pravokutnicima visina $f(x_i)$, dakle uzimajući visine uvijek u lijevom rubu podintervala kao u primjerima s početka poglavlja (takve se zovu lijeve Riemannove sume), u pravoj definiciji gledamo takozvane donje i gornje Darbouxove sume. Jednostavnosti radi zvat ćemo ih jednostavno gornjim i donjim integralnim sumama.

Za danu subdiviziju, donja integralna suma je zbroj

$$s_{\Delta x} = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x,$$

[1] Ovo je pojednostavljenje u odnosu na potpuno egzaktnu definiciju.



Slika 5.5: Donja integralna suma.

gdje je m_i minimalna vrijednost funkcije F na i-tom podintervalu.[2] Vizualno se radi o tome da gledamo pravokutnike širina Δx kojima su visine točno do najniže točke unutar promatranog podintervala (slika 5.6). Uočimo da ako je funkcija na ikojem podintervalu negativna, odgovarajući m_i će biti negativan, tj. u sumi ćemo umjesto površine pravokutnika imati njegovu suprotnu vrijednost: Dijelovi površine ispod x-osi pribrajat će se s negativnim predznakom. Primijetimo da to nije kompliciranje, nego olakšanje, jer bismo inače morali još uključivati podatke o predznacima funkcije na svim podintervalima za sve subdivizije.

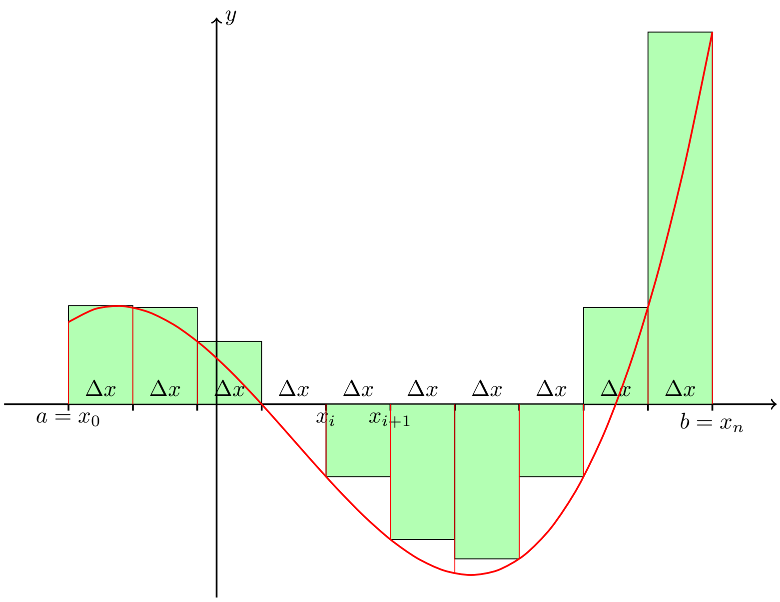
Slično, za danu subdiviziju, gornja integralna suma je zbroj

$$S_{\Delta x} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x,$$

gdje je M_i maksimalna vrijednost funkcije F na i-tom podintervalu.[3] Vizualno se radi o tome da gledamo pravokutnike širina Δx kojima su visine točno do najniže točke unutar promatranog podintervala (slika **??**). Uočimo

[2]Strogo uzevši, m_i je tzv. infimum funkcije na $[x_i, x_{i+1}]$, tj. najveća donja međa od F na tom intervalu.

[3]Strogo uzevši, M_i je tzv. supremum funkcije na $[x_i, x_{i+1}]$, tj. najmanja gornja međa od F na tom intervalu.



Slika 5.6: Gornja integralna suma.

da ako je funkcija na ikojem podintervalu negativna, odgovarajući M_i može, ali ne mora biti negativan.

Zadatak 31. *Za funkciju čiji graf i jedna subdivizija s pripadnom subdivizijom su prikazane slikama 5.4, 5.6 i* **??** *odredite n i predznake svih m_i i M_i.*

Posljednji korak u definiciji određenog integrala je da radimo subdivizije sa sve užim pravokutnicima, dakle subdivizije za koje $\Delta x \to 0$. Tada će se, bar u svim razumnim slučajevima, donje integralne sume $s_{\Delta x}$ s donje strane, a sve gornje sume $S_{\Delta x}$ s gornje strane, približavati onome što želimo da bude $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ (u smislu razlika površina iznad i ispod x-osi). U pravilu će postojati limesi

$$\lim_{\Delta x \to 0} s_{\Delta x} = \underline{I}$$

i

$$\lim_{\Delta x \to 0} S_{\Delta x} = \overline{I}.$$

Te limese nazivamo donjim i gornjim integralom. Dobivamo konačnu definiciju:

Definicija 28 (Određeni (ili: Riemannov) integral)**.** *Gornji integral $\overline{I}$ ograničene funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je limes gornjih integralnih suma kad $\Delta x \to 0$ (ako* *taj limes postoji). Donji integral* $\underline{I}$ *ograničene funkcije* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je limes donjih integralnih suma kad* $\Delta x \to 0$ *(ako taj limes postoji). Ako postoje i gornji i donji integral i ako su jednaki, onda se broj* $I = \overline{I} = \underline{I}$ *zove određenim (ili Riemannovim) integralom funkcije* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *na intervalu* $[a, b]$ *i označava s* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*. Tada kažemo da je* f *(Riemann-)integrabilna na segmentu* $[a, b]$*. Brojevi* a *i* b *zovu se granice (donja i gornja) određenog integrala* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*.*

Osvrnimo se tren na jedinice. Ideja oznake $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ je da bude limes sumacija poput onih u prva dva primjera ovog poglavlja. U tim sumacijama tipa $\sum F(x_i)\Delta x$ zbrajamo umnoške vrijednosti od F i raspona za x. Stoga će u slučaju varijabli s jedinicama jedinica od $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ biti umnožak jedinica zavisne i nezavisne varijable.

Osnovna svojstva određenog integrala koja su vidljiva iz definicije su:

- $\int_a^a F(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju f definiranu u a (jer površina dužine iznosi 0);

- $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c F(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b F(x)\,\mathrm{d}x$ za $c \in [a, b]$ (površinu možemo razbiti na dva dijela vertikalom $x = c$, što nam u konačnici omogućuje da za po dijelovima neprekidne funkcije njihove integrale računamo kako je opisano formulom 5.1);

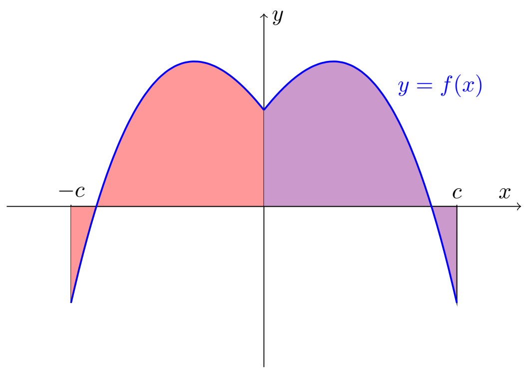
- ne sasvim očito, ali također direktno iz definicije[4] slijedi i

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a F(x)\,\mathrm{d}x$$

  (zamjena granica integrala mijenja predznak određenog integrala).

Također, ako je F integrabilna na simetričnom segmentu $[-c, c]$ i parna je ili neparna, imamo još dva korisna svojstva:

[4]Radi se o sljedećem: U definiciji smo od a do b išli udesno, tj. svaki sljedeći x_i bio je veći, odnosno Δx je pozitivan. Ako pak trebamo ići od b do a moramo ići ulijevo, tj. dodavati *negativan* Δx.



Slika 5.7: Za parnu F je $\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^c F(x)\,\mathrm{d}x$.

Propozicija 2. *Neka je $F : [-c, c] \to \mathbb{R}$ integrabilna na $[-c, c]$. Ako je F parna, onda je*

$$\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^c F(x)\,\mathrm{d}x,$$

a ako je F neparna, onda je

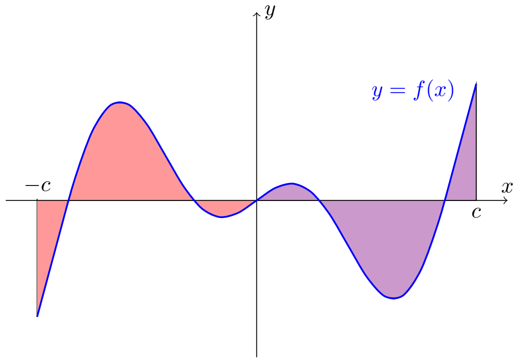
$$\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Primjer 150. *Imamo $\int_{-5}^{5} xe^{-x^2} = 0$ i $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x = 2\int_0^{\pi} \cos x$.*

Dokaz nije težak (integral se rastavi na integrale od $-c$ do 0 i 0 do c i u lijevom zamijeni x s $-x$ te naravno koriste definicije parne i neparne funkcije), no umjesto preciznog dokaza, dajemo grafički dokaz uz intepretaciju određenog integrala kao površine, vidljiv na slikama 5.7 i 5.8.

Primijetimo da su po Bolzano-Weierstraßovom teoremu sve neprekidne funkcije na segmentu ograničene, a na svakom podsegmentu u subdivizijama iz definicije postižu i minimume i maksimume. Za neprekidne funkcije dokazuje se da im se donji i gornji integral uvijek poklapaju, pa je svaka funkcija koja je neprekidna na $[a, b]$ ujedno i integrabilna na $[a, b]$. S druge strane, znamo da ako je funkcija derivabilna na nekom otvorenom intervalu, onda je na njemu i neprekidna, odnosno derivabilnost povlači neprekidnosta, a neprekidnost integrabilnost. Preciznije:

Propozicija 3. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija zadana na otvorenom intervalu I. Ako je ona na tom intervalu derivabilna, onda je na njemu neprekidna i integrabilna na svakom $[a, b] \subset I$.*



Slika 5.8: Za neparnu F je $\int_{-c}^{c} F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Obrnuto, već smo vidjeli da postoje funkcije koje su neprekidne, a nisu derivabilne, a i da postoje funkcije s prekidima (npr. sve po dijelovima neprekidne funkcije) koje su integrabilne, a nisu neprekidne. Zapravo su sve uobičajene funkcije na svakom podsegmentu svoje domene integrabilne i teško je naći primjer ograničene funkcije (dakle, funkcije za koju definicija određenog integrala ima smisla), a koja nije integrabilna. Najpoznatiji je sljedeći, kemičarima zasigurno čudan, primjer:

Primjer 151. *Dirichletova funkcija definirana je na segmentu* $[0,1]$ *tako da u racionalnim brojevima ima vrijednost* 0*, a u iracionalnim* 1*. S obzirom da postiže samo dvije vrijednosti, očigledno je ograničena. No, kako između svaka dva racionalna broja postoji iracionalan i obrnuto, ma kako mali* Δx *uzeli,* m_i*-ovi će uvijek svi biti* 0*, a* M_i*-ovi će svi biti* 1*. Stoga je* $\underline{I} = 0 \neq 1 = \overline{I}$*, pa Dirichletova funkcija nije integrabilna.*

Ponovimo bitno... Određeni integral $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ funkcije $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se za slučaj nenegativne neprekidne funkcije F može definirati kao površina omeđena vertikalama $x = a$ i $x = b$, s x-osi i grafom funkcije F. Ukoliko funkcija F postiže i negativne vrijednosti na $[a,b]$, dijelovi površine ispod x-osi se u $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ pribrajaju s negativnim predznakom.

Sve funkcije koje su neprekidne ili imaju konačno mnogo prekida u $[a,b]$ su integrabilne na $[a,b]$. Integral $\int_{-c}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ je za neparne, na $[-c,c]$ integrabilne, funkcije f jednak nuli. Integral kojem se gornja i donja granica poklapaju je također jednak nuli.

5.3 Newton-Leibnizova formula (ili: Zapravo je samo jedan integral)

Dosad definirane vrste integrala naizgled i nemaju puno toga zajedničkog — zašto se onda u oba slučaja govori o integralima? Uz to, očigledno bi bilo jako teško, možda i nemoguće, izračunavati određene integrale temeljem njihove definicije. Što učiniti?

Odgovor na oba gore postavljena pitanja za neprekidne funkcije daje tzv. osnovni teorem infinitezimalnog računa, poznat i kao Newton-Leibnizova[5] formula.

Teorem 16 (Osnovni teorem infinitezimalnog računa)**.** *Neka je realna funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$. Tada je formulom*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

definirana funkcija F i ona je antiderivacija za f na $\langle a,b\rangle$. Nadalje, za svaku antiderivaciju F od f vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ovaj teorem zove se osnovnim teoremom infinitezimalnog računa jer iskazuje međusobnu inverznost deriviranja i integriranja. Uz to, on povezuje određene s neodređenim integralima te omogućuje računanje određenih integrala preko neodređenih i obrnuto:

Korolar 1. *Za realnu funkciju f neprekidnu na $[a,b]$ i njenu antiderivaciju F vrijedi*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

i

$$f(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'.$$

U terminima neodređenih integrala, činjenice iz gornjeg korolara možemo zapisati i kao

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(x),$$

[5]Formula je dobila ime po sir Isaacu Newtonu (1642.–1728.) i Gottfriedu Wilhelmu Leibnizu (1646.–1716.), koji su neovisno jedan o drugom krajem 17. stoljeća otkrili međusobnu inverznost deriviranja i integriranja, tj. upravo tu formulu.

$$\int \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$$

Posljedica Newton-Leibnizove formule je da i određeni integral, kao i neodređeni, ima svojstvo linearnosti:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b K f(x)\,\mathrm{d}x = K \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer 152. *Izračunajmo* $\int_1^2 \frac{5\,\mathrm{d}x}{x}$*:*

$$\int_1^2 \frac{5\,\mathrm{d}x}{x} = 5\int_1^2 x^{-1}\,\mathrm{d}x = (5\ln|x|)|_1^2 = 5\ln 2 - 5\ln 1 = \ln 25.$$

Primijetimo da Newton-Leibnizova formula vrijedi samo za neprekidne funkcije, no može se (temeljem formule 5.1) primijeniti i na po dijelovima neprekidne funkcije ili općenitije na funkcije zadane po dijelovima.

Primjer 153. *Za*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ x^2, & -1 < x \leq 0 \\ x + 2, & x \leq -1 \end{cases}.$$

je prvo

$$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jer se u -1 *i* 0 *mijenja pravilo pa je to potencijalna točka prekida. Dalje imamo*

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (x+2)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} = \frac{1}{2},$$

$$\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 e^x\,\mathrm{d}x = e^x|_0^2 = e^2 - 1,$$

pa je

$$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x = e - \frac{1}{6}.$$

5.4 Osnovne metode integriranja

5.4.1 Metoda parcijalne integracije

Ni u jednoj tablici osnovnih integrala ne može se naći integral logaritamske funkcije. Razlog je u tome što u tablici derivacija nema nijedne funkcije koja derivirana daje logaritamsku funkciju (ne znamo napamet nijednu funkciju f takvu da je $f'(x) = \log_a x$). S druge strane, nije nezamislivo da bi nam moglo biti korisno znati izračunati primjerice $\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

U ovom, a i mnogim drugim slučajevima, pomaže metoda parcijalne integracije, koja se izvodi iz formule za derivaciju produkta funkcija. Jedan od oblika te formule je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Stoga je

$$u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) - \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v.$$

Integriranje zadnje jednakosti po x daje

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u.$$

Drugi, ekvivalentni, oblike te formule je

$$\int u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, \mathrm{d}x.$$

To je formula parcijalne integracije.

Njena glavna primjena na rješavanje integrala pojavljuje se kad pod integralom prepoznajemo jednu funkciju ($u = u(x)$) pomnoženu s derivacijom neke druge ($v'(x)$) koje su takve da je v' lako integrirati, a da pritom nakon deriviranja funkcije u dobijemo lakši integral $\int v \, \mathrm{d}u = \int u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x$. Najtipičniji slučajevi primjene ovog pravila su sljedeći:

- Funkcija u ima relativno jednostavnu derivaciju, a $v'(x) = 1$;
- Funkcija u je potencija od x (u pravilu $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), a v' je eksponencijalna ili trigonometrijska funkcija;
- Funkcija u je neka logaritamska funkcija, a v' je oblika $v'(x) = x^a$ za $a \in \mathbb{R}$.

Dati ćemo primjere za sva tri navedena tipična slučaja.

Primjer 154.

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, v(x) = x \right\} =$$

$$= x\ln x - \int x\frac{\mathrm{d}x}{x} = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

Primjer 155.

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \left\{ u(x) = x^2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x \right\} =$$

$$= x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x = \{u(x) = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x;\ \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x, v(x) = e^x\} =$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x \right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Primjer 156.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{ u(x) = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x};\ \mathrm{d}v = x^{-2}\,\mathrm{d}x, v(x) = -x^{-1} \right\} =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

U kontekstu određenih integrala, formula parcijalne integracije poprima oblik

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u.$$

Primjer 157. *Izračunajmo* $\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$*:*

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \{u = \sin x,\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x\} = -\sin x\cos x|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-0+0) + \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \pi - \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Označimo li $I = \int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x$*, dobili smo jednadžbu*

$$I = \pi - I$$

te je

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = I = \frac{\pi}{2}.$$

Ponovimo bitno... Analog formule za deriviranje produkta funkcija u kontekstu integrala je formula parcijalne integracije $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ koja opisuje kako integrirati produkt dvije funkcije od kojih je bar jedna prepoznatljiva kao derivacija neke druge funkcije.

5.4.2 Metoda supstitucije

Promotrimo sljedeći integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}.$$

On podsjeća na integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, no ako bismo pretpostavili da je $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \ln|ax+b| + C$, lako bismo se deriviranjem uvjerili da nismo dobili točan rezultat. Prirodna ideja bila bi zamijeniti „problematični" nazivnik $ax+b$ novom varijablom y, no time integral poprima oblik $\int \frac{\mathrm{d}x}{y}$, što nije smisleno jer smo dobili dvije varijable (y i varijablu po kojoj integriramo, tj. x) za koje znamo da nisu nezavisne (y nije konstanta s obzirom na x). Stoga se pri takvoj supstituciji $y = ax+b$ treba zamijeniti i $\mathrm{d}x$. Kako? Ideja je jednostavna: $y' = a$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a$$

te je $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}y$. Stoga je

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \{y = ax+b,\ \mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x\} = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{a}\ln|y| + C = \frac{\ln|ax+b|}{a} + C.$$

Takva supstitucija zove se linearna[6] supstitucija: izraz oblika $ax+b$ zamjenjujemo novom varijablom y, s time da onda zamjenjujemo i diferencijal $\mathrm{d}x$. Ukoliko je podintegralna funkcija općenitija kompozicija[7] afine funkcije $g(x) = ax+b$ s nekom funkcijom f, istom supstitucijom dobivamo opću formulu linearne supstitucije:

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zadatak 32. *Izračunajte integral* $\int \sin(5-3x)\,\mathrm{d}x$.

[6] Prikladniji naziv bio bi afina supstitucija.

[7] Primijetimo da je $h(x) = \frac{1}{ax+b}$ kompozicija $h = f \circ g$, gdje je $g(x) = ax+b$ i $f(x) = \frac{1}{x}$.

Gornji slučaj je specijalni slučaj općenitije metode integriranja poznate pod imenom metoda supstitucije.

Vidjeli smo da je metoda parcijalne integracije ekvivalent formule za derivaciju produkta u kontekstu integrala. Analog lančanog pravila za derivaciju kompozicije funkcija kod računanja integrala je metoda supstitucije. Kao što znamo, jedan zapis lančanog pravila za deriviranje je oblika

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Neka je $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} = f(y)$, tj. F je antiderivacija od f, pri čemu je $y = y(x)$. Tada gornju formulu možemo zapisati u obliku $\mathrm{d}F = f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$ odnosno (jer $\mathrm{d}F = f(y)\,\mathrm{d}y$) $\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x$. Time smo izveli[8] formulu metode supstitucije za neodređene integrale:

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Uobičajena primjena ove formule je u situacijama kad pod integralom uočimo neku funkciju i njenu derivaciju (do na multiplikativnu konstantu). Pritom redovno koristimo činjenicu

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primjer 158. *Izračunajmo $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Kako (do na konstantu -2) x možemo shvatiti kao derivaciju od $-x^2$, pokušaj supstitucije najsmisleniji je s $y = -x^2$. U tom slučaju je $\mathrm{d}y = -2x\,\mathrm{d}x$, tj. $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$, te je*

$$\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}e^y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}e^y + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

U rjeđim situacijama formulu metode supstitucije zgodno je čitati „udesno”.

Primjer 159. *Promotrimo integral $\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$. Kod njega nema vidljive kombinacije funkcije i njene derivacije. Pokušajmo vidjeti što bi nam dao jedini mogući pokušaj supstitucije u ovom integralu: $y = \sqrt{x}$, tj. $\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Prema posljednjem imamo $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}y$. Dobili bismo*

$$\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int 2y \sin y\,\mathrm{d}y.$$

Posljednji integral je rješiv metodom parcijalne integracije — riješite ga do kraja!

[8] Izvod nije sasvim precizan, već se zapravo radi o ideji izvoda formule.

Zadatak 33. *Izračunajte* $\int \sin^{10} x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Za određene integrale formula za supstituciju glasi:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pritom je bitno da je i derivacija od g neprekidna na segmentu $[a, b]$.

Primjer 160. *Integral* $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x}$ *jednak je*

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3-2x} = \{y = 3-2x,\ \mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}x,\ y(2) = -1, y(3) = -4\} =$$

$$= \int_{-1}^{-4} -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{1}{2}\ln|y|\Big|_{-1}^{-4} = -\frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 1) = -\ln 4^{1/2} = -\ln 2.$$

Ponovimo bitno... Metoda supstitucije za integrale opisana je formulom

$$\int f(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Ona u mnogim slučajevima omogućuje da se u slučaju kad se u podintegralnoj funkciji pojavljuje izraz ovisan o x i njegova derivacija supstitucijom tog izraza novom varijablom y integral pojednostavi.

5.4.3 Integriranje racionalnih funkcija

Svaku racionalnu funkciju moguće je integrirati, pri čemu prvo podintegralnu funkciju pogodno preoblikujemo.

Ako je brojnik racionalne funkcije stupnja većeg ili jednakog stupnju nazivnika, prvo treba podijeliti brojnika s nazivnikom kako bismo izdvojili polinomijalni dio. Taj polinomijalni dio je onda lako integrirati.

Primjer 161. *Uzmimo* $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. *Prvo dijelimo*

$$x^3 : (x^2 - 1) = x$$

i ostatak je x *te je*

$$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1},$$

dakle

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Stoga je pravo pitanje kako integrirati racionalne funkcije kojima je brojnik manjeg stupnja nego nazivnik. Metoda preoblikovanja takve racionalne funkcije u oblik koji se lako integrira zove se rastav na parcijalne razlomke. Radi se o zapisu racionalne funkcije $\frac{p(x)}{q(x)}$ (za koju je stupanj od p manji od stupnja od q) u obliku zbroja razlomaka koji su oblika

$$\frac{A}{(ax+b)^k}$$

ili oblika

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

za koje treba odrediti koeficijente njihovih brojnika. U slučaju da su sve nultočke nazivnika $q(x)$ realne dovoljni su razlomci prvog tipa, pri čemu su nazivnici $ax+b$ faktori na koje možemo rastaviti $q(x)$.

Najjednostavniji slučaj imamo kad $q(x)$ ima točno onoliko (različitih) realnih nultočaka koliki mu je stupanj (u daljnjem ćemo stupanj od q označiti s n). U tom slučaju možemo dobiti rastav oblika

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{a_i x + b_i},$$

gdje su $a_i x + b_i$ različiti faktori nazivnika, a treba odrediti konstantne brojnike $A_1, \ldots, A_n$. Oni se određuju tako da cijelu jednakost pomnožimo s $q(x)$, čime dobijemo jednakost polinoma. Koeficijenti brojnika se sad mogu odrediti iz sustava kojeg dobijemo koristeći činjenicu da su dva polinoma jednaka točno ako im se svi koeficijenti uz odgovarajuće potencije podudaraju. Alternativno, možemo redom uvrstiti nultočke[9] pojedinih faktora i tako brzo dobiti tražene koeficijente. Postupak je najlakše opisati primjerom te ćemo nastaviti s primjerom 161.

Primjer 162. *Potrebno je $\frac{x}{x^2-1}$ rastaviti na parcijalne razlomke. Faktorizirani oblik nazivnika je $(x-1)(x+1)$ te pišemo*

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Potrebno je odrediti A i B. Pomnožimo li zadnju jednakost s x^2-1 dobivamo jednakost

$$x = A(x+1) + B(x-1).$$

[9] Zapravo, potrebno je uvrstiti onoliko različitih vrijednosti x koliko imamo nepoznanica, tj. njih n, no najjednostavnije jednadžbe dobivamo uvrštavanjem nultočki od $q(x)$.

U nju uvrstimo $x = 1$ i $x = -1$ (nultočke od $x^2 - 1$) i dobivamo

$$1 = 2A,$$

$$-1 = -2B.$$

Stoga je $A = B = \frac{1}{2}$ i

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

te je

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln|x-1|+\ln|x+1|) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$$

Početni integral iz primjera 161 stoga je jednak

$$\int \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Nešto teži slučaj imamo ako $q(x)$ ima višestrukih nultočki, tj. ako se u $q(x)$ neki faktor $a_i x + b_i$ pojavljuje s potencijom k većom od 1. U tom slučaju tom faktoru ne odgovara jedan, nego k parcijalnih razlomaka po principu

$$\frac{p(x)}{(ax+b)^k} = \frac{B_1}{ax+b} + \frac{B_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{B_{k-1}}{(ax+b)^{k-1}} + \frac{B_k}{(ax+b)^k}.$$

Riječima rečeno: Pojedinom faktoru nazivnika odgovara onoliko parcijalnih razlomaka koliki je eksponent tog faktora, pri čemu su svi brojnici tih razlomaka nepoznate konstante, a nazivnici su redom potencije tog faktora od prve do one s kojom se on pojavljuje u nazivniku.

Primjer 163. *Riješimo integral*

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Prvi faktor nazivnika je $(2x+3)$ i on je potencije 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika $\frac{A}{2x+3}$. Drugi faktor $(x-3)$ je potencije 2 pa njemu odgovaraju 2 parcijalna razlomka s nazivnicima $(x-3)$ i $(x-3)^2$. Dakle, pretpostavljamo rastav podintegralne funkcije na parcijalne razlomke.

$$\frac{x}{(2x+3)(x-3)^2} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Množenje s $(2x+3)(x-3)^2$ *daje*

$$x = A(x-3)^2 + B(2x+3) + C(x-3)(2x+3).$$

Uvrstimo $x = 3$ *i* $x = -3/2$ *(nultočke nazivnika polazne funkcije) i dobijemo*

$$3 = 9B,$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{81}{4}A$$

tj. $A = -\frac{2}{27}$ *i* $B = \frac{1}{3}$*. Da bismo odredili* C *uvrstimo još bilo koji* x*, recimo* $x = 0$*:*

$$0 = 9A + 3B - 9C$$

iz čega dobivamo $C = \frac{1}{27}$*. Imamo dakle*

$$\int \frac{x}{(2x+3)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2/27}{2x+3} + \frac{1/3}{(x-3)^2} + \frac{1/27}{x-3}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{27}\ln|2x+3| - \frac{1}{3(x-3)} + \frac{1}{27}\ln|x-3| + C = \frac{1}{27}\ln\left|\frac{x-3}{2x+3}\right| - \frac{1}{3(x-3)} + C.$$

Primijetimo: Kad god $q(x)$ ima n realnih nultočki (gdje mu je n stupanj), $\frac{p(x)}{q(x)}$ se rastavlja na točno n parcijalnih razlomaka. Time se integriranje svodi na integriranje funkcija oblika $(ax+b)^{-n}\,\mathrm{d}x$ koje je lako integrirati linearnom supstitucijom.

U slučaju da $q(x)$ nema samo realne nultočke u rastavu se po sličnom principu pojavljuju parcijalni razlomci oblika $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, tj. parcijalni razlomci kojima su brojnici afine funkcije, a nazivnici potencije promatranog faktora.

Primjer 164. *Rastavimo* $\frac{1}{(x^2+1)(x-1)}$ *na parcijalne razlomke. Faktor* (x^2+1) *nema realnih nultočaka i pojavljuje se s potencijom 1 pa njemu odgovara jedan parcijalni razlomak oblika* $\frac{Ax+B}{x^2+1}$*. Faktoru* $(x-1)$ *kao ranije odgovara parcijalni razlomak oblika* $\frac{C}{x-1}$*. Dakle:*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Množenje s $(x^2+1)(x-1)$ *daje*

$$1 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1).$$

Imamo 3 neodređena koeficijenta A, B, C*, a samo jednu realnu nultočku nazivnika (to je 1) pa ćemo osim 1 u zadnju jednakost morati uvrstiti još dva* *broja, primjerice* 0 *i* 2. *Ako redom uvrstimo* $x = 0, 1, 2$ *u zadnju jednadžbu dobijemo sustav*

$$2C = 1,$$
$$-B + C = 1,$$
$$2A + B + 5C = 1.$$

Rješenje tog sustava je $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ *tj.*

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{1}{x-1}\right).$$

Zadatak 34. *Koristeći rastav na parcijalne razlomke određen u gornjem primjeru izračunajte* $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

Ponovimo bitno... Integrali racionalnih funkcija računaju se pomoću rastava na parcijalne razlomke, u kojem svakom faktoru nazivnika koji je oblika $(x-c)^k$ odgovara k parcijalnih razlomaka oblika konstanta A_i kroz $(x-c)^i$, za potencije i od 1 do k. U slučaju da nazivnik ima kvadratne faktore bez realnih nultočki, na njih se primjenjuje analogan postupak, s tim da su pripadni brojnici afine funkcije.

5.5 Nepravi integrali

Promotrimo integral

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2}.$$

Na prvi pogled radi se o običnom određenom integralu za koji bi formalni račun dao $\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_1^5 = -\frac{4}{3}$. To rješenje je krivo! Zašto? Ako je to određeni integral, onda bi broj $-\frac{4}{3}$ trebao odgovarati razlici površina koje graf funkcije $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ zatvara s x-osi, između vertikala $x = 1$ i $x = 5$. Posebno, jer je iznos integrala negativan, to bi značilo da f između $x = 1$ i $x = 5$ daje veći dio površine ispod, nego iznad x-osi – a f je očigledno svuda pozitivna. Oboje istovremeno je nemoguće! Problem je da u gornjem integralu podintegralna funkcija f nije ograničena na intervalu na kojem integriramo, a određeni (Riemannov) integral je definiran samo za funkcije ograničene na intervalu integriranja. Stoga gornji integral *nije* određeni integral.

Nepravi integrali su integrali koji podsjećaju na određene (Riemannove) integrale jer su im definirane granice integriranja, ali je funkcija na intervalu integriranja neograničena ili je pak interval integriranja neograničen.

Primjeri nepravih integrala su:

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1},\ \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x,\ \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2},\ \int_{-\infty}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Prva tri imaju ograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije unutar područja integriranja neograničene (imaju vertikalnu asimptotu), a zadnja tri imaju neograničena područja integriranja, ali su podintegralne funkcije na tim područjima ograničene (sve tri unutar navedenih intervala poprimaju vrijednosti isključivo između 0 i 1). Dakle, neprave integrale možemo podijeliti u dvije vrste: one s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja i one s ograničenom podintegralnom funkcijom na neograničenom području integriranja. Posljednji tip je čest u primjenama vezanim za vjerojatnost (i stoga za kvantnu fiziku).

Prvo što bi nematematičar mogao pomisliti je da se takvim integralima onda ne mogu pridružiti brojevi kao iznosi, jer predstavljaju površine koje su ili vertikalno ili horizontalno neograničene. No, neograničeno ne znači uvijek i beskonačno. Primjerice, ako je površina nečega opisiva kao $P(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$, onda ona za rastući $x > 0$ ne postaje beskonačno velika iako s rastućim x i ona raste. U osnovi, radi se o razlici između rastućih funkcija s horizontalnom asimptotom (ograničene) i neograničeno rastućih funkcija.

Idemo prvo vidjeti kako definirati neprave integrale s neograničenom podintegralnom funkcijom na ograničenom području integriranja. Ideja definicije je da se pri pokušaju računanja površine malo (za $\varepsilon > 0$) odmaknemo ulijevo ili udesno od točke u kojoj imamo vertikalnu asimptotu, računamo određeni integral s tako pomaknutom granicom i zatim pomalo smanjujemo odmak ε prema 0.

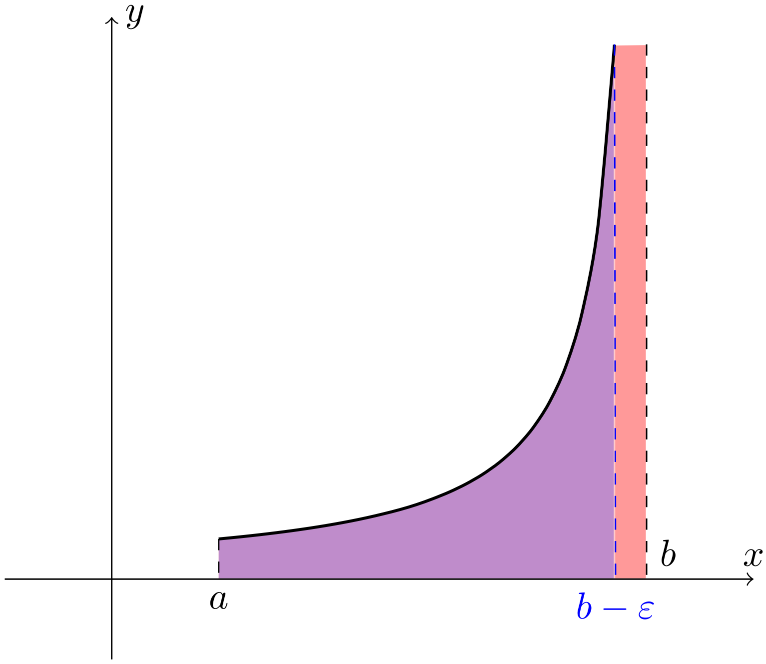
Definicija 29 (Nepravi integrali neograničenih funkcija)**.** *Integral* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *za* f *koja unutar* $[a, b]$ *ima vertikalnu asimptotu se definira na sljedeći način:*

- *Ako je* $x = a$ *vertikalna asimptota za* f*,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- *Ako je* $x = b$ *vertikalna asimptota za* f *(vidi i sliku 5.9),*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Slika 5.9: Nepravi integrali neograničenih funkcija.

- *Ako je za neki $c \in \langle a, b\rangle$ pravac $x = c$ VA za f:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je rezultat računanja nepravog integrala realan broj, kažemo da integral konvergira, u suprotnom da divergira.

Primjer 165. *Promotrimo integrale tipa*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a},$$

gdje je a realan broj. Primijetimo prvo da su to u slučaju $a \leq 0$ $(-a \geq 0)$ obični određeni integrali:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \int_0^1 x^{-a}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_0^1 = \frac{1}{1-a}, \quad a \leq 0.$$

Za $a > 0$ podintegralna funkcija ima vertikalnu asimptotu u lijevom rubu integriranja pa su onda to nepravi integrali prvog tipa u gornjoj definiciji.

Stoga je

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a}.$$

Integrali $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ *sad su određeni integrali. Imamo dva slučaja, ovisno o tome je li* $a = 1$ *ili nije. Za* $a = 1$ *dobivamo*

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x|_\varepsilon^1 = -\ln(\varepsilon)$$

i stoga

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\ln(\varepsilon)) = +\infty.$$

Dakle, za $a = 1$ *imamo divergentan nepravi integral.*

Za pozitivan $a \neq 1$ *imamo*

$$\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a}.$$

Ako je $a > 1$*, onda je* $1 - a < 0$ *pa je* $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{1-a} = +\infty$ *pa je stoga*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a} = -\infty.$$

Ako je pak $a > 1$*, onda je* $1 - a > 0$ *pa je* $\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{1-a} = 0$ *i stoga je*

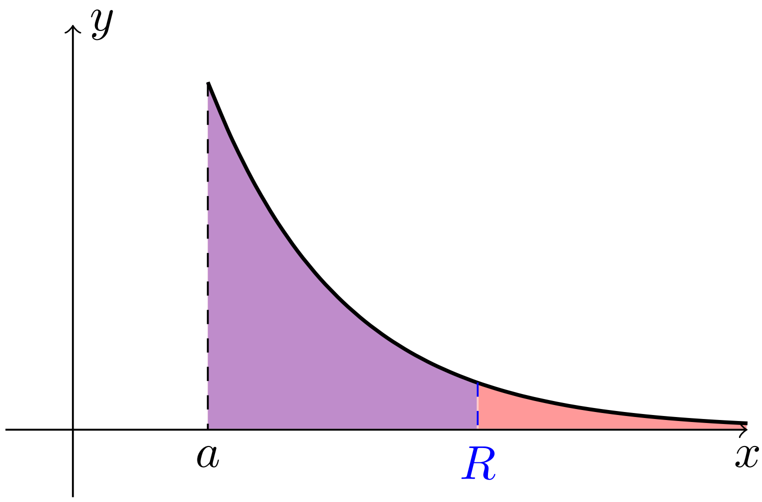
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-a} - \frac{\varepsilon^{1-a}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

Zaključujemo: Integrali $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ *su za* $a \leq 0$ *određeni, za* $0 < a < 1$ *konvergentni nepravi i za* $a \geq 1$ *divergentni nepravi integrali.*

Zadatak 35. *Izračunajte* $\displaystyle\int_0^1 \log_a x \,\mathrm{d}x.$

Već smo rekli da su u primjenama češći nepravi integrali drugog tipa, kojima je jedna ili obje granice integriranja beskonačna. I u njihovoj definiciji se koriste limesi: Beskonačna se granica zamjenjuje konačnom, ali varijabilnom, čime integral postaje određeni, a nakon integriranja s ta nova granica pusti da teži u odgovarajuću beskonačnost. Preciznije:

Definicija 30 (Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja)**.** *Integrali* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *kod kojih je* $a = -\infty$ *ili* $b = +\infty$ *definiraju se ovako:*



Slika 5.10: Nepravi integrali s neograničenim područjem integriranja.

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{a}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x$ *(vidi i sliku 5.10).*
- *Ukoliko je konačni rezultat izračunavanja potrebnog limesa realan broj, kažemo da nepravi integral konvergira, a u suprotnom da divergira.*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *za bilo koji c za koji integrali na desnoj strani konvergiraju.*

Ukoliko navedeni limesi postoje, kažemo da pojedini od nepravih integrala konvergira, a u suprotnom da divergira.

Napomena 12. *Integrali s neograničenim područjem integriranja na kojem funkcija nije ograničena, primjerice* $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln x$ *ili* $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x^2$*, sigurno ne konvergiraju.*

Primjer 166. *Promotrimo integrale tipa*

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a},$$

gdje je a realan broj. Primijetimo prvo da oni u slučaju $a \leq 0$ ($-a \geq 0$) sigurno divergiraju jer u tom slučaju podintegralna funkcija nije ograničena na području integriranja (vidi prethodnu napomenu).

Za $a > 0$ podintegralna funkcija ima x-os kao desnu horizontalnu asimptotu pa je ograničena na intervalu $[1, +\infty\rangle$. Po definiciji je tad

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a}.$$

Integrali $\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ sad su određeni integrali. Opet imamo dva slučaja, ovisno o tome je li $a = 1$ ili nije. Za $a = 1$ dobivamo

$$\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_1^R = \ln R$$

i stoga

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln R = +\infty.$$

Dakle, za $a = 1$ imamo divergentan nepravi integral.

Za pozitivan $a \neq 1$ imamo

$$\int_1^R \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a}\Big|_1^R = \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}.$$

Ako je $a > 1$, onda je $1 - a < 0$ pa je $\lim_{R\to\infty} R^{1-a} = 0$ pa je stoga

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{a-1}.$$

Ako je pak $a > 1$, onda je $1 - a > 0$ pa je $\lim_{R\to\infty} R^{1-a} = +\infty$ i stoga je

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a} = \lim_{R\to\infty} \frac{R^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = +\infty.$$

Zaključujemo: Integrali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ su za za $a \leq 1$ divergentni nepravi i za $a > 1$ konvergentni nepravi integrali.

Zadatak 36. *Izračunajte $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$.*

Za slučaj integrala tipa $\int_{-\infty}^{+\infty}$, po definiciji treba ih „razbiti" u nekoj točki c, a najčešće se bira $c = 0$. Ukoliko je funkcija f parna (ili neparna) i *ako* nepravi integral $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergira, možemo primijeniti pravila za takve funkcije iz određenih integrala, tj. za parnu funkciju je tada $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, a za neparnu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Primjer 167. *Odredimo* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Po definiciji on je jednak* $\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Podintegralna funkcija je parna. Odredimo* $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. *Imamo:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\lim_{R\to+\infty}\operatorname{arctg}(R)=\frac{\pi}{2}.$$

Stoga je

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Primijetimo korisnu činjenicu: Integrali tipa $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sigurno divergiraju ne samo ako je f neograničena, nego i kad ima desnu horizontalnu asimptotu različitu od x-osi. U tom je slučaju naime u površinu koja je opisana takvim integralom uključen pravokutnik beskonačne širine i fiksne visine (koja je jednaka ordinati te asimptote), a ta površina ne može biti konačna. Analogno, integrali tipa $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sigurno divergiraju čim f nema x-os za lijevu horizontalnu asimptotu.

Pomoću nepravih integrala s neograničenim područjem integriranja definiraju se neke tzv. specijalne funkcije, među kojima je najpoznatija gama-funkcija Γ. Njen smisao je poopćenje faktorijela[10] na realne brojeve[11]. dakle primjerice $\Gamma(4)=1\cdot2\cdot3=6$. Općenito se definira

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Gama-funkcija kao prirodnu domenu ima skup realnih brojeva bez skupa negativnih cijelih brojeva. Za prirodne brojeve n vrijedi

$$\Gamma(n)=(n-1)!,$$

pa uvrštavajući $x=n$ u definiciju gama-funkcije dobivamo jednu formulu koja olakšava izračunavanje nekih integrala koji se pojavljuju u kvantnoj fizici i kemiji:

$$\int_0^{+\infty}x^ne^{-ax}\,\mathrm{d}x=\frac{n!}{a^{n+1}}. \tag{5.2}$$

S druge strane, neki nepravi integrali se ne mogu izračunati preko definicije jer nije odrediva formula antiderivacije. Za neke od njih su drugim matematičkim metodama izračunate vrijednosti. Među njima je korisno znati

[10] Za prirodan broj n, n faktorijela je broj $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Po definiciji je $0!=1$.
[11] Gama-funkcija omogućuje poopćenje faktorijela i na kompleksne brojeve

jedan, koji se često pojavljuje u računima vezanim za vjerojatnost, primjerice u kvantnoj teoriji:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{5.3}$$

Ponovimo bitno... Nepravi integrali poopćuju određene integrale na slučajeve kad ili područje integriranja ili podintegralna funkcija nije ograničena. U oba slučaja problematični rubovi se zamjenjuju varijabilnim, čime se dobije određeni integral s varijabilnim rubom, te se vrijednost nepravog integrala računa kao limes određenog integrala kad uvršteni varijabilni rub teži prema problematičnom.

5.6 Primjene integrala u kemiji i fizici

Primjene integrala su vrlo raznolike, a ugrubo ih možemo podijeliti na četiri tipa:

- Određivanje neke vremenske ovisnosti iz poznavanja brzine njene promjene (neodređeni integrali);
- Izračunavanje izvršenog rada i drugih fizikalnih veličina koje se mogu interpretirati kao određeni integrali;
- Izračunavanje prosječne vrijednosti funkcije na segmentu;
- Integrali s vjerojatnosnom interpretacijom.

Sve ćemo ih ilustrirati primjerima i osvrnuti se na glavne principe. Osim toga, u literaturi se lako nađu standardne geometrijske primjene integrala na određivanje duljine luka krivulje, površina i volumena.

U fizikalnim i fizikalnokemijskim primjenama često se pojavljuju neodređeni integrali, u pravilu uz tzv. početni uvjet. U osnovi se svi takvi svode na sljedeću tipsku situaciju:

Neka je Y neka veličina ovisna o vremenu t (pozicija na pravcu, koncentracija, ...). Ukoliko je poznata ovisnost $V(t) = Y'(t)$ (brzina promjene veličine Y), onda je

$$Y(t) = \int V(t)\,\mathrm{d}t.$$

Da bismo mogli odrediti konstantu integriranja, potreban je početni uvjet, tj. dodatno poznavanje iznosa Y u nekom trenutku, najčešće u trenutku 0 (početna pozicija, početna koncentracija, ...). Iz Newton-Leibnizove formule, ako je V neprekidna (a u pravilu jest) imamo

$$\int_0^t V(\tau)\,\mathrm{d}\tau = Y(t) - Y(0),$$

odnosno

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t V(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Primjer 168. *Ako objekt mase m slobodno pada s pozicije 0, onda je do trenutka T prešlo put duljine $s = \int_0^t g\tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{g}{2}t^2$.*

Primjer 169. *Za sve reakcije vrijedi: koncentracija c bilo kojeg sudionika reakcije (čiji stehiometrijski koeficijent je ν i početna koncentracija c_0) je dana s*

$$c = c_0 + \nu x, \tag{5.4}$$

gdje je x pomoćna veličina[12] *povezana s brzinom reakcije:*

$$v = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

S druge strane, poznato je i da je brzina reakcije uvijek razmjerna umnošku određenih potencija koncentracija svojih reaktanata. To se zove zakonom brzine reakcije. Konstanta proporcionalnosti u njemu zove se koeficijent brzine reakcije i pri stalnoj temperaturi on je konstantan.

Promotrimo reakciju stehiometrije $A + B \longrightarrow P$. Ako je naša reakcija drugog reda, i to tako da je prvog obzirom na svaki od dva reaktanta, onda zakon brzine reakcije ima oblik

$$v = kc_{\mathrm{A}}c_{\mathrm{B}}.$$

Označimo s a i b početne koncentracije od A i B. Spojimo li definiciju brzine reakcije sa zakonom brzine i uzmemo u obzir da su u našem slučaju stehiometrijski koeficijenti oba reaktanta jednaki -1, koristeći formulu 9.1 dobivamo

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x).$$

Primijenimo pravilo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$ i dobijemo

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{k(a-x)(b-x)}.$$

[12]Veličina x definira se kao $x = \frac{\xi}{V}$ i zove se koncentracija izvedenih pretvorbi.

Desna strana može se rastaviti na parcijalne razlomke i zatim se obje strane mogu integrirati po x. Dobijemo

$$t + C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x}$$

(neodređenim integralom). Kad je $t = 0$, x je uvijek jednako 0 pa je $C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b}{a}$, odnoano

$$t + C = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x} - \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{ac_\mathrm{B}}{bc_\mathrm{A}}.$$

Alternativno, ako integriramo od 0 do t, ćemu na desnoj strani odgovara integriranje od $x(0) = 0$ do $x(t)$, dobijemo

$$t - 0 = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{b-x}{a-x} \Big|_0^{x(t)}$$

Opet dobivamo isti rezultat, tzv. integrirani zakon brzine

$$t = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{ac_\mathrm{B}}{bc_\mathrm{A}}.$$

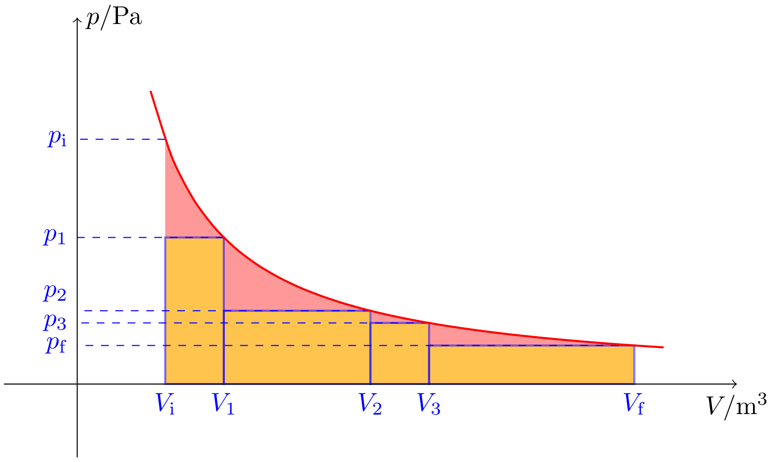
Zadatak 37. *Ako znamo da je u svakom trenutku t (u sekundama) ubrzanje protona u nekom električnom polju jednako $a = -20(1+2t)^{-2}$ (akceleracija u $\mathrm{cm\,s^{-2}}$), odredite brzinu protona u tom polju nakon 3600 sekundi ako je u početnom trenutku brzina iznosila $30\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Uputa: Ubrzanje je brzina brzine, tj. derivacija brzine po vremenu,*

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Slično kao što put iz brzine i brzinu iz akceleracije možemo odrediti integriranjem, možemo odrediti i preneseni naboj q ako znamo ovisnost jakosti struje i o vremenu ($q = \int i\,\mathrm{d}t$), s tim da je tu u pravilu početni uvjet $q(0\,\mathrm{s}) = 0$ C pa kao konstantu integriranja dobivamo nulu (nula kulona). Integriranjem se određuju i momenti inercije ne-diskretnih objekata, ukupna masa i dr.

Drugi tip primjene integrala vezan je za fizikalnu veličinu w naziva rad. U ovom se slučaju pojavljuju određeni integrali čije su granice određene početnim i konačnim stanjem sustava koji vrši rad.

Postoje različite vrste rada, a sve su za neprekidne procese definirane putem integrala.



Slika 5.11: Volumni rad pri reverzibilnoj kompresiji/ekspanziji.

- Mehanički rad uslijed djelovanja sile iznosa $F(x)$ za pravocrtni[13] pomak x od pozicije a do pozicije b definiran je s $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$;

- Volumni rad $w = -\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} p(V)\,\mathrm{d}V$ (za reverzibilnu promjenu[14] volumena od V_i do V_f; ovdje je $p(V)$ tlak pri volumenu V);

- Kemijski rad $w = \int_{n_1}^{n_2} \mu(n)\,\mathrm{d}n$ (za promjenu množine od n_1 do n_2; ovdje je $\mu(n)$ kemijski potencijal promatrane komponente kad joj je množina n);

- Električni rad $w = \int_a^b \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r$ (rad izvršen za pomicanje naboja q_1 od udaljenosti $r = a$ do udaljenosti $r = b$ u odnosu na naboj q_2; $k_e = 8{,}99 \cdot 10^9\,\mathsf{N\,m^2\,C^{-2}}$ je Coulombova konstanta).

[13]Za pomake duž krivulje trebat će nam krivuljni integrali, vidi poglavlje **??**.

[14]Reverzibilna ekspanzija/kompresija može se zamisliti kao niz ireverzibilnih ekspanzija/kompresija, kod kojih su promjene volumena infinitezimalno male. Kako se kod ireverzibilne promjene volumena izvršeni rad dobiva kao umnožak konačnog tlaka i iznosa promjene volumena, formula za reverzibilnu ekspanziju/kompresiju može se shvatiti kao specijalni slučaj definicije određenog integrala, vidi sliku 5.11.

Primjer 170. *Po drugom Newtonovom zakonu vrijedi $F(t) = m\dot{v}(t)$ te je odgovarajući mehanički rad pri pravocrtnom pomaku od a do b jednak*

$$w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = \{\,\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t\} =$$

$$= m\int_a^b \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} v\,\mathrm{d}t = m\int_{v_a}^{v_b} v\,\mathrm{d}v = \frac{m(v_b^2 - v_a^2)}{2} = \Delta E_{\mathsf{k}}.$$

Dakle, za svaku silu je pripadni mehanički rad jednak promjeni kinetičke energije.

S druge strane, ako sila F (neprekidno) ovisi samo o poziciji tijela x, onda mora postojati antiderivacija od F, tj. funkcija pozicije $-V$ takva da je $-V'(x) = F(x)$ za sve x i tu antiderivaciju zovemo potencijalnom energijom tijela. U tom je slučaju $w = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = V_a - V_b = -\Delta V$. Općenito, sile za koje pripadni rad ne ovisi o putu, nego samo o početnoj i konačnoj poziciji (dakle, one koje imaju antiderivaciju $-V$ i ako se početna i konačna pozicija podudaraju, rad je 0), zovemo konzervativnim silama. Među konzervativne sile spadaju konstantna sila ($V(x) = -Fx + C$) i sila elastične opruge $F(x) = -kx$ ($V(x) = \frac{kx^2}{2} + C$). Za takve sile kombinacija prethodna dva rezultata daje

$$\Delta E_{\mathsf{k}} = -\Delta V,$$

tj. zakon očuvanja energije.

Primjer 171. *Rad potreban da se dva naboja iz beskonačnosti dovedu na razmak x (izvršen protiv unutarnje sile) jednak je radu potrebnom da se takvi naboji razdvoje s početnog razmaka R:*

$$w = \int_R^\infty \frac{k_e q_1 q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = \lim_{X\to\infty}\left(-\frac{k_e q_1 q_2}{X} + \frac{k_e q_1 q_2}{R}\right) = \frac{k_e q_1 q_2}{R}.$$

To vrijedi za svaki $R \geq 0$ te je posljednjim izrazom definiran elektrostatski potencijal za dva naboja na razmaku R.

Primjer 172. *Za idealni plin, reverzibilna promjena volumena od V_1 do V_2, uz konstantnu množinu i temperaturu, uzrokuje volumni rad*

$$w = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Ako se primjerice nekom idealnom plinu pri izotermnoj ekspanziji volumen povećao se osam puta, $w = -nRT\ln 8$.

Određeni integrali se koriste i za određivanje promjena iznosa termodinamičkih funkcija stanja (entalpije, entropije, ...). Funkcije stanja su funkcije čije promjene tijekom bilo kojeg procesa ovise samo o početnom i konačnom stanju, a ne i o samom procesu, tj. međustanjima.

Primjerice, promjena entalpije H se *za izobarne procese* računa kao

$$\Delta H = \int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} C_p(T)\,\mathrm{d}T,$$

a veza između promjene entalpije i unutrašnje energije *za izobarne procese* dana je s

$$\Delta H = \Delta U + p\Delta V$$

(ΔV je razlika konačnog i početnog volumena). Ovdje je zgodno napomenuti da predznak promjene entalpije određuje je li proces egzoterman ($\Delta H < 0$) ili endoterman ($\Delta H > 0$).

Primjer 173. *Odredimo ΔH i ΔU ako se množina n dušika izobarno (dakle, pri konstantnom tlaku p) zagrije od T_i do T_f, uz pretpostavku da se pritom dušik ponaša kao idealan plin i da se za takvo zagrijavanje molarni toplinski kapacitet $C_{p,\mathrm{m}} = \frac{C_p}{n}$ može aproksimirati funkcijom oblika*

$$C_{p,\mathrm{m}}(T) = a + bT + \frac{c}{T^2}.$$

Imamo prvo

$$\Delta H = \int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} C_p(T)\,\mathrm{d}T = \int_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} an + bnT + \frac{cn}{T^2}\,\mathrm{d}T =$$

$$= anT + bn\frac{T^2}{2} - \frac{cn}{T}\bigg|_{T_\mathrm{i}}^{T_\mathrm{f}} = an(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i}) + \frac{bn}{2}(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i})^2 - cn\left(\frac{1}{T_\mathrm{f}} - \frac{1}{T_\mathrm{i}}\right).$$

Iz pretpostavke da imamo idealni plin slijedi $\Delta V = \frac{nR}{p}(T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i})$ pa je

$$\Delta U = \Delta H - nR\Delta T.$$

Treći tip primjena integrala vezan je za određivanje prosječne vrijednosti neprekidne funkcije na segmentu, a to se temelji na teoremu srednje vrijednosti za integrale. Naime, znamo da neprekidne funkcije na segmentu postižu svoju minimalnu i maksimalnu vrijednost m i M (to nam kaže Bolzano-Weierstraßov teorem). Prosječna vrijednost se, logično, mora nalaziti negdje između minimalne i maksimalne vrijednost, ali gdje? Uzmimo za ilustraciju situaciju pozitivne funkcije, iako se zaključivanje na isti način može proširiti i na sve neprekidne funkcije na segmentu. Znamo da je za takve funkcije f integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ isto što i (crvena) površina omeđena grafom, vertikalama $x = a$ i $x = b$ te s x-osi (slika 5.12). Ta površina je u biti isto što i „ukupna” vrijednost funkcije f na tom intervalu (jer je određeni integral poopćenje sumiranja na infinitezimalne razmake). Također, ona je sigurno između površina pravokutnika koji su jednako široki kao i ta površina, ali su im visine m odnosno M. Očigledno postoji pravokutnik iste širine koji ima točno površinu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (plavo na slici 5.12). Njegova visina $\overline{f}$ je prosječna vrijednost f na intervalu $[a, b]$. Za taj pravokutnik vrijedi da je dio crvene površine iznad njega jednak manjcima crvene površine ispod njega.

Gornja razmatranja formaliziraju se kao:

Teorem 17 (Teorem srednje vrijednosti za integrale)**.** *Ako je f neprekidna na $[a, b]$ i m je njena minimalna, a M maksimalna vrijednost na tom intervalu, onda je*

$$(b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)M,$$

odnosno postoji ordinata $\overline{f} \in [m, M]$ takva da je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{f} \cdot (b-a).$$

Dakle, prosječna (srednja) vrijednost neprekidne funkcije f na intervalu $[a, b]$, se računa kao $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ista formula, analognim argumentiranjem kao gore, koristi se i za po dijelovima neprekidne funkcije. Primijetite i da je formula konzistentna u smislu fizikalnih jedinica: Znamo da je jedinica integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jednaka umnošku jedinica od $f(x)$ i x, a to se dijeli s razlikom b i a (koji su nezavisne varijable, dakle imaju jedinicu od x) te rezultat, prosječna vrijednost od f, ima jedinicu kao i $f(x)$.

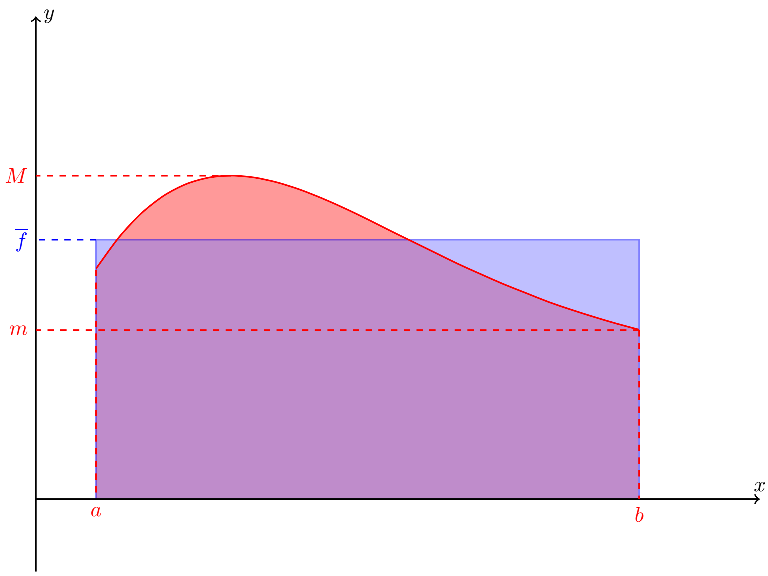
Primjer 174. *Kolika je prosječna temperatura patke iz primjera 97 tijekom pečenja? Vidjeli smo: U svakom trenutku t tijekom pečenja temperatura patke je*

$$\vartheta(t) = 200°\mathsf{C} - 198°\mathsf{C}e^{-kt\,\mathsf{min}^{-1}},$$

gdje je $k = \left(-\frac{1}{30}\ln\frac{92}{99}\right)\,\mathsf{min}^{-1} \approx 0{,}00244438\,\mathsf{min}^{-1}$. Patka je pečena nakon $T = \frac{\mathsf{min}^{-1}}{k}\ln\frac{198}{200-80} \approx 204{,}868$ min. Dakle, tražimo

$$\overline{\theta} = \frac{1}{T-0}\int_0^T \theta(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\cdot\left(200°\mathsf{C}\cdot T + \frac{1}{k}198°\mathsf{C}(e^{-kT\,\mathsf{min}^{-1}} - 1)\right) =$$

$$= 200°\mathsf{C} + \frac{120°\mathsf{C} - 198°\mathsf{C}}{\ln\frac{198}{120}} \approx 44{,}2°\mathsf{C}.$$



Slika 5.12: Teorem srednje vrijednosti za integrale.

Primjer 175. *Tokom jednog dana utvrđeno je da je ovisnost temperature θ (u °C) o vremenu t (u satima od podneva: $-12\,\mathrm{h} \le t \le 12\,\mathrm{h}$) dobro opisana formulom $\theta(t) = 0{,}001\,{}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{h}^{-4}\,t^4 - 0{,}280\,{}^\circ\mathrm{C}\,\mathrm{h}^{-2}\,t^2 + 25^\circ\mathrm{C}$. Tada je prosječna vrijednost temperature tog dana*

$$\frac{1}{24\,\mathrm{h}}\int_{-12\,\mathrm{h}}^{12\,\mathrm{h}} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 15{,}7^\circ\mathrm{C}.$$

Primjer 176. *Kolika je prosječna gustoća nehomogenog štapa i gdje mu je centar mase? Uzmimo da je duljina štapa L i da je ovisnost mase opisiva kao neprekidna funkcija udaljenosti od jednog kraja: $m(x)$, $0 \le x \le L$ (dakle, pretpostavljamo da je masa uniformno raspoređena duž štapa, tj. da $\Delta m/\Delta x$ ne ovisi o duljini dijela Δx). Tada je ovisnost gustoće o poziciji opisiva kao $\rho(x) = m'(x)$. Ukupna je masa štapa u tom slučaju*

$$M = \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x,$$

prosječna gustoća je

$$\overline{\rho} = \frac{M}{L} = \frac{1}{L}\frac{\int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x}{,}$$

a poziciju X centra mase dobijemo iz uvjeta

$$MX = \int_0^L x\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Posljednji je naime integral infinitezimalna verzija sume $\sum m_i x_i$.

Posljednji tip primjena vezan je za vjerojatnosni račun, posebice u kvantnoj teoriji. U kvantnoj teoriji se elektroni opisuju valnim funkcijama ψ koje zovemo orbitalama. One su kompleksne funkcije koje *indirektno* opisuju vjerojatnost nalaženja elektrona u prostoru. Pozicija elektrona, a stoga i njegova udaljenost r do jezgre atoma, smatraju se neprekidno promjenjivima. Ta udaljenost r je stoga primjer kontinuirane slučajne varijable.

Općenito, pod slučajnim pokusom podrazumijevamo svaku aktivnost čiji ishod nije moguće unaprijed predvidjeti. Skup Ω svih mogućih ishoda nekog slučajnog pokusa zove se vjerojatnosni prostor, a njegovi elementi zovu se elementarni događaji. Podskupovi A vjerojatnosnog prostora Ω zovu se događaji. Slučajna varijabla je funkcija X koja svakom mogućem ishodu (elementarnom događaju) pridružuje realan broj (obično neko svojstvo rezultata pokusa), dakle $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Ako X može poprimiti samo konačno ili prebrojivo mnogo vrijednosti, govorimo o diskretnoj slučajnoj varijabli, a inače o kontinuiranoj (neprekidnoj). Slučajne varijable omogućuju svođenje različitih vrsta vjerojatnosnih prostora, s različitim tipovima elementarnih događaja, na skupove (realnih) brojeva.

Primjer 177. *Funkcija* X *koja ishodu bacanja novčića (pismo ili glava) pridružuje* 0 *ili* 1 *je diskretna slučajna varijabla. Funkcija* Y *koja slučajno odabranom studentu pridružuje njegovu visinu je kontinuirana slučajna varijabla.*

Vjerojatnost je funkcija p koja svakom slučajnom događaju $A \subseteq \Omega$ pridružuje njegovu vjerojatnost $p(A) \in \mathbb{R}$, pri čemu mora vrijediti:

1. Vjerojatnost nikojeg događaja ne može biti negativna: $p(A) \geq 0$ za sve A.

2. Sigurno će se desiti neki ishod iz vjerojatnosnog prostora: $p(\Omega) = 1$.

3. Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots,$ međusobno isključuju (nemaju zajedničkih elemenata), vjerojatnost da se dogodi neki od njih jednaka je zbroju njihovih vjerojatnosti: $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots$ ako $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve parove indeksa i, j.

Iz navedenih svojstava slijedi da su vjerojatnosti uvijek brojevi između 0 i 1.

Primijetimo da se za svaki događaj A („dogodilo se A") on i njegov suprotni događj $A^c = \Omega \setminus A$ („nije se dogodio A") međusobno isključuju, a u uniji daju čitav Ω. Stoga je $p(A) + p(A^c) = p(\Omega) = 1$, te vrijedi sljedeća formula za vjerojatnost suprotnog događaja:

$$p(A^c) = 1 - p(A).$$

U slučaju kontinutiranih slučajnih varijabli koje mogu poprimiti vrijednosti u intervalu $I \subseteq R$ (obično je $I = \mathbb{R}$ ili $I = \mathbb{R}_+$, u svakom slučaju I je slika funkcije X) u pravilu postoji funkcija gustoće vjerojatnosti $\varphi : I \to \mathbb{R}$ takva da se vjerojatnost da takva slučajna varijabla poprimi vrijednost između a i b može izračunati kao

$$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kako vjerojatnost ne može nikad biti negativna, a a i b općenito mogu biti i beskonačnosti, vidimo da kao funkcije gustoće u obzir dolaze samo pozitivne funkcije koje i lijevo i desno imaju x-os kao horizontalnu asimptotu. Vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednosti između a i b se dakle može poistovjetiti s površinom koju s osi x zatvara njena funkcija gustoće φ, između vertikala $x = a$ i $x = b$. To je vjerojatnosna interpretacija određenog integrala.

Posebno, ako je φ funkcija gustoće slučajne varijable X, vjerojatnost $p(X = a)$ je 0 za sve vrijednosti a jer bi se morao računati $\int_a^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, a taj je uvijek 0. Dakle, za kontinuirane slučajne varijable je vjerojatnost da poprime bilo koju pojedinačnu vrijednost uvijek 0. Vidimo dakle da iznosi $\varphi(x)$ *nisu* vjerojatnosti da X poprimi vrijednost x, ali za jedinični raspon $x \pm 1/2$ vjerojatnost da kontinuirana slučajna varijabla postiže vrijednosti u tom rasponu ($p(x - 1/2 \leq X \leq x + 1/2)$) možemo ugrubo procijeniti s $\varphi(x)$.

Nadalje, kako je $\int_I \varphi(x)\mathsf{d}x = 1$ (posljednji se uvjet zove normiranost funkcije gustoće). Ako uzmemo da je $X = 0$ izvan I prethodni integral poprima oblik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathsf{d}x = 1.$$

Često je potrebno odrediti i očekivanje (očekivana ili prosječna vrijednost) slučajne varijable X. Ona se definira kao

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primijetimo i da kod kontinuiranih slučajnih varijabli imamo $p(X \leq b) = p(X < b)$, $p(X \geq a) = p(X > a)$,

$$p(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

a zbog već navedene formule za vjerojatnost suprotnog događaja imamo i

$$p(X \geq a) = 1 - p(X \leq a) = \int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Valne funkcije iz kvantne teorije definiraju određene funkcije gustoće vjerojatnosti. Konkretno, za valnu funkciju ψ (koja je, rekli smo, kompleksna) je funkcija $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ uvijek realna. Prema Bornovoj interpretaciji valne funkcije, funkcija $|\psi|^2$ je funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje elektrona u prostoru (i ovisi o tri prostorne varijable; o tome više u poglavlju **??**). Često se koristi i radijalna gustoća vjerojatnosti

$$\phi(r) = 4\pi r^2|\psi|^2,$$

koja opisuje vjerojatnost da elektron bude na nekoj udaljenosti r od jezgre. Ona je funkcija samo jedne varijable r koja opisuje udaljenost elektrona do jezgre, dakle je domena od ϕ interval $[0, \infty\rangle$.

Primjer 178. *Odredimo prosječni (dakle, očekivani) polumjer vodikove 1s orbitale. 1s orbitala vodikova atoma je valna funkcija* $\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^3\pi}} \cdot e^{-r/a_0}$, *gdje je* $a_0 = 52{,}9\,\mathrm{pm}$ *Bohrov radijus (za* $r \geq 0$*). Stoga je radijalna funkcija gustoće*

$$\phi_{1,0,0}(r) = 4r^2\pi\psi_{1,0,0}^2(r) = \frac{4}{a_0^3}r^2e^{-2r/a_0}$$

pa je

$$\langle r\rangle = \int_0^{+\infty} r\phi(r)\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a_0^3}\int_0^{+\infty} r^3e^{-2r/a_0}\,\mathrm{d}r.$$

Koristeći formulu 5.2 dobivamo

$$\langle r\rangle = \frac{4}{a_0^3}\cdot\frac{3!}{(2/a_0)^4} = \frac{3}{2}a_0.$$

Uočite: Prosječna tj. očekivana udaljenost elektrona od jezgre je $\frac{3}{2}$ *Bohrova radijusa, dok je udaljenost za koju je* $\psi_{1,0,0}^2$ *maksimalna („najvjerojatnija" udaljenost) jednaka Bohrovom radijusu. Dakle: Očekivani rezultat ne mora biti isto što i rezultat koji odgovara maksimumu funkcije gustoće (nije svaka distribucija vjerojatnosti normalna). No, kako* r *može poprimiti bilo koju vrijednost u intervalu* I*, prema već spomenutom je vjerojatnost da 1s elektron nađemo točno na nekoj udaljenosti od jezgre, pa bila to i „najvjerojatnija" udaljenost* a_0 *ili očekivana* $\frac{3}{2}a_0$*, jednaka je nuli. Jedine nenul vjerojatnosti koje možemo odrediti u slučaju da je vjerojatnost opisana na nekom intervalu definiranom i neprekidnom funkcijom gustoće, su vjerojatnosti da rezultat bude unutar nekog intervala. Primjerice, vjerojatnost da će naš elektron biti na udaljenosti između* a_0 *i* $\frac{3}{2}a_0$ *jednak je površini ispod grafa od* $\phi_{1,0,0}$ *i između navedenih apscisa (iznosi* $\int_{a_0}^{3a_0/2}\phi_{1,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = (10e-17)/(2e^3) \approx 25{,}3\%$*.*

Primjer 179. *Odredimo konstantu normiranja N 2s orbitale vodikova atoma, tj. valne funkcija $\psi_{2,0,0}(r) = N\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}$.*

Opet kao funkciju gustoće uzimamo radijalnu gustoću vjerojatnosti:

$$\phi_{2,0,0}(r) = 4N^2 \pi r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0},$$

a zahtjev normiranja za ovu funkciju glasi $\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 1$. Računanje integrala na lijevoj strani gornje jednakosti daje

$$\int_0^{+\infty} \phi_{2,0,0}(r)\,\mathrm{d}r = 4N^2\pi \int_0^{+\infty} r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}\,\mathrm{d}r = 32N^2 a_0^3 \pi$$

što treba biti jednako 1, dakle je konstanta normiranja

$$N = \sqrt{\frac{1}{32\pi a_0^3}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}.$$

Primjer 180. *Čestica u jednodimenzionalnoj kutiji je čestica koja se može gibati samo unutar segmenta $[0, a]$. Pripadne valne funkcije dane su (za različite kvantne brojeve $n \in \mathbb{N}_0$) formulom*

$$\psi_n(x) = A \sin\frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \le x \le a.$$

Odgovarajuća funkcija gustoće je prema Bornovoj interpretaciji

$$\varphi_n(x) = A^2 \sin^2\frac{n\pi x}{a} = \frac{A^2}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right).$$

Uvjet normiranja se ovdje svodi na

$$\int_0^a \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Imamo

$$\int_0^a \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{A^2}{2}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{A^2}{2}\cdot a,$$

dakle je $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

Valne funkcije čestice u jednodimenzionalnoj kutiji su za različite kvantne brojeve ortonormirane. To (vidi poglavlje 62) znači da su integrali njihovih umnožaka po njihovoj domeni jednaki 0. Računamo dakle

$$\int_0^a \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = A^2 \int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,$$

za što se lako pokaže da je za $m \neq n$ *jednako* 0.

Sami odredite očekivanu vrijednost $\langle x \rangle$ *položaja čestice i vjerojatnost* P *da se čestica nađe u srednjoj trećini kutije.*

Poglavlje 6

Klasična algebra vektora i analitička geometrija prostora

6.1 Klasična algebra vektora: Vektorski prostori V^2, V^3, $V^2(0)$ i $V^3(O)$

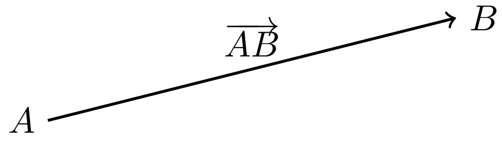
Linearna algebra je područje matematike koje se bavi vektorima i vektorskim prostorima. Vektori se često definiraju kao matematički objekti koji imaju iznos, smjer i orijentaciju. Takva definicija nije točna[1], no ona opisuje bitna svojstva onih vektora koji se nazivaju geometrijskim ili euklidskim vektorima. U kontekstu vektora spominju se i skalari, odnosno brojevi (u pravilu: realni ili kompleksni) s kojima možemo množiti vektore. Ako kao skalare koristimo realne brojeve, govorimo o realnim vektorskim prostorima. Svi vektorski prostori u ovom poglavlju su realni.

Mnoge fizikalne veličine se (uz odabir jedinice) mogu jednoznačno opisati brojevima: masa, gustoća, duljina, površina, volumen, energija, rad, ... Takve veličine zovu se skalarnim veličinama. Možemo reći i da su to one veličine koje se ne mijenjaju promjenom koordinatnog sustava u kojem opisujemo neki objekt.

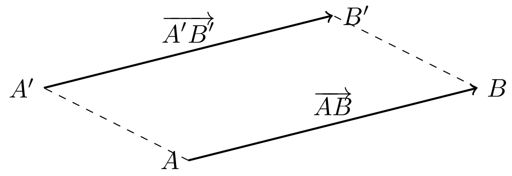
Geometrijski se vektori definiraju kao objekti koji imaju iznos (duljinu), smjer (pravac) i orijentaciju (smjer). Vektorske veličine su one fizikalne veličine za koje nije dovoljan jedan broj da ih opiše, primjerice brzina, ubrzanje, sila, dipolni moment, ... Pomoću vektora se mogu opisati i različita preslikavanja ravnine ili prostora, recimo translacije, rotacije, ...

U ovom poglavlju bavit ćemo se računom s geometrijskim vektorima u ravnini (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru V^2 odnosno

[1]Pravilna definicija glasi: Vektor je element vektorskog prostora. Što je vektorski prostor saznat ćemo kasnije, u poglavlju 8.2.



Slika 6.1: Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$.



Slika 6.2: Dvije orijentirane dužine koje predstavljaju isti vektor u prostoru V^2.

$V^2(O)$) i u uobičajenom trodimenzionalnom prostoru (za njih kažemo da se nalaze u vektorskom prostoru V^3 odnosno $V^3(O)$). Takvi vektori prikazuju se kao orijentirane dužine. Orijentirana dužina $\overrightarrow{AB}$ je dužina kojoj je definirano koja od dvije rubne točke je početak (A), a koja kraj (B), vidi sliku 6.1. U slučaju prostorâ $V^2(O)$ i $V^3(O)$ vektori su orijentirane dužine kojima je početak u fiksnoj točki (ishodištu) O, dakle elementi tih prostora (vektori) su radij-vektori $\overrightarrow{OT}$ različitih točaka T u ravnini odnosno prostoru. Prostore $V^2(O)$ i $V^3(O)$ zvat ćemo i dvo- odnosno trodimenzionalnim prostorima radij-vektora.

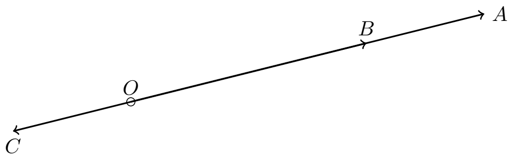
U prostorima V^2 i V^3 podrazumijeva se da sve orijentirane dužine koje se mogu dobiti translacijom [2] jedne te iste orijentirane dužine predstavljaju isti vektor $\overrightarrow{v}$. Bilo koja od tih orijentiranih dužina zove se reprezentantom vektora $\overrightarrow{v}$. Iako bi prema opisanom formalno u V^2 i V^3 trebalo imati različite oznake za vektor i njegov reprezentant, uobičajeno je pisati $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ ako je $\overrightarrow{AB}$ odabrani reprezentant vektora $\overrightarrow{v}$. U $V^2(O)$ i $V^3(O)$ svaki vektor ima samo jednog reprezentanta (onog s početkom O), a u V^2 i V^3 svaki vektor ima beskonačno mnogo reprezentanata.

Kao što je rečeno, geometrijski vektori su objekti koji su opisani s tri podatka: smjer, orijentacija i iznos.

Duljina dužine koja je reprezentant vektora $\overrightarrow{v}$ zove se iznos (duljina)

---

[2] Ovdje ćemo pod „$\overrightarrow{A'B'}$ je translatirana $\overrightarrow{AB}$" podrazumijevati: $ABB'A'$ je paralelogram, vidi sliku 6.2.



Slika 6.3: Vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ su istog smjera i iste orijentacije, a vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OC}$ su istog smjera i suprotne orijentacije.

vektora $\overrightarrow{v}$ i označava s $|\overrightarrow{v}|$ ili jednostavno s v. Ukoliko naši geometrijski vektori predstavljaju veličine čija fizikalna dimenzija nije duljina (npr. sile, brzine, ...), podrazumijeva se da su duljine geometrijskih vektora kojima ih prikazujemo razmjerne njihovim iznosima. Primjerice, dvije orijentirane dužine koje prikazuju sile iznosa 1 N i 5 N imat će duljine u omjeru 1 : 5.

Za vektore čiji reprezentanti leže na paralelnim pravcima kažemo da imaju isti smjer (smjer se ponekad naziva i pravcem). Ako za dva vektora *istog smjera* odaberemo reprezentante $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ s istim početkom O, kažemo da ta dva vektora imaju istu orijentaciju ako su točke A i B s iste strane točke O, a ako je O između A i B kažemo da imaju suprotnu orijentaciju (vidi sliku 6.3).

Nulvektor je (geometrijski) vektor $\overrightarrow{0}$ čijem se reprezentantu početak i kraj podudaraju. Vizualno se reprezentira točkom. Njegov iznos je 0, a uzima se da je istog smjera i iste orijentacije kao bilo koji drugi vektor. Za dani vektor $\vec{v}$ se s $-\vec{v}$ označava vektor istog iznosa i smjera kao $\vec{v}$, ali suprotne orijentacije (suprotni vektor vektora $\vec{v}$).

Ponekad se govori i o jediničnim vektorima. To ima smisla samo ako smo fiksirali jedinicu za mjerenje duljine. U tom slučaju sve vektore kojima je duljina 1 (jedinice) zovemo jediničnim vektorima. Uočimo da ako odaberemo bilo koju duljinu, primjerice duljinu brida a jedinične ćelije kubične kristalne strukture, kao jedinicu duljine, imamo jedinične vektore, odnosno stvarna duljina jediničnog vektora ovisi o odabiru jedinice i ne mora biti 1 m, 1 cm, 1 mm i sl., već može biti, primjerice, 223,45 pm.

Pomoću geometrijskih vektora se uz mnoge fizikalne probleme mogu rješavati i problemi određivanja razmaka (duljine dužine), kutova dvaju pravaca, površine (paralelograma, trokuta, ...) ili pak volumena (paralelepipeda, piramide, ...) iz poznavanja koordinata točaka koje određuju vrhove promatranog objekta. Pomoću geometrijskih vektora i njihovih koordinata se također opisuju kristalne strukture. Pravo je stoga prvo pitanje: Što su to kooordinate? Da bismo na to pitanje mogli odgovoriti, trebaju nam dvije algebarske operacije s vektorima.

6.1.1 Množenje geometrijskih vektora skalarom i zbrajanje geometrijskih vektora

Da bismo govorili o vektorskom prostoru, nije dovoljno opisati njegove elemente: Vektorski prostori su prije svega karakterizirani dvjema algebarskim operacijama, a to su zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Podsjećamo da su u kontekstu geometrijskih vektora skalari jednostavno realni brojevi.

Definicija 31 (Množenje geometrijskog vektora skalarom)**.** *Nulvektor pomnožen bilo kojim skalarom daje nulvektor, a bilo koji vektor pomnožen s nulom daje nulvektor:*

$$x \cdot \overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

za sve skalare x i vektore $\overrightarrow{v}$. Za sve ostale slučajeve umnožak sa skalarom daje vektor istog smjera, s tim da vrijedi:

- *ako je $\overrightarrow{v}$ vektor i x skalar, onda je duljina vektora $x\overrightarrow{v}$ jednaka $|x| \cdot |\overrightarrow{v}|$ i*
- *ako je $\overrightarrow{v}$ vektor i $x > 0$ skalar, onda $x\overrightarrow{v}$ ima istu orijentaciju kao $\overrightarrow{v}$, a ako je $x < 0$ skalar, onda $\alpha\overrightarrow{v}$ ima suprotnu orijentaciju od $\overrightarrow{v}$.*

Korisno je uočiti: Ako je fiksirana jedinica mjere, jedinični vektor istog smjera i orijentacije kao zadani vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ može se formulom zapisati kao

$$\overrightarrow{a_1} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a},$$

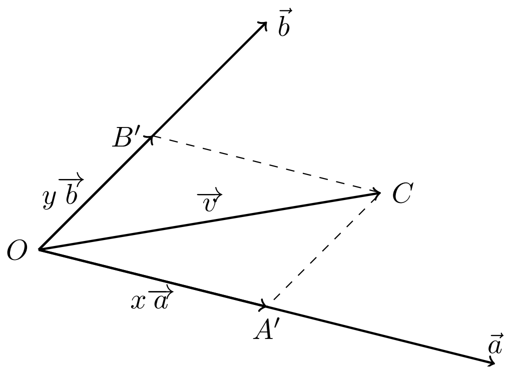
dakle vektor koji ima iznos x, a isti smjer i orijentaciju kao $\vec{a}$ dobijemo kao

$$\vec{v} = \frac{x}{a} \cdot \vec{a}. \tag{6.1}$$

Ako bi nam trebao vektor suprotne orijentacije, prethodni izraz naravno još pomnožimo s -1.

Za dva vektora istog smjera kažemo da su kolinearni. Iz definicije množenja vektorom skalarom je vidljivo: Množenjem vektora skalarom ne može se promijeniti smjer vektora, odnosno $\vec{a}$ i $x\vec{a}$ su kolinearni za svaki skalar x i svaki vektor $\vec{a}$. No, vrijedi i obrnuto: Za svaka dva kolinearna vektora postoji skalar takav da se množenjem jednog vektora s njime dobije drugi vektor. Formalno:

Propozicija 4 (Algebarska karakterizacija kolinearnosti)**.** *Geometrijski vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su kolinearni ako i samo ako postoji skalar x takav da je $\vec{v} = x\vec{w}$.*



Slika 6.4: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

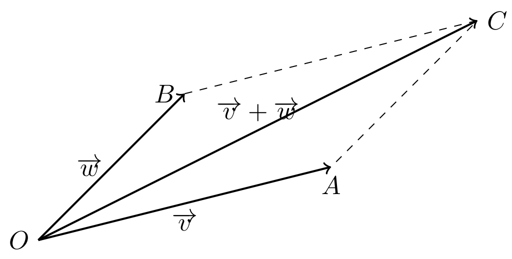
Naime, ako $\vec{w}$ prvo svedemo na jedinični vektor istog smjera i orijentacije, dakle na $\frac{1}{w}\vec{w}$, a taj zatim pomnožimo s $\pm v$ (ovisno o tome jesu li $\vec{v}$ i $\vec{w}$ iste ili suprotne orijentacije), dobit ćemo točno $\vec{v}$. Uočimo i da je gornja propozicija razlog zašto smo definirali da je nulvektor $\vec{0}$ istog smjera kao i svaki drugi vektor $\vec{w}$ (uzimanjem $x = 0$ vektor $\vec{v} = \vec{0}$ zadovoljava gornju propoziciju).

Prema prethodnom, uz odabir jednog nenul-vektora (ne mora biti jedinični!) svi vektori njegovog smjera opisani su jednim skalarom. Dakle, uz fiksirani vektor $\vec{a}$ svi vektori $\vec{v}$ njegovog smjera mogu se opisati jednom koordinatom x koja je skalar sa svojstvom $\vec{v} = x\vec{a}$.

No, što ćemo s vektorima u V^2 odnosno $V^2(O)$? Pogledajmo prvo sliku 6.4 na kojoj uzimamo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ fiksirani (i po potrebi translatirani tako da imaju zajednički početak O), a $\vec{v}$ je bilo koji drugi vektor u ravnini (dakle varijabilan). Za taj varijabilni vektor $\vec{v}$ također odabiremo reprezentanta $\overrightarrow{OC}$ s početkom u O. Ako nacrtamo paralelogram $OA'CB'$ kojem je jedna dijagonala dužina $\overline{OC}$, a stranice $\overline{OA'}$ i $\overline{OB'}$ leže na pravcima fiksiranih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, dobili smo dva vektora $\overrightarrow{OA'}$ i $\overrightarrow{OB'}$ smjera istog kao $\vec{a}$ odnosno $\vec{b}$. Prema prethodnom postoje skalari x odnosno y takvi da je $\overrightarrow{OA'} = x\vec{a}$ i $\overrightarrow{OB'} = y\vec{b}$. Da bismo rekonstruirali vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$ uvodimo drugu operaciju s geometrijskim vektorima, a to je zbrajanje, i pišemo $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Dakle, zbrajanje geometrijskih vektora definira se pomoću pravila paralelograma:

Definicija 32 (Zbrajanje geometrijskih vektora)**.** *Ako su $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ dva vektora i $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ njihovi reprezentanti sa zajedničkim početkom, onda je zbroj $\vec{v} + \vec{w}$ definiran ovako (vidi sliku 6.5: Dopunimo AOB do paralelograma $AOBC$ (dakle, $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ su dvije stranice tog paralelograma). Tada je $\overrightarrow{OC}$ reprezentant vektora $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.*



Slika 6.5: Definicija zbroja $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$.

Napomena 13. *Može se pokazati da se vektori u V^2 i V^3 mogu zbrajati koristeći pravilo trokuta: zbroj vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ... se može dobiti tako da odaberemo predstavnika od $\overrightarrow{b}$ s početkom u kraju od $\overrightarrow{a}$, predstavnika od $\overrightarrow{c}$ s početkom u kraju od $\overrightarrow{b}$, itd. Zbroj $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\dots$ je onda vektor određen orijentiranom dužinom čiji početak se podudara s početkom od $\overrightarrow{a}$, a kraj s krajem zadnjeg od zbrajanih vektora.*

Oduzimanje geometrijskih vektora je definirano kao pribrajanje suprotnog vektora:

$$\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w}).$$

Zbrajanje geometrijskih vektora ima svojstva poput zbrajanja brojeva, a množenje geometrijskih vektora skalarima ima svojstva poput množenja brojeva:

Zbrajanje vektora je asocijativno (kod uzastopnog zbrajanja ne trebaju nam zagrade), ima neutralni element (nulvektor pribrojen bilo kojem vektoru ne mijenja taj vektor), svaki vektor ima svoj suprotni vektor (zbroj vektora i njegovog suprotnog vektora daje nulvektor). Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: Za sve $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ iz istog od prostora V^2, V^3, $V^2(0)$, $V^3(O)$ vrijedi

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}),$$
$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v},$$
$$\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0},$$
$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.$$

Množenje vektora brojem 1 ga ne mijenja, množenje vektora skalarom je distributivno prema zbrajanju (možemo izlučivati skalar odnosno vektor) i kvaziasocijativno (ako množimo dva skalara i jedan vektor, smijemo seliti zagrade). Formulama se gornja svojstva izražavaju ovako: za sve $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ iz istog od prostora V^2, V^3, $V^2(0)$, $V^3(O)$ i za sve skalare x i $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} 1 \cdot \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{v}, \\ x(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= x\overrightarrow{v} + x\overrightarrow{w}, \\ (x+y)\overrightarrow{v} &= x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{v}, \\ (xy)\overrightarrow{v} &= x(y\overrightarrow{v}). \end{aligned}$$

Primjer 181. *Jedna od primjena zbrajanja geometrijskih vektora i množenja geometrijskih vektora skalarima je određivanje centra mase sustava od n čestica poznatih masa $m_1, \ldots, m_n$. Ako su relativne pozicije tih čestica s obzirom na odabrano ishodište opisane radij-vektorima $\vec{r_1}, \ldots, \vec{r_n}$, pozicija centra mase dana je radij-vektorom*

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i},$$

gdje je $M = \sum i = 1^n m_i$ ukupna masa svih čestica.

Primjer 182. *Sustav od n naboja iznosa q_i, $i = 1, \ldots, n$ na pozicijama s radij-vektorima $\vec{r_i}$ definira dipolni moment*

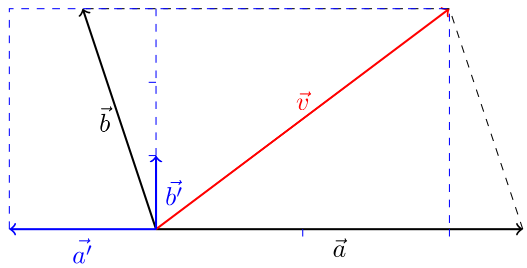
$$\vec{\mu} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r_i}.$$

Dipolni moment (osim u slučaju da je zbroj Q svih naboja 0) ovisi o odabiru ishodišta: Pomaknemo li ishodište za vektor $\vec{R}$, dipolni moment će se promijeniti za $-Q\vec{R}$.

Ponovimo bitno... Geometrijski vektori prikazuju se orijentiranim dužinama i određeni su svojim iznosom, smjerom i orijentacijom. Geometrijske vektore možemo međusobno zbrajati, što je definirano pravilom paralelograma, oduzimati, što je definirano kao pribrajanje suprotnog vektora, te množiti skalarima, što ne mijenja smjer vektora.

6.1.2 Baza i koordinate u V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$

Kao što smo vidjeli, ako gledamo samo jedan pravac, odabirom jednog nenulvektora tog smjera svi ostali se mogu opisati po jednim skalarom. Nakon definicije zbrajanja vektora moguće je, uz fiksiranje dvaju odnosno triju vektora, svaki vektor iz V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$ prikazati s po dva odnosno tri skalara.



Slika 6.6: Koordinate vektora ovise o odabiru baze.

Definicija 33 (Baza i koordinate u V^2 odnosno $V^2(O)$)**.** *Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva fiksirana nekolinearna vektora u ravnini, njih nazivamo bazom, a svi ostali vektori ravnine mogu se jednoznačno opisati s po dva skalara (koje nazivamo koordinatama tih vektora): $\vec{v} = [x, y]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ (usp. sliku 6.4).*

Zadatak 38. *Zašto u definiciji baze za V^2 odnosno $V^2(O)$ tražimo nekolinearnost vektora baze?*

Primijetimo: Budući da je $\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{b}$, vektor $\vec{a}$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ uvijek ima koordinate $[1, 0]$. Analogno, vektor $\vec{b}$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ uvijek ima koordinate $[0, 1]$. No, koordinate vektora u ravnini op'cenito ovise o odabiru baze. Primjerice, na slici 6.1.2 isti vektor $\vec{v}$ u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ima koordinate $[1, 1]$, ali u bazi $\{\vec{a'}, \vec{b'}\}$ ima koordinate $[-2, 3]$.

Slično se dobije u trodimenzionalnom slučaju, pri čemu nam treba pojam (ne)komplanarnosti: Tri vektora u V^3 odnosno $V^3(O)$ nazivamo komplanarnim ako su paralelni istoj ravnini, odnosno ako bi uz odabir reprezentanata sa zajedničkim početkom sva tri reprezentanta bila u istoj ravnini.

Definicija 34 (Baza i koordinate u V^3 odnosno $V^3(O)$)**.** *Ako su $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tri fiksirana nekomplanarna vektora u prostoru (baza prostora), svi ostali vektori ravnine mogu se jednoznačno opisati s po tri skalara (koordinate vektora): $\vec{v} = [x, y, z]$ znači da je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.*

Zadatak 39. *Zašto smo za bazu trodimenzionalnog prostora tražili da ju sačinjavaju nekomplanarni vektori? Koje su koordinate od $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ s obzirom na bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$?*

Kao što je vidljivo iz definicija (i ilustracija), baza bilo kojeg od vektorskih prostora V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$ ne mora se sastojati od međusobno okomitih vektora, niti vektori baze moraju biti iste (jedinične) duljine. Jedini zahtjevi su nekolinearnost (za dvodimenzionalni slučaj) odnosno nekomplanarnost (za trodimenzionalni slučaj). Smisao baze je opisati *sve* vektore prostora V^2 i $V^2(O)$ s po dva realna broja, odnosno sve vektore prostora V^3 i $V^3(O)$ s po tri realna broja (koordinatama). Pritom koordinate ovise o odabiru baze, ali kad znamo bazu, dalje se sva geometrijska priča o vektorima svodi na algebru.

Primjer 183. *Ako netko govori o vektoru $\vec{v} = [2, -1, 3]$ u prostoru, to nije jednoznačno određeno bez da kaže obzirom na koju bazu su koordinate dane. Ako znamo da se radi o koordinatnom zapisu obzirom na bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, onda je $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$.*

Primjer 184. *Pogledajmo sliku 6.6. Ako vektor $\vec{v}$ opisujemo u bazi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ (crno i crveno), vidimo $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$, dakle su mu koordinate $[1, 1]$. Ako pak vektor $\vec{v}$ opisujemo u bazi $\{\vec{a'}, \vec{b'}\}$ (plavo i crveno), vidimo $\vec{v} = -2\vec{a'} + 3\vec{b}$, dakle su mu u toj bazi koordinate $[-2, 3]$.*

Kako vidimo iz prethodnog primjera, koordinate vektora ovise ne samo o njemu, nego i o odabranoj bazi.

Primjer 185. *Poznato je da se triklinski kristalni sustav sastoji od kristala čija se jedinična ćelija može opisati kao paralelepiped s bridovima različitih duljina ($a \neq b \neq c \neq a$) koji tvore međusobno različite kuteve ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$), koji su također različiti od pravog kuta.*

Želimo li opisivati položaje npr. atoma u triklinskoj kristalnoj strukturi, pogodno ih je opisati pomoću smjerova i duljina bridova jedinične ćelije. Stoga se za takve opise obično kao ishodište bira vrh jedne jedinične ćelije, a kao baza se biraju vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ koji razapinju jediničnu ćeliju. Tako odabrana baza zove se kristalografska baza. Radij-vektori točaka jedinične ćelije s vobzirom na kristalografsku bazu imaju kao koordinate brojeve $x, y, z \in [0, 1\rangle$. Više o kristalografskim bazama reći ćemo kasnije.

Ukoliko su vektori baze međusobno okomiti, govorimo o ortogonalnoj bazi. Ako su još i iste, jedinične duljine, govorimo o ortonormiranoj bazi. Vektore ortonormiranih baza obično označavamo s $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$.

Pretpostavimo da je fiksirana baza $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ za V^2 ili $V^2(O)$. Tada se zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y'],$$

$$\alpha[x, y] = [\alpha x, \alpha y].$$

Analogno, ako je fiksirana baza $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ za V^3 ili $V^3(O)0$, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom može koordinatno zapisati s

$$[x, y, z] + [x', y', z'] = [x + x', y + y', z + z'],$$

$$\alpha[x,y,z]=[\alpha x,\alpha y,\alpha z].$$

Zadatak 40. *Izvedite gornje formule!*

Ponovimo bitno... Baza za V^2 ili $V^2(O)$ sastoji se od dva nekolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Koordinate vektora u V^2 ili $V^2(O)$ s obzirom na tu bazu definirane su kao skalari x i y sa svojstvom da je promatrani vektor jednak $x\vec{a}+y\vec{b}$.

Baza za V^3 ili $V^3(O)$ sastoji se od dva nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Koordinate vektora u V^3 ili $V^3(O)$ s obzirom na tu bazu definirane su kao skalari x, y i z sa svojstvom da je promatrani vektor jednak $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

U praksi želimo pomoću algebre (računa) iz poznatih koordinata vektora saznati koliko su dugi, pod kojim se kutovima nalaze, kakve površine i volumene određuju. Algebarske operacije koje to omogućuju su skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora.

6.1.3 Skalarni produkt vektora i računanje duljina i kutova

Skalarni produkt dvaju geometrijskih vektora je broj (skalar) koji se označava s $\vec{v}\cdot\vec{w}$. Ta je operacija osmišljena tako da ima svojstva analogna svojstvima množenja brojeva međusobno:

$$\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0,\quad \vec{v}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{0},$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v},\quad (\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}),$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}),\quad (x\vec{v})\cdot\vec{w}=x(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

za sve skalare x i sve vektore $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ iz istog od prostora V^2, $V^2(O)$, V^3 odnosno $V^3(O)$. Sam iznos $\vec{v}\cdot\vec{w}$ je definiran ovako:

Definicija 35 (Skalarni produkt)**.** *Po definiciji je*

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=vw\cos\varphi,$$

gdje je φ kut između vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Pritom se za φ uzima manji od dva moguća kuta, dakle je $0\leq\varphi\leq\pi$.

Primijetimo prvo da nam predznak skalarnog produkta daje informaciju o međusobnom položaju pomnoženih vektora: S obzirom na to da iznosi v i w ne mogu biti negativni, a da je $\cos\varphi$ pozitivan, nula ili negativan ovisno o tome je li φ šiljast, pravi ili tupi, zaključujemo: Ako je $\vec{v} \cdot \vec{w}$ pozitivan, nula odnosno negativan, vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zatvaraju šiljast, pravi odnosno tupi kut.

Nadalje, ako znamo iz koordinata vektora izračunati skalarni produkt, isti možemo iskoristiti za računanje iznosa vektora. Naime, iz definicije je vidljivo da je

$$v = +\sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}.$$

Također, ako znamo iz koordinata vektora izračunati skalarni produkt, isti možemo iskoristiti za računanje kuta između dva vektora. Naime, iz definicije je vidljivo da je

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{vw} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \sqrt{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}},$$

odnosno, jer je po definiciji φ između 0 i π,

$$\varphi = \arccos \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \cdot \sqrt{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}}},$$

Dakle, želimo imati način kojim iz koordinata vektora možemo izračunati njihov skalarni produkt, kako bismo to iskoristili za računanje njihovih iznosa i kutova.

Neka su svojim koordinatama zadana dva vektora $\vec{v} = [x, y, z]$ i $\vec{w} = [x', y', z']$. Po definiciji koordinata je $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ i $\vec{w} = x'\vec{a} + y'\vec{b} + z'\vec{c}$, gdje za bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ podrazumijevamo da su njezini vektori potpuno opisani, dakle da im znamo duljine a, b i c te njihove kutove $\alpha = \angle(\vec{b}, \vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a}, \vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Koristeći svojstva skalarnog produkta dobijemo:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}) \cdot (x'\overrightarrow{a} + y'\overrightarrow{b} + z'\overrightarrow{c}) =$$

$$= xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2 +$$

$$+(xy' + x'y)ab\cos\gamma + (xz' + x'z)ac\cos\beta + (zy' + z'y)ab\cos\alpha.$$

Dakle, ako znamo bazu, iz koordinata gornjom formulom možemo izračunati skalarni produkt bilo koja dva vektora zadana svojim koordinatama u toj bazi. Ako je baza ortogonalna, formula se pojednostavljuje na

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = xx'a^2 + yy'b^2 + zz'c^2,$$

a ako je još i ortonormirana,

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = xx' + yy' + zz'.$$

Primjer 186. *U nekoj ortogonalnoj bazi čiji su vektori redom duljina $a = 1$ m, $b = 2$ m i $c = 3$ m, vektori $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ su međusobno okomiti: $[-4, 1, 0]\cdot[1, 1, 0] = -4\cdot 1\,\mathrm{m}^2 + 1\cdot 4\,\mathrm{m}^2 = 0$. Da je pak baza bila ortonormirana, vektori s koordinatama $[-4, 1, 0]$ i $[1, 1, 0]$ nisu okomiti.*

Zadatak 41. *Koji kut trebaju zatvarati vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baze prostora V^2 ako znate da je $a = b$ i da su vektori koji obzirom na tu bazu imaju koordinate $[-2, 1]$ i $[0, 3]$ okomiti?*

Zbog $v = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ vidimo da se iznos vektora $\vec{v}$ iz njegovih koordinata računa po pravilu

$$v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 + 2xyab\cos\gamma + 2xyac\cos\beta + 2zyab\cos\alpha}.$$

Ako je baza ortogonalna, formula se pojednostavljuje na

$$v = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2},$$

a ako je još i ortonormirana, dobivamo dobro poznatu formulu

$$v = \sqrt{x^2a + y^2 + z^2}.$$

Zadatak 42. *Ako se dva atoma neke triklinske kristalne strukture nalaze na pozicijama $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ i $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$, kolika je njihova udaljenost ako znate da su parametri kristalne rešetke dani kao $a = 100$ pm, $b = 200$ pm, $c = 150$ pm, $\alpha = 65°$, $\beta = 85°$, $\gamma = 70°$.*

Primjer 187. *Za kristale kubičnog sustava kristalografsku bazu možemo smatrati ortonormiranom.*[3] *Ako su u jediničnoj ćeliji dva atoma na pozicijama $A = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right)$ i $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right)$, udaljenost ta dva atoma iznosi*

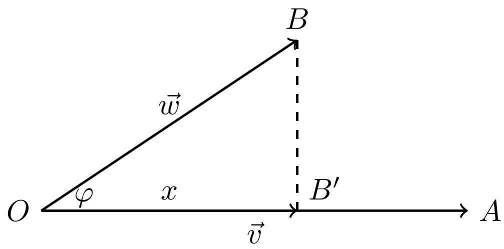
$$|AB| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = \left|\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0\right] - \left[\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}\right]\right| = \left|\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{36}} = \frac{\sqrt{14}}{6}.$$

Dakle, ako je duljina brida jedinične ćelije npr. $a = 320{,}3$ pm, udaljenost između atoma je $\frac{\sqrt{14}}{6}\cdot 320{,}3$ pm $= 199{,}7$ pm.

Ako bi se u istoj jediničnoj ćeliji nalazio još jedan atom na položaju $C = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ te ako su atomi vezani tako da je C vezan s A i B, kut veze $\varphi = \angle ACB$ je određen s

[3] Duljinu brida a jedinične ćelije proglasimo jediničnom duljinom.



Slika 6.7: Ortogonalna projekcija jednog vektora na drugi.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\,|\overrightarrow{CB}|} = \frac{\left[-\frac{3}{10},\frac{1}{5},-\frac{2}{15}\right]\cdot\left[-\frac{2}{15},-\frac{3}{10},\frac{1}{5}\right]}{\left|\left[-\frac{3}{10},\frac{1}{5},-\frac{2}{15}\right]\right|\,\left|\left[-\frac{2}{15},-\frac{3}{10},\frac{1}{5}\right]\right|} =$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{15}-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}-\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{5}}{\sqrt{\frac{9}{100}+\frac{1}{25}+\frac{4}{225}}\cdot\sqrt{\frac{4}{225}+\frac{9}{100}+\frac{1}{25}}} = \frac{-\frac{7}{150}}{\frac{133}{900}} = -\frac{6300}{19950} = -0{,}3158$$

te je $\varphi = 108°25'$.

Zadatak 43. *Kako biste zadatak iz gornjeg primjera riješili da se radilo o kristalu rompskog sustava s bridovima jedinične ćelije duljina redom* 300 *pm,* 500 *pm,* 800 *pm?*

Druga bitna primjena skalarnog produkta je računanje duljine ortogonalne projekcije jednog vektora na drugi. Recimo da želimo odrediti ortogonalnu projekciju vektora $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$ na vektor $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ i neka je ta ortogonalna projekcija vektor $\overrightarrow{OB'}$ (vidi sliku 6.7). Ta ortogonalna projekcija je očito kolinearna s $\vec{v}$. Neka je njena duljina x.

Tada iz pravokutnog trokuta OBB' dobivamo $x = w\cos\varphi$ pa množenje s v daje $xv = vw\cos\varphi = \vec{v}\cdot\vec{w}$. Dakle, duljina ortogonalne projekcije $\vec{w}$ na $\vec{v}$ je

$$x = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|}.$$

Primijetimo da se zapravo ne radi o duljini, jer x može ispasti negativan (ako je φ tup), već je duljina zapravo $|x|$, a ako je φ tup, onda projicirani vektor ima suprotnu orijentaciju od $\vec{v}$.

Kako su $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'}$ kolinearni, dobivamo (prema formuli 6.1) da je sam projicirani vektor jednak

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{x}{v}\vec{v}.$$

Primjer 188. *Rad izvršen djelovanjem sile* $\overrightarrow{F}$ *pri pomaku* $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1$ *je*

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{d} = Fd\cos\theta,$$

tj. jednak je duljini pomaka pomnoženoj s komponentom sile u smjeru pomaka (ortogonalnom projekcijom).

Za kraj priče o skalarnom produktu spomenimo jednu važnu nejednakost[4] koja vrijedi skalarni produkt:

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}|^2 \leq (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w}),$$

odnosno kraće

$$|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq vw.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ kolinearni.

Ponovimo bitno... Skalarni produkt vektora omogućuje računanje iznosa vektora i kutova među njima, a definiran je kao umnožak iznosa vektora i kosinusa kuta među njima. Ako je $\vec{v} \cdot \vec{w}$ pozitivan, nula odnosno negativan, vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zatvaraju šiljast, pravi odnosno tupi kut. Iznos vektora jednak je (pozitivnom) drugom korijenu od tog vektora skalarno pomnoženog sa samim sobom.

6.1.4 Vektorski i mješoviti produkt vektora, površine i volumeni

Iz škole je dobro poznata formula za računanje površine paralelograma kojemu su poznate duljine stranica i kut između njih. Ako su te duljine v i w, a kut φ, površina paralelograma je $vw\sin\varphi$. Dakle, ako znamo dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{w}$, površinu paralelograma kojeg određuju ($OACB$ na slici 6.5) možemo dobiti tako da im pomoću skalarnog produkta (kako je opisano u odjeljku 6.1.3) izračunamo iznose i kut, te pomnožimo te iznose i sinus kuta. No, nama je sad cilj tu površinu povezati s još nečim što je korisno u trodimenzionalnim razmatranjima, a to je određivanje vektora koji je okomit na dva zadana vektora (primijetimo da to u dvodimenzionalnom slučaju nema smisla, dakle se ovaj, kao i sljedeći, odjeljak odnosi samo na prostore V^3 i $V^3(O)$).

Prvo primijetimo da ako vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni, onda postoji samo jedan smjer koji je istovremeno okomit na oba. Ako pak znamo jedan, bilo koji, vektor $\vec{u}$ tog smjera, lako skaliranjem dobijemo proizvoljno dug i proizvoljno orijentiran vektor tog smjera (vidi formulu 6.1). Stoga nam treba

[4] Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

algebarska operacija koja iz $\vec{v}$ i $\vec{w}$ računa neki $\vec{u} \perp \vec{v}, \vec{w}$. Ta operacija je vektorski produkt.

Definicija 36 (Vektorski produkt). *Vektorski produkt dvaju vektora $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ u V^3 ili $V^3(O)$ je vektor $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ koji je okomit na oba vektora, iznos od $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ je $v \cdot w \cdot \sin\varphi$, tj. jednaka je površini[5] paralelograma razapetog s $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$, a orijentiran je tako da $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ poštuju pravilo desne ruke.[6]*

Po definiciji, produkt dva kolinearna vektora je nulvektor.

Napomena 14. *Uočimo da gornja definicija duljine vektorskog produkta povlači da bi mu jedinica bila kvadrat jedinice duljine, dakle bi duljina imala fizikalnu dimenziju površine, što baš i nije smisleno. Ako bismo pak dogovorno promijenili jedinicu duljine vektorskog produkta u polaznu jedinicu duljinu, duljina vektorskog produkta bi ovisila o odabranim polaznim jedinicama (recimo, vektorski produkt dvaju okomitih vektora od kojih je jedan dug 1 cm, a drugi 2 cm, imao bi duljinu $1 \cdot 2 = 2$ cm, ali ako bismo jedinicu duljine promijenili u mm isti taj vektorski produkt bi imao duljinu $10 \cdot 20 = 200$ mm $\neq 2$ cm).*

Dva su moguća rješenja tog problema. Prvi, u skladu sa standardnim matematičkim opisom vektorskog produkta, je sve duljine vektora doživljavati kao čiste brojeve (kao što to činimo primjerice s varijablama koje se nanose na koordinatne osi), a u konkretnim primjenama biti svijestan da se zapravo radi o stvarnim duljinama podijeljenim s jedinicom, koja u slučaju vektorskog (kao i skalarnog) produkta nije jedinica duljine, već površine. U tom duhu bilo bi i korištenje izraza „iznos" umjesto „duljina" vektora.

Drugi pristup (istovremeno i matematički i fizikalno konzistentan) bio bi tumačenje vektorskog produkta kao orijentirane površine, tj. mogla bi se kao definicija $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ uzeti da je to površina paralelograma određenog vektorima $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ koja je orijentirana proizvoljno dugim vektorom okomitim na paralelogram i orijentiranim u skladu s pravilom desne ruke.

Vektorski produkt se koristi u definicijama mnogih fizikalnih veličina.

Primjer 189. *Moment sile definiran je kao vektorski produkt radijvektora i sile: $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$, a kutni moment mase m oko točke je $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p}$, gdje je $\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v}$ linearni momoment.*

Zadatak 44. *Ako je $\overrightarrow{w} = -4{,}1\overrightarrow{v}$, koliko je $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$?*

---

[5] U jedinici koja je kvadrat jedinice u kojoj se mjere duljine vektora.

[6] Ako dlan desne ruke držimo tako da na njemu leži $\overrightarrow{v}$ te ako kad dlan preko manjeg kuta zakrećemo prema vektoru $\overrightarrow{w}$, onda palac pokazuje orijentaciju od $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.

Napomena 15. *Primijetimo da ako $\vec{v}$ i $\vec{w}$ nisu kolinearni, onda je $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$ uvijek baza prostora.*

Karakteristična svojstva vektorskog produkta su distributivnosti prema zbrajanju

$$\overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u},$$
$$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u},$$

kvaziasocijativnost $\alpha(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\alpha \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$, ortogonalnost

$$\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0, \quad (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{w} = 0,$$

i antikomutativnost $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = -\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$. Primijetimo da je antikomutativnost očigledna iz definicije vektorskog produkta, a ortogonalnost slijedi jer je $\vec{v} \times \vec{w}$ okomit na $\vec{v}$ pa im je skalarni produkt 0. Vrijedi i

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

$$(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u})\overrightarrow{v},$$
$$|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}|^2 = v^2 w^2 - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})^2$$

Vektorski produkt može poslužiti za računanje površina poligona iz koordinata njihovih vrhova: Svaki poligon se može triangulirati (rastaviti na trokute), a površina svakog trokuta jednaka je polovici površine odgovarajućeg paralelograma, tj. polovici iznosa vektorskog produkta vektora koji određuju dvije stranice trokuta.

Kako dobiti koordinate od vektora $\vec{v} \times \vec{w}$ ako su poznate koordinate od $\vec{v}$ i $\vec{w}$? Općenito će nam za to trebati bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tzv. recipročna (dualna) baza $\{\overrightarrow{a}^*, \overrightarrow{b}^*, \overrightarrow{c}^*\}$. Nju ćemo definirati u sljedećem odjeljku pa ćemo onda i opisati računanje vektorskog produkta iz koordinata (vidi str. 226).

Znamo da je volumen piramide jednak trećini volumena prizme s istom bazom i visinom. Nadalje, svako uglato tijelo se može triangulirati, tj. rastaviti na tetraedre (trostrane piramide). Stoga, ako znamo iz koordinata vrhova izračunati volumen paralelepipeda, znamo izračunati volumen svakog uglatog tijela.

Operacija kojom dobivamo volumen paralelepipeda razapetog s tri vektora $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ je, do na predznak, mješoviti produkt tih vektora: $V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

Definicija 37 (Mješoviti produkt)**.** *Mješoviti produkt triju vektora u prostoru definiran je s*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}).$$

Ako je $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ su komplanarni. Ako je $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) > 0$, vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ čine tzv. desnu bazu, a u suprotnom tzv. lijevu bazu. U svim standardnim situacijama uzimaju se desne baze.

Napomena 16. *U kristalografiji se paralelepiped određen vektorima baze $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ naziva jedinična ćelija. Kako se uvijek uzima desna baza, volumen jedinične ćelije može se formulom zapisati kao $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.*

Osnovno svojstvo mješovitog produkta je njegova ciklička invarijantnost:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Mješoviti produkt vektorâ s poznatim koordinatama $\vec{u} = [x, y, z]$, $\vec{v} = [x', y', z']$, $\vec{w} = [x'', y'', z'']$ računa se formulom

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Vratimo se pitanju izračunavanju vektorskog produkta iz koordinata vektora. U tu svrhu treba nam:

Definicija 38 (Recipročna (dualna) baza)**.** *Za odabranu desnu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, pripadna recipročna ili dualna baza definirana je s*

$$\overrightarrow{a}^* = \frac{1}{V}\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{b}^* = \frac{1}{V}\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}^* = \frac{1}{V}\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}.$$

Pritom je $V = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Napomena 17. *U kristalografiji se direktna i recipročna baza u pravilu gledaju u paru. Pritom prostor koordinatiziran kristalografskom bazom nazivamo direktnim prostorom, a ako je koordinatiziran recipročnom, recipročnim prostorom.*

Vektori $\overrightarrow{a}^*$, $\overrightarrow{b}^*$, $\overrightarrow{c}^*$ imaju sljedeća svojstva:

$$\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}^* \cdot \overrightarrow{c} = 1,$$

$$\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}^* \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}^* \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}^* \cdot \overrightarrow{b} = 0.$$

Naime, raznoimeni vektori iz polazne i recipročne baze su po gornjoj definiciji međusobno okomiti, pa su im skalarni produtki 0, a ako množimo dva istoimena, primjerice $\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{a}$, imamo

$$\overrightarrow{a}^* \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{V}\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 1.$$

Nadalje, primijetimo da ako je baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ ortogonalna, onda budući da je $\vec{a}^* \perp \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{b}^* \perp \vec{c}, \vec{a}$, $\vec{c}^* \perp \vec{a}, \vec{b}$, zaključujemo: Recipročna baza ortogonalne baze je ponovno ortogonalna baza. Nadalje, ako je polazna baza ortonormirana, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, onda je $V = 1$ i očigledno po definiciji vektorskog produkta $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, pa zaključujemo da je $\vec{i}^* = \vec{i}$, $\vec{j}^* = \vec{j}$, $\vec{k}^* = \vec{k}$, tj.: Ortonormirana baza je sama sebi recipročna.

Napomena 18. *Recipročna baza recipročne baze je polazna baza.*

Uzmimo dva vektora s koordinatama danim obzirom na bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$: $\overrightarrow{r}_1 = [u_1, v_1, w_1]$ i $\overrightarrow{r}_2 = [u_2, v_2, w_2]$. Imamo:

$$\overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{r}_2 = (u_1\overrightarrow{a} + v_1\overrightarrow{b} + w_1\overrightarrow{c}) \times (u_2\overrightarrow{a} + v_2\overrightarrow{b} + w_2\overrightarrow{c}) =$$

$$= V(v_1w_2 - v_2w_1)\overrightarrow{a}^* + V(w_1u_2 - w_2u_1)\overrightarrow{b}^* + V(u_1v_2 - u_2v_1)\overrightarrow{c}^*,$$

odnosno

$$[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2] = V \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}^* & \overrightarrow{b}^* & \overrightarrow{c}^* \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}.$$

To je tražena formula za računanje vektorskog produkta iz koordinata. S obzirom na to da je $\{\vec{i}^*, \vec{j}^*, \vec{k}^*\} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, za slučaj ortonormirane baze ta formula poprima oblik

$$[u_1, v_1, w_1] \times [u_2, v_2, w_2] = V \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix},$$

no općenito ćemo iz koordinata vektora izračunati koordinate njihova vektorskog produkta u recipročnoj, a ne u polaznoj bazi.

Ponovimo bitno... Vektorski produkt vektora je vektor okomit na dva vektora, koji ima iznos jednak površini njima određenog paralelograma, a orijentiran je po pravilu desne ruke. Vektorski produkt dva kolinearna vektora uvijek je jednak nulvektoru. Mješoviti produkt triju vektora je prvi skalarno pomnožen s vektorskim produktom druga dva. Njegov iznos je, do na predznak, jednak volumenu njima određenog paralelepipeda. Mješoviti produkt komplanarnih vektora je nula.

6.2 Analitička geometrija prostora $\mathbb{R}^3$

U analitičkoj geometriji ravnine se pomoću koordinata (uređenih parova realnih brojeva) proučavaju točke ravnine i geometrijski objekti: pravci, krivulje drugog reda, ... Od zanimanja uz pojedinačne točke su jednodimenzionalni objekti, tj. razne vrste krivulja u ravnini. U trodimenzionalnom prostoru razmatraju se i dvodimenzionalni skupovi — plohe. Najvažnija vrsta ploha u prostoru su ravnine.

Da bismo se mogli baviti analitičkom geometrijom prostora, potrebno je prvo odabrati koordinatni sustav. Kako je rečeno u prethodnom poglavlju, koordinatni sustav sastoji se od odabrane točke prostora (ishodište O) i baze prostora $V^3(O)$, dakle tročlanog skupa $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ nekomplanarnih vektora. Ako je kao baza odabrana desna ortonormirana baza govorimo o Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Zbog ortonormiranosti baze koja ga određuje, mnogi računi koji se odnose na objekte opisane u Kartezijevom koordinatnom sustavu su jednostavniji. Općenito, odnos vektora baze ćemo zadavati sa šest parametara: iznosima tih vektora (a, b, c) i kutevima između po dva od njih ($\alpha = \angle(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, $\beta = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$ i $\gamma = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$).

U prethodnom poglavlju smo također vidjeli da uz odabir koordinantog sustava svaku točku prostora možemo opisati uređenom trojkom koordinata (x, y, z). Prva koordinata zove se apscisa, druga je ordinata, a treća aplikata.

Koordinatne osi su brojevni pravci kroz ishodište kojima se smjerovi redom podudaraju sa smjerovima vektora odabrane baze. Uobičajeno je tri koordinatne osi zvati redom x-os, y-os i z-os (os apscisa, os ordinata i os aplikata). Na skicama, smjer drugog vektora baze (os ordinata) crta se horizontalno. Koordinatne ravnine su ravnine određene s po dvije koordinatne osi te govorimo o (x, y)-ravnini, (y, z)-ravnini i (x, z)-ravnini.

Objekti u prostoru opisuju se s jednom ili više jednadžbi s tri nepoznanice koje predstavljaju koordinate točaka tog objekta. Tri vrste objekata koje ćemo promatrati u ovom poglavlju su točke, pravci i ravnine (nul-, jedno- i dvodimenzionalni objekti u prostoru opisivi linearnim jednadžbama). Općenito, presjek objekata u prostoru pomoću analitičke geometrije određujemo rješavanjem sustava jednadžbi tih objekata; rješenja tog sustava su koordinate točaka presjeka.

6.2.1 Točke u prostoru

Za dvije točke $T = (x, y, z)$ i $T' = (x'y', z')$ njihova udaljenost jednaka je iznosu vektora $\overrightarrow{TT'}$, a ona se može računati kako smo već vidjeli na str. 220. Posebno, ako je odabrana baza ortonormirana dobije se formula za udaljenost dvije točke u Kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$d(T, T') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Zadatak 45. *Kako biste u općem kristalografskom sustavu izračunali udaljenost dviju točaka?*

Polovište dužine $\overline{TT'}$ ima koordinate $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$. Ta formula vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava.

6.2.2 Ravnine u prostoru

Pravac u koordinatnoj ravnini može se opisati jednadžbom oblika $ax+by=c$, tj. jednom linearnom jednadžbom s 2 nepoznanice koja povezuje koordinate točaka pravca. Analog takvog pristupa u prostoru,[7] tj. linearna jednadžba oblika

$$Ax + By + Cz = D$$

koja povezuje tri prostorne koordinate je opća jednadžba ravnine. Pritom koeficijenti A, B i C ne smiju sva tri biti jednaka nuli.

Najjednostavnije ravnine su koordinatne ravnine. Točke u (x, y)-ravnini imaju aplikatu jednaku nuli te je jednadžba (x, y)-ravnine

$$z = 0,$$

tj. $0x + 0y + 1z = 0$. Analogno je jednadžba (y, z)-ravnine

$$x = 0$$

i jednadžba (x, z)-ravnine

$$y = 0.$$

Sve jednadžbe koje se iz jednadžbe ravnine mogu dobiti njenim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju istu ravninu. Točka je u ravnini točno ako zadovoljava njenu jednadžbu.

Primjer 190. *Jednadžbom* $x + y - 2z = 5$ *zadana je ravnina. Ishodište* $(0, 0, 0)$ *ne leži u njoj jer* $0 + 0 - 2 \cdot 0 \neq 5$*, a točka* $(1, 8, 2)$ *leži u njoj jer je* $1 + 8 - 2 \cdot 2 = 5$.

Vidimo: Ravnina sadrži ishodište točno ako je koeficijent D jednak 0.

Koeficijenti A, B i C govore nam o nagibu ravnine prema koordinatnim osima, a D o udaljenosti ravnine od ishodišta: Što je $|D|$ veći, to je ishodište dalje od ravnine.

Ako je primjerice $A = 0$, onda jednadžba ima oblik $By + Cz = D$. U tom slučaju nije moguće jednoznačno odrediti sjecište ravnine s x-osi jer bi ono imalo koordinate $(x, 0, 0)$ te bi trebalo „riješiti jednadžbu” $0 = D$,

[7] Općenito, jedna jednadžba s n nepoznanica opisuje objekt dimenzije $n-1$ u n-dimenzionalnom prostoru. Možemo reći da općenito svaka jednadžba oduzima po jedan stupanj slobode (dimenziju) od objekta (prostora, ravnine, ...) na čije elemente se odnosi.

koja je samo istinita (ili neistinita) numerička jednakosti. Analogno zaključujemo: Ravnina jednadžbe $Ax + By + Cz = D$ je paralelna s osi apsica/ordinata/aplikata točno ako je koeficijent A odnosno B odnosno C jednak 0.

Primijetimo sad sljedeću važnu i korisnu činjenicu:

Propozicija 5. *Skup svih točaka za koje je skalarni produkt njihova radij-vektora $[x, y, z]$ s nekim vektorom $\vec{n} = [A, B, C]^*$ (kao i ranije, zvjezdica označava da su koordinate zadane s obzirom na recipročnu bazu) konstantan čini ravninu okomitu na smjer vektora $\vec{n}$.*

Iako u ovom tekstu uglavnom nismo davali dokaze tvrdnji, ovu ćemo dokazati jer je dio dokaza i jedna korisna formula. Vektor $[x, y, z]$ je po definiciji koordinata vektora $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, a $[A, B, C]^* = A\overrightarrow{a}^* + B\overrightarrow{b}^* + C\overrightarrow{c}^*$. Ako ih skalarno pomnožimo, koristeći distributivnost skalarnog produkta i svojstva skalarnih produkata jednog vektora baze s jednim vektorom recipročne baze (str. 225)

$$[x, y, z] \cdot [A, B, C]^* = Ax + By + Cz. \tag{6.2}$$

Dakle, skup svih točaka za koji je taj produkt konstantan (jednak nekom D) zadovoljava jednadžbu oblika $Ax + By + Cz = D$, tj. to je ravnina u prostoru. Uvrštavanjem $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ odnosno $(0, 0, y)$ u tu jednadžbu dobijemo da ta ravnina siječe koordinatne osi u točkama $P = (D/A, 0, 0)$, $Q = (0, D/B, 0)$, $R = (0, 0, D/C)$ (vidi i sliku 6.8). Stoga su $\overrightarrow{PQ} = [-D/A, D/B, 0]$ i $\overrightarrow{PR} = [-D/A, 0, D/C]$ dva vektora u toj ravnini. Pomnožimo ih s $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot [A, B, C]^* = \overrightarrow{PR} \cdot [A, B, C]^* = 0.$$

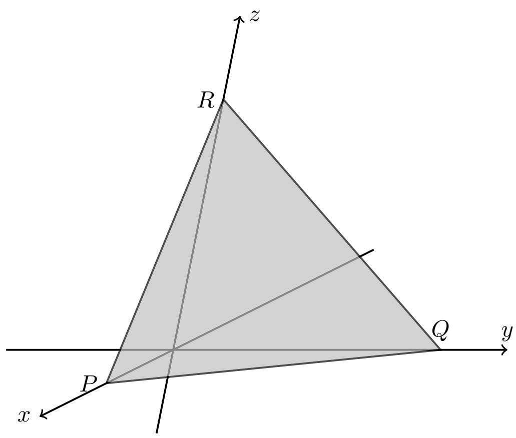
Dakle, $[A, B, C]^*$ je okomit na dva vektora ravnine $Ax+By+Cz = D$, tj. $\vec{n} = [A, B, C]^*$ je normala na ravninu $Ax+By+Cz = D$. Posebno, u Kartezijevom koordinatnom sustavu, trojka $[A, B, C]$ određuje vektor normale na smjer ravnine.

Ravnine možemo indirektno zadati na više načina. Jedan način zadavanja ravnine je koeficijentima A, B i C i jednom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ u toj ravnini. U tom slučaju jednadžba ravnine je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Primjer 191. *Jednadžba ravnine kojoj je $[2, 3, 4]^*$ vektor normale i koja sadrži točku $(1, 1, 1)$ je $2(x-1)+3(y-1)+4(z-1) = 0$, tj. $2x+3y+4z = 9$.*

Ravninu možemo zadati i jednom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ te s dva njoj paralelna vektora $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\overrightarrow{w} = [w_1, w_2, w_3]$. U tom slučaju prvo



Slika 6.8: Ravnina u prostoru.

odredimo vektor normale $\vec{n}$ kao vektorski produkt $\vec{v} \times \vec{w}$ (primijetimo da će mu koordinate automatski biti u recipročnoj bazi, vidi str. 226, tj. dobit ćemo potrebne A, B i C) i zatim primijenimo gornju formulu.

Ravnina se može zadati i trima (nekolinearnim) točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$. Jednadžbu ravnine tada dobijemo bilo rješavanjem sustava koji dobijemo ako u $Ax + By + Cz = D$ redom uvrstimo koordinate tih triju točaka, ili tako da slučaj svedemo na prethodni uz $\vec{v} = \overrightarrow{T_1T_2}$, $\vec{w} = \overrightarrow{T_1T_3}$ i $T_0 = T_1$, ili pak formulom

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako su jednadžbe ravnina $Ax+By+Cz+D = 0$ i $A'x+B'y+C'z+D' = 0$, uvjet paralelnosti ravnina možemo formulom zapisati kao

$$A : A' = B : B' = C : C'.$$

Naime, ravnine su paralelne ako su im kolinearni vektori normala, što su u našem slučaju $[A, B, C]^*$ i $[A', B', C']^*$, a kolinearni vektori zadani koordinatama u istoj (ovdje recipročnoj) bazi se prepoznaju po proporcionalnosti koordinata.

Primjer 192. *Ravnine* $2x + y - z = 4$ *i* $-x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = -2$ *su paralelne.*

Dvije ravnine su okomite ako su im vektori normala okomiti, odnosno ako im je skalarni produkt 0. Dakle, općenito bi na način opisan na str. 219

trebalo izračunati skalarni produkt $[A, B, C]^* \cdot [A', B', C']^*$ (dva vektora s koordinatama zadanim u *recipročnoj* bazi) i provjeriti iznosi li on 0. Za slučaj Kartezijevog koordinatnog sustava uvjet okomitosti ravnina se pojednostavljuje na formulu

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Primjer 193. *Odabran je Kartezijev koordinatni sustav. Nađimo ravninu okomitu na ravnine $x+y+z=1$ i $x-y+z=2$ koja prolazi ishodištem. Kako znamo jednu točku, $(0,0,0)$, radi se o ravnini s jednadžbom oblika $Ax+By+Cz=0$. Da bismo odredili koordinate vektora normale, iskoristimo uvjete okomitosti: $1A+1B+1C=0$ (okomitost na $x+y+z=1$) i $1A-1B+1C=0$ (okomitost na $x-y+z=2$). Tako smo dobili sustav $A+B+C=0$, $A-B+C=0$. Zbrajanjem jednadžbi sustava i zatim dijeljenjem s dva vidimo da mora vrijediti $C=-A$. Iz prve jednadžbe je onda $A+B-A=0$ tj. $B=0$. Dakle, vektori normale imaju koordinate oblika $[A, 0, -A]$ s proizvoljnim $A \neq 0$. Odaberimo jedan takav vektor, recimo s $A=1$. Imamo vektor normale $[1, 0, -1]$ te je tražena jednadžba ravnine $x-z=0$.*

Općenito se kut između ravnina definira se kao kut između njihovih normala, tj.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{n'}|}.$$

Pritom se bira $\varphi \in [0, \pi\rangle$.

Primjer 194. *Kut između ravnina $x-y-z=0$ i $x-y$-ravnine $z=0$, uz uvjet da je odabrani koordinatni sustav Kartezijev, dan je s*

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 - 1\cdot 0 - 1\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{0+0+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}},$$

te je $\varphi \approx 125,264°$.

Ponekad je zgodno ravninu opisati parametarskim jednadžbama. Parametarske jednadžbe ravnine u prostoru imaju oblik

$$x = x_0 + v_1 t + w_1 s,$$

$$y = y_0 + v_2 t + w_2 s,$$

$$z = z_0 + v_3 t + w_3 s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Pritom je (x_0, y_0, z_0) neka točka u ravnini, a $[v_1, v_2, v_3]$ i $[w_1, w_2, w_3]$ su dva nekolinearna vektora paralelna ravnini. To primjerice mogu biti vektori smjerova dva ukrštena pravca koji određuju ravninu. Za svaku vrijednost slobodnih parametara t i s dobivamo po jednu točku (x, y, z) u ravnini. Primijetite da je ravnina dvodimenzionalni objekt — upravo zato u njenim parametarskim jednadžbama imamo dva slobodna parametra.

Primjer 195. *Odredimo parametarske jednadžbe ravnine zadane općom jednadžbom*

$$2x - 5y + z = 2.$$

Izrazimo li primjerice $z = 2 - 2x + 5y$ i uzmemo da su $x = tb$ i $y = s$ slobodni parametri, dobijemo traženi parametarski oblik

$$x = t,$$

$$y = s,$$

$$z = 2 - 2t + 5s,$$

$$t, s \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 46. *Kako biste iz parametarskog oblika odredili opću jednadžbu ravnine?*

Češće od parametarskog oblika jednadžbe ravnine koristi se jedan specijalni tip opće jednadžbe ravnine. To je segmentni oblik jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Prednost tog oblika je da se iz koeficijenata direktno vide probodišta koordinatnih osi s ravninom (odsječci ravnine na koordinatnim osima): to su upravo brojevi m, n i p. Segmentni oblik jednadžbe se ne koristi ako ravnina prolazi kroz ishodište. Stvarne duljine odsječaka ravnine $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ na osima jednake su $|m|a$, $|n|b$ odnosno $|p|c$.

Primjer 196. *Segmentni oblik jednadžbe ravnine zadane s $2x - 5y + 3z = 60$ dobije se dijeljenjem sa 60 (odnosno, općenito dijeljenjem s D):*

$$\frac{x}{30} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{20} = 1.$$

Odsječci te ravnine na koordinatnim osima su redom 30, -12 i 20.

Ako je baza zadana s $a = 1$ m, $b = 2$ m i $c = 4$ m, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, probodišta ravnine s koordinantim osima su tada od ishodišta udaljena od ishodišta $30 \cdot 1$ *m*, $12 \cdot 2$ m i $20 \cdot 4$ *m.*

Segmentni oblik jednadžbe se u matematici ne koristi ako je ravnina paralelna nekoj od koordinatnih osi, no uz malu modifikaciju koristit ćemo ga i za te slučajeve zbog primjena u kristalografiji. Kako bismo to opravdali, potrebni su nam pojmovi rešetke i mrežne ravnine.

Definicija 39 (Rešetka)**.** *(Kristalna) rešetka je skup svih točaka prostora koje u (kristalografskom) koordinatnom sustavu imaju cjelobrojne koordinate.*[8]

U kristalografiji od zanimanja su samo određene, tzv. mrežne ravnine: to su ravnine koje prolaze kroz tri (i stoga beskonačno mnogo) točaka rešetke. Kako mrežne ravnine prolaze kroz točke rešetke, a njihove su koordinate cjelobrojne, slijedi da je uvijek moguće odabrati jednadžbu mrežne ravnine određenog smjera u kojoj su koeficijenti A, B, C, D cijeli brojevi. Drugo, vrijedi dodatna konvencija: Sve ravnine istog smjera kao $Ax+By+Cz=D$ se dijele u dvije skupine (s jedne i druge strane ishodišta)[9] i stoga pri skaliranju jednadžbe dozvoljavamo samo množenje i dijeljenje s *pozitivnim* cijelim brojevima. Naposlijetku, treba znati i da se (zbog načina rasta kristala[10]) međusobno paralelne mrežne ravnine smatraju ekvivalentnim, tj. iznos D u jednadžbi ravnine nam je irelevantan, odnosno od svih oblika $Ax+By+Cz=D$ s cijelim brojevima A, B, C i D uvijek možemo kao reprezentativan odabrati jedan u kojem su A, B i C maksimalno skraćeni (relativno prosti), a D je bilo koji *prirodan* broj. U takvom slučaju koristimo oznake h, k i l na mjestu A, B i C i nazivamo ih Millerovim indeksima.

Definicija 40 (Millerovi indeksi)**.** *Ako je $Ax+By+Cz=D$ proizvoljna mrežna ravnina i $hx+ky+lz=D$ njoj paralelna ravnina dobivena maksimalnim skraćivanjem A, B i C, bez da su im pritom mijenjani predznaci, onda se brojevi h, k i l nazivaju Millerovim indeksima promatranog smjera mrežnih ravnina i govorimo o ravninama smjera (hkl).*

Napomena 19. *U kristalografskoj notaciji mrežnih ravnina se negativni predznak piše kao povlaka iznad broja. Primjerice, Millerovi indeksi označeni kao $(10\overline{3})$ su redom 1, 0 i -3.*

S obzirom na već poznato, vidimo: Ako je neki Millerov indeks 0, ravnina je paralelna odgovarajućoj koordinatnoj osi. Nadalje, ravnine smjera (hkl) imaju vektor normale s koordinatama $[h,k,l]^*$.

[8] Ovako definirana rešetka zapravo se zove primitivna rešetka. Postoji sedam osnovnih tipova kristalnih rešetki, a koji su poznati pod nazivom kristalni sustavi.

[9] Razlikujemo ih jer nije svaki kristal centralno simetričan.

[10] Konkretan makroskopski kristal je poliedar omeđen plohama (stranama poliedra) čije ravnine pripadaju pojedinom skupu međusobno ekvivalentnih mrežnih ravnina.

Zadatak 47. *Kakve ravnine opisuju Millerovi indeksi* (110)*? A* (010)*?*

Uz Millerove indekse za opis smjera mrežne ravnine koriste se i Weissovi parametri, koji odgovaraju segmetnom obliku jednadžbe mrežne ravnine. Naime, ako imamo ravnine smjera (hkl), kao jednu od njih možemo odabrati onu kojoj je jednadžba $hx + ky + lz = v$, gdje je v najmanji (pozitivni) zajednički višekratnik od h, k i l. Dijeljenjem s v dobivamo segmentni oblik te jednadžbe, $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ s $m = v/h$, $n = v/k$ i $l = v/l$. Ako je neki od Millerovih indeksa bio 0, kao iznos odgovarajućeg odsječka pišemo ∞ te taj indeks ignoriramo pri određivanju v. Uzevši u obzir da su odsječci m, n i p stvarnih duljina ma, nb i pc, možemo i njih koristiti kao karakterizaciju danog smjera.

Definicija 41 (Weissovi parametri)**.** *Ako je $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ segmentni oblik jednadžbe one mrežne ravnine promatranog smjera za koji su m, n i p maksimalno skraćeni, onda razmjer $ma : nb : pc$ nazivamo Weissovim parametrima tog smjera. Pritom se koristi dodatna konvencija: Ako je smjer paralelan nekoj od koordinatnih osi, odgovarajući Weissov parametar je ∞.*

Gornje definicije i ideje najbolje je ilustrirati primjerom.

Primjer 197. *Ravnine smjera opisanog Millerovim indeksima $(3\overline{2}0)$ su paralelne s osi aplikata. Njihove jednadžbe su oblika $3x - 2y = D$ s prirodnim brojevima D. Ako uzmemo $D = 1$, dobili smo onu mrežnu ravninu tog smjera koja je najbliža ishodištu: $3x - 2y = 1$. Njeni odsječci na osima su $\frac{1}{3}$ i $-\frac{1}{2}$, dakle ta ravnina posjeduje probodišta s osima koja nisu točke rešetke. Ako bismo pak uzeli ravninu $3x - 2y = 6$ (6 je najmanji zajednički višekratnik od 3 i 2), njeni odsječci na osima su 2 i -3, tj. točke rešetke. Ako dozvolimo proširenje korištenja segmentnog oblika korištenjem simbola ∞ na slučaj paralelnosti s nekom osi (ovdje z-osi) dobijemo segmentni oblik jednadžbe te ravnine, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{\infty} = 1$ i njeni Weissovi parametri su $2a : \overline{3}b : \infty c$.*

Iz primjera vidimo i: Od svih ravnina smjera (hkl), ravnina $hx + ky + lz = 1$ je najbliža ishodištu,[11] no njena probodišta s koordinatnim osima ne moraju biti točke rešetke. Ako pak trebamo jednadžbu ravnine tog smjera najbližu ishodištu koja osi siječe isključivo u točkama rešetke, onda je to $hx + ky + lz = v$.

Primjer 198. *Promotrimo ravninu s jednadžbom $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} + \frac{z}{20} = 1$. Njeni odsječci na kristalografskim osima su 15, 10, 20. Weissovi parametri njenog smjera su stoga $3a : 2b : 4c$. Millerovi indeksi njenog smjera su* (463)*.*

[11] Podrazumijevamo da ne gledamo ravnine koje idu kroz ishodište.

Primjer 199. *Recimo da jedna ravnina danog smjera siječe koordinatne osi redom u točkama na udaljenostima* $2a$, b, $3c$ *od ishodišta. Pripadni segmentni oblik jednadžbe te ravnine je*

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$$

Millerovi indeksi tog smjera su (362).

Mrežne ravnine odabranog smjera pojavljuju se u jednakim razmacima. Označimo s d_{hkl} razmak dviju susjednih ravnina smjera (hkl) (tzv. međumrežni razmak). Lako je uvidjeti da je on jednak udaljenosti ishodišta O do njemu najbliže ravnine tog smjera, dakle do ravnine $hx + ky + lz = 1$. Udaljenost točke do ravnine definira se kao njena udaljenost do ortogonalne projekcije te točke na tu ravninu (to je probodište okomice na ravninu koja prolazi kroz zadanu točku). Označimo s Q ortogonalnu projekciju O na ravninu $hx + ky + lz = 1$ (slika 6.9). Imamo dakle

$$d_{hkl} = d(O, Q).$$

Neka su M, N i P probodišta naše ravnine s koordinatnim osima (pretpostavljamo da sva tri postoje, tj. $h, k, l \neq 0$). Već znamo (vidi izvod na str. 6.2) da su njihove udaljenosti od ishodišta redom $|OM| = \frac{a}{|h|}$, $|ON| = \frac{b}{|k|}$, $|OP| = \frac{a}{|l|}$.

Trokut $\triangle OMN$ je trokut kojemu znamo dvije stranice ($|OM|$ i $|ON|$) i kut među njima (to je γ jer su M i N na x-osi odnosno y-osi). Analogno u trokutima $\triangle ONP$ i $\triangle OPM$ znamo po dvije stranice i kut među njima. Stoga se u sva ta tri trokuta duljine trećih stranica ($|MN|$, $|NP|$ odnosno $|PM|$) mogu izračunati pomoću kosinusovog poučka.[12] Stoga je Heronovom formulom moguće izračunati površinu $P_{\triangle MNP}$, a ona je baza trostrane piramide $OMNP$, čija visina je točno naš traženi d_{hkl}. Volumen te piramide iznosi

$$V_{OMNP} = \frac{1}{3} d_{hkl} P_{\triangle MNP}.$$

S druge strane, taj volumen je trećina volumena paralelepipeda određenog vektorima $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{h}\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{k}\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{l}\overrightarrow{c}$, odnosno

$$V_{OMNP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3hkl}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \frac{V}{3hkl},$$

gdje je kao i ranije s V označen volumen jedinične ćelije. Izjednačavanjem gornjih dviju formula za V_{OMNP} dobivamo formulu

$$d_{hkl} = \frac{V}{hklP_{\triangle MNP}}, \tag{6.3}$$

[12]Ako je kut između poznate dvije stranice trokuta pravi, kosinosov poučak postaje Pitagorin poučak.

koja vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava, ali samo uz pretpostavku da nijedan od Millerovih indeksa nije jednak 0.

S druge strane, ako su χ, ψ, ω kutovi normale $\overrightarrow{n}$ smjera (hkl) s baznim vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, onda je

$$\cos\chi = \frac{h}{a}\cdot d_{hkl}, \quad \cos\psi = \frac{k}{b}\cdot d_{hkl}, \quad \cos\omega = \frac{l}{c}\cdot d_{hkl}.$$

Zbrojimo i dobijemo još jednu opću formulu, koja pak vrijedi za sve tipove koordinatnih sustava i sve h, k, l:

$$\frac{\cos^2\chi + \cos^2\psi + \cos^2\omega}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}. \tag{6.4}$$

Mana ove formule je što općenito χ, ψ i ω računamo iz d_{hkl} (vidi formulu 6.6).

Ako je koordinatni sustav ortgonalan koristeći Pitagorin poučak lako se provjeri da vrijedi $\cos^2\chi + \cos^2\psi + \cos^2\omega = 1$, pa dobivamo jednostavnu formulu za međumrežni razmak u ortogonalnim sustavima

$$\frac{1}{d_{hkl}^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}. \tag{6.5}$$

Ona vrijedi za sve h, k, l, ali samo uz uvjet $\alpha = \beta = \gamma = 90°$.

Primijetimo da formule 6.3, 6.4 i 6.5 vrijedila i ako h, k i l ne bi bili cijeli brojevi, tj. ako d_{hkl} definiramo kao udaljenost ravnine $hx + ky + lz = 1$ do ishodišta, neovisno o tome jesu li h, k i l cijeli ili ne, te formule omogućuju računanje udaljenosti ishodišta do ravnine u raznim koordinatnim sustavima.

Primjer 200. *Za neki kristal rompskog sustava utvrđeno je da razmak susjednih* (111) *ravnina iznosi* $d_{111} = 654$ pm. *Ako je* $a = 820$ *pm, odredite razmak između susjednih* (211) *ravnina! Iz* $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ *i* $\frac{1}{d_{111}^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ *oduzimanjem dobijemo* $\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{1}{d_{111}^2} + \frac{3}{a^2}$ *pa je* $d_{211} = 383$ pm.

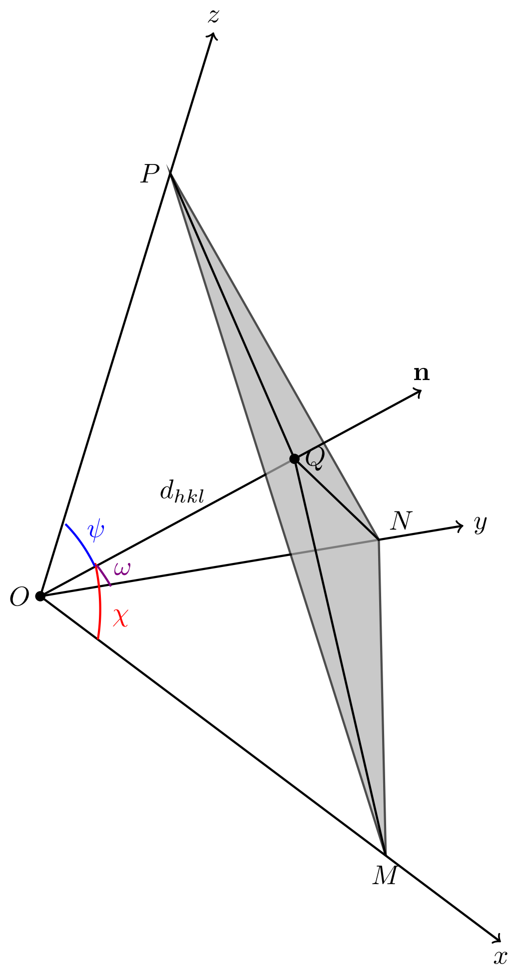
Primjer 201. *Neka je tetragonska jedinična ćelija zadana parametrima* $a = b = 4{,}820$ Å, $c = 6{,}288$ *Å. Tad međumrežni razmak ravnina smjera* (211) *dobivamo iz*

$$\frac{1}{d_{211}^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Uvrštavanje zadanih podataka daje $d_{211} = 2{,}039$ Å.

Neka je h visina paralelepipeda određenog bazom $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, npr. ako paralelogram određen s $\vec{b}$ i $\vec{c}$ gledamo kao osnovicu. Tada je

$$|\overrightarrow{c}^*| = \frac{1}{V}\cdot|\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{a}| = \frac{1}{h} = \frac{1}{d_{001}}.$$



Slika 6.9: Slika uz izvod formule za d_{hkl}.

Analogno dobivamo sljedeće važne veze između iznosa vektora recipročne baze i međumrežnih razmaka:

$$|\vec{a}^*| = \frac{1}{d_{100}}, \quad |\vec{b}^*| = \frac{1}{d_{010}}, \quad |\vec{c}^*| = \frac{1}{d_{001}}.$$

Odatle vidimo i da su jedinice „duljine” u recipročnom prostoru su recipročne jedinicama u direktnom prostoru — odatle naziv recipročni prostor.

Primjer 202. *Neki mineral kristalizira u heksagonskom kristalnom sustavu ($a = b$, c, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 120°$). uzući da $\vec{c}^*$ mora biti okomit na $\vec{a}$ i $\vec{b}$, a takav je i sam $\vec{c}$, zaključujemo da su za heksagonske kristale $\vec{c}^*$ i $\vec{c}$ istog smjera. Vektori $\vec{a}^*$ i $\vec{a}$ kao i $\vec{b}^*$ i $\vec{b}$ su različitih smjerova (ali svi leže u istoj ravnini). Volumen jedinične ćelije je $V = abc\sin\gamma$. Stoga je $\frac{1}{d_{100}} = |\vec{a}^*| = \frac{1}{abc\sin\gamma}bc\sin\alpha = \frac{1}{a\sin\gamma}$, dakle $d_{100} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogno se dobije $d_{010} = b\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $d_{001} = c$.*

Volumen jedinične ćelije recipročnog prostora iznosi

$$V^* = \frac{1}{V}.$$

Zadatak 48. *Dokažite gornju formulu!*

Označimo sad s $\mathcal{N}_{hkl}$ stvarnu[13] duljinu vektora $\vec{r}^* = [h, k, l]^*$. Udaljenost ravnine $hx + ky + lz = 1$ do ishodišta je d_{hkl}. Neka je P njeno probodište s x-osi. Iznos d_{hkl} jednak je duljini ortogonalne projekcije $\overrightarrow{OP}$ na $\vec{r}^*$ (koji je normalan na smjer (hkl)). Iznos te ortogonalne projekcije je $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{r}^*}{\mathcal{N}_{hkl}} = \frac{1}{\mathcal{N}_{hkl}}$. Dakle vrijedi :

$$d_{hkl}\mathcal{N}_{hkl} = 1.$$

Posljednja jednakost zove se temeljnim zakonom recipročne rešetke.

Primjer 203. *Neki kristal rompskog sustava ima parametre jedinične ćelije $a = 0{,}82\,\mathrm{nm}$, $b = 0{,}94\,\mathrm{nm}$ i $c = 0{,}75\,\mathrm{nm}$. Duljina radij-vektora točke koja u recipročnoj rešetki ima koordinate $(1, 0, \overline{2})^*$ je $\mathcal{N}_{10\overline{2}} = \frac{1}{d_{10\overline{2}}} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{4}{c^2}} = 2{,}9\,\mathrm{nm}^{-1}$.*

Temeljni zakon recipročne rešetka možemo iskoristiti za određivanje kuta ϑ između normale na smjer (hkl) (kao što znamo, to je vektor $\vec{n} = [h, k, l]^*$)

[13] Misli se: duljinu izraženu u recipročnoj jedinici duljine onoj jedinici koju koristimo u direktnom prostoru.

s bilo kojim zadanim vektorom $\overrightarrow{\sigma} = [u, v, w]$, uz pretpostavku da je poznat iznos d_{hkl}. Naime, po definiciji skalarnog produkta je

$$\cos\vartheta = \frac{\overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{\sigma}| \cdot |overrightarrown|}.$$

Brojnik zadnje formule je $[u, v, w] \cdot [h, k, l]^*$, što po formuli 6.2 iznosi $uh + vk + wl$. Nadalje, $|\overrightarrow{n}| = \mathcal{N}_{hkl} = \frac{1}{d_{hkl}}$, te formula poprima oblik

$$\cos\vartheta = \frac{uh + vk + wl}{|\overrightarrow{\sigma}|} d_{hkl}. \tag{6.6}$$

Iznos $|\overrightarrow{\sigma}|$ se lako izračuna metodama iz poglavlja o skalarnom produktu (odjeljak 6.1.3).

Generalizacija gornjeg razmišljanja dovodi do opće formule za udaljenost točke do ravnine. Neka je dana točka $T(x_0, y_0, z_0)$ i ravnina Π s jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Želimo odrediti udaljenost $d(T, \Pi)$. Ona je jednaka udaljenosti od T do njene ortogonalne projekcije na ravninu. Vektor normale ravnine Π dan je s $\overrightarrow{n} = [A, B, C]^*$. Uzmemo li proizvoljnu točku ravnine (x, y, z) i spojimo s T, dobit ćemo vektor $\overrightarrow{v} = [x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z]$ (za svaku točku ravnine jedan takav vektor). Duljina ortogonalne projekcije od $\overrightarrow{v}$ na $\overrightarrow{n}$ je upravo tražena udaljenost i ona prema prethodnom poglavlju iznosi (opet koristimo formulu 6.2)

$$\frac{|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{|\vec{n}|} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax + By + Cz)|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{|\vec{n}|}.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je po pretpostavci točka (x, y, z) u ravnini pa je $Ax + By + Cz = D$. Ako je koordinatni sustav Kartezijev, imamo $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ pa dobivamo da formula za udaljenost točke do ravnine u Kartezijevom koordinatnom sustavu glasi

$$d(T, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ako pak sustav nije Kartezijev, $|\vec{n}|$ je recipročan udaljenosti $Ax + By + Cz = 1$ do ishodišta (vidi izvod temeljnog zakona recipročne rešetke uz zamjenu oznaka $[h, k, l]$ s $[A, B, C]$), a ako tu udaljenost označimo s d_{ABC} (kao analog međumrežnog razmaka), formula poprima opći oblik

$$d(T, \Pi) = d_{ABC} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|.$$

Ako je koordinatni sustav ortogonalan, d_{ABC} se može izračunati formulom za međumrežni razmak uz $h = A$, $k = B$ i $l = C$.

6.2.3 Pravci u prostoru

Pravac u prostoru određen je svojim smjerom (tj. bilo kojim njemu paralelnim vektorom smjera) i jednom točkom. Alternativno, pravac možemo zadati kao presjek dvije neparalelne ravnine. U prvom slučaju, pravac se opisuje parametarskim jednadžbama ili tzv. kanonskim oblikom jednadžbe pravca. U drugom slučaju pravac se zadaje sustavom od dvije opće jednadžbe ravnina.

Parametarske jednadžbe pravca s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ koji prolazi točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ su oblika

$$x = x_0 + ut,$$

$$y = y_0 + vt,$$

$$z = z_0 + wt,$$

$$t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki iznos parametra t dobivamo po jednu točku tog pravca. Primijetimo: Pravac je paralelan nekoj od koordinatnih osi točno ako je među u, v i w jedina koordinata od $\vec{s}$ koja nije jednaka nuli ona koja odgovara toj osi. Primjerice, pravci s vektorom smjera $[0, -3, 0]$ su paralelni s y-osi.

Zadatak 49. *Kako ćete iz parametarskih jednadžbi pravca vidjeti je li pravac paralelan nekoj koordinatnoj ravnini?*

Napomena 20. *Vidimo da je za parametarski opis pravca dovoljan jedan slobodni parametar (t), dok su za ravninu potrebna dva (t i s). To je vezano za činjenicu da je pravac jednodimenzionalan, a ravnina dvodimenzionalan objekt. Općenito, krivulje u prostoru zadane su parametarski jednadžbama oblika*

$$x = f(t),$$

$$y = g(t),$$

$$z = h(t),$$

$$t \in I,$$

a plohe u prostoru zadane su parametarskim jednadžbama oblika

$$x = f(t, s),$$

$$y = g(t, s),$$

$$z = h(t, s),$$

$$t \in I, s \in I'.$$

Umjesto točkom i vektorom smjera, pravac može biti zadan i s dvije točke. U tom slučaju mu je vektor smjera vektor koji spaja te dvije točke, a bilo koju od njih uzmemo kao (x_0, y_0, z_0).

Skraćeni zapis parametarskih jednadžbi pravca, koji bismo dobili tako da iz svake od tri jednadžbe izrazimo parametar t i onda ih izjednačimo zove se kanonski oblik jednadžbi pravca u prostoru:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Radi se o preglednom obliku jednadžbi pravca, no kad god je potrebno rješavati neke probleme vezane za pravac, potrebno je prvo taj oblik prevesti u parametarski oblik. Također, kako je taj oblik samo skraćeni zapis parametarskog oblika, moguće je da neki od a, b i c budu nula jer izraze u formuli ne treba shvaćati kao pravo dijeljenje brojeva.

Pravac može biti zadan i kao presjek dvije (neparalelne) ravnine, tj. sustavom

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D, \\ A'x + B'y + C'z &= D'. \end{aligned}$$

Iz tog oblika parametarski oblik možemo dobiti rješavanjem sustava te dvije jednadžbe. Ako je pravac presjek dvije ravnine, njegov vektor smjera je okomit na normale tih ravnina te vektor smjera pravca zadanog gornjim sustavom (uz pretpostavku da je koordinatni sustav Kartezijev) možemo dobiti kao

$$\overrightarrow{s} = [A, B, C]^* \times [A', B', C']^* = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix},$$

koristeći pravilo sa str. 226 i činjenicu da je recipročna baza recipročne baze polazna baza $((\overrightarrow{a^*})^* = \overrightarrow{a}, (\overrightarrow{b^*})^* = \overrightarrow{b}, (\overrightarrow{c^*})^* = \overrightarrow{c})$.

Zadatak 50. *Odredite parametarski i kanonski oblik jednadžbi pravca zadanog kao presjek ravnina $x + y + z = 1$ i $2x - y = 5$.*

Primjer 204. *Provjerimo sijeku li se pravci*

$$\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$$

i

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

Prvi pravac ima parametarske jednadžbe

$$x = 0,\ y = 2t - 1,\ z = 3 + 2t,$$

a drugi

$$x = 1 + s,\ y = s + 2,\ z = s + 3.$$

Slobodne parametre smo im različito označili jer se radi o dva različita pravca pa dok jedan parametar opisuje „korake šetnje" po jednom, drugi to opisuje za drugi, a ti „koraci" ne moraju biti isti. Sjecište je točka (x, y, z) *koja je na oba pravca, dakle treba izjednačiti odgovarajuće koordinate i riješiti sustav:*

$$0 = 1 + s \Rightarrow s = -1,$$

$$2t - 1 = s + 2 \Rightarrow t = 1,$$

$$3 + 2t = s + 3 \Rightarrow 5 = 2.$$

Kako vidimo, za ova dva pravca nije moguće naći točku koja je na oba jer je sustav kontradiktoran te se pravci ne sijeku. No, primijetimo da oni nisu paralelni: Vektor smjera prvog je $[0, 2, 2]$ *i taj nije paralelan vektoru smjera drugog,* $[1, 1, 1]$.

Da smo iz dvije jednadžbe uspjeli odrediti s *i* t *koji zadovoljavaju i treću, uvrštavanje vrijednosti od* t *u parametarske jednadžbe prvog (ili vrijednosti parametra* s *u jednadžbe drugog) pravca dalo bi koordinate sjecišta tih pravaca. Tako je, primjerice, sjecište pravca* $\frac{x}{0} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{2}$ *s pravcem* $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{1}$ *točka* $(0, 1, 5)$ *— provjerite to sami!*

Kako je vidljivo iz gornjeg primjera, pravci u prostoru mogu se ne sjeći bez da su paralelni. Uvjet paralelnosti pravaca je kolinearnost, tj. proporcionalnost njihovih vektora smjera: ako su $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ i $\overrightarrow{s'} = [u', v', w']$ vektori smjera dva pravca, oni su paralelni ako je $u : u' = v : v' = w : w'$. Pravci u prostoru koji se ne sijeku i nisu paralelni zovu se mimoilazni (mimosmjerni) pravci.

Uspoređivanje vektora smjera i određivanje sjecišta dva pravca u prostoru (tj. rješavanje sustava sa 6 jednadžbe i 2 nepoznanice) dovest će do jednog od zaključaka:

- Ako su vektori smjera kolinearni, onda taj sustav ili
  - nema rješenja: pravci su paralelni, ili
  - sustav ima (beskonačno) rješenja: pravci se podudaraju;
- Ako vektori smjera nisu kolinearni onda taj sustav ili
  - nema rješenja: pravci su mimoilazni, ili
  - sustav ima (točno jedno) rješenje (t, s): pravci se sijeku u jednoj točki.

Dva pravca su okomita ako imaju okomite vektore smjera, tj. uvjet okomitosti pravaca je

$$\vec{s} \cdot \vec{s'} = 0.$$

Taj skalarni produkt općenito računamo na način opisan na str. 219, a ako je koordinatni sustav Kartezijev uvjet se svodi na $uu'+vv'+ww' = 0$. Općenito se pak kut između pravaca definira kao kut između njihovih vektora smjera.

Primjer 205. *Koji kut s b-osi proizvoljnog kristalografskog koordinatnog sustava zatvara vektor normale na ravninu smjera* (123)*? Vektor normale tog smjera je* $[1, 2, 3]^*$*. Tražimo njegov kut s* $\vec{b} = [0, 1, 0]$*. Po definiciji skalarnog produkta je*

$$\cos\varphi = \frac{[1, 2, 3]^* \cdot [0, 1, 0]}{\mathcal{N}_{123} b} = \frac{2}{b} d_{123}.$$

Primjer 206. *Potrebno je naći pravac (pravce) koji prolazi kroz ishodište, okomit je na* x*-os i sa* z*-osi zatvara kut od* $45°$*, ako su parametri koordinatnog sustava* $a = 5$ *cm,* $b = 3$ *cm,* $c = 4$ *cm,* $\alpha = \beta = \gamma = 90°$*.*

Budući da pravac treba prolaziti kroz ishodište, prvo znamo da su mu parametarske jednadžbe oblika $x = ut$*,* $y = vt$ *i* $z = wt$*. Njegov vektor smjera* $[u, v, w]$ *prvo mora biti okomit na* x*-os, tj. na prvi vektor baze. Dakle, imamo uvjet*

$$0 = [u, v, w] \cdot \vec{a} = (u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{a} = ua^2 + v\vec{a}\vec{b} + w\vec{a}\vec{c}.$$

Zbog $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ *i činjenice da je* $a \neq 0$ *dobijemo* $u = 0$*.*

Sad dakle znamo da je vektor smjera našeg pravca oblika $[0, v, w] = v\vec{b}+w\vec{c}$ *i tražimo takav vektor koji s* $\vec{c}$ *zatvara kut od* $45°$*. Imamo stoga posljednji uvjet*

$$(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot \vec{c} = |[0, v, w]| \cdot c \cdot \cos 45°.$$

Na lijevoj strani, zbog okomitosti $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *preostaje* wc^2*. Iznos* $|[0, v, w]| = |v\vec{b} + w\vec{c}|$ *jednak je* $\sqrt{(v\vec{b} + w\vec{c}) \cdot (v\vec{b} + w\vec{c})} = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2}$ *te se gornja jednakost svodi na*

$$wc^2 = \sqrt{v^2b^2 + w^2c^2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pokratimo c *i kvadriramo te dobijemo*

$$w^2c^2 = (v^2b^2 + w^2c^2) frac12,$$

odnosno $w^2c^2 = v^2b^2$*. Uvrtimo* b *i* c *i dobijemo* $16w^2 = 9v^2$*, dakle je* $w = \pm\frac{3}{4}v$*. Dakle, vektor smjera je ili tipa* $[0, v, \frac{3}{4}v]$ *ili tipa* $[0, v, -\frac{3}{4}v]$*, pa imamo dva rješenja (npr. za* $v = 4$*): Pravac s jednadžbama* $x = 0$*,* $y = 4t$ *i* $z = 3t$ *ili pravac s jednadžbama* $x = 0$*,* $y = 4t$ *i* $z = -3t$*.*

Pravac s vektorom smjera $\overrightarrow{s} = [u, v, w]$ je okomit na ravninu s vektorom normale $\overrightarrow{n} = [A, B, C]^*$ ako su ti vektori paralelni, a pravac je paralelan ravnini ako mu je vektor smjera okomit na njezin vektor normale. Stoga je uvjet okomitosti pravca na ravninu da je $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$, što općenito nije lako izračunati jer su koordinate $\vec{s}$ dane u osnovnoj, a od $\vec{n}$ u recipročnoj bazi. No, u Kartezijevom koordinatnom sustavu se uvjet pojednostavljuje na proporcionalnost koordinata ta dva vektora. S druge strane, uvjet paralelnosti pravca s ravninom je $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Zbog već pokazane formule za skalarni produkt dva vektora, od kojih jedan ima koordinate u polaznoj, a drugi u recipročnoj bazi (formula 6.2), uvjet okomitosti pravca i ravnine iskazan je formulom

$$uA + vB + wC = 0.$$

Ako pravac nije paralelan ravnini, on ju siječe u jednoj točki koja se zove probodište pravca i ravnine. Određivanje probodišta pravca i ravnine svodi se na rješavanje sustava koji se sastoji od jednadžbe(i) pravca i jednadžbe(i) ravnine.

Zadatak 51. *Odredite probodište pravca* $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{3}$ *i ravnine* $2x + 3y + 4z = 1$.

Završimo ovo poglavlje o analitičkoj geometriji jednim riješenim zadatkom koji kombinira razne ovdje opisane činjenice.

Zadatak 52. *Dana je kristalografska baza. Duljine vektora su* $a = 100$ pm, $b = 200$ *pm i* $c = 250$ pm. Kutovi među vektorima su $\alpha = \gamma = 90°$ i $\beta = 60°$. U ostatku zadatka podrazumijevamo da su sve koordinate dane obzirom na tu bazu.

- Jesu li vektori $[2, -1, 3]$ i $[0, 1, 4]$ kolinearni? Nisu jer im koordinate nisu proporcionalne.

- Jesu li okomiti? Skalarni umnožak im iznosi 810000, dakle nisu.

- Kut između ta dva vektora iznosi

$$\mathsf{arccos}\phi = \frac{81000}{|[2, -1, 3]| \cdot |[0, 1, 4]|} = 26{,}8°.$$

- $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ je volumen jedinične ćelije, a on je prema zadanim parametrima jednak $200 \cdot (100 \cdot 250 \cdot \sin 60°) = 4{,}33 \cdot 10^6$ pm^3.

- Koordinate jediničnog vektora koji ima isti smjer i orijentaciju kao vektor $[0, 1, 4]$ su $[0; 9,81 \cdot 10^{-4}; 3{,}92 \cdot 10^{-3}]$.

- d_{010} je, s obzirom na to da se radi bazi s $\alpha = \gamma = 90°$, jednak b, tj. 200 pm.

- Jednadžba mrežne ravnine smjera $(20\overline{1})$ koja je najbliža ishodištu je $2x - z = 1$.

- $d_{20\overline{1}}$ je, uzevši u obzir da se radi o ravninama paralelnima s b-osi te da ona najbliža ishodištu os a siječe s odsječkom 1 (u točki A), a os c s odsječkom -2 (u točki C), jednak visini trokuta OAC povučenoj iz O, tj. $d_{20\overline{1}} = \frac{2P_{\triangle OAC}}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{|\overrightarrow{AC}|} = 311$ pm.

- U recipročnom prostoru duljina vektora $[2, 0, \overline{1}]$ je, prema temeljnom zakonu recipročne rešetke, jednaka $1/d_{20\overline{1}} = 0{,}0321\ \text{pm}^{-1}$.

- Weissovi parametri ravnine koja kristalografske osi siječe redom na udaljenostima 200 pm, 600 pm i 750 pm od ishodišta (sva sjecišta su na pozitivnim dijelovima osi) su $2a : 3b : 3c$.

- Vektor normale tog smjera ravnina s a-osi zatvara kut od 81,55°. Naime,
$$\cos\varphi = \frac{[3, 2, 2]^* \cdot [1, 0, 0]}{\mathcal{N}_{322}a} = \frac{3d_{322}}{a}.$$
Kako dobijemo d_{322}? Ako s P, Q i R označimo probodišta koordinatnih osi s ravninom $3x + 2y + 2z = 1$, onda je $OPQR$ tetraedar. Njegov volumen je s jedne strane jednak $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, a s druge $\frac{h}{3}P_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}d_{hkl}P_{\triangle ABC}$. Izjednačimo i dobijemo
$$d_{322} = \frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}{P_{\triangle ABC}}.$$
Kako je $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{c}$, dobijemo
$$d_{322} = \frac{V}{12P_{\triangle ABC}}.$$
Ostaje još odrediti $P_{\triangle ABC}$. Iz dva pravokutna trokuta OAB i OBC dobijemo $|AB| = 105{,}41$ pm i $|BC| = 160{,}08$ pm, a iz trokuta OAC koji pri vrhu O ima kut 60° koristeći kosinusov poučak dobijemo $|AC| = 112{,}11$ pm, te je po Heronovom poučku njegova površina 77042,11 pm^3. Stoga je $d_{322} = 4{,}68$ pm, pa je $\cos\varphi = 0{,}1405$ i na kraju $\varphi = 81°55'$.

Ponovimo bitno... Koordinatni sustav se sastoji od jedne točke prostora (ishodišta) i jedne baze prostora. Koordinate točke u prostoru su skalari u prikazu pripadnog radij-vektora kao linearne kombinacije vektora baze. Ravnina u prostoru zadana je jednom linearnom jednadžbom s tri nepoznanice koju zovemo općom jednadžbom ravnine ($Ax+By+Cz+D=0$); vektor normale ravnine tada ima koordinate $[A, B, C]^*$ (u recipročnoj bazi). Drugi oblici jednadžbe ravnine u prostoru su segmentni (poseban slučaj opće jednadžbe u kojem je $D=-1$) ili parametarski (koordinate točaka ravnine su zadane preko dva nezavisna slobodna parametra). Pravac u prostoru može biti zadan sustavom od dvije linearne jednadžbe s tri nepoznanice (dakle, kao presjek dvije ravnine) ili parametarski (koordinate točaka pravca su zadane putem jednog slobodnog parametra; koeficijenti uz slobodni parametar određuju koordinate vektora smjera pravca). Presjek dva objekta u prostoru određuje se tako da rješavamo sustav koji se sastoji od jednadžbi koje opisuju te objekte.

Poglavlje 7

Sustavi linearnih jednadžbi

7.1 Linearne jednadžbe

Definicija 42 (Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom)**.** *Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom x je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$ax = b$$

gdje su a i b zadani brojevi. Rješenje jednadžbe je svaki broj čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanice x daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 207. *Jednadžba $8x - 3(x - 4) = -2x - 6$ je linearna jer ju možemo svesti na oblik $ax = b$:*

$$8x - 3(x - 4) = -2x - 6,$$

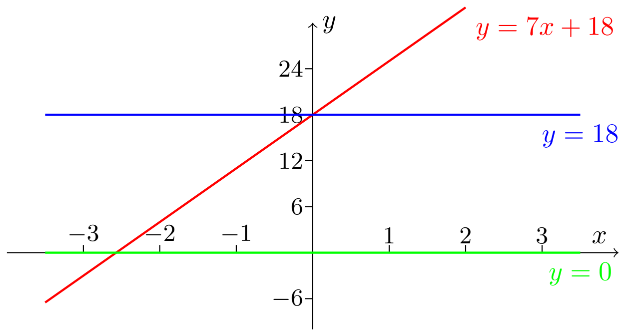
$$8x - 3x + 12 = -2x - 6,$$

$$7x = -18.$$

Rješenje te jednadžbe je $-\frac{18}{7}$.

Rješenje linearne jednadžbe $ax = b$ je nultočka afine funkcije $f(x) = ax - b$, tj. sjecište grafa te funkcije s osi apscisa. Moguća su tri slučaja:

- Jedinstveno rješenje (ako $a \neq 0$): Pravac $y = ax - b$ siječe os apscisa u nultočki $x = \frac{b}{a}$, koja je rješenje naše jednadžbe.
- Nema rješenja (ako $a = 0$ i $b \neq 0$): Pravac $y = ax - b$ je paralelan s osi apscisa.
- Beskonačno mnogo rješenja (ako $a = b = 0$): Pravac $y = ax - b$ se podudara s osi apscisa pa je svaki realan broj x rješenje naše jednadžbe.



Slika 7.1: Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom mogu imati jedinstveno rješenje (crveni graf), nemati rješenja (plavi graf) ili imati beskonačno mnogo rješenja (zeleni graf).

Primjer 208. *Jednadžbe*

$$8x - 3(x - 4) = -2x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x - 6,$$

$$8x - 3(x - 4) = 5x + 12$$

su redom primjeri za tri navedena slučaja. Grafovi odgovarajućih afinih funkcija za koje te jednadžbe predstavljaju traženje nultočki prikazani su slikom 7.1.

U ovom poglavlju primarno nas zanimaju linearne jednadžbe s više od jedne nepoznanice.

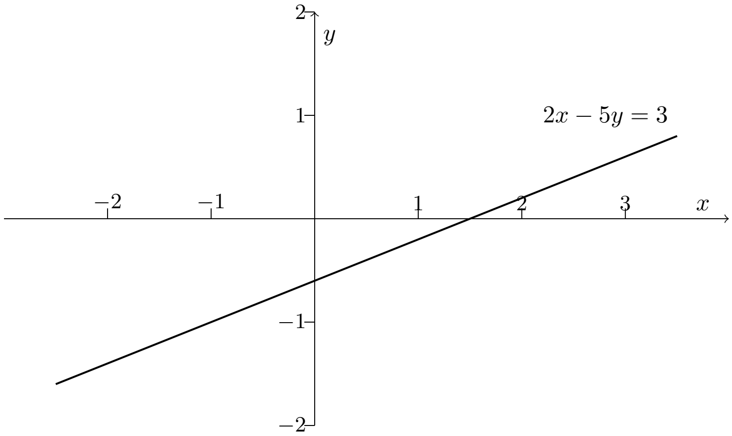
Definicija 43 (Linearna jednadžba s dvije nepoznanice)**.** *Linearna jednadžba s dvije nepoznanice x i y je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$ax + by = c$$

gdje su a, b i c zadani brojevi. Broj c zove se slobodnim članom, a a i b su koeficijenti jednadžbe.

Rješenje jednadžbe je svaki uređeni par brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto brojeca x i y daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 209. *Jednadžba $2x - 5y = 3$ je linearna jednadžba s dvije nepoznanice. Uređeni par $(4, 1)$ je jedno njeno rješenje, a par $(1, 1)$ nije rješenje te jednadžbe.*



Slika 7.2: Pravac $2x - 5y = 3$.

Geometrijski, linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice (točnije: skup njenih rješenja) možemo interpretirati kao pravac u ravnini (tj. kao njegovu implicitnu jednadžbu).[1] Pravac je skup od beskonačno točaka te svaka linearna jednadžba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 210. *Jednadžbi $2x - 5y = 3$ odgovara pravac kojem je to implicitna jednadžba, tj. pravac kroz točke $\left(0, -\frac{3}{5}\right)$ i $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ (vidi sliku 7.2).*

Definicija 44 (Linearna jednadžba s tri nepoznanice)**.** *Linearna jednadžba s tri nepoznanice x, y, z je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$ax + by + cz = d$$

gdje su a, b, c i d zadani brojevi. Broj d zove se slobodnim članom, a a, b i c su koeficijenti jednadžbe.

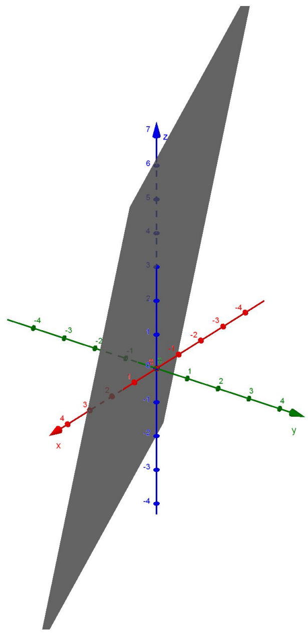
Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena trojka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto nepoznanica x, y i z daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 211. *Jednadžba $2x - 5y + z = 3$ je linearna jednadžba s tri nepoznanice. Trojka $(4, 1, 0)$ je jedno njeno rješenje, a trojka $(1, 2, 1)$ nije rješenje te jednadžbe.*

Geometrijski, skup rješenja linearne jednadžbe s tri nepoznanice možemo interpretirati kao ravninu u prostoru (vidi odjeljak 6.2.2, odnosno sliku 7.3), dakle svaka linearna jednadžba s tri nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja.

Prethodne definicije možemo generalizirati:

[1] Ako je $a = 0$, pravac $ax + by = c$ je paralelan s x-osi, ako je $b = 0$ paralelan je s y-osi.



Slika 7.3: Ravnina $2x - 5y + z = 3$ (slika izrađena programom Geogebra).

Definicija 45 (Linearna jednadžba s n nepoznanica)**.** *Linearna jednadžba s n nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b zadani brojevi. Broj b zove se slobodnim članom, a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ su koeficijenti jednadžbe.

Rješenje takve jednadžbe je svaka uređena n-torka brojeva čije uvrštavanje u jednadžbu na mjesto napoznanicâ x_i daje istinitu numeričku jednakost.

Primjer 212. *Jednadžba $2x_1+x_2-5x_3-4x_4+x_5 = 0$ je linearna jednadžba s pet nepoznanica. Uređene petorke $(1, 1, 1, 0, 2)$ i $(0, 0, 0, 0, 0)$ su dva od njenih rješenja, a petorka $(1, 2, 1, 2, 1)$ nije rješenje te jednadžbe.*

Zadatak 53. *Koliko najviše nepoznanica može imati linearna jednadžba koja ima jedinstveno rješenje?*

Zadatak 54. *Ako linearna jednadžba s dvije ili više nepoznanica ima sve koeficijente osim jednog jednake nuli, opišite skup njenih rješenja!*

Zadatak 55. *Koliko rješenja može imati jedna jednadžba s $n > 2$ nepoznanice?*

Možemo ukratko reći da je linearna jednadžba jednadžba kojom iskazujemo da zbroj nepoznanica pomnoženih s nekim konkretnim brojevima[2] (koeficijentima) ima zadanu vrijednost (jednaku slobodnom članu).

Napomena 21. *Nije ispravno reći da je slobodni član „onaj broj desno od jednakosti u jednadžbi". Naime, iako je u sređenom obliku uobičajeno slobodni član pisati desno od znaka jednakosti, bolje je naglasiti njegov smisao: To je konstantni član jednadžbe, tj. član koji ne sadrži nijednu od nepoznanica (gdje pod članom izraza mislimo na aditivni član, tj. podizraz koji je pribrojen ostatku promatranog izraza).*

Ponovimo bitno... Linearne jednadžbe su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku „zbroj tih nepoznanica pomnoženih sa zadanim koeficijentima jednak je slobodnom članu". Rješenje linearne jednadžbe s n nepoznanica je svaka uređena n-torka brojeva čije uvrštavanje na mjesto nepoznanica daje istinitu numeričku jednakost. Linearne jednadžbe s jednom, dvije ili tri nepoznanice možemo geometrijski predočiti kao točku na pravcu, pravac u ravnini odnosno ravninu u prostoru.

7.2 Sustavi linearnih jednadžbi

Ukoliko istovremeno tražimo rješenja više jednadžbi, govorimo o sustavima.

Primjer 213. *Zadani su nekomplanarni vektori čije su koordinate u nekoj bazi* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *dane kao* $\vec{u} = [2, -1, 3]$, $\vec{v} = [1, -3, 2]$ *i* $\vec{w} = [-3, 2, -4]$. *Vektor* $\vec{r}$ *koji u bazi* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *ima koordinate* $[2, -7, 4]$. *Koje su njegove koordinate s obzirom na bazu* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$*?*

Po definiciji koordinata (odjeljak 6.1.2), znamo da je

$$\vec{r} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w},$$

a vrijedi i

$$\vec{r} = 2\vec{a} - 7\vec{b} + 4\vec{c}.$$

Izjednačavanjem ta dva izraza za $\vec{r}$ *i uvrštavanje* $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{v} = \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{w} = -3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$ *daje uvjete*

$$2x + y - 3z = 2,$$

$$-x - 3y + 2z = -7,$$

[2] U odjeljku 8.2 takav izraz ćemo zvati linearnom kombinacijom nepoznanica.

$$3x + 2y - 4z = 4.$$

Treba dakle naći brojeve x, y i z koji istovremeno zadovoljavaju tri linearne jednadžbe.

Definicija 46 (Sustav linearnih jednadžbi)**.** *Sustav linearnih jednadžbi je skup od konačno mnogo linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama za koje tražimo zajedničko rješenje. Rješenje sustava je svaka uređena n-torka brojeva koja zadovoljava* sve *jednadžbe sustava.*

Ako sustav ima m jednadžbi s n nepoznanica, zovemo ga $m \times n$-sustavom.

Sustavi kod kojih su svi slobodni članovi jednaki nuli nazivaju se homogenim sustavima, a ostali se zovu nehomogeni sustavi.

Primjer 214. *Primjer (homogenog) sustava s dvije jednadžbe i tri nepoznanice je sustav*

$$x + y + z = 0,$$

$$-2x + y = 0.$$

Njegovo rješenje je npr. trojka $(0, 0, 0)$ jer zadovoljava obje jednadžbe, a trojka $(1, -1, 0)$ nije rješenje sustava jer zadovoljava samo prvu jednadžbu.

Lako je, kao u prethodnom primjeru, zaključiti: Homogeni sustavi uvijek imaju bar jedno rješenje (tzv. trivijalno rješenje u kojem sve nepoznanice imaju vrijednost nula).

Sustavi linearnih jednadžbi pojavljuju se u raznolikim kontekstima.

Primjer 215. *Kao u primjeru 213 vrijedi i općenito: Ako neki vektor $\overrightarrow{r}$ ima koordinate $[x, y, z]$ s obzirom na jednu bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, a želimo odrediti njegove koordinate u nekoj drugoj bazi $\{\overrightarrow{a}', \overrightarrow{b}', \overrightarrow{c}'\}$, gdje su poznate koordinate vektora nove baze obzirom na staru: $\overrightarrow{a}' = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b}' = [b_1, b_2, b_3]$ i $\overrightarrow{c}' = [c_1, c_2, c_3]$, onda nove koordinate $[x', y', z']$ od $\overrightarrow{r}$ dobivamo kao rješenje sustava*

$$a_1x' + b_1y' + c_1z' = x$$

$$a_2x' + b_2y' + c_2z' = y$$

$$a_3x' + b_3y' + c_3z' = z$$

Primjer 216. *U vodi je otopljeno* 0,6190 g *smjese natrijeva klorida i kalijeva klorida te je dodan srebrov nitrat. Istaložilo je* 1,3211 g *srebrova klorida. Treba odrediti masene udjele natrijeva i kalijeva klorida u polaznoj smjesi.*

Molarna masa NaCl *je* 58,45 g mol^{-1}*, molarna masa* KCl *je* 74,56 g mol^{-1}*, a molarna masa* AgCl *je* 143,34 g mol^{-1}*. Neka je x masa* NaCl *u* *smjesi, a y masa* KCl *u smjesi. Iz uvjeta zadatka proizlazi sustav od dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:*

$$x + y = 0{,}6190\,\mathrm{g}$$
$$\frac{143{,}34}{58{,}45}x + \frac{143{,}34}{74{,}56}y = 1{,}3211\,\mathrm{g}.$$

Zadatak 56. *Postavite sustav linearnih jednadžbi za sljedeći problem: Neka smjesa se sastoji od tri sastojka, od kojih svaki sadrži dušik i sumpor. Analitičkim metodama je utvrđeno da je maseni udio dušika u smjesi* 4,38 *%, a sumpora* 1,06 *%. Nadalje, utvrđeno je da je maseni udio dušika u prvom sastojku* 8,20 *%, maseni udio sumpora u drugom sastojku* 2,40 *%, a treći sastojak smjese sadrži* $2,80$ *% dušika i* 1,00 *% sumpora. Odredite masene udjele sastojaka u smjesi.*

Izjednačavanje kemijskih jednadžbi također se može interpretirati kao rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Kemijske jednadžbe se zapisuju u obliku $\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{P}$ (reaktanti $\longrightarrow$ produkti). Uz svaki reaktant i produkt zapisuje se broj zvan stehiometrijski koeficijent. Primjerice, jednadžba $\mathrm{CH_4\,(g)} + \mathrm{2\,O_2\,(g)} \longrightarrow \mathrm{CO_2\,(g)} + \mathrm{2\,H_2O\,(g)}$ nam, među ostalim, kaže da pri gorenju metana za svaki 1 mol metana i 2 mola kisika nastaju po 1 mol ugljikova dioksida i 2 mola vode. Po dogovoru, stehiometrijski koeficijenti reaktanata uzimaju se s negativnim, a stehiometrijski koeficijenti produkata s pozitivnim predznakom. Tako su u navedenom primjeru stehiometrijski koeficijenti metana, kisika, ugljikovog dioksida i vode redom -1, -2, 1 i 2.

Ukoliko samo znamo reaktante i produkte, jednadžba reakcije nije izjednačena dok ne odredimo stehiometrijske koeficijente svih reaktanata i produkata. Pritom mora vrijediti da za svaku vrstu atoma ili iona broj jedinki s lijeve strane jednadžbe mora biti jednak broju jedinki s desne strane.

Primjer 217. *Recimo da promatramo gorenje etanola* C2H5OH (l)*, dakle reakciju etanola s kisikom. Poznato je da u toj reakciji nastaju ugljikov dioksid i voda (vodena para). Potrebno je stoga odrediti stehiometrijske koeficijente u jednadžbi*

$$\mathrm{C_2H_5OH\,(l)} + \mathrm{O_2\,(g)} \longrightarrow \mathrm{CO_2\,(g)} + \mathrm{H_2O\,(g)}.$$

Za svaki od elemenata $\mathrm{E} \in \{\mathrm{C, H, O}\}$ *u reakciji postavlja se po jedna linearna jednadžba u kojoj se odgovarajući nepoznati stehiometrijski koeficijent* x_i *množi s brojem* E*-ova u odgovarajućem reaktantu/produktu:*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{C:} & 2x_1 + x_3 = 0 \\ \mathrm{H:} & 6x_1 + 2x_4 = 0 \\ \mathrm{O:} & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}.$$

Prva jednadžba izražava da je ukupna promjena broja atoma ugljika u reakciji jednaka nuli — nisu niti nestali niti nastali novi atomi ugljika. Pritom je $2x_1 < 0$ *jer* x_1 *opisuje broj jedinki etanola koje ulaze u reakciju i u njoj se troše pa je* $x_1 < 0$*, dok je* $x_3 > 0$ *jer opisuje koliko jedinku ugljikova dioksida je nastalo u reakciji. Slično druga i treća jednadžba izražavaju da se broj atoma vodika odnosno kisika ne mijenja.*

Uočimo: Problem izjednačavanja kemijskih jednadžbi se uvijek svodi na homogeni sustav linearnih jednadžbi (objasnite zašto!). Za takve sustave znamo da imaju bar trivijano rješenje: svi $x_i = 0$ (tj. svaku zamišljenu reakciju je moguće uravnotežiti na trivijalan način: tako da nijednog sudionika nema ☺). Broj jednadžbi sustava jednak je broju elemenata (ili drugih odabranih osnovnih komponenti, primjerice iona) koji se pojavljuju u reakciji. Broj nepoznanica jednak je broju sudionika reakcije.

Obično je cilj odrediti točno jedno netrivijalno rješenje s cjelobrojnim iznosima nepoznanica, i to obično ono koje ima svojstvo da su x_i-ovi relativno prosti (tj. po apsolutnoj vrijednosti najmanji mogući).

Primjer 218. *Rješenje sustava za izjednačavanje reakcije gorenja etanola je* $x_1 = -\frac{1}{3}t$, $x_2 = -t$, $x_3 = \frac{2}{3}t$, $x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$. *Da bi svi* x_i *bili cijeli brojevi I* $x_3, x_4 > 0$*, potrebno je da je* $t \in \mathbb{N}$ *višekratnik od* 3*. Najmanji takav je* $t = 3$ *koji daje rješenje* $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$*. Izjednačena jednadžba je stoga*

$$\mathrm{C_2H_5OH\ (l) + 3O_2\ (g) \longrightarrow 2CO_2\ (g) + 3H_2O\ (g).}$$

Vratimo se na matematiku sustava linearnih jednadžbi. Kao što smo rekli, jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice predstavlja pravac u ravnini, dakle dvije takve jednadžbe predstavljaju dva pravca u ravnini. Kako tražimo zajednička rješenja jednadžbi, slijedi da u slučaju 2×2-sustava tražimo presjek dvaju pravaca u ravnini. Rješenja 2×2-sustava su točke sjecišta tih pravaca zapisane koordinatno.

Iz geometrije ravnine jasno je da imamo tri mogućnosti:

- Pravci se sijeku u jednoj točki (X, Y) — sustav ima jedinstveno rješenje.
- Pravci su podudarni — sustav ima beskonačno rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- Pravci su paralelni i različiti — sustav nema rješenja.

U slučaju više jednadžbi s 2 nepoznanice imamo više pravaca u ravnini kojima tražimo zajedničke točke, no opet imamo iste tri mogućnosti za ukupni broj rješenja sustava:

- Svi pravci idu kroz jednu točku (X, Y) — sustav ima jedinstveno rješenje (X, Y);
- Svi pravci su podudarni — sustav ima beskonačno rješenja (sve točke tog jednog pravca su rješenja).
- U ostalim slučajevima nema točke koja bi bila zajednička svim pravcima — sustav nema rješenja.

S druge strane, jedna linearna jednadžba s 3 nepoznanice predstavlja ravninu u prostoru, dakle tri takve jednadžbe predstavljaju tri ravnine. Kako tražimo zajednička rješenja jednadžbi, slijedi da u slučaju 3×3-sustava tražimo presjek tri ravnine u prostoru. Rješenja 3×3-sustava su točke sjecišta tih ravnina zapisana koordinatno. Opet imamo tri mogućnosti:

- Ravnine se sijeku u jednoj točki (X, Y, Z) — sustav ima jedinstveno rješenje;
- Sve tri ravnine se podudaraju ili se dvije ravnine podudaraju i treća ih siječe ili sve tri prolaze istim pravcem — sustav ima beskonačno mnogo rješenja (u prvom slučaju sve točke te jedne ravnine su rješenja, a u drugom i trećem su rješenja točke presječnog pravca).
- U ostalim slučajevima (npr. tri različite paralelne ravnine) nema rješenja.

Sustavi s tri nepoznanice mogu imati npr. dvije jednadžbe — u tom slučaju geometrijski ekvivalent su dvije ravnine u prostoru (možemo li tada dobiti jedinstveno rješenje?). Općenito, sustav od m jednadžbi s 3 nepoznanice interpretiramo kao traženje presjeka m ravnina u prostoru. No, što se tiče mogućeg broja rješenja, nema ništa novoga. Općenito vrijedi, a u odjeljku 8.2 ćemo to i dokazati:

Teorem 18 (Teorem o broju rješenja sustava linearnih jednadžbi)**.** *Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.*

Ponovimo bitno. . . Sustavi linearnih jednadžbi sastoje se od više linearnih jednadžbi kojima tražimo zajednička rješenja. Homogeni sustavi su oni u kojima sve jednadžbe imaju slobodne članove jednake nuli i oni uvijek imaju bar trivijalno rješenje. Sustavi linearnih jednadžbi ili nemaju rješenja ili im je rješenje jedinstveno ili imaju beskonačno mnogo rješenja.

7.3 Metoda supstitucije

Metoda supstitucije može se korisitit i za rješavanje drugačijih, a ne samo linearnih, sustava jednadžbi. Ona se sastoji u tome da iz jedne jednadžbe izrazimo jednu od nepoznanica i uvrstimo dobiveni izraz na mjesto te nepoznanice u ostalim jednadžbama. Time smo smanjili broj jednadžbi i broj nepoznanica za jedan. Nastavljamo s daljnjim supstitucijama sve dok ne dođemo do samo jedne jednadžbe (ili pak kontradikcije). Metoda je vrlo zgodna za male sustave, osobito za 2×2-sustave. Kod sustava većih od 3×3 postaje jako nepregledna te su prikladnije druge metode.

Primjer 219. *Riješimo sustav iz primjera 216 metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je* $y = 0{,}6190\,\mathrm{g} - x$ *pa uvrštavanje u drugu jednadžbu daje*

$$2{,}452x + 1{,}922(0{,}6190\,\mathrm{g} - x) = 1{,}3211\,\mathrm{g}$$

iz čega dobijemo

$$x = 0{,}2479\,\mathrm{g}$$

te

$$y = 0{,}3711\,\mathrm{g}.$$

Kako su bili traženi maseni udjeli, dobivamo

$$w(\mathrm{NaCl}) = \frac{0{,}2479}{0{,}6190} = 0{,}4005 = 40{,}05\,\%$$

i

$$w(\mathrm{KCl}) = \frac{0{,}3711}{0{,}6190} = 0{,}5995 = 59{,}95\,\%.$$

Primjer 220. *Riješimo sustav*

$$x + y = 7,$$

$$675x + 300y = 2850$$

metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 7 - x$ *pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo redom*

$$675x + 300(7 - x) = 2850,$$

$$375x = 750,$$

$$x = 2.$$

Budući da je sustav imao dvije nepoznanice, rješenje mora biti uređen par. Drugu vrijednost odredimo iz formule supstitucije tj.

$$y = 7 - x = 7 - 2 = 5.$$

Dakle, rješenje sustava je $(2, 5)$*.*

Primjer 221. *Sustav*

$$x + 2y = -4,$$
$$2x + 4y = 0$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $x = -4 - 2y$ *što daje*

$$2(-4 - 2y) + 4y = 0,$$

tj. $-8 = 0$. *Slijedi da sustav nema rješenja.*

Primjer 222. *Sustav*

$$4x + 2y = 6,$$
$$-8x - 4y = -12$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz prve jednadžbe je $y = 3 - 2x$ *što daje*

$$-8x - 4(3 - 2x) = -12$$

tj. $-12 = -12$. *Ta jednakost sigurno vrijedi, dakle je druga jednadžba bila suvišna. Preostaje nam samo jednadžbe* $y = 3 - 2x$, *dakle sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika* $(x, 3 - 2x)$ *s proizvoljnim* $x \in \mathbb{R}$.

Zadatak 57. *Metodom supstitucije riješite sustav iz primjera 213.*

Ponovimo bitno... Metoda supstitucije sastoji se u izražavanju jedne od nepoznanica iz jedne jednadžbe sustava i njenom uvrštavanju u ostale jednadžbe sustava.

7.4 Gaußova metoda eliminacija

Gaußova metoda eliminacija sastoji se u postepenom poništavanju (eliminiranju) većine koeficijenata sustava koristeći određene operacije zvane elementarnim transformacijama. Kako se nepoznanice tokom rješavanja sustava ne mijenjaju, sam postupak možemo učiniti preglednijim ako ga izvodimo tablično, tj. tako da pišemo samo tablicu koeficijenata i slobodnih članova, a pamtimo koji koeficijenti idu uz koje nepoznanice. Takve tablice zvat ćemo matricama sustava.

Uvodimo sljedeće oznake:

- broj jednadžbi označavamo s m, a broj nepoznanica s n;
- koeficijent uz nepoznanicu x_j u i-toj po redu jednadžbi označavamo s a_{ij};

- slobodni član u i-toj po redu jednadžbi označavamo s b_i.

Definicija 47 (Matrica sustava linearnih jednadžbi)**.** *Matrica sustava*

$$\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +\cdots & +a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +a_{m3}x_3 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

je tablica oblika[3]

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Primijetimo:

- retci matrice sustava odgovaraju pojedinim jednadžbama;
- stupci matrice sustava (osim zadnjeg) odgovaraju nepoznanicama;
- zadnji stupac matrice sustava odgovara slobodnim članovima;
- okomita crta odvaja stupac slobodnih članova od ostalih i predstavlja niz znakova jednakosti;
- ako je sustav tipa $m \times n$, njegova matrica ima m redaka i $n+1$ stupac.

Primjer 223. *Matrica*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

predstavlja sustav s četiri jednadžbe i tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2, \\ & x_2 & -3x_3 & = & 1, \\ 8x_1 & -24x_2 & +10x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 7. \end{array}$$

[3]Formalno, matrica sustava je samo dio ovako definirane matrice lijevo od okomite crte, a matrica koja je ovdje nazvana matricom sustava pravilno se zove proširenom matricom sustava.

Cilj Gaußove metode eliminacija je matricu sustava svesti na oblik iz kojeg je lako očitati rješenje. Kako je najlakše očitati rješenje sustava oblika

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1, \\ x_2 &= X_2, \\ &\vdots \\ x_n &= X_n \end{aligned}$$

kojemu pripada matrica sustava

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \end{array}\right),$$

cilj nam je dobiti matricu što sličniju posljednjoj: u dijelu lijevo od okomite crte na dijagonali (pozicijama kojima su jednaki redni broj retka i stupca) želimo dobiti jedinice, a iznad i ispod dijagonale nule.

Budući da želimo pojednostaviti sustav u oblik što sličniji navedenom, ali tako da ne promijenimo skup njegovih rješenja, očito ne možemo primjenjivati sasvim proizvoljne operacije.

Definicija 48 (Elementarne transformacije)**.** *Dozvoljene operacije koje u Gaussovoj metodi eliminacija smijemo primijeniti na matricu sustava zovu se elementarne transformacije. Ima ih tri:*

- *Zamjena dva retka (član po član);*
- *Množenje proizvoljnog retka brojem koji nije nula (množenje svih članova retka tim brojem);*
- *Pribrajanje jednog retka drugom (član po član).*

Tim operacijama se doduše mijenja matrica sustava, ali ne mijenjamo skup rješenja. Između uzastopnih matrica koje dobivamo u Gaußovoj metodi eliminacija pišemo znak $\sim$ (i govorimo o ekvivalentnim matricama sustava).

Zamjena redaka matrice sustava je dozvoljena jer odgovara zamjeni redoslijeda jednadžbi, što očigledno ne mijenja rješenje sustava.

Primjer 224.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array}\right).$$

Lako je zaključiti i zašto su druge dvije operacije dozvoljene: Ako su neka dva broja jednaka ($L = D$), onda su jednaki i njihovi umnošci s nekim trećim brojem ($La = Da$), a ako su dvaput po dva broja jednaka ($L_1 = D_1$ i $L_2 = D_2$), onda su jednaki i njihovi zbrojevi i razlike ($L_1 \pm L_2 = D_1 \pm D_2$). Kako množenje retka brojem različitim od nule odgovara množenju jednadžbe tim brojem, to također ne mijenja rješenja te jednadžbe pa time ni cijelog sustava. Kako je dijeljenje brojem $\alpha \neq 0$ isto što i množenje brojem $\beta = \frac{1}{\alpha}$, slijedi da druga elementarna transformacija uključuje i dijeljenje retka brojem koji nije nula.

Primjer 225.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Pribrajanje jednog retka drugom odgovara zbrajanju dvije jednadžbe sustava, što također ne mijenja skup rješenja.

Primjer 226.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\text{drugi redak} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Budući je oduzimanje nekog retka od nekog drugog isto što i množenje jednog retka s -1 te zatim pribrajanje tom drugom retku, slijedi da kombinacija druge i treće elementarne transformacije dozvoljava i oduzimanje jednog retka od drugog. Nadalje, primijetimo da elementarne transformacije dozvoljavaju dodavanje i oduzimanje proizvoljnog višekratnika jednog retka nekom drugom retku.

Primjer 227. *Želimo li recimo trostruki drugi redak oduzeti od četvrtog, to je dozvoljeno jer je ekvivalentno sljedećem redoslijedu elementarnih transformacija:*

1. *Drugi redak pomnožimo s -3.*
2. *Tako izračunati novi drugi redak dodamo četvrtom retku.*
3. *Drugi redak podijelimo s -3, čime ga vraćamo u oblik prije prvog koraka.*

Na konkretnom primjeru to bi izgledalo ovako:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 3 & -12 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -15 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

U Gaußovoj metodi eliminacija sustav s jedinstvenim rješenjem prepoznat ćemo po tome što ćemo matricu sustava elementarnim transformacijama uspjeti svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & X_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nulretci (retci u kojima su samo nule) ne moraju postojati. Oni odgovaraju suvišnim jednadžbama, tj. jednakostima $0 = 0$, te ih u „ručnom” rješavanju sustava brišemo. U navedenom slučaju rješenje polaznog sustava je n-torka $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Napomena 22. *Cramerov sustav je sustav s jedinstvenim rješenjem koji je tipa $n \times n$ (dakle, ima onoliko jednadžbi koliko ima nepoznanica).*

Primjer 228. *Elementarnim transformacijama se sustav*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 8 & -24 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

može svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

te taj sustav ima samo jedno rješenje: $(3, 1, 0)$ *tj.* $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

Primijetimo da sustavi koji imaju manje jednadžbi nego nepoznanica ne mogu imati jedinstveno rješenje — ili ga uopće nemaju ili ih je beskonačno mnogo.

Sustave bez rješenja uvijek prepoznajemo po tome što se u nekom trenutku rješavanja pojavi kontradiktorna jednadžba, tj. jednakost oblika $\spadesuit = 0$ gdje je $\spadesuit$ broj različit od nule. U Gaußovoj metodi eliminacija to je vidljivo tako što se u nekom trenutku postupka kao neki od redaka matrice sustava dobije redak oblika

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \spadesuit \end{array}\right)$$

s $\spadesuit \neq 0$. Taj redak odgovara kontradiktornoj jednadžbi

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \spadesuit.$$

Homogeni sustavi uvijek imaju bar trivijalno rješenje $(0, \dots, 0)$ te je ova situacija nemoguća za homogene sustave.

Primjer 229. *Ako na matricu sustava*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -7 & 7 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

primijenimo elementarne transformacije (prvi redak pomnožimo s 2 *i zatim prvi i drugi oduzmemo od trećeg), dobit ćemo*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

te sustav nema rješenja.

U Gaußovoj metodi eliminacija sustav s beskonačno mnogo rješenja prepoznat ćemo po konačnoj matrici koja je oblika

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit & X_k \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pritom su sa $\heartsuit$ i $X_1, \ldots, X_k$ označeni bilo kakvi brojevi. Broj k (broj jedinica na dijagonali koji nam je na kraju preostao) je manji od broja nepoznanica n (tj. imamo bar jedan stupac tipa $\heartsuit$ — takve stupce zvat ćemo „umetnutim stupcima"). Naravno, k ne može biti veći od broja jednadžbi polaznog sustava niti od broja nepoznanica. I ovdje nulretci ne moraju postojati (odnosno mogu se brisati tijekom računa).

U slučaju završne matrice koja ukazuje na postojanje beskonačno mnogo rješenja, rješenje očitavamo na sljedeći način: Nepoznanicama koje odgovaraju umetnutim stupcima pridružujemo slobodne parametre (svakoj svoj) — te varijable mogu poprimati proizvoljne vrijednosti. Vrijednosti nepoznanica koje odgovaraju stupcima lijevo od umetnutih (prvih k nepoznanica) ovise o tim parametrima, a tu ovisnost zapisujemo tako da konačnu matricu ponovno prevedemo natrag u oblik jednadžbi.

Primjer 230. *Sustav*

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

se elementarnim transformacijama može svesti na oblik

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Treći i četvrti stupac su „umetnuti" pa vrijednosti x_3 i x_4 mogu biti proizvoljne. Pišemo: $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$. Završna matrica odgovara sustavu

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 3,$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$$

te je rješenje sustava

$$x_1 = 3 + t - 2s,\ x_2 = 1 + 3t - 2s,\ x_3 = t \in \mathbb{R},\ x_4 = s \in \mathbb{R}.$$

Iako je načelno dozvoljeno provođenje elementarnih transformacija u bilo kojem redoslijedu, postoji algoritam koji daje redoslijed koji je za većinu sustava najefikasniji. Taj algoritam zove se[4] Gaußova metoda eliminacija.

[4] Ovdje opisani algoritam zapravo se zove Gauß-Jordanova metoda eliminacija. Razlika između Gaußove i Gauß-Jordanove metode je u tome što se u pravoj Gaußovoj metodi poništavaju samo elementi ispod dijagonale, dok se u Gauß-Jordanovoj metodi poništavaju elementi ispod i iznad dijagonale matrice sustava.

Pritom pozicije matrice sustava označavamo s (i, j): i-ti redak, j-ti stupac. Nadalje, iako time mijenjamo broj jednadžbi sustava, ali ne i njegova rješenja, dozvolit ćemo brisanje nulredaka iz matrice sustava. Algoritam je sljedeći:

1. Uzmi sljedeći po redu (i-ti) stupac. Ako je ovo početni korak, uzmi prvi stupac ($i = 1$). Ako bi trebalo uzeti stupac slobodnih članova, STOP — gotovo je.

2. Ako je na dijagonalnoj poziciji (i, i) nula, zamjenom i-tog retka s nekim retkom ispod njega dovedi broj različit od nule na tu poziciju. Ako to ne možeš postići, STOP — gotovo je.

3. Pomoću „ključnog elementa" (broja na poziciji (i, i)) poništi ostatak stupca: Svakom retku u kojem iznad/ispod ključnog elementa nije nula, dodaj odgovarajući višekratnik i-tog retka.

4. Ukoliko si dobio kontradiktornu jednadžbu, STOP! Sustav nema rješenja.

5. Ukoliko si dobio nulredak, možeš ga pobrisati iz matrice sustava.

6. Vrati se na prvi korak.

Ukoliko je postupak stao iz razloga navedenih u prva dva koraka, sve retke u kojima je na poziciji (i, i) broj različit od 1 podijelimo tim brojem i na kraju očitamo rješenje.

Napomena 23. *Ako tokom rješavanja naiđemo na nulstupac (stupac u kojem su samo nule), ignoriramo ga, a pripadna nepoznanica sigurno ima proizvoljnu vrijednost, koja pritom nije povezana ni s jednom od vrijednosti drugih nepoznanica. Drugim riječima, takav sustav sigurno nema jedinstveno rješenje, nego ili ga uopće nema ili ima beskonačno mnogo rješenja.*

Primjer 231. *Beer-Lambertov zakon za sustav s više komponenti koji se spektroskopski analizira glasi:*

$$A = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i c_i l,$$

gdje je A apsorbancija, l je duljina puta, ε_i je molarni apsorpcijski koeficijent, a c_i je množinska koncentracija pojedine komponente (sumira se po svim komponentama). Pri nekoj spektroskopskoj analizi dobiveni su podaci prikazani tablicom [5] 231.

[5] Izvor: http://www.ch.ic.ac.uk/harrison/Teaching/Sheet1.pdf

	p-ksilen	m-ksilen	o-ksilen	etilbenzen	A_{uk}
λ / μm	εl / L mol^{-1}	εl / L mol^{-1}	εl / L mol^{-1}	εl / L mol^{-1}	
12,5	1,502	0,0514	0	0,0408	0,1013
13,0	0,0261	1,1516	0	0,0820	0,09943
13,4	0,0342	0,0355	2,532	0,2933	0,2194
14,3	0,0340	0,0684	0	0,3470	0,03396

Slika 7.4: Tablica uz primjer 231.

Beer-Lambertov zakon nam daje sustav iz kojeg možemo odrediti nepoznate koncentracije komponenti:

$$1{,}502c_1 + 0{,}0514c_2 + 0{,}0408c_4 = 0{,}1013\,\mathrm{mol/L},$$

$$0{,}0261c_1 + 1{,}1516c_2 + 0{,}0820c_4 = 0{,}09943\,\mathrm{mol/L}$$

$$0{,}0342c_1 + 0{,}0355c_2 + 2{,}532c_3 + 0{,}2933c_4 = 0{,}2194\,\mathrm{mol/L}$$

$$0{,}0340c_1 + 0{,}0684c_2 + 0{,}3470c_4 = 0{,}03396\,\mathrm{mol/L}.$$

Očigledno bi bilo mukotrpno „ručno” rješavati takav sustav. Za ovakve realistične primjere koriste se gotovi programi u koje je ugrađena neka varijanta Gaußove metode eliminacija.

Ponovimo bitno... Dozvoljene operacije u Gaußovoj metodi eliminacija su elementarne transformacije koje primjenjujemo na matricu sustava. Matrica sustava je tablični zapis koeficijenata jednadžbi sustava i slobodnih članova u kojem retci odgovaraju pojedinim jednadžbama, a stupci pojedinim nepoznanicama. Postoje tri vrste elementarnih transformacija: zamjena dva retka matrice sustava, množenje retka matrice sustava brojem različitim od nule i pribrajanje jednog retka matrice sustava drugom. Cilj Gaußove metode je na dijagonali matrice sustava dobiti jedinice, a ispod i iznad dijagonale nule. Nulretke koji se pojave u algoritmu možemo brisati jer predstavljaju jednadžbe $0 = 0$. Ako se tokom eliminacija pojavi redak u kojem su svi koeficijenti osim onog u zadnjem stupcu nula, taj redak predstavlja kontradiktornu jednadžbu i sustav nema rješenja. Ako je konačna matrica sustava potpuno eliminirana, tj. do na stupac slobodnih članova sadrži na dijagonali samo jedinice, a izvan dijagonale samo nule, sustav ima jedinstveno rješenje. Ako ne nastupi nijedan od prethodna dva slučaja, sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Poglavlje 8

Matrice i vektorski prostori

8.1 Uvod u matrice

Iako smo izraz *matrica* već koristili u kontekstu matrice sustava linearnih jednadžbi (odjeljak 7.2), tamo se zapravo jednostavno radilo o tablici na kojoj se provode određene operacije (elementarne transformacije) u svrhu rješavanja sustava linearnih jednadžbi. Stvarni pojam matrice srodniji je pojmu broja – matrice su matematički objekti *s kojima* se računa (a ne *na kojima* se provode operacije). Po svojem obliku, matrice su pravokutne tablice koje sadrže brojeve:

Definicija 49 (Matrica)**.** *Matrica je pravokutna tablica realnih ili kompleksnih brojeva. Brojevi u matrici zovu se njenim elementima. Matrice čiji elementi su realni brojevi zovemo realnim matricama, a one s kompleksnim elementima su kompleksnim matricama. Matrica je reda (tipa, dimenzije) $m \times n$ ako ima m redaka i n stupaca.*

Matrice omeđujemo okruglim ili uglatim zagradama, a označavamo ih velikim slovima latinske abecede. Ako je A realna matrica tipa $m \times n$ pišemo:

$$A \in M_{m,n}$$

ili $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dakle, $M_{m,n} = M_{m,n}(\mathbb{R})$ je skup svih realnih matrica tipa $m \times n$. Skup svih kompleksnih matrica tipa $m \times n$ se označava s $M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Primjer 232. *Matrica* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *je realna matrica tipa* 2×3*:* $A \in M_{2,3}$.

Ako je matrica označena slovom A, broj (element matrice) koji se nalazi u i-tom retku i j-tom stupcu označavamo s a_{ij}. Piše se $A = [a_{ij}]$. Uvijek se prvo navodi indeks retka, a onda indeks stupca. Matrice A i B su jednake matrice ako su istog tipa i $a_{ij} = b_{ij}$ za sve i, j.

Primjer 233. *Ako je $A \in M_{2,3}$ matrica iz primjera 232, onda je $a_{12} = 1$, $a_{23} = 2$, a a_{32} ne postoji jer matrica nema trećeg retka.*

Definicija 50 (Dijagonala matrice)**.** *Dijagonalu matrice čine brojevi kojima je indeks retka jednak indeksu stupca, tj. elementi a_{ii}.*

U primjenama, posebno česte su matrice kojima je broj redaka jednak broju stupaca ($m = n$):

Definicija 51 (Kvadratne matrice)**.** *Matrica A naziva se kvadratnom ako ima jednako mnogo redaka i stupaca. Skup svih realnih kvadratnih matrica s po n redaka i stupaca označava se s M_n (ili $M_n(\mathbb{R})$), a skup svih kompleksnih matrica s po n redaka i stupaca označava se s $M_n(\mathbb{C})$.*

Uz kvadratne matrice u primjenama će nam trebati i matrice s po jednim retkom odnosno stupcem:

Definicija 52 (Matrice-retci i matrice-stupci)**.** *Ako matrica ima samo jedan redak ($A \in M_{1,n}$), govorimo o matrici-retku, a ako ima samo jedan stupac ($A \in M_{m,1}$) govorimo o matrici-stupcu.*

Primjer 234. *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_2$$

je kvadratna matrica reda 2, matrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 89 \\ -34 \end{pmatrix} \in M_{3,1}$$

je stupčana matrica, a

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5+i & -2i & 0 \end{pmatrix} \in M_{1,5}(\mathbb{C})$$

je kompleksna matrica-redak.

Ako matrici A zamijenimo retke i stupce („preklopimo ju preko dijagonale"), dobivamo njenu transponiranu matricu A^t. Preciznije:

Definicija 53 (Transponirana matrica)**.** *Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}$ je matrica $A^t \in M_{n,m}$ koja na poziciji (i, j) ima a_{ji}. Ista definicija vrijedi i za $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.*

Primjer 235.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Očigledno vrijedi:

$$(A^t)^t = A.$$

Definicija 54 (Simetrična matrica)**.** *Realnu matricu zovemo simetričnom ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j.*

Kako transponiranje zamjenjuje broj redaka i stupaca, vidimo da simetrične matrice moraju biti kvadratne.

Primjer 236. *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je simetrična.

Kod kompleksnih matrica simetričnost obično nije zanimljiva, već srodno svojstvo hermitske konjugiranosti:

Definicija 55 (Hermitska matrica)**.** *Za matricu $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ njena hermitski konjugirana matrica je matrica $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ koju iz A dobijemo tako da ju transponiramo i sve elemente kompleksno konjugiramo (tj. na poziciji (i, j) u A^* je $\overline{a_{ji}}$).*

Kompleksna matrica je hermitska ako je jednaka svojoj hermitski konjugiranoj matrici (dakle, ako je $A = A^*$).

I hermitske matrice moraju biti kvadratne. Pritom za dijagonalne elemente vidimo da mora vrijediti $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$, tj. svaki dijagonalni element mora sam sebi biti kompleksno konjugiran; to znači da dijagonalni elementi hermitske matrice moraju biti realni.

Primjer 237. *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 1+i & i \\ 1-i & -3 & 2+3i \\ -i & 2-3i & 0 \end{pmatrix}$$

je hermitska.

Ponekad se koriste i antisimetrične matrice (matrice sa svojstvom $A^t = -A$) i antihermitske matrice (kompleksne matrice sa svojstvom $A^* = -A$).

Zadatak 58. *Dokažite da antisimetrične i antihermitske matrice moraju biti kvadratne, da na dijagonali antisimetrične matrice moraju biti nule i da na dijagonali antihermitske matrice moraju biti čisto imaginarni brojevi.*

Matrice su matematički objekti koji imaju mnoge sličnosti s brojevima. Uz određene uvjete, one se mogu zbrajati i oduzimati, množiti brojem, množiti međusobno. Ipak, postoje i mnoge razlike. Tako, primjerice, nije moguće jednu matricu dijeliti s drugom, a i operacije koje se mogu izvoditi često su kompliciranije ili imaju neka druga svojstva nego odgovarajuće operacije s brojevima.

Matrice se mogu zbrajati ako su istog tipa. To se radi tako da se zbrajaju elementi na istim pozicijama:

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Rezultat zbrajanja matrica tipa $m \times n$ je matrica istog tipa.

Primjer 238. *Ako je* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *onda je* $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Svojstva zbrajanja matrica slična su svojstvima zbrajanja brojeva međusobno. Tako za sve matrice $A, B, C \in \mathbb{M}_{m,n}$ (odnosno $A, B, C \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$) vrijedi

- komutativnost: $A + B = B + A$,
- asocijativnost: $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- nulmatrica istog tipa je neutralni element za zbrajanje: $A + 0_{m,n} = 0_{m,n} + A = A$,
- svaka matrica ima suprotnu matricu: $A + (-A) = -A + A = 0_{m,n}$ (suprotna matrica je matrica $-A$ koju iz A dobijemo tako da svim elementima promijenimo predznak).

Pritom imamo:

Definicija 56 (Nulmatrica)**.** *Nulmatrice su matrice kojima su svi elementi nule. U svakom skupu $M_{m,n}$ (odnosno $M_{m,n}(\mathbb{C})$) postoji po jedna nulmatrica, koju ćemo označavati s $0_{m,n}$.*

Oduzimanje matrica definiramo kao pribrajanje suprotne matrice: $A - B = A + (-B)$. Dakle, i oduzimati se mogu samo matrice istog tipa.

Svaka matrica može se množiti brojem (skalarom). To se radi tako da se svaki njen element pomnoži tim brojem:

$$\alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}].$$

Množenje matrice skalarom ne mijenja tip matrice. Pritom, za realne matrice pod skalarima podrazumijevamo realne brojeve, a za kompleksne matrice se kao skalari uzimaju kompleksni brojevi.

Primjer 239. *Ako je* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, *onda je* $-3A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Svojstva množenja matrica skalarom slična su svojstvima množenja brojeva međusobno. Tako za sve skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i matrice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ (odnosno $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i matrice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$) vrijedi

- $1 \cdot A = A$,
- $0 \cdot A = 0_{m,n}$ (nulmatrica),
- distributivnost: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ i $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- kvaziasocijativnost: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Zadatak 59. *Odaberite po volji dvije matrice* $A, B \in M_{2,3}$ *i neki skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Riješite matričnu jednadžbu*

$$A + \alpha X = B.$$

Zadatak 60. *Uz koje uvjete na matricu* A *se može izračunati* $2A - 5A^t$*?*

Ponovimo bitno... Pravokutne tablice brojeva zovemo matricama. Skup svih realnih matrica s m redaka i n stupaca označavamo s $M_{m,n}$. Element matrice A koji je u i-tom retku i j-tom stupcu označavamo s a_{ij}. Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots$ čine dijagonalu matrice. Zamjenom redaka matrice A sa stupcima dobivamo transponiranu matricu A^t; ako je $A = A^t$, kažemo da je A simetrična. Ako kompleksnu matricu A transponiramo i sve njezine elemente kompleksno konjugiramo, dobivamo hermitski konjugiranu matricu A^*; ako je $A = A^*$, kažemo da je A hermitska.

Osnovne algebarske operacije s matricama su zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima. Dvije matrice istog tipa zbrajamo tako da zbrojimo elemente na istim pozicijama. Matricu množimo skalarom tako da joj sve elemente pomnožimo tim skalarom. Oduzimanje matrica se definira kao pribrajanje suprotne matrice.

8.2 Vektorski i unitarni prostori

U dosadašnjem sadržaju susreli smo zbrajanje i množenje različitih objekata:

- zbrajanje i množenje realnih odnosno kompleksnih brojeva,
- zbrajanje realnih funkcija sa zajedničkom domenom i množenje realnih funkcija brojevima,
- zbrajanje geometrijskih vektora i množenje geometrijskih vektora skalarima,
- zbrajanje matrica istog tipa i mno zenje matrica skalarima.

Preciznije, u svakom od skupova $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ i $M_{m,n}$, $M_{m,n}(\mathbb{C})$ i skupu realnih funkcija s istom domenom D znamo zbrajati po dva elementa tako da dobijemo element istog skupa, a da pritom zbrajanje ima uobičajena svojstva.

Nadalje, u svim navedenim skupovima znamo njihove elemente množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente istog skupa, pri čemu u slučaju $\mathbb{C}$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$ kao skalare možemo koristiti bilo realne bilo kompleksne brojeve. U svim navedenim slučajevima množenje skalarom ima svojstva kao množenje brojeva međusobno.

Kad neki skup ima svojstvo da njegove elemente znamo zbrajati i množiti brojevima (skalarima) tako da dobijemo elemente istog skupa i tako da vrijede uobičajena svojstva tih računskih operacija, taj skup nazivamo vektorskim prostorom, a njegove elemente vektorima. Dakle, svi gore navedeni skupovi su primjeri vektorskih prostora, odnosno i brojeve i matrice i realne funkcije možemo smatrati vektorima.

Precizirajmo ovu ideju. Uzmimo da je V neki (naravno: neprazan) skup čije elemente želimo zvati vektorima. Kako se u daljnjem nećemo ograničiti na geometrijske vektore, objekte koje u nekom kontekstu gledamo kao vektore označavat ćemo jednostavno v, w, $\ldots$. Ovisno o tome kakav vektorski prostor trebamo, također je potrebno odabrati koju vrstu brojeva ćemo uzeti za skalare s kojima ćemo množiti vektore: realne ili kompleksne brojeve. Da bismo V zvali vektorskim prostorom, moraju biti definirane dvije operacije: zbrajanje vektorâ (elementata od V) i množenje vektora (elemenata od V) skalarom. Pritom, te operacije moraju imati sljedeća svojstva: zbroj dva elementa iz V (dva vektora) mora opet biti element iz V (tj. vektor), a umnožak elementa iz V (vektora) sa skalarom mora biti element iz V (dakle, vektor). Nadalje, te operacije moraju imati „prirodna" svojstva – zbrajanje vektora mora imati ista svojstva kao zbrajanje brojeva, a množenje vektora skalarom mora imati svojstva kao množenje geometrijski vektora skalarom.

Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi.

Formalnije:

Definicija 57 (Vektorski prostor)**.** *Odabrani neprazan skup V s odabranim skupom skalara ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) zove se vektorski prostor ako su definirane operacije $+$ i $\cdot$ (zbrajanje vektorâ i množenje vektora skalarom) tako da za sve elemente v, w, u iz V i sve skalare α, β vrijedi:*

$$\begin{array}{ll} v+w \in V & \alpha v \in V \\ v+w = w+v & 1 \cdot v = v \\ (v+w)+u = v+(w+u) & (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ v+\mathbf{0} = \mathbf{0}+v = v & v+(-v) = (-v)+v = \mathbf{0} \\ \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w & (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta w \end{array}.$$

Neutralni element za zbrajanje, označen s $\mathbf{0} \in V$, zove se nulvektorom. Elementi vektorskog prostora zovu se vektori.

Vektorski prostor je realan ako su skalari realni brojevi, a kompleksan ako su skalari kompleksni brojevi.

Iz gornjih svojstava mogu se izvesti i druga očekivana svojstva, primjerice da je $0 \cdot v = \mathbf{0}$ (množenje s nulom daje nulvektor), $-v = (-1) \cdot v$, ... Preko suprotnog vektora definira se i oduzimanje vektora: $v - w = v + (-w)$.

Primjer 240. *Skupovi V^2, V^3, $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su primjeri realnih vektorskih prostora.*

Zadatak 61. *Čini li skup svih matrica vektorski prostor? Zašto?*

Primjer 241. *Uzmimo $V = \mathbb{C}$. Zbroj dva kompleksna broja je kompleksan broj.*

Ako kao skup skalara također uzmemo $\mathbb{C}$, očito je da vrijede definicijska svojstva te tako skup $\mathbb{C}$ postaje primjer kompleksnog vektorskog prostora.

No, ako kao skup skalara uzmemo samo realne brojeve (dakle, kompleksne brojeve odlučimo množiti samo realnim brojevima), i dalje je rezultat kompleksan broj (dakle, element od V) i svojstva množenja su ista. Dakle, $\mathbb{C}$ možemo gledati i kao realan vektorski prostor.

Primjer 242. *Promotrimo skup $\mathbb{R}^4$. Njegovi elementi su uređene četvorke (x, y, z, w), gdje su x, y, z, w realni brojevi. Uzmimo realne brojeve kao skalare i definirajmo:*

$$(x, y, z, w) + (x', y', z', w') = (x + x', y + y', z + z', w + w'),$$

$$\alpha \cdot (x, y, z, w) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha w).$$

Dakle, primjerice je $(1, 2, 3, 4) + (0, \pi, e, -1) = (1, 2 + \pi, 3 + e, 3)$*, a* $4 \cdot (0, 1, -1, 2) = (0, 4, -4, 8)$*. Obzirom na tako definirane operacije* $+$ *i* $\cdot$ *skup* $\mathbb{R}^4$ *je realni vektorski prostor.*

Potpuno analogno se definiraju zbrajanje i množenje skalarom za elemente iz $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$*: zbraja se po koordinatama, a skalarom množi tako da svaku koordinatu pomnožimo tim skalarom. Uz tako definirane operacije svi* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *su (realni odnosno kompleksni) vektorski prostori.*

Kao u prethodnom primjeru, prostori $\mathbb{C}^n$ *mogu se gledati i kao realni vektorski prostori, ako njihove elemente množimo samo realnim brojevima.*

Primjer 243. *Uzmimo skup* $C(I)$ *svih neprekidnih funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$*,*[1] *gdje je* I *neki interval.*

Zbroj $f + g$ *dviju funkcija* $f, g \in C(I)$ *definira se s*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Kako je zbroj dvije neprekidne funkcije neprekidna funkcija, vrijedi $f + g \in C(I)$*.*

Nadalje, umnožak funkcije $f \in C(I)$ *sa skalarom* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definiramo s*

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

Opet, budući da je umnožak neprekidne funkcije s brojem neprekidna funkcija, vrijedi $\alpha \cdot f \in C(I)$*.*

Uz tako definirane operacije skup $C(I)$ *realni vektorski prostor.*

Analogno bi se definirao vektorski prostor realnih funkcija koje su na I *derivabilne, integrabilne ili jednostavno kojima je domena* I*.*

Kao što smo istaknuli, prostori geometrijski vektora primjer su vektorskih prostora. U nastavku ćemo poopćiti njihova svojstva na opće vektorske prostore. U poglavlju 6.1 vidjeli smo, među ostalim, da ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ baza za V^2, onda se svaki vektor iz V^2 može zapisati kao $x\vec{a} + y\vec{b}$ za jedinstveno određene (realne) skalare x i y. Izrazi poput $x\vec{a} + y\vec{b}$ općenito se nazivaju linearnim kombinacijama.

Definicija 58 (Linearna kombinacija)**.** *Linearna kombinacija jednog ili više vektora iz nekog vektorskog prostora je vektor koji je zbroj tih vektora pomnoženih s nekim skalarima.*

---

[1] Analogne definicije se mogu preuzeti i za kompleksne funkcije, tj. funkcije s kodomenom $\mathbb{C}$: sve kompleksne funkcije s istom domenom čine kompleksan vektorski prostor.

Jednočlane linearne kombinacije su jednostavno skalarni višekratnici nekog vektora v, tj. vektori αv.

Primjer 244. *Linearne kombinacije vektora* $(1, 2, 3, 4)$ *i* $(0, 1, 0, 1)$ *iz* $\mathbb{R}^4$ *su oblika*

$$\alpha \cdot (1, 2, 3, 4) + \beta \cdot (0, 1, 0, 1) = (\alpha, 2\alpha + \beta, 3\alpha, 4\alpha + \beta).$$

Primjer 245. *Polinomi se mogu definirati kao linearne kombinacije monoma (u prostoru svih funkcija s* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$*).*

Primjer 246. *Kompleksne brojeve možemo definirati kao linearne kombinacije brojeva* 1 *i* i *s realnim koeficijentima.*

Napomena 24. *Uz određena dodefiniranja, koja nećemo ovdje razrađivati, za operacije koje se rade pri izjednačavanju redoks-reakcija preko polujednadžbi oksidacije i redukcije može se reći: računa se određena linearna kombinacija polujednadžbi oksidacije i redukcije.*

Slično, Hessov zakon možemo formulirati i ovako: ako se neka reakcija može zapisati kao linearna kombinacija nekih drugih reakcija, onda je reakcijski gradijent bilo koje ekstenzivne veličine stanja (primjerice, reakcijska entalpija ili reakcijska Gibbsova energija) jednak linearnoj kombinaciji reakcijskih gradijenata te iste veličine pojedinih reakcija, i to s istim koeficijentima: ako je reakciju R *moguće zapisati kao* $\sum_i \alpha_i \mathrm{R}_i$*, onda je* $\Delta_r Y = \sum_i \alpha_i \Delta_{r,i} Y$ *za* $Y = H, G, \ldots$.

Zadatak 62. *Možete li koristeći izraz „linearna kombinacija" opisati što je to linearna jednadžba s* n *nepoznanica? U kojem vektorskom prostoru je to linearna kombinacija?*

Primjer 247. *Rješenje sustava linearnih jednadžbi s tri nepoznanice definirali smo kao bilo koju uređenu trojku brojeva* (x, y, z) *čije uvrštavanje u sve jednadžbe sustava daje istinite numeričke jednakosti. Kako se radi o uređenim trojkama realnih brojeva, a one su elementi od* $\mathbb{R}^3$*, skup rješenja svakog sustava s tri nepoznanice je podskup od* $\mathbb{R}^3$*.*

Primjerice, skup svih rješenja homogenog sustava

$$x + y + z = 0$$

$$5x - y + 2z = 0$$

je skup svih uređenih trojki oblika $(x, y, z) = (t, t, -2t)$ *za* $t \in \mathbb{R}$.

Linearna kombinacija dva rješenja $(t, t, -2t)$ *i* $(t', t', -2t')$ *ima oblik*

$$\alpha(t, t, -2t) + \beta(t', t', -2t') = (\alpha t + \beta t', \alpha t + \beta t', -2(\alpha t + \beta t')).$$

Stavimo li $s = t + t'$*, vidimo da je svaka linearna kombinacija dvaju rješenja gornjeg sustava ponovno rješenje istog tog sustava.*

U slučajevima poput gornjeg govorimo o potprostorima. Ako je S podskup vektorskog prostora V te ako S ima ima svojstvo da su sve linearne kombinacije elemenata iz S elementi iz S (S je „zatvoren na linearne kombinacije"), kažemo da je S potprostor od V (i pišemo $S \leq V$).

Primjer 248. *Skup svih rješenja sustava iz primjera 247 je potprostor od* $\mathbb{R}^3$.

Svaki vektorski prostor V ima dva očigledna (trivijalna) potprostora. To su on sam ($V \leq V$) i nul-prostor $\{\mathbf{0}\} \leq V$.

Zadatak 63. *Nađite po jedan netrivijalni potprostor realnih vektorskih prostora* $\mathbb{C}$ *i* M_2.

Primjer 249. *Neka je* $\vec{a}$ *fiksirani odabrani vektor iz* V^3*. Tada je* $\{x\vec{a} : x \in \mathbb{R}\}$ *potprostor od* V^3*. Slično, ako su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dva fiksna vektora iz* V^3*, onda je* $\{x\vec{a} + y\vec{b} : x, y \in \mathbb{R}\}$ *potprostor od* V^3.

Slično kao u primjeru 247 pokaže se da vrijedi:

Teorem 19. *Skup svih rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s* n *nepoznanica je vektorski prostor, potprostor od* $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 64. *Pokažite da je skup svih rješenja diferencijalnw jednadžbw* $y' + a(x)y = 0$ *potprostor skupa svih derivabilnih funkcija jedne varijable.*

Podsjetimo se: U poglavlju 6.1 vidjeli smo da su dva geometrijska vektora kolinearna točno onda, ako se svaki od njih može zapisati kao (jednočlana) linearna kombinacija drugog: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ako i samo ako je $\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{a}$. Slično, tri geometrijska vektora su komplanarna točno ako se svaki od njih može zapisati kao linearna kombinacija druga dva: $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = 0$ ako i samo ako je $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$. S druge strane, dva vektora čine bazu za V^2 odnosno $V^2(O)$ točno ako su nekolinearni, a tri vektora čine bazu za V^3 odnosno $V^3(O)$ točno ako su nekomplanarni. Dakle, iz perspektive korištenja baza (odnosno koordinata), kolinearnost i komplanarnost su nepoželjna svojstva. Kolinearost i komplanarnost geometrijskih vektora osnovni su primjeri općenitijeg odnosa „linearne zavisnosti" među vektorima u općim vektorskim prostorima.

Primijetimo prvo: Koliko god vektora $v, w, \ldots$ iz nekog vektorskog prostora V uzeli, uvijek postoji njihova linearna kombinacija koja daje nulvektor (to je tzv. trivijalna linearna kombinacija $0 \cdot v + 0 \cdot w + \ldots = \mathbf{0}$).

Također, u slučaju geometrijskih vektora, ako imamo dva kolinearna vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, tj. $\overrightarrow{b} = x\overrightarrow{a}$, onda imamo i njihovu netrivijalnu linearnu kombinaciju $x\overrightarrow{a} - 1 \cdot \overrightarrow{b} = \mathbf{0}$ koja je nulvektor (a ako imamo tri komplanarna vektora, tj. $\overrightarrow{c} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ analogno $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{w} - 1 \cdot \overrightarrow{c} = \mathbf{0}$.

Definicija 59 (Linearna (ne)zavisnost)**.** *Konačan skup vektora* $\{v, w, u, \ldots\}$ *u nekom vektorskom prostoru* V *je linearno zavisan skup ako se postoji njihova linearna kombinacija* $\alpha v + \beta w + \gamma u + \ldots$ *koja je jednaka nulvektoru i u kojoj je bar jedan od koeficijenata* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *različit od* 0*. Skup vektora koji nije linearno zavisan zove se linearno nezavisan skup.*

Alternativno se iskaz sljedećeg teorema može uzeti kao definicija linearne zavisnosti, iz čega je vidljivo da su kolinearnost i komplanarnost geometrijskih vektora osnovni primjeri linearne zavisnosti.

Teorem 20. *Podskup* $\{v, w, u, \ldots\}$ *vektorskog prostora* V *je linearno zavisan ako i samo ako se bar jedan od vektora tog skupa može zapisati kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz. Ako je $\{v, w, u, \ldots\}$ linearno zavisan, po definiciji postoji linearna kombinacija $\alpha v + \beta w + \gamma u + \ldots = \mathbf{0}$ u kojoj je bar jedan od koeficijenata $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ različit od 0. Neka je taj koeficijent α (inače zamijenimo oznake vektora). Tada dijeljenjem s α dobivamo $v = -\frac{\beta}{\alpha} w - \frac{\gamma}{\alpha} u - \ldots$, odnosno jedan od vektora smo zapisali kao linearnu kombinaciju ostalih. Obrnuto, ako se jedan vektor (npr. v) može zapisati kao $v = xw + yu + \ldots$, onda je $-1 \cdot v + xw + yu + \ldots = \mathbf{0}$ primjer linearne kombinacije iz definicije linearne zavisnosti. □

Iz definicije vidimo: Svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je linearno zavisan. Naime, ako gledamo skup $\{\mathbf{0}, v, w, \ldots\}$, odmah vidimo da se jedan od tih vektora, nulvektor, može zapisati kao linearna kombinacija ostalih: $\mathbf{0} = 0 \cdot v + 0 \cdot w + \ldots$. Nadalje, svaki jednočlan skup $\{v\}$ s $v \neq \mathbf{0}$ je linearno nezavisan.

Primjer 250. *Svaka dva proporcionalna vektora su linearno zavisna. Primjerice, vektori* $(1, 2, 3, 4)$ *te* $i(1, 2, 3, 4) = (i, 2i, 3i, 4i)$ *su linearno zavisni u* $\mathbb{C}^4$*.*

Primjer 251. *Pogledajmo dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama* a *i* b*. Ako bi one bile linearno zavisne, moralo bi vrijediti*

$$a^x = c \cdot b^x$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ *i neki realan broj* c*. No, gornja jednakost je ekvivalentna s* $(a/b)^x = c$*, tj. eksponencijalna funkcija s bazom* $a/b \neq 1$ *bi bila konstantna funkcija, što je nemoguće. Dakle, svake dvije eksponencijalne funkcije s različitim bazama su linearno nezavisne.*

Definicija 60 (Dimenzija i baza)**.** *Najveći broj elemenata kojeg u danom vektorskom prostoru može imati neki linearno nezavisan skup vektora zove* *se dimenzija prostora. Baza prostora je bilo koji linearno nezavisan skup vektora koji ima onoliko elemenata kolika je dimenzija prostora.*

Dimenziju se ponekad miješa miješaju s brojem elemenata. Dimenzija je najmanji broj vektora potreban da kao njihove linearne kombinacije možemo zapisati *sve* vektore. No, u svakom vektorskom prostoru vrijedi: Ako prostor sadrži bar još jedan vektor osim nulvektora, onda taj prostor sadrži beskonačno mnogo vektora. To je lako vidjeti: Ako je $v \neq \mathbf{0}$ onda su za svaki skalar α (a njih ima beskonačno mnogo) vektori αv različiti. Stoga svaki vektorski prostor osim $V = \{\mathbf{0}\}$ sadrži beskonačno mnogo elemenata, neovisno o tom je li konačne ili beskonačne dimenzije.

Nećemo dokazivati, ali vrijedi zapamtiti:

Teorem 21. *Realni vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ su n-dimenzionalni realni vektorski prostori. Slično, vektorski prostori $\mathbb{C}^n$ su n-dimenzionalni kompleksni vektorski prostori.*

Teorem 22. *Realni vektorski prostori $M_{m,n}$ su $m \cdot n$-dimenzionalni realni vektorski prostori. Slično, vektorski prostori $M_{m,n}(\mathbb{C})$ su $m \cdot n$-dimenzionalni kompleksni vektorski prostori.*

Primjer 252. *Skup kompleksnih brojeva možemo gledati i kao realni vektorski prostor: Kompleksne brojeve gledamo kao vektore, ali ih množimo samo s realnim brojevima. S obzirom na to da je umnožak realnog skalara (broja) s kompleksnim vektorom (brojem) kompleksan, $\mathbb{C}$ jest realni vektorski prostor. No, on više nije jednodimenzionalan.*

Naime, kad bi postojala jednočlana baza $\{a\}$ ($a = \alpha + \beta i$) za realni vektorski prostor $\mathbb{C}$, to bi značilo da se svaki $z \in \mathbb{C}$ može zapisati kao $z = x \cdot a$ s $x \in \mathbb{R}$. S obzirom na to da je svaki z oblika $x' + y'i$ dobivamo uvjete $x' = x\alpha$ i $y' = x\beta$ koji moraju biti zadovoljeni istovremeno za proizvoljne realne x' i y', uvijek s istim realnim α i β, odnosno za zadani α i β moralo bi vrijediti $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x'}{y'}$ za sve x' i y'. Kako nemaju svi realni brojevi isti omjer, to je nemoguće.

S druge strane, očigledno je svaki $z = x + yi = x \cdot 1 + y \cdot i$ za neke $x, y \in \mathbb{R}$, dakle je primjerice $\{1, i\}$ baza za realni prostor $\mathbb{C}$, odnosno taj je prostor dvodimenzionalan.

Iz istog razloga vrijedi i općenito: Svi vektorski prostori $\mathbb{C}^n$ i $M_{m,n}(\mathbb{C})$ se mogu gledati kao kompleksni, ali i kao realni. U drugom slučaju im je dimenzija dvostruko veća jer za opisati jedan kompleksan broj trebamo dva realna broja.

Primjer 253. *Vektorski prostori realnih neprekidnih/derivabilnih/integrabilnih funkcija s istom domenom su beskonačnodimenzionalni: ma koliko velik line-*

arno nezavisan skup vektora (funkcija) uzeli, uvijek je moguće naći još neku funkciju koju možemo dodati u taj skup, a da on ostane linearno nezavisan.

No, ako bismo gledali sve linearne kombinacije dviju eksponencijalnih funkcija (npr. onih s bazama 2 *i* e*), one čine potprostor prostora svih realnih funkcija s prirodnom domenom* $\mathbb{R}$*, no taj potprostor je dvodimenzionalan (bazu mu čine upravo te dvije eksponencijalne funkcije).*

Primjer 254. *Skup* $\mathcal{P}_3$ *svih polinoma stupnja* 3 *(ili manjeg) je vektorski prostor: Zbroj dva polinoma stupnja* 3 *ili manjeg je polinom stupnja najviše* 3*, a također je i umnožak konstante i takvog polinoma opet polinom stupnja* 3 *ili manjeg.*

Monomi x^n *različitog stupnja su linearno nezavisni (provjerite!). Svaki polinom iz* $\mathcal{P}_3$ *možemo zapisati u obliku* $a + bx + cx^2 + dx^4$*, stoga je skup* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *baza tog prostora, odnosno dimenzija od* $\mathcal{P}_3$ *jednaka je* 4*.*

Korisno je zapamtiti: Svaki skup vektora koji sadrži više elemenata nego što je dimenzija prostora sigurno je linearno zavisan. Također, potprostor $W \leq V$ ne može imati dimenziju veću od dimenzije prostora V.

Primjer 255. *Matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 20 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *su linearno zavisne jer se radi o* 5 *matrica iz* M_2 *koji ima dimenziju* $2 \cdot 2 = 4$.

Osnovno svojstvo baze prostora je da se svaki vektor može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, i to na jedinstven način. Takav zapis zovemo prikaz vektora u bazi. Koeficijenti u tom prikazu su koordinate vektora s obzirom na bazu.

Želimo li odrediti koordinate vektora s obzirom na zadanu bazu, u pravilu je potrebno riješiti sustav linearnih jednadžbi koji proizlazi iz te definicije.

Primjer 256. *Vektori* $(2, -1, 0, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 1, 1, 0)$ *i* $(0, 1, 0, 0)$ *su baza za* $\mathbb{R}^4$ *jer su linearno nezavisni. Prikaz proizvoljnog vektora* $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ *u toj bazi je po definiciji oblika*

$$(x, y, z, w) = \alpha(2, -1, 0, 1) + \beta(1, 2, 3, 4) + \gamma(1, 1, 1, 0) + \delta(0, 1, 0, 0) =$$

$$= (2\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma + \delta, 3\beta + \gamma, \alpha + 4\beta).$$

Želimo li recimo $(1, 0, 0, 0)$ *zapisati u toj bazi, trebamo naći* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *takve da je*

$$(1, 0, 0, 0) = (2\alpha + \beta + \gamma, -\alpha + 2\beta + \gamma + \delta, 3\beta + \gamma, \alpha + 4\beta)$$

tj. riješiti sustav

$$2\alpha + \beta + \gamma = 1,$$
$$-\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0,$$
$$3\beta + \gamma = 0,$$
$$\alpha + 4\beta = 0.$$

Budući znamo da se radi o bazi, sigurno je da taj sustav ima jedinstveno rješenje. Ono iznosi

$$\alpha = \frac{2}{5},\ \beta = -\frac{1}{10},\ \gamma = \frac{3}{10},\ \delta = \frac{3}{10}.$$

Dakle, vektor $(1, 0, 0, 0)$ *koji u kanonskoj bazi ima koordinate* $[1, 0, 0, 0]$, *s obzirom na novu bazu ima koordinate* $\left[\frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right]$.

Za neke vektorske prostore postoje „najprirodnije” baze, odnosno baze koje preferiramo koristiti ako je to ikako moguće. Te baze nose naziv kanonske baze. One imaju smisla samo za vektorske prostore $\mathbb{R}^n$ i $M_{m,n}$ odnosno njihove kompleksne ekvivalente (i još nekim rijetkim slučajevima koje ovdje nećemo spominjati).

Kanonska baza za $\mathbb{R}^n$ (odnosno za $\mathbb{C}^n$ kao kompleksni prostor) je skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ vektora iz tog prostora koji su oblika: e_i na i-toj poziciji ima broj 1, a na svim ostalim nule. Da je to baza vidi se po tome što je prikaz

$$x = x_1(1, 0, 0, \ldots, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + x_n(0, 0, 0, \ldots, 0, 1) =$$

$$= x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

moguć i jedinstven za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ odnosno $x \in \mathbb{C}^n$.

Analogno, matrice $E_{ij} \in M_{m,n}$ koje na svim pozicijama osim (i, j) imaju nule, a na toj poziciji imaju 1, čine kanonsku bazu od $M_{m,n}$.

Vrijedi istaknuti još jedan zaključak na koji nas navodi primjer 256 i koji stvarno uvijek vrijedi: Ako za neki vektor v kojemu znamo koordinate $(b_1, \ldots, b_n)$ u nekoj bazi želimo odrediti koordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ u nekoj drugoj („novoj”) bazi, onda se tražene „nove” koordinate dobiju rješavanjem sustava linearnih jednadžbi kojemu stupac slobodnih članova sadrži koordinate vektora u staroj bazi, a stupci koji odgovaraju nepoznanicama redom sadrže koordinate vektora „nove” baze s obzirom na staru bazu.

Kako provjeriti linearnu (ne)zavisnost nekog skupa vektora iz $\mathbb{R}^n$ (ili $\mathbb{C}^n$, $M_{m,n}$ isl.)? To nas može zanimati primjerice jer ih imamo taman kolika je dimenzija i pitamo se radi li se o bazi. Najjednostavniji način provjere linearne nezavisnosti je preko ranga matrice.

Primjer 257. *U matrici* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *možemo njene retke shvatiti kao dva vektora* $(2, 1, 3)$ *i* $(0, -1, 2)$ *u* $\mathbb{R}^3$*, a njene stupce kao tri vektora* $(2, 0)$*,* $(1, -1)$ *i* $(3, 2)$ *u* $\mathbb{R}^2$*.*

Definicija 61 (Rang matrice)**.** *Ako retke matrice (ili njene stupce) shvatimo kao vektore, rang matrice je broj linearno nezavisnih redaka (odnosno stupaca) te matrice.*

Može se dokazati da je rang brojan po retcima jednak rangu brojanom po stupcima, pa je gornja definicija dobra.

Rang matrice određujemo tako da matricu podvrgnemo elementarnim transformacijama[2] sve dok ne postignemo da su u njoj ispod ili iznad dijagonale svi elementi nula; tada je broj nenul-elemenata na dijagonali jednak rangu matrice.

Primjer 258. *Rang matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *je 2 (provjerite!) odnosno svaka dva njena retka i svaka dva njena stupca su linearno nezavisna.*

Ako je matrica tipa $m \times n$ njen rang ne može biti veći od manjeg od brojeva m i n. Primjerice, matrica iz $M_{2,3}$ ne može imati rang veći od 2.

Želimo li za neke vektore utvrditi jesu li linearno zavisni ili ne, ukoliko su dani u koordinatnom obliku (s obzirom na istu bazu), dovoljno je zapisati ih kao stupce matrice i odrediti joj rang.

Primjer 259. *Recimo da nas zanima jesu li vektori* $(1, -1, 0, 1)$*,* $(2, 1, 1, 1)$ *i* $(0, 1, 0, 1)$ *linearno nezavisni vektori iz* $\mathbb{R}^4$*. Tada treba odrediti rang matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elementarnim transformacijama dobivamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]Elementarne transformacije ne mijenjanu linearnu (ne)zavisnost redaka odnosno stupaca u matrici. Kod određivanja ranga matrice elementarne transformacije smiju se izvoditi i sa stupcima.

te je rang matrice 3 *(tj. onoliko koliko smo imali vektora) te su zadani vektori linearno nezavisni.*

Dva vektorska prostora su izomorfna ako do na smisao/vrstu vektora i operacija s njima nema razlika među njima. Smisao je sličan kemijskom: Izomorfnost znači jednakost struktura, ali dopušta različitost sadržaja.

Primjer 260. *Vektorski prostori* $\mathbb{R}^3$, $M_{3,1}(\mathbb{R})$, V^3 *i* $V^3(0)$ *su izomorfni. Prva dva su izomorfni jer iako su elementi prvog oblika* (x, y, z), *a elementi drugog oblika* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *operacije se izvode po istim pravilima i s ekvivalentnim svojstvima – razlika je samo u stilu zapisa. Putem koordinatizacije* V^3 *odnosno* $V^3(0)$ *može se provjeriti da su i oni izomorfni s* $\mathbb{R}^3$.

Općenito vrijedi: Vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{R})$ odnosno $\mathbb{C}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{C})$ su izomorfni.

Primjer 261. *Svaki* $M_{m,n}$ *je izomorfan s* $\mathbb{R}^{mn}$ *– to se vidi tako da matricu shvatimo kao mn-torku jednostavnim nabrajanjem njenih elemenata po retcima. Recimo, matricu* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *možemo shvatiti i kao uređenu četvorku* (a, b, c, d), *bez da ima bitnih promjena u zbrajanju i množenju skalarom (zbroju dviju matrica odgovara zbroj odgovarajućih četvorki, a produktu matrice skalarom odgovara produkt odgovarajuće četvorke s tim skalarom), pa su* M_2 *i* $\mathbb{R}^4$ *izomorfni.*

Zapravo vrijedi i više: Dvi realni vektorski prostori iste (konačne) dimenzije su izomorfni pa stoga prostore $\mathbb{R}^n$ ili $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (ovisno o tom s kojim nam je trenutno jednostavnije raditi) možemo smatrati prototipovima realnih n-dimenzionalnih prostora.

Primjer 262. *Recimo da nas zanima jesu li matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *linearno zavisne, kako je* M_2 *izomorfan s* $\mathbb{R}^{2\cdot 2} = \mathbb{R}^4$, *treba ispitati linearnu nezavisnost vektora* $(0, 1, -1, 2)$, $(5, 11, 0, 0)$ *i* $(1, 0, 0, 0)$.

Nerijetko uz osnovne dvije operacije (zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom) vektorski prostor možemo na smisle način opskrbiti i operacijom koja ima ista svojstva kao skalarni produkt geometrijskih vektora (odjeljak 6.1.3). U tom slučaju govorim o unitarnim prostorima.

Definicija 62 (Unitarni prostori)**.** *Vektorski prostor V je unitaran ako je na njenmu definirana još jedna operacija (skalarni produkt vektora, u oznaci $\langle v, w\rangle$, odnosno operacija koja paru vektora pridružuje skalar) sa svojstvima*

$$\langle v, v\rangle \geq 0; \quad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0},$$
$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle},$$
$$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle,$$
$$\langle v, \alpha \cdot w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle.$$

[3] *Pritom naravno ta svojstva moraju vrijediti za sve vektore $v, w, u \in V$ i skalare α.*

Za realne unitarne prostore drugo defincijsko svojstvo svodi se na komutativnost skalarnog produkta (jer je kompleksno konjugiran realan broj jednak sam sebi):

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle.$$

Uočite također da, za kompleksne unitarne prostore, kombinacija drugog i četvrtog svojstva znači da vrijedi

$$\langle \alpha \cdot v, w\rangle = \overline{\alpha}\langle v, w\rangle.$$

Primjer 263. *Sa $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\rangle = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = w\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\varphi$ realni vektorski prostori V^2, $V^2(O)$, V^3, $V^3(O)$ postali su unitarni.*

Na $\mathbb{R}^n$ uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Analongno, na $\mathbb{C}^n$ uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \overline{x_1} y_1 + \ldots + \overline{x_n} y_n.$$

Na vektorskom prostoru realnih funkcija koje su integrabilne na I (gdje interval I može biti i neograničen) uobičajeno je skalarni produkt definirati s

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako pak promatramo funkcije kojima je kodomena $\mathbb{C}$ (kompleksne funkcije), odgovarajući skalarni produkt se definira s

$$\langle f, g\rangle = \int_I f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x,$$

[3] U standardnoj matematičkoj literaturi uzima se $\langle \alpha \cdot v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle$, no ovdje smo odabrali konvenciju koja se koristi u kvantnoj teoriji.

gdje je s f^* označena funkcija koja je definirana s $f^*(x) = \overline{f(x)}$. Ovaj skalarni produkt je vrlo čest u kvantnoj fizici i kemiji.

Uz gornje skalarne produkte (za koje nećemo provjeravati da stvarno zadovoljavaju svojstva iz defincije) prostori $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ i prostori realnih ili kompleksnih funcija integrabilnih na $[a, b]$ postaju unitarni prostori. Na tim prostorima je moguće uvesti i drugačije skalarne produkte, ali oni nisu relevantni za primjene. S druge strane, na vektorskim prostorima matrica te na vektorskim prostorima $\mathbb{C}^n$ gledanim kao realnim prostorima nema smislenog standardnog produkta te se oni ne uzimaju kao unitarni prostori, kao ni prostori funkcija koje nisu integrabilne na svojoj domeni (intervalu I).

Primjer 264. *U poglavlju o algebri vektora vidjeli smo da u slučaju vektora koji su zadani koordinatama obziroma na ortonormiranu bazu njihov skalarni produkt računamo po pravilu* $[x, y, z] \cdot [x', y', z'] = xx' + yy' + zz'$. *Primjerice, skalarni produkt vektora* $2\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}$ *s vektorom* $-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *je* $[2, 0, -5] \cdot [-1, 1, -1] = -2 + 0 + 5 = 3$.

Koristeći izomorfnost prostora $V^3(O)$ *(s ortonormiranom bazom* $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$*) i* $M_{3,1}$, *vidimo da za vektore* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *i* $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ *njihov skalarni produkt možemo izračunati kao*

$$\langle v, v' \rangle = v^t \cdot v'.$$

U unitarnom prostoru može se definirati norma (iznos) vektora preko jednakosti:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \tag{8.1}$$

Primijetimo da se u V^2 i V^3 uz standardni skalarni produkt norma podudara s iznosom vektora.

Primjer 265. *U* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *norma vektora se računa formulom*

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Zadatak 65. *Izračunajte normu funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Dva vektora unitarnog prostora zovu se ortogonalnim ako im je skalarni produkt 0.

Primjer 266. *Vektori* $(1, -1, 2, 0, 3)$ *i* $(0, 2, 1, 4, 0)$ *su ortogonalni u* $\mathbb{R}^5$ *jer im je skalarni produkt* $1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 0$.

Primjer 267. *Sada, vjerujemo, poprima smisao zadatak iz primjera 180, u kojemu se provjeravala ortogonalnost valnih funkcija.*

Zadatak 66. *Nađite primjer dviju ortogonalnih realnih funkcija koje nisu nulfunkcije, a koje su integrabilne na segmentu tipa* $[-a, a]$.

Može se dokazati da je svaki skup vektora unitarnog prostora u kojem su svaka dva vektora ortogonalna linearno nezavisan.

U unitarnim prostorima ima smisla razmatrati baze koje imaju svojstva poput standardne ortonormirane baze $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ od V^3.

Definicija 63 (Ortogonalne i ortonormirane baze)**.** *Baza unitarnog prostora čija svaka dva vektora su ortogonalna naziva se ortogonalnom bazom. Ortogonalna baza u kojoj svi vektori imaju normu* 1 *naziva se ortonorminanom bazom.*

Primjer 268. *Kanonske baze za* $\mathbb{R}^n$ *i* $\mathbb{C}^n$ *su ortonormirane.*

Definicija 64 (Ortogonalne i unitarne matrice)**.** *Kvadratnu matricu iz* M_n *zovemo ortogonalnom ako joj retci (alternativno: stupci), shvaćeni kao vektori u* $\mathbb{R}^n$*, čine ortonornormiranu bazu za* $\mathbb{R}^n$*. Kompleksna kvadratna matrica se uz iste uvjete naziva unitarnom.*

Zadatak 67. *Nađite dva različita primjera ortogonalnih matrica u* M_2.

Teorem 23. *Rang ortogonalne (ili unitarne) matrice iz* M_n *iznosi* n.

Dokaz. Ako je matrica iz M_n, ona ima n redaka koji čine (ortonormiranu) bazu za $\mathbb{R}^n$. Vektori baze uvijek su linearno nezavisni, dakle imamo n linearno nezavisnih redaka, odnosno rang ortogonalne matrice reda n iznosi n. □

Ako je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza vektorskog prostora V i $v \in V$ bilo koji vektor, onda znamo da v ima neke koordinate $[x_1, \ldots, x_n]$ u toj bazi, dakle je $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$. Pomnožimo taj izraz skalarno (slijeva) s nekim e_i. Budući da je skalarni produkt distributivan s obzirom na zbrajanje i da je $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ za $i \neq j$ (vektori baze su međusobno ortogonalni), preostat će nam $\langle e_i, v\rangle = \langle e_i, x_ie_i\rangle = x_i\langle e_i, e_i\rangle = x_i$. Dakle, pokazali smo:

Teorem 24. *Koordinate vektora* v *iz konačnodimenzionalnog unitarnog prostora s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu jednake su skalarnim produktima vektora te baze s* v.

Primjer 269. *Ako je* $\vec{v} \in V^2$ *i u* V^2 *odabrana ortonormirana baza* $\vec{i}$, $\vec{j}$, *onda je*

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i})\,\vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j})\,\vec{j}.$$

Primjerice, koordinate $\vec{v} = [-2, 3]$ *s obzirom na bazu* $\vec{i}$, $\vec{j}$ *znače da je* $\vec{v} \cdot \vec{i} = -2$ *i* $\vec{v} \cdot \vec{j} = 3$.

U unitarnim prostorima uvijek vrijedi i nejednakost[4]:

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \cdot ||w||.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori v i w kolinearni (tj. skup $\{v, w\}$ je linearno zavisan).

Ponovimo bitno... Vektorski prostori su skupovi čije elemente znamo zbrajati (i pritom dobivamo element istog skupa) i množiti skalarima tako (i pritom dobivamo element istog skupa). Ovisno o tome uzmemo li kao skup skalara skup $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ govorimo o realnom ili kompleksnom vektorskom prostoru. Elementi vektorskih prostora zovu se vektori. Podskup vektorskog prostora koji je i sam vektorski prostor naziva se potprostorom.

Linearna kombinacija zadanih vektora je vektor koji se dobije zbrajanjem tih vektora pomnoženih s nekim skalarima. Ako je jedina linearna kombinacija danih vektora koja je jednaka nulvektoru $\mathbf{0}$ ona u kojoj su svi skalari nula, kažemo da su ti vektori linearno nezavisni. Najveći broj vektora koje u danom vektorskom prostoru može sadržavati linearno nezavisan skup zove se dimenzija vektorskog prostora. Prototip vektorskih prostora dimenzije n su u realnom slučaju $\mathbb{R}^n$, a u kompleksnom $\mathbb{C}^n$. Linearno nezavisan skup vektora kojih ima onoliko kolika je dimenzija prostora naziva se bazom. Ako smo odabrali bazu vektorskog prostora, svaki vektor se može zapisati kao linearna kombinacija vektora baze na jedinstven način; skalari u tom zapisu nazivaju se kooordinatama vektora (u toj bazi). Rang matrice je broj njezinih linearno nezavisnih redaka (ili stupaca) ako ih gledamo kao vektore u odgovarajućem prostoru tipa $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$.

Ako je na vektorskom prostoru dodatno definirana operacija skalarnog produkta, govorimo o unitarnom prostoru. U unitarnim prostorima se može definirati norma vektora (drugi korijen od vektora skalarno pomnoženog sa sobom) i ortogonalnost dvaju vektora (vektori su ortogonalni ako im je skalarni produkt 0). Baza u kojoj su svi vektori međusobno ortogonalni i norme 1 naziva se ortonormiranom. Kvadratne matrice reda n čiji retci (ili stupci) čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^n$ odnosno $\mathbb{C}^n$ zovu se ortogonalne odnosno unitarne.

8.3 Linearni operatori

U prvom dijelu (odjeljak 2.4.1) ponovili smo što su linearne funkcije jedne realne varijable: To su funkcije koje sve nezavisne varijable množe s istim realnim brojem, dakle funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom tipa $f(x) = ax$.

[4]Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog.

Promijenimo li u gornjoj definiciji domenu sa skupa $\mathbb{R}$ u unitarni prostor $\mathbb{R}^n$ i izmijenimo izraze „množe” u „skalarno množe’ te „s istim realnim brojem” s „s istim vektorom”, dobivamo opću definiciju linearne funkcije (s n varijabli). Linearne funkcije su dakle funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s pravilom tipa $f(x) = \langle a, x\rangle$.

Primjer 270. *Neka je $a = (1, 2, 3, 4)$. Tim vektorom određena je linearna funkcija $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle$. Ako je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, pravilo možemo i raspisati:*

$$f(x) = \langle (1, 2, 3, 4),(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4.$$

Primijetimo da sada, kao što su linearne jednažbe s jednom nepoznanicom jednadžbe u kojima je linearna funkcija jedne varijable izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), tako su općenite linearne jednadžbe s n nepoznanica jednadžbe u kojima je linearna funkcija s n varijabli izjednačena sa zadanom vrijednošću (slobodnim članom), odnosno sve linearne jednadžbe su jednadžbe s jednom nepoznanicom – vektorom x iz $\mathbb{R}^n$ – i mogu se zapisati u obliku

$$\langle a, x\rangle = b$$

za neki $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

Primjer 271. *Linearna jednadžba $2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = 7$ u vektorskom obliku glasi $\langle a, x\rangle = 7$, gdje je $a = (2, -3, 1, 1, -6)$, a $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.*

S druge strane, možemo pak linearnu funkciju jedne varijable na drugačiji način poopćiti na funkciju kojoj je domena vektorski prostor. Naime, ako gledamo množenje svih vektora danog vektorskog prostora V s istim skalarom α, dobili smo funkciju $f : V \to V$, $f(v) = \alpha \cdot v$.

Primjer 272. *Funkcija koja matrici $A \in M_3$ pridružuje $3A \in M_3$ je funkcija koju možemo zapisati kao $f : M_3 \to M_3$, $f(A) = 3A$.*

I ovo se poopćenje može nazivati linearnim. Na prvi pogled, razlog je u tome što smo generalizirali pridruživanje $x \mapsto ax$ u pridruživanje $v \mapsto \alpha v$. No, nije stvar samo u tome. Naime, oba tipa poopćenja imaju ista svojstva s obzirom na obje temeljne operacije u svakom vektorskom prostoru, dakle zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom. Za oba tipa poopćenja vrijedi:

1. Svejedno je zbrojim li prvo nezavisne varijable u domeni, pa ih preslikam, ili prvo preslikam nezavisne varijable zasebno i onda pripadne zavisne varijable zbrojim u kodomeni;

2. svejedno je skaliram li prvo nezavisnu varijablu u domeni, pa ju preslikam, ili prvo preslikam nezavisnu varijablu i onda dobivenu zavisnu varijablu skaliram (s istim faktorom) u kodomeni.

Odnosno, zapisano algebarski, za sve funkcije f navedene gore vrijedi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ i $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ za sve elemente domene x i y i sve skalare α.

Ista svojstva imaju i deriviranje (kao preslikavanje koje derivabilnim funkcijama jedne varijable pridružuje integrabilne funkcije, tj. njihove derivacije: $f \mapsto f'$) i integriranje (kao preslikavanje koje integrabilnim funkcijama jedne varijable pridružuje derivabilne funkcije, tj. njihove neodređene integrale: $f \mapsto \int f(x)\mathrm{d}x$).

Također, osna simetrija u ravnini ima ista svojstva: Svejedno je zbrojimo li prvo dva geometrijska vektora iz V^2 pa ih zrcalimo s obzirom na danu os, ili ih prvo zrcalimo pa zbrojimo njihove slike, a isto tako je svejedno skaliram li vektor prije ili poslije zrcaljenja.

Iako su prethodne funkcije po svojoj prirodi vrlo raznolike, sve one imaju ista svojstva vezana za temeljne operacije u vektorskim prostorim. Takve se funkcije nazivaju linearnim operatorima.

Definicija 65 (Linearan operator). *Linearan operator*[5] *je funkcija $\hat{A} : V \to W$ (V i W su vektorski prostori) koja ima sljedeća dva svojstva:*

$$\hat{A}(v+w) = \hat{A}(v) + \hat{A}(w) \quad \textit{(aditivnost)},$$

$$\hat{A}(\alpha v) = \alpha \hat{A}(v) \quad \textit{(homogenost)}$$

za sve $v, w \in V$ i skalare α. Ako je $W = \mathbb{R}$ odnosno $W = \mathbb{C}$, linearan operator zovemo linearnim funkcionalom.

Primijetimo da domena i kodomena linearnog operatora moraju imati isti skup skalara, jer za svojstvo homogenosti moramo moći množiti sa istim skalarom i u domeni i u kodomeni. Dakle, linearni operatori idu s realnih prostora u realne, alternativno s kompleksnih u kompleksne.

U smislu gornje definicije, linearne funkcije s n varijabli su primjeri linearnih funkcionala.

Drugačiji primjer linearnog funkcionala je trag. Trag kvadratne matrice je zbroj njezinih dijagonalnih elemenata:

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$$

[5] Sâm izraz „operator” obično se koristi za bilo kakvu funkciju kojoj su domena i kodomena vektorski prostori.

za $A \in M_n$. Ako gledamo trag kao funkciju $\mathrm{tr} : M_n \to \mathbb{R}$ (isto vrijedi i za kompleksni slučaj), lako je provjeriti da je $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$ i $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$, dakle je trag linearan funkcional na vektorskom prostoru M_n.

Primjer 273. *Funkcija sinus* nije *primjer linearnog operatora (funkcionala) s* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$ *jer niti je aditivna niti je homogena.*

Zadatak 68. *Je li kvadriranje, korjenovanje, uzimanje recipročne vrijednosti aditivno? Homogeno?*

Neki posebno jednostavni tipovi linearnih operatora i funkcionala mogu se naći za svaki vektorski prostor V uzet kao domena.

Jedinični operator je funkcija identiteta na vektorskom prostoru, tj. to je funkcija $\hat{I} : V \to V$, $\hat{I}(v) = v$.

Nuloperator je funkcija koja svim vektorima jednog prostora pridružuje nulvektor tog istog ili nekog drugog prostora, tj. to je funkcija $\hat{O} : V \to W$, $\hat{O}(v) = \mathbf{0}_W$. Ako je kodomena jednodimenzionalna, govorimo o nulfunkcionalu.

Nuloperator i jedinični operator očigledno nulvektoru domene pridružuju nulvektor kodomene. Derivacija nulfunkcije je nulfunkcija. Aku u linearnu funkciju n varijabli uvrstimo $(0, 0, \ldots, 0)$, dobit ćemo 0. Osnosimetrična slika nulvektora je nulvektora. Što primjećujemo? Svi linearni operatori nulvektor domene preslikavaju u nulvektor kodomene, tj. vrijedi:

Teorem 25. *Ako je* $\hat{A} : V \to W$ *linearan operator, onda je* $\hat{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

Primjer 274. *Funkcija koja svim vektorima domene pribraja isti nenulvektor* a *nije linearan operator jer nulvektor* $\mathbf{0}$ *preslikava u* $\mathbf{0} + a = a \neq \mathbf{0}$.

S druge strane, funkcija sinus preslikava 0 *u* 0*, ali ipak nije linearna.*

Iz primjera vidimo: Gornje svojstvo je korisno ako neku funkciju želimo isključiti iz svijeta linearnih operatora (ako ne preslikava nulvektor u nulvektor, sigurno nije linearna), no ako preslikava nulvektor u nulvektor ona može i ne mora biti linearna.

Od posebnog interesa u kemiji (stereokemiji, kristalografiji) su linearni operatori koji preslikavaju geometrijske vektore u geometrijske vektore, tj. linearne operatore kojima je su domena i kodomena isti jedan od prostora $V^2(O)$ ili $V^3(O)$. Neka je $\hat{A}$ jedan takav operator.

Ako je p neki pravac kroz O, smjera određenog vektorom $\overrightarrow{s}$, onda se taj pravac sastoji točno od svih vektora oblika $t\overrightarrow{s}$, $t \in \mathbb{R}$. Budući da je $\hat{A}$ homogen, imamo $\hat{A}(t\overrightarrow{s}) = t\hat{A}(\overrightarrow{s})$, tj. svi vektori s pravca p se preslikavaju u vektore pravca određenog vektorom $hatA(\overrightarrow{s})$ (taj vektor može biti nulvektor, u tom slučaju $\hat{A}$ preslikava cijeli pravac p u O). Naravno, i taj pravac prolazi kroz O jer $\hat{A}$ mora nulvektor preslikati u nulvektor. Dakle, pokazali smo: Linearni operatori $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ i linearni operatori $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ pravce kroz ishodište preslikavaju isključivo u pravce kroz ishodište ili u samo ishodište. Analogno se argumentira: Linearni operatori $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ ravnine koje prolaze kroz ishodište mogu preslikati samo u ravnine kroz O, pravce kroz O ili jednostavno samo u O.

Za primjene u kemiji posebno su važni linearni operatori simetrija, koji su podvrsta ortogonalnih operatora.

Definicija 66 (Ortogonalni operator)**.** *Ako je V unitaran prostor, linearni operator $\hat{A} : V \to V$ koji ima svojstvo $||\hat{A}(v)|| = ||v||$ za sve $v \in V$ naziva se ortogonalnim operatorom.*

Ukoliko je V jedan od prostora V^2, V^3, $V^2(O)$, $V^3(O)$ ortogonalne operatore često nazivamo operatorima simetrije (oni dakle čuvaju iznose geometrijskih vektora, jer je za geometrijske vektore norma isto što i iznos). Ukoliko operator simetrije fiksira neki podskup prostora (preslikava taj podskup u samog sebe), govorimo o simetriji tog podskupa.

Primjer 275. *Ako je k kružnica oko O (u ravnini), onda je svaka rotacija oko O simetrija te kružnice.*

Osnovni tipovi operatora simetrije su sljedeći.

Najjednostavniji je jedinični operator $\hat{I}$ i on je simetrija svakog podskupa ravnine odnosno prostora.

Centralna simetrija (inverzija) s obzirom na točku O je definirana s $\hat{\imath}(v) = -v$ (tj. $\hat{\imath} = -\hat{I}$).

Zrcaljenje se različito definira u ravnini i u prostoru. Ako gledamo zrcaljenje ravnine, govorimo i o osnoj simetriji. To je linearni operator $\hat{\sigma} : V^2(O) \to V^2(O)$ za koji postoji pravac p (os simetrije) koji prolazi kroz O i koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{\sigma}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je polovište dužine $\overline{TT'}$ na pravcu p. Zrcaljenje u prostoru je linearan operator $\hat{\sigma} : V^3(O) \to V^3(O)$ definiran analogno, samo umjesto osi simetrije za njega postoji ravnina simetrije Π sa istim svojstvom kao što je u dvodimenzionalnom slučaju navedeno za os simetrije.

Kao i zrcaljenje, i rotacija se se različito definira u ravnini i u prostoru. Rotacija ravnine oko O je linearni operator $\hat{\rho} : V^2(O) \to V^2(O)$ koji ima svojstvo da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{\sigma}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle TOT'$ uvijek isti. Rotacija prostora je linearan operator $\hat{\rho} : V^3(O) \to V^3(O)$ za koji postoji pravac o kroz O (os rotacije) sa svojstvom da za svaki $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$ vrijedi da ako je $\hat{\sigma}(\vec{v}) = \overrightarrow{OT'}$, onda je (orijentirani) kut $\angle T\overline{O}T'$ uvijek isti, gdje je $\overline{O}$ probodište osi o s ravninom okomitom na O koja sadrži T.

U dvodimenzionalnom slučaju se centralna simetrija ne razmatra, jer je isto što i rotacija oko O za 180°. S druge strane, u trodimenzionalnom slučaju se često razmatraju i rotoinverzije: rotoinverzija je kompozicija rotacije i centralne simetrije.

Za razliku od navedenih, jedan važan primjer simetrije koja nije linearan operator je translacija za nenul vektor. Translacija se definira kao pribrajanje fiksnog vektora svim vektorima, dakle to je funkcija $t : V^2(O) \to V^2(O)$ (odnosno $t : V^3(O) \to V^3(O)$) oblika $t(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{t}$. Ako je $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$, translacija je jedinični operator, a inače nije linearna jer

$$t(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{t} \neq$$
$$\neq (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{t}) + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = t(\overrightarrow{v}) + t(\overrightarrow{w}).$$

Vratimo se na općenite linearne operatore, pri čemu ćemo pretpostaviti da su dimenzije i domene i kodomene konačne. Neka je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator i $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza za domenu V (dakle, V je n-dimenzionalan vektorski prostor). Svaki vektor $v \in V$ jednoznačno se može zapisati kao

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$$

pa je

$$\hat{A}v = \hat{A}(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \hat{A} e_1 + \ldots + x_n \hat{A} e_n.$$

Dakle:

Teorem 26. *Linearni operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na bilo kojoj bazi domene.*

Primjer 276. *Neka je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ neka baza za $Vr(O)$ te neka je za linearan operator $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ poznato da prvi vektor baze preslikava u drugi, a drugi u zbroj prvog i drugog. To je dovoljno da bismo znali kako preslikava sve vektore ravnine. Naime, svaki vektor $\overrightarrow{v} \in V^2(O)$ jednoznačno se može zapisati kao $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, pa linearnost od $\hat{A}$ i navedena svojstva povlače da je*

$$\hat{A}(\overrightarrow{v}) = x\overrightarrow{b} + y(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = y\overrightarrow{a} + (x + y)\overrightarrow{b},$$

što kraće pišemo kao $\hat{A}([x, y]) = [y, x + y]$.

Neka je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, gdje su V i W konačnih dimenzija. Odaberimo neku bazu za domenu od V: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Koordinate od e_1 s obzirom na tu bazu su $(1, 0, 0, \ldots, 0)$; koordinate od e_2 s obzirom na tu bazu su $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ i t.d. Drugim riječima, fiksiranjem baze od V sveli smo taj prostor (izomorfizmon) na na $\mathbb{R}^n$ (odnosno $\mathbb{C}^n$) s kanonskom bazom.

Napomena 25. *Dva vektorska prostora su izomorfna ako do na smisao/vrstu vektora i operacija s njima nema razlika među njima. Smisao je sličan kemijskom: izomorfnost znači jednakost struktura, ali dopušta različitost sadržaja.*

Primjerice, vektorski prostori $\mathbb{R}^3$, $M_{3,1}(\mathbb{R})$, V^3 i $V^3(0)$ su izomorfni. Prva dva su izomorfni jer iako su elementi prvog oblika (x, y, z), a elementi drugog oblika $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, operacije se izvode po istim pravilima – razlika je samo u stilu zapisa. Putem koordinatizacije V^3 odnosno $V^3(0)$ može se provjeriti da su i oni izomorfni s $\mathbb{R}^3$. Općenito, vektorski prostori $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{R})$ odnosno $\mathbb{C}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{C})$ su izomorfni.

Svaki $M_{m,n}$ je izomorfan s $\mathbb{R}^{mn}$ – to se vidi tako da matricu shvatimo kao mn-torku jednostavnim nabrajanjem njenih elemenata po retcima. Recimo, matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ možemo shvatiti i kao uređene četvorke (a, b, c, d) bez da ima bitnih promjena u zbrajanju i množenju skalarom (zbroju dviju matrica odgovara zbroj odgovarajućih četvorki, a produktu matrice skalarom odgovara produkt odgovarajuće četvorke s tim skalarom), pa su M_2 i $\mathbb{R}^4$ izomorfni.

Ako kao pred napomenom vektore putem koordinata s obzirom na fiksiranu bazu poistovjetimo s uređenim n-torkama, vidimo su svi realni vektorski prostori iste (konačne) dimenzije su izomorfni pa stoga prostore $\mathbb{R}^n$ ili $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (ovisno o tom s kojim nam je trenutno jednostavnije raditi) možemo smatrati prototipovima realnih n-dimenzionalnih prostora. Analogna tvrdnja vrijedi u kompleksnom slučaju.

Znamo da je djelovanje linearnog operatora $\hat{A}$ dovoljno zadati na vektorima baze domene. Pripadni rezultati su $\hat{A}e_1$, $\hat{A}e_2$, $\ldots$, $\hat{A}e_n$, što su vektori u kodomeni W. Stoga se svaki od njih može (jednoznačno) zapisati kao linearna kombinacija elemenata neke odabrane baze f_1, f_2, $\ldots$, f_m u kodomeni. To nam omogućuje da definiramo matricu linearnog operatora.

Definicija 67 (Matrica linearnog operatora)**.** *Matrica linearnog operatora $\hat{A} : V \to W$ s obzirom na odabrane baze domene i kodomene je matrica A u kojoj se redom u stupcima nalaze koordinate slika vektora odabrane baze domene (dakle, od $\hat{A}e_1$, $\hat{A}e_2$, $\ldots$, $\hat{A}e_n$) u odabranoj bazi kodomene.*

Primjer 277. *Neka je $\hat{\sigma}$ zrcaljenje prostora s obzirom na neku ravninu, a ortogonalna baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ prostora je odabrana tako da je ta ravnina (x, y)-ravnina. Tada je $\hat{\sigma}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$, $\hat{\sigma}(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{b}$, $\hat{\sigma}(\overrightarrow{c}) = -\overrightarrow{c}$, tj. matrica* *tog operatora s obzirom na opisanu bazu je*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako je $\hat{A}$ linearni operator s n-dimenzionalnog u m-dimenzionalni prostor, tada imamo n vektora u svakoj bazi domene, dakle svaka matrica tog operatora ima n stupaca. S druge strane, $\hat{A}$ preslika svaki vektor te baze u kodomenu, u kojoj vektori imaju po m koordinata, dakle svaka matrica tog operatora ima m redaka. Dokazali smo:

Teorem 27. *Ako je $\hat{A} : V \to W$ linearan operator, onda s obzirom na bilo koje baze domene i kodomene matrica od $\hat{A}$ ima redaka kolika je dimenzija kodomene, a stupaca kolika je dimenzija domene.*

Posebno, ako su domena i kodomena iste dimenzije, matrica linearnog operatora je kvadratna. Iz gornjeg je također vidljivo zašto ne možemo definirati matricu linearnog operatora ako domena ili kodomena ima beskonačnu dimenziju.

Napomena 26. *Ako su domena i kodomena linearnog operatora jedan te isti prostor, uobičajeno je uzeti istu bazu u domeni i kodomeni, pa ćemo to u daljnjem podrazumijevati.*

Nuloperator $\hat{0} : V \to W$ s obzirom na svaku bazu ima istu matricu, i to nulmatricu odgovarajućeg tipa.

Jedinični operator $\hat{I} : V \to V$ sve vektore preslikava u same sebe, dakle posebno je $\hat{I}(e_i) = e_i$ za sve vektore baze $\{e_1, \ldots, e_n\}$ od V. Kako i-ti vektor bilo koje baze s obzirom na tu bazu ima koordinate $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, gdje je 1 na poziciji i, slijedi da je s obzirom na svaku bazu matrica jediničnog operatora oblika

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in M_n.$$

Takve matrice zovemo jedinične matrice.

Općenitije, skalarni operatori $\hat{S}_\alpha$ su linearni operatori kojima se domena i kodomena podudaraju i čije djelovanje je množenje svih vektora prostora s istim skalarom α: $\hat{S}_\alpha(v) = \alpha v$. Posebno, jedinični operator je skalarni operator množenja s 1, a centralna simetrija je skalarni operator množenja s

-1. Kao i gore se vidi da skalarni operator u svakoj bazi ima istu, skalarnu matricu

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in M_n.$$

No, općenito matrica linearnog operatora (kao i koordinate pojedinog vektora) ne ovisi samo o operatoru, nego i odabranim bazama domene i kodomene.

Primjer 278. *Linearan operator $\hat{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadan je kao tzv. pomak ulijevo: $\hat{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0)$. Odredimo njegove matrice obzirom na kanonsku bazu i obzirom na bazu $a = (4, 0, 3, 0)$, $b = (-2, 1, 0, 0)$, $c = (0, 0, -1, 1)$ i $d = (0, 1, 0, 2)$.*

Ako uzmemo kanonsku bazu, imamo redom $\hat{A}(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$, $\hat{A}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$, pa je s obzirom na kanonsku bazu matrica našeg operatora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za navedenu drugu bazu imamo redom $\hat{A}(4, 0, 3, 0) = (0, 3, 0, 0) = v_1$, $\hat{A}(-2, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) = v_2$, $\hat{A}(0, 0, -1, 1) = (0, -1, 1, 0) = v_3$, $\hat{A}(0, 1, 0, 2) = (1, 0, 2, 0) = v_4$, no to ne znači da je matrica

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tražena matrica. Naime, kao što znamo (vidi primjer 256), komponente uređenih n-torki su njihove koordinate samo s obzirom na kanonsku bazu, tj. vektori v_1, v_2, v_3, v_4 koje smo izračunali kao slike vektora baze su ispisani svojim koordinatama u kanonskoj bazi. Stoga je A' matrica našeg operatora ako kao bazu domene uzmemo zadanu novu bazu, ali kao bazu kodomene uzmemo kanonsku.

Želimo li traženi zapis (s obzirom na istu bazu u domeni i kodomeni), treba vektorima v_1, v_2, v_3, v_4 odrediti koordinate u bazi $\{a, b, c, d\}$. Kao što znamo, njih dobijemo rješavanjem sustava linearnih jednadžbi čiji koeficijenti *uz nepoznanice, po stupcima, sadrže koordinate baze $\{a, b, c, d\}$ u kanonskoj bazi, a u stupcu slobodnih članova koordinate vektora v_i u kanonskoj bazi. Budući da pri rješavanju sustava Gaussovom metodom eliminacije odluka o elementarnim transformacijama ovisi samo o „lijevom" dijelu, a ne o stupcu slobodnih članova i budući da u toj metodi ne dolazi do miješanja stupaca, možemo paralelno riješiti sva četiri sustava:*

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 18 & 3 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Dakle, matrica $\hat{A}$ s obzirom na bazu $\{a, b, c, d\}$ je

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 & -1 \\ 12 & \frac{3}{2} & -6 & -\frac{5}{2} \\ 18 & 3 & -10 & -5 \\ -9 & -\frac{3}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Iako su situacije kao u prethodnom primjeru moguće, u pravilu se za linearni operator uzima baza u kojoj on ima posebno zgodnu matricu. Pogledajmo koje su to „najzgodnije" matrice za operatore zrcaljenja i rotacije ravnine i prostora.

Ako gledamo osnu simetriju $\hat{\sigma} : V^2(O) \to V^2(O)$, u pravilu je moguće odabrati pravokutni koordinatni sustav (tj. ortogonalnu bazu) tako da os simetrije bude os apscisa ili ordinata. Ako smo os simetrije uzeli kao x-os i da je baza $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ ortogonalna, onda se $\overrightarrow{a}$ preslikava sam u sebe, a $\overrightarrow{b}$ u $-\overrightarrow{b}$, tj. ako gledamo osnu simetriju s obzirom na x-os u pravokutnom koordinatnom sustavu, matrica joj je

$$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogno zaključujemo da ako gledamo osnu simetriju s obzirom na y-os u pravokutnom koordinatnom sustavu, matrica joj je

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako gledamo zrcaljenje $\hat{\sigma} : V^3(O) \to V^3(O)$, također je u pravilu moguće odabrati koordinatni sustav (tj. bazu) tako da ravnina simetrije bude jedna od koordinatnih ravnina, a treća os okomita na nju ($\alpha = \beta = 90°$). Ako smo ravninu simetrije uzeli kao (x, y)-ravninu i z-os okomito na nju, onda se $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ (budući da leže u ravnini simetrije) preslikavaju sami u sebe, a $\overrightarrow{c}$ se preslikava u $-\overrightarrow{c}$, tj. ako gledamo zrcalnu simetriju s obzirom na (x, y)-ravninu u koordinatnom sustavu u kom je z-os okomita na (x, y)-ravninu, matrica joj je

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogno zaključujemo da ako gledamo zrcalnu simetriju s obzirom na (y, z)- ili (x, y)-ravninu u koordinatnom sustavu u kojem je treća os okomita na ravninu simetrije, matrica je

$$S_{yz} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

odnosno

$$S_{xz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pak promatramo rotaciju $\hat{\rho} : V^2(O) \to V^2(O)$ za kut α oko O, u pravilu je moguće odabrati Kartezijev koordinatni sustav, tj. ortonormiranu bazu $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$. Tada se $\overrightarrow{i}$ zarotira u $\cos\alpha \overrightarrow{i} + \sin\alpha \overrightarrow{j}$, a $\overrightarrow{j}$ se zarotira u $-\sin\alpha \overrightarrow{i} + \cos\alpha \overrightarrow{j}$, dakle u ortonormiranoj bazi ravnine matrica rotacije za kut α je

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Naposlijetku, ako promatramo rotaciju $\hat{\rho} : V^3(O) \to V^3(O)$ za kut α oko neke osi, u pravilu je moguće odabrati pravokutni koordinatni sustav ($\alpha = \beta = \gamma = 90°$) tako da os rotacije bude jedna od koordinatnih osi (npr. z-os), a da su prva dva vektora okomita u odnosu na tu os i jedinične duljine ($a = b = 1$). U tom slučaju se z-koordinata rotacijom oko z-osi ne mijenja, dok pogled duž z-osi za prve dvije koordinate (prva dva bazna vektora) situaciju svodi na prethodni dvodimenzionalni slučaj. Stoga je matrica rotacije za kut α oko z-osi, ukoliko je koordinatni sustav zadan parametrima $\alpha = \beta = \gamma = 90°$, $a = b = 1$, dana s

$$R_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Zadatak 69. *Kako izgledaju matrice $R_{x,\alpha}$ i $R_{y,\alpha}$ rotacije za kut α oko x-odnosno y-osi ako je koordinatni sustav Kartezijev?*

Iako su kako vidimo matrice operatora simetrije vrlo raznolike, uvijek vrijedi:

Teorem 28. *Za svaki operator simetrije na $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ je svaka njegova matrica (s obzirom na bilo koju ortonormiranu bazu) ortogonalna matrica.*

Primjer 279. *Matrica*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ne može biti matrica operatora simetrije s obzirom na neku ortonormiranu bazu jer nije ortogonalna (norma prvog retka je $\sqrt{2}$, norma drugog je 1, a skalarni produkt im je 2).

Primijetimo naposlijetku da budući da je $\hat{A}(x+y) = \hat{A}x + \hat{A}y$, slijedi i da za množenje matrice s matricom-stupcem vrijedi distributivnost $A(X+Y) = AX + AY$. Analogno iz homogenosti linearnih operatora slijedi i kvaziasocijativnost: $A(\alpha X) = \alpha AX$.

Ponovimo bitno... Linearni operatori su funkcije kojima su domena i kodomena vektorski prostori i koje su aditivne i homogene, tj. poštuju dvije osnovne operacije svakog vektorskog prostora. Svaki linearni operator preslikava nulvektor domene u nulvektor kodomene.

Ukoliko je kodomena linearnog operatora jednodimenzionalna, govorimo o linearnom funkcionalu. Ako se pak domena i kodomena linearnog operatora podudaraju ($\hat{A} : V \to V$) te ako je ta (ko)domena V unitaran prostor i $\hat{A}$ čuva normu svakog vektora, govorimo o ortogonalnom operatoru; ako je V jedan od prostora geometrijski vektora, ortogonalni operator se naziva i operatorom simetrije.

Ako su domena i kodomena linearnog operatora konačne dimenzije, linearan operator je potpuno zadan svojim djelovanjem na jednoj bazi domene. Ukoliko ispišemo koordinate slika vektora baze domene (s obzirom na odabranu bazu kodomene), dobivamo matricu linearnog operatora (broj redaka jednak je dimenziji kodomene, a broj stupaca dimenziji domene). Ona općenito ovisi i o odabranim bazama u domeni i kodomeni, a ne samo o linearnom operatoru. Ako znamo matricu linearnog operator s obzirom ne neke baze, te ako proizvoljni vektor domene zapišemo koordinatama s obzirom na istu bazu domene koja je odabrana za matricu linearnog operatora i te koordinata zapišemo kao matricu-stupac, umnožak matrice operatora s matricom-stupcem koja predstavlja vektor daje točno koordinate slike tog vektora putem tog linearnog operatora (koordinate s obzirom na bazu kodomene koja je odabrana za matricu operatora).

8.4 Množenje matrica

Iako smo sad utvrdili *što* je to matrica linearnog operatora, iz prethodnog nije očito da od nje imamo ikakve koristi.

Primjer 280. *Recimo da nas zanima na koju poziciju se zarotira neka točka prostora T (neki radij-vektor $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OT}$), ako se radi o rotaciji $\hat{\rho}$ prostora $V^3(O)$ za kut od $45°$. Uzmimo da je os rotacije z-os i da je baza prostora ortonormirana $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Tada je matrica našeg linearnog operatora matrica iz formule 8.2 s $\alpha = 45°$,*

$$R_{z,45°} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svaki vektor $\overrightarrow{r}$ ima neke koordinate $[x, y, z]$ obzirom na odabranu bazu. Kako je rotacija linearan operator, znamo $\hat{\rho}(\overrightarrow{r}) = x\hat{\rho}(\overrightarrow{i}) + y\hat{\rho}(\overrightarrow{j}) + z\hat{\rho}(\overrightarrow{k})$. Stupci matrice operatora sadrže koordinate slika vektora baze, dakle

$$\hat{\rho}[x, y, z] = x[\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] + y[0, 1, 0] + z[-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2] =$$

$$= [(x - z)\sqrt{2}/2, y, (x + z)\sqrt{2}/2].$$

Ako bolje pogledamo, vidimo da je prva koordinata od $\hat{\rho}(\overrightarrow{r})$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) prvog retka matrice $R_{z,45°}$ i (x, y, z), druga koordinata od $\hat{\rho}\overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) drugog retka matrice $R_{z,45°}$ i (x, y, z), a treća koordinata od $\hat{\rho}\overrightarrow{r}$ točno skalarni produkt (u $\mathbb{R}^3$) trećeg retka matrice $R_{z,45°}$ i (x, y, z).

Pišemo

$$R_{z,45°} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x - z)\sqrt{2}/2 \\ y \\ (x + z)\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Kao u prethodnom primjeru, pokazuje se da uvijek vrijedi: Ako je za linearni operator $\hat{A} : V \to W$ poznata njegova matrica A s obzirom na neke baze B_V i B_W domene i kodomene i ako je vektor $v \in V$ zadan koordinatama $(x_1, \ldots, x_n)$ s obzirom na bazu B_V, koordinate od $\hat{A}(v)$ u bazi B_W su redom skalarni produkti redaka matrice A s $(x_1,\ldots,x_n)$, gledani kao skalarni produkti u $\mathbb{R}^n$ (odnosno $\mathbb{C}^n$). Kažemo da smo matricu A pomnožili s matricom-stupcem koordinata od v i dobili matricu-stupac koja predstavlja sliku vektora v s obzirom na linearnih operator $\hat{A}$. Drugim riječima, primarna korist od matrice linearnog operatora je da njenim množenjem s matricama-stupcima koji sadrže koordinate vektora domene dobivamo njihove slike u kodomeni (pri čemu se koordinate vektora domene odnosno kodomene odnose na baze koje određuju matricu A).

Uočimo da smo tako definirali množenje matrice $A \in M_{m,n}$ (matrice linearnog operatora s n-dimenzionalnog u m-dimenzionalni prostor) s matricom $X \in M_{n,1}$ (koordinatnom matricom vektora v domene) i rezultat je matrica-stupac u $M_{m,1}$ (koordinatna matrica vektora kodomene):

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

pri čemu je

$$y_i = \langle (a_{i1},\ldots,a_{in}), (x_1,\ldots,x_n) \rangle$$

(„i-ti redak od A puta v") za $i = 1,\ldots,m$.

Primjer 281. *Koje su, u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i},\vec{j}\}$, koordinate vektora $2\vec{i}-5\vec{j}$ ako se on zarotira za 60° oko ishodišta?*

Matrica te rotacije je

$$R_{60^\circ} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$R \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1/2, -\sqrt{3}/2), (2,-5) \rangle \\ (\sqrt{3}/2, 1/2), (2,-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

dakle se $2\vec{i}-5\vec{j}$ zarotira u vektor $\left(1+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}\right)\vec{j}$.

Primijetimo da u gornjem smislu svaka matrica predstavlja neki linearni operator s obzirom na neke baze domene i kodomene. Ako je A matrica-redak, onda je kodomena jednodimenzionalna, tj. radi se o linearnom funkcionalu. Linearni funkcional vektore preslikava u skalare, dakle je rezultat množenja matrice-retka s matricom-stupcem skalar, preciznije: 1×1-matrica. Pritom, to množenje ima smisla samo ako su broj redaka matrice-stupca i matrice A jednaki (dimenzija domene).

Zadatak 70. *Ima li smisla množiti matricu-stupac s matricom-stupcem?*

Budući da smo tako za sve konačnodimenzionalne slučajeve djelovanje operatora $\hat{A}$ na vektor domene v sveli na množenje matrica, za linearne je operatore uobičajeno umjesto $\hat{A}(v)$ pisati $\hat{A}v$.

No, ne samo da je svaka matrica matrica nekog linearnog operatora, nego je i svakom matricom zadan neki linearan operator, analogno kao što je svakim realnim brojem zadana linearna funkcija jedne varijable. Neka je $A \in M_{m,n}$ proizvoljna matrica. Definirajmo $\hat{A} : M_{n,1} \to M_{m,1}$ s $\hat{A}(X) = A \cdot X$. S obzirom na to da je množenje $A \cdot X$ definirano preko skalarnih produkata, a oni su distributivni s obzirom na zbrajanje i homogeni s obzirom na drugi faktor, slijedi da je $\hat{A}$ linearan operator. Njegova matrica od $\hat{A}$ obzirom na kanonske baze za $M_{n,1}$ i $M_{m,1}$ je upravo matrica A.

Primjer 282. *Neka je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tom matricom je definiran $\hat{A} : M_{2,1} \to M_{2,1}$,

$$\hat{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Zadatak 71. *Kvadrat ima vrhove u točkama koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu imaju koordinate* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. *Matrica* M *je kvadratna matrica reda* 2 *i* $\hat{M}$ *odgovarajući linearni operator.*

U kakve četverokute $\hat{M}$ *može preslikati zadani kvadrat? U kakve ne?*

Ako je neki drugi kvadrat određen vrhovima $(4, 4)$, $(6, 2)$, $(8, 4)$, $(6, 6)$, *uz koje uvjete na* M *će se oba kvadrata preslikati u isti tip četverokuta?*

Zadatak 72. *Tzv. opće pozicije u kristalnoj strukturi prostorne grupe Pbcn (rompski sustav) mogu se zapisati kao koordinate* (m, n, p), $(m + 1/2, n + 1/2, p + 1/2)$, $(m + 1/2, n, p)$, $(m, n + 1/2, p)$, $(m, n, p + 1/2)$, $(m + 1/2, n + 1/2, p)$, $(m + 1/2, n, p + 1/2)$, $(m, n + 1/2, p + 1/2)$, *gdje su* m, n *i* p *cijeli brojevi.*

Zapišite jednu (ne-jediničnu) matricu koja (obzirom na kristalografsku bazu) predstavlja linearan operator simetrije za ovu kristalnu rešetku, tj. takav da se prije i poslije njegovog djelovanja opće pozicije nalaze na istim mjestima.

Kao što je množenje matrice $A \in M_{m,n}$ s matricom $X \in M_{n,1}$ definirano tako da odgovara djelovanju linearnog operatora na vektor, tako se i općenito množenje matrica definira tako da odgovara kompoziciji linearnih operatora.

Konkretno, da bismo mogli komponirati linearne operatore $\hat{A} : V \to W$ i $\hat{B} : V' \to W'$ u linearni operator $\hat{A} \circ \hat{B}$ (podsjećamo, kompozicija dva linearna operatora je kad god ima smisla također linearan operator) moramo imati $V = W'$ (kodomena po redoslijedu djelovanja prvog operatora je domena drugog). Ako je dimenzija od V jednaka n, dimenzija od W jednaka m (dakle, sve matrice A od $\hat{A}$ su tipa $m \times n$), dobili smo prvi uvjet za množenje matrica $A \cdot B$: Budući je $V = W'$, to je i dimenzija od W' jednaka n, dakle matrica B mora imati redaka koliko A ima stupaca. Takve matrice A i B kod kojih je broj stupaca prve jednak broju stupaca druge zovu se ulančane matrice i samo one se mogu množiti. Nadalje, kompozicija $\hat{A} \circ \hat{B}$ ima domenu V', a kodomenu W, dakle matrica $A \cdot B$ od $\hat{A} \circ \hat{B}$ mora imati redaka koliko je dimenzija od W (broj redaka od A), a stupaca koliko je dimenzija od V' (broj stupaca od B). Dakle, umnožak dviju ulančanih matrica ima redaka koliko prva, a stupaca koliko druga.

Ostaje još pitanje kako odrediti elemente u $A \cdot B$. To nećemo argumentirati, nego samo navodimo pravilo: Element na poziciji (i, j) umnoška $A \cdot B$ je skalarni produkt i-tog retka od A i j-tog stupca od B, oba shvaćena kao elementi od $\mathbb{R}^n$ (čak i ako se radi o kompleksnim matricama, ovi skalarni produkti se računaju kao u realnom slučaju).

Napomena 27. *Gore smo podrazumijevali da smo za $V = W'$ uzeli istu bazu i kad gledamo matricu od $\hat{A}$ i kad gledamo matricu od $\hat{B}$.*

Primjer 283. *S obzirom na standardnu ortonormiranu bazu, odredite matricu linearnog operatora koji vektore prostora $V^3(O)$ prvo zarotira oko neke osi za $90°$, a zatim zrcali s obzirom na ravninu okomitu na tu os (takve operatore zovemo rotorefleksijama).*

Uzmimo da je os rotacije z-os. Tad je ravnina simetrije (x, y)-ravnina. Rotacija oko z-osi za $90°$ ima matricu

$$R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a zrcaljenje s obzirom na (x, y)-ravninu

$$S_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da kompoziciji operatora odgovara množenje njihovih matrica, tražena je matrica

$$S_{xy} R_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Budući da komponiranje funkcija nije komutativno, ni množenje matrica nije komutativno. No to je očito i iz uvjeta ulančanosti – ako je AB definirano, ne znači da je i BA definirano. Npr. ako je $A \in M_{2,3}$, a $B \in M_3$, umnožak AB ima smisla, a BA nema. No, lako se uvjeriti i da čak i kad oba produkta AB i BA imaju smisla, oni u pravilu daju različite rezultate.

Primjer 284. *Neka su*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ali

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbog nekomutativnosti množenja matrica, često se kao „mjera nekomutativnosti" uzima njihov komutator

$$[A, B] = AB - BA.$$

Primjer 285. *Komutator matrica A i B iz gornjeg primjera je*

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjer 286. *Paulijeve matrice spina su tri matrice koje se ponekad koriste za opis spinova elektrona (po jedna za svaki kutni moment):*

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Za njih je

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z, [S_y, S_z] = i\hbar S_x, [S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

i

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posljednja matrica predstavlja kvadrat spinskog kutnog momenta.

No, kad god ima smisla, množenje matrica je asocijativno: ($A(BC) = (AB)C$ kad god je A ulančana s B i B s C). Nadalje, jedinične matrice $I_n \in M_n$ (one na dijagonali imaju jedinice, a ostali elementi su im nule) kad se množe s drugim matricama s kojima su ulančane ne mijenjaju ih ($I_m A = A I_n = A$ za $A \in M_{m,n}$). Također, vrijedi i distributivnost prema zbrajanju: $A(B + C) = AB + AC$ za $A \in M_{m,n}$, $B, C \in M_{n,p}$ i $(A + B)C = AC + BC$ za $A, B \in M_{m,n}$, $C \in M_{n,p}$, te kvaziasocijativnost: $\alpha(AB) = (\alpha A)B$ ako su A i B ulančane.

Zadatak 73. *Ako je $A \in M_{m,n}$, za koje p i q ima smisla $A0_{p,q}$? A $0_{p,q}A$? Što je rezultat tih umnožaka?*

Ipak, osim nekomutativnosti, množenje matrica ima još jednu manu. Dok, kako dobro znamo, ako je umnožak dva broja 0, bar jedan od njih je 0, kod matrica ne možemo zaključiti analogno. Primjerice, umnožak matrice-retka $A = [1\ 2]$ s matricom-stupcem $B = [-2\ 1]^t$ je $[0] \in M_1$.

Napomena 28. *Skalarni produkt u $\mathbb{R}^n$ možemo shvatiti kao množenje matrica: Ako $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$ poistovjetimo s odgovarajućim matricama-stupcima $x, y \in M_{n,1}$, onda je*

$$\langle x, y\rangle = x^t y.$$

Ponovimo bitno... Množenje matrica je podešeno tako da odgovora kompoziciji linearnih operatora: Ako su A i B matrice linearnih operatora $\hat{A}$ i $\hat{B}$, umnožak AB je matrica linearnog operatora $\hat{A} \circ \hat{B}$. Posljedično, iz uvjeta mogućnosti kompozicije proizlazi uvjet mogućnosti množenja matrica: Umnožak AB ima smisla ako su A i B ulančane, tj. ako je broj stupaca od A jednak broju redaka od B. Element na poziciji (i, j) u AB je tad jednak skalarnom umnošku i-tog retka od A s j-tim stupcem od B, gdje se taj skalarni umnožak računa kao u prostoru $\mathbb{R}^n$ (čak i za kompleksne matrice).

8.5 Još neke teme iz linearne algebre

8.5.1 Invertibilnost matrica

Kao što je kompozicija linearnih operatora, kad ima smisla, ponovno linearni operator, tako vrijedi i: Ako je linearan operator $\hat{A}$ bijekcija, onda je i njegova inverzna funkcija također linearan operator. Zbog svojstva da su linearni operatori potpuno zadani djelovanjem na jednoj bazi domene, linearan operator koji je invertibilan mora imati domenu i kodomenu iste dimenzije. Budući da su konačnodimenzionalni prostori iste dimenzije međusobno izomorfni, ovdje ćemo uzeti da je domena jednaka kodomeni, tj. razmatramo samo linearne operatore tipa $\hat{A} : V \to V$. Ako je takav linearni operator bijekcija i $\hat{A}^{-1}$ pripadni inverzni linearni operator, po definiciji inverzne funkcije imamo

$$\hat{A} \circ \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \circ \hat{A} = \hat{I}_V.$$

Pitanja na koja sad želimo odgovoriti su: Ako znamo matricu A našeg bijektivnog linearnog operatora $\hat{A}$ s obzirom na neku bazu od V, kako odrediti matricu od $\hat{A}^{-1}$ (s obzirom na istu bazu)? I, ako znamo matricu operatora, kako iz nje saznati je li odgovarajući linearni operator invertibilan (bijektivan)?

Neka je $\hat{A}$ invertibilan linearan operator. Tada je svaka njegova matrica A kvadratna ($A \in M_n$, gdje je n dimenzija od V). Ako je $\hat{A}$ invertibilan, onda i $\hat{A}^{-1}$ posjeduje matricu $B \in M_n$ i mora vrijediti

$$AB = BA = I_n,$$

jer komponiranju operatora odgovara množenje njihovih matrica, a jediničnom operatoru s obzirom na svaku bazu odgovara jedinična matrica.

Primjer 287. *Neka je $\hat{A} : M_{2,1} \to M_{2,1}$ zadan s $\hat{A}X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Podsjećamo da je za tako zadan linearan operator njegova matrica s obzirom na kanonsku bazu od $M_{2,1}$ točno*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ako je taj linearan operator invertibilan, onda postoji matrica

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

takva da je

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dakle postoje brojevi a, b, c, d takvi da su istovremeno zadovoljene jednadžbe

$$2a + c = 1, \quad 2b + d = 0, \quad -a = 0, \quad -b = 1.$$

Taj sustav ima rješenje $(a, b, c, d) = (0, -1, 1, 2)$, dakle naš operator $\hat{A}$ je invertibilan i matrica njegovog inverza (s obzirom na kanonsku bazu od $M_{2,1}$) je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Gornja razmišljanja navode na sljedeću definiciju:

Definicija 68 (Inverzna matrica). *Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njen inverz (inverzna matrica od A) je, ako postoji, kvadratna matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ako takva matrica B postoji, jedinstveno je određena te se označava s A^{-1} (a matricu A zovemo invertibilnom ili regularnom matricom).*

Primjer 288. *Ako je $R_{z,\alpha}$ matrica rotacije za kut α oko z-osi, onda je matrica rotacije oko z-osi za kut $2\pi - \alpha$ jednaka matrici $R_{z,2\pi-\alpha}$ jer su te dvije rotacije međusobno inverzne.*

Ako je A matrica invertibilnog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ s obzirom na neku bazu od V, onda je A^{-1} matrica operatora $\hat{A}^{-1}$ s obzirom na istu bazu. Također primijetimo da nema smisla govoriti o invertibilnosti nekvadratnih matrica jer one odgovaraju linearnim operatorima kojima domena i kodomena nisu iste dimenzije, pa sigurno nisu bijekcije.

Lako je uvjeriti se da ni svaka kvadratna matrica nije invertibilna. Naime, nisu svi linearni operatori $\hat{A} : V \to V$ bijekcije. Prvo to nikad nije nuloperator (on sve vektore šalje u nulvektor pa ne može biti injekcija). No, nisu samo nuloperatori i stoga kvadratne nulmatrice problematični iz perspektive invertibilnosti.

Primjer 289. *Neka je V bilo koji vektorski prostor i $e_1, \ldots, e_n$ neka njegova baza. Definiramo linearni operator $\hat{A} : V \to V$ njegovim djelovanjem na bazi kao $\hat{A}e_i = 5e_1$ za sve i (dakle, sve vektore baze šalje u peterostruki prvi vektor baze). Očigledno taj linearan operator nije bijekcija.*

Iz prethodnog primjera generalizacijom na proizvoljne n, zamjenom $5e_1$ s bilo kojim fiksiranim vektorom vidimo da postoji beskonačno mnogo linearnih operatora na svakom (netrivijalnom) vektorskom prostoru koji nisu invertibilni jer nisu injektivni. To je razlog zašto beskonačno mnogo kvadratnih matrica nema svoj inverz i stoga, iako samo definicijsko svojstvo podsjeća na svojstvo recipročnog broja u skupu $\mathbb{R}$ ($xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ za $x \neq 0$) ovdje ne možemo generalizirati definiciju dijeljenja brojeva ($x : y = xy^{-1}$ za $y \neq 0$) na dijeljenje matrica jer bismo iz njega morali isključiti beskonačno mnogo matrica-djelitelja.

Primijetimo da vrijedi i sljedeće:

Teorem 29. *Ako postoji vektor $v \in V$ koji nije nulvektor, ali ga linearni operator $\hat{A}$ preslika u nulvektor, onda $\hat{A}$ nije invertibilan. Matrično izrečeno: Matrice koje sadrže nulstupac nisu invertibilne.*

Argument za prethodni teorem je jednostavan: Znamo da svaki linearan operator preslikava nulvektor u nulvektor, pa ako postoji još neki v koji se preslika u nulvektori imamo dva elementa domene koji su se preslikali u isti element kodomene te operator nije injekcija.

Vratimo se na problem određivanja inverzne matrice i provjeru je li zadana matrica uopće invertibilna. Iz primjera 287 vidimo da je ukoliko za matrice od $\hat{A}$ i $\hat{A}^{-1}$ pretpostavljamo istu bazu problem pitanja invertibilnosti i, u slučaju potvrdnog odgovora o invertibilnosti, određivanja matrice inverznog operatora ekvivalentan rješavanju sustava linearnih jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta $AB = I_n$. Pritom taj sustav ima n^2 nepoznanica (elementi matrice B inverznog operatora $\hat{A}^{-1}$) i n^2 jednadžbi (po jedna koja proizlazi iz izjednačavanja svih pozicija od AB s odgovarajućim pozicijama u I_n). Ako malo bolje pogledamo isti primjer, odnosno ako iskoristimo opću definiciju množenja matrica, vidimo da matricu A^{-1} možemo odrediti rješavanjem n sustava tipa $n \times n$ i oblika $AX_j = I_j$, gdje je X_j matrica nepoznanica koja sadrži j-ti stupaca od A^{-1}, a I_j je j-ti stupac jedinične matrice. Kako u Gaussovoj metodi eliminacija odluke o operacijama koje se provode ne ovise o stupcu slobodnih članova i kako pri toj metodi ne dolazi do miješanja sustava, tih n sustava možemo riješiti paralelno Gaussovom metodom eliminacija primijenjenom na matricu $[A|I_n]$. Ukoliko tom metodom na lijevoj strani uspijemo dobiti jediničnu matricu, znači da su svih n sustava jednoznačno rješivi i u desnom dijelu redom po stupcima imamo njihova rješenja, dakle će se u desnom dijelu naći A^{-1}:

$$[A|I_n] \sim \ldots \sim [I_n|A^{-1}].$$

Ukoliko pak u lijevom dijelu ne uspijemo dobiti jediničnu matricu, polazna matrica nije invertibilna.

Primjer 290. *Inverz matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

dobivamo eliminacijom

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

te je $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 5/2 & 3 & 1/2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. *Točnost računa provjeravamo pomoću definicije:* $AA^{-1} = I_3$.

Zadatak 74. *Uz koji uvjet je skalarni operator invertibilan? Kako izgleda inverzna matrica njegove matrice?*

Za invertiranje su posebno zgodne ortogonalne matrice. Primijetimo da se definicija ortogonalne matrice može koristeći množenje matrica kraće zapisati kao

$$AA^t = A^tA = I_n.$$

S obzirom na gornje definicije, vidimo da vrijedi: Matrica je ortogonalna točno ako joj je inverz jednak transponiranoj matrici. Posebno, inverzna matrica bilo kojeg operatora simetrije je njezina transponirana matrica, ako se radi o matrici tog operatora s obzirom na ortonorminarnu bazu. Slično vrijedi, matrica je unitarna ako joj je inverz jednak hermitski konjugiranoj matrici.

Napomena 29. *Sve matrice danog linearnog operatora su međusobno slične: Ako su A i A' dvije matrice istog operatora $\hat{A}$, obzirom na različite baze, onda postoji invertibilna matrica X takva da je $A' = X^{-1}AX$.*

Ponovimo bitno... Kvadratna matrica je invertibilna ako postoji kvadratna matrica (njezin inverz) tako da njihov umnožak daje jediničnu matricu. Inverzna matrica odgovara inverznom linearnom operatoru te ne postoji ako odgovarajući linearni operator nije bijekcija. Ortogonalne matrice su invertibilne i njihov inverz je jednak njihovoj transponiranoj matrici.

8.5.2 Novi pogled na sustave linearnih jednadžbi

Nakon što smo se upoznali s općim vektorskim prostorima, linearnim operatorima i množenjem matrica, konačno smo u mogućnosti argumentirati tvrdnje koje smo iznijeli u poglavlju 7.2.

Prvo, sad je bitno jednostavnije definirati linearnu jednadžbu s n nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$: To je jednadžba koja se može zapisati u obliku

$$\langle a, x \rangle = b$$

gdje je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ zadani vektor iz $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ nepoznati vektor iz $\mathbb{R}^n$, a b zadani realni broj (slobodni član).

Sustav linearnih jednadžbi stoga sad poprima oblik m jednadžbi $\langle a_i, x \rangle = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ kojima tražimo zajedničko rješenje. Ako vektore koeficijenata a_i ispišemo u matricu A kao njezine retke, dobili smo matricu tipa $m \times n$, a naš sustav poprima oblik

$$AX = B,$$

gdje su $X \in M_{n,1}$ i $B \in M_{m,1}$ matrice-stupci koje sadrže nepoznanice odnosno slobodne članove. Primijetimo da ovdje ponovno koristimo izomorfizam između prostora tipa $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}$.

Primjer 291. *Za sustav iz primjera 223 imamo*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 8 & -24 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Uočimo da nam umnožak i-tog retka od A s X i izjednačavanje s b_i točno daje i-tu jednadžbu sustava.

Lako je uočiti: Ako uz matricu koeficijenata A nadopišemo matricu-stupac slobodnih članova B (u oblik $(A|B)$), dobili smo ono što smo u poglavlju 7.2 zvali matricom sustava.

Napomena 30. *Znamo da AX odgovara djelovanju nekog linearnog operatora $\hat{A}$ na neki vektor x, dakle AX predstavlja vektor kodomene od $\hat{A}$ koji treba biti jednak B. Drugim riječima, rješavanje sustava linearnih jednadžbi je pitanje određivanje vektora domene kojeg zadani operator preslikava u zadani vektor kodomene (kao što je rješavanje jednadžbe $x^2 - 5x + 1 = 8$ određivanje elementa x domene funkcije $x \mapsto x^2 - 5x + 1$ kojeg ta funkcija preslikava u 8 u kodomeni).*

Neka je sad naš sustav $AX = B$ homogen, tj. oblika $AX = 0_{m,1}$. On sigurno ima bar jedno, trivijalno, rješenje $x = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ jer svaki linearan operator preslikava nulvektor u nulvektor. Ako bi našustav imao više od jednog rješenja, neka su to x i y s odgovarajućim matricama stupcima X i Y. Tada je $A(X + Y) = AX + AY = 0_{m,1} + 0_{m,1} = 0_{m,1}$, dakle je i $x + y$ također rješenje istog sustava. Nadalje, ako je α bilo koji realan skalar, imamo $A(\alpha X) = \alpha AX = 0_{m,1}$, dakle ako je x rješenje homogenog sustava, onda je i αx rješenje istog sustava. Time smo dokazali:

Teorem 30. *Skup rješenja svakog homogenog sustava linearnih jednadžbi s n nepoznanica je potprostor od $\mathbb{R}^n$.*

Kako vektorski prostori s više od jednog elementa sadrže beskonačno mnogo vektora, slijedi:

Korolar 2. *Svaki homogenih sustav linearnih jednadžbi ili ima jedinstveno (trivijalno) rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja.*

Ako pak gledamo nehomogeni sustav $AX = B$, očigledno je moguće da nema rješenja (sami osmislite primjer). Ako pak takav sustav ima bar jedno rješenje, odaberimo jedno od njegovih rješenja i označimo s x_P (tzv. partikularno rješenje). Nadalje, homogeni sustav s istom matricom koeficijenata, dakle sustav $AX = 0_{m,1}$, nazivamo (sustavu $AX = B$) pripadnim homogenim sustavom. Taj sustav, znamo, ili ima samo trivijalno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Neka je x_H bilo koje rješenje pripadnog homogenog sustava i $x = x_P + x_H$. Tada je $AX = A(X_P + X_H) = AX_P + AX_H = B + 0_{m,1} = B$, dakle je za svako rješenje x_H pripadnog homogenog sustava $x = x_P + X_H$ rješenje sustava $AX = B$. Dakle, vrijedi

Korolar 3. *Svaki sustav linearnih jednadžbi ili nema rješenja ili ima jedinstveno rješenje ili ih ima beskonačno mnogo. Skup rješenja sustava $AX = B$, ako nije prazan, se uvijek može zapisati u obliku $\{x_P + x_H : x_H \in \mathcal{H}\}$, gdje je x_P fiksirano partikularno rješenje sustava $AX = B$, a $\mathcal{H}$ prostor rješenja pripadnog homogenog sustava.*

Napomena 31. *Skup rješenja nehomogenog sustava nije vektorski prostor: Ako su X i Y dva rješenja, imamo $A(X+Y) = AX+AY = B+B = 2B \neq B$ ako B nije nulmatrica.*

Naposlijetku, ako je $n \times n$ sustav linearnih jednadžbi zapisan u matričnom obliku $AX = B$ kao u prethodnom odjeljku, te ako je A invertibilna, onda množenjem jednakosti $AX = B$ slijeva s A^{-1} daje $A^{-1}AX = A^{-1}B$, odnosno $X = A^{-1}B$. Dakle, vrijedi

Teorem 31. *Ako je matrica A koeficijenata $n \times n$ sustava invertiblna, taj sustav ima jedinstveno rješenje dano formulom $X = A^{-1}B$, gdje je B matrica-stupac slobodnih članova.*

Jedinstvenost rješenja u slučaju invertibilne A je još lakše argumentirati ovako: Ako je A invertibilna, odgovarajući linearan operator je invertibilan, pa svaki zadani B u kodomeni ima svoj jedinstveni „original" X u domeni.

Gornji teorem u praksi nije od velike koristi jer za računanje inverza od A trebamo više operacija nego za direktno rješavanje sustava $AX = B$, a uz to u slučaju da se A pokaže neinvertibilnom ne znamo radi li se o sustavu bez rješenja ili s beskonačno mnogo rješenja.

Ponovimo bitno... Svaki sustav linearnih jednadžbi može se zapisati kao matrična jednadžba oblika $AX = B$. Za homogeni sustav iz linearnosti operatora $\hat{A}$ određenog matricom A proizlazi da je njegov skup rješenja vektorski prostor. Za nehomogeni sustava aditivnost linearnog operatora povlači da je njegov skup rješenja ili prazan skup ili oblika $\{x_P + x_H :$

$x_H \in \mathcal{H}\}$, gdje je x_P fiksirano partikularno rješenje sustava $AX = B$, a $\mathcal{H}$ prostor rješenja pripadnog homogenog sustava.

8.5.3 Determinante matrica

Lako je provjeriti da je

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tj. da je

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je inverz kvadratne matrice reda 2 moguće izračunati uvijek, osim ako je umnožak njenih dijagonalnih elemenata umanjen za umnožak ostala dva elementa (broj $ad - bc$) jednak 0. Brojevi tipa $ad - bc$ pojavljuju se i u raznim drugim kontekstima.

Primjer 292. *Ako su u Kartezijevom koordinatnom sustavu zadane točke $P = (a, b)$ i $Q = (c, d)$, površina A paralelograma određenog s $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ je*

$$A = |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = |ad - bc|.$$

Vidimo da je invertibilnost matrice $A \in M_2$ moguće karakterizirati jednim brojem koji se iz nje lako izračuna. Taj broj nazivamo determinantom matrice A:

Definicija 69 (Determinanta)**.** *Broj koji karakterizira invertibilnost kvadratne matrice (ako je jednak 0, matrica nema inverz, a ako je različit od 0, ima ga) zove se determinantom matrice.*

Napominjemo da je prava matematička definicija drugačija i temelji se na permutacijama. Zainteresirane čitatelje u tu svrhu upućujemo na standardnu matematičku literaturu iz linearne algebre. Za nas će biti važno zapamtiti da vrijedi:

Teorem 32. *Sve matrice istog linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$, neovisno o odabranoj bazi, imaju istu determinantu i isti trag.*

Primijetimo da je iz naše definicije očito da gornje svojstvo za determinante mora vrijediti za neinvertibilne operatore, ali nije očito da vrijedi i za invertibilne.

Kao digresiju iskoristit ćemo gornji teorem da dokažemo jednu kristalografski važnu činjenicu:

Teorem 33 (Kristalografska restrikcija). *Rotacije koje točkama rešetke pridružuju isključivo točke rešetke mogu biti samo rotacije za kutove* 360°, 180°, 120°, 90° *ili* 60°.

Dokaz: Rotacija oko neke osi o mora biti predstavljena matricom $A \in M_3$. Ako je ta matrica odabrana s obzirom na bazu u kojoj točke rešetke imaju cjelobrojne koordinate, budući da smo pretpostavili da rotacija preslikava točke rešetke samo u točke rešetke, slijedi da su elementi matrice A cijeli brojevi, dakle je i trag matrice A cijeli broj. S druge strane, odaberemo li bazu tako da z-os leži na osi o, matrica naše rotacije imat će oblik $R_{z,\alpha}$. Ta matrica ima trag $1 + 2\cos\alpha$. Kako trag ne ovisi o odabiru baze, slijedi da je $1 + 2\cos\alpha$ cijeli broj, tj. $2\cos\alpha$ je cijeli broj, dakle je $\cos\alpha$ jedan od brojeva $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$. □

Vratimo se determinantama. Po prethodnom vidimo da je determinanta matrice $A \in M_2$ (uz oznake kao gore) jednaka $ad - bc$. Determinanta matrice A označava se sa $\mathsf{det}(A)$, a ako je matrica A ispisana njezina determinanta omeđuje se vertikalnim crtama:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Kako iz većih kvadratnih matrica izračunati broj koji zadovoljava gornju definiciju?

Determinante kvadratnih matrica reda 3 imaju značajnu primjenu u klasičnoj algebri vektora, vezano za sve primjene vektorskog i mješovitog produkta (vidi odjeljak 6.1.4), dakle za izračunavanje površina paralelograma i trokuta, provjeru kolinearnosti i komplanarnosti, volumene prizmi i piramida, ... Za determinante reda 3 često se koristi Sarrusovo pravilo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}) & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22}) \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Primjer 293.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{matrix} =$$

$$= -2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Sarrusovo pravilo je lako zapamtiti, ali nažalost njegova generalizacija na veće matrice ne rezultira brojevima koji zadovoljavaju našu definiciju determinante. U općem slučaju se stoga za računanje determinanti koristi Laplaceov razvoj (koje je primjenjivo i na matrice reda 3).

Ideja Laplaceovog razvoja determinante je sukcesivno, korak po korak, danu determinantu svoditi na računanje manjih determinanti. Laplaceov se razvoj može provoditi po bilo kojem (i-tom) retku ili bilo kojem (j-tom) stupcu. U obliku formula, Laplaceov razvoj je dan s

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Pritom je s A_{ij} označena matrica koju iz A dobijemo brisanjem i-tog retka i j-tog stupca. Dakle, Laplaceov razvoj po nekom retku (stupcu) izračunava determinantu matrice $A \in M_n$ tako da svaki element tog retka (stupca) pomnoži s determinantom matrice koju bismo iz A dobili tako da iz nje pobrišemo redak i stupac promatranog elementa. Tako dobijemo n umnožaka, koje zatim naizmjenično zbrajamo i oduzimamo. Kod razvoja po neparnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja je $+ - + - + - \ldots$, tj. počinje s plus. Kod razvoja po parnim retcima (stupcima) alterniranje zbrajanja i oduzimanja kreće s $-$.

Primjer 294. *Izračunajmo* $\det(A)$ *razvojem po prvom stupcu ako je*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$\det(A) = 2 \cdot \det(A_{11}) - 2 \cdot \det(A_{21}) + 0 \cdot \det(A_{31}) - 3 \cdot \det(A_{41}) =$$

$$= 2\det(A_{11}) - 2\det(A_{21}) - 3\det(A_{41}).$$

Dalje je $\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 32$, $\det(A_{21}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -44$ *i* $\det(A_{41}) = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36$ *pa je*

$$\det(A) = 2 \cdot 32 - 2 \cdot (-44) - 3 \cdot 36 = 44.$$

Kako se iz prethodnog primjera može vidjeti, količina računa se smanjuje ako je u retku (ili stupcu) po kojemu razvijamo poneka nula. Stoga se preporuča da se determinanta matrice računa razvojem po onom retku ili stupcu u kojem je najviše nula.

Primjer 295.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(razvoj po trećem stupcu)

$$= (-5)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

(razvoji po trećim retcima)

$$= -5 \cdot \left(3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) + \left(-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -5 \cdot (24 - 6) + (-6 + 14) = -82.$$

S obzirom na to da Laplaceov razvoj po i-tom stupcu daje isti rezultat kao razvoj po i-tom retku zaključujemo da je determinanta svake matrice jednaka determinanti njezine transponirane matrice:

$$\det(A^t) = \det(A).$$

Za kompleksne matrice imamo $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$.

Nadalje, znamo da matrice koje sadrže nulstupac odgovaraju neinvertibilnim linearnim operatorima (a i Laplaceov razvoj po nulstupcu dao bi nulu). Ako matrica sadrži nulredak, njezina transponirana matrica sadrži nulstupac, pa također dobivamo determinantu nula. Ukratko, vrijedi:

Propozicija 6. *Ako $A \in M_n$ sadrži nulstupac ili nulredak, onda je* $\det(A) = 0$.

Specijalno vrijedi:

$$\det(0_n) = 0.$$

Gornje-/donjetrokutaste matrice su one kvadratne matrice čiji svi elementi ispod/iznad dijagonale su 0. Matrice koje su istovremeno gornje- i donjetrokutaste zovu se dijagonlne. Uzastopnim razvojem po prvom retku odnosno stupcu dobije se i sljedeće:

Propozicija 7. *Determinanta gornjetrokutaste, donjetrokutaste ili dijagonalne matrice jednaka je produktu elemenata na dijagonali.*

Specijalno, vrijedi:

$$\det(I_n) = 1.$$

Nećemo argumentirati, ali kao važno svojstvo determinanti ističemo sljedeći teorem o odnosu determinanti prema elementarnim transformacijama:

Teorem 34. *Zamjena dva retka (ili dva stupca) mijenja predznak determinante.*

Ako matrici neki redak (ili stupac) pomnožimo nekim brojem α, determinanta dobivene matrice je α puta determinanta matrice prije tog množenja.

Ako jedan redak pribrojimo nekom drugom (ili jedan stupac drugom stupcu), determinanta se ne mijenja.

Posljedično, determinanta se ne mijenja niti kad višekratnik nekog retka dodamo drugom (ili višekratnik nekog stupca dodamo drugom stupcu). Iz gornjeg teorema može se lako dokazati da za $A \in M_n$ vrijedi

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

Dakle, determinanta kao funkcija $\det : M_n \to \mathbb{R}$ za $n \neq 1$ nije homogena (a lako je uvjeriti se da nije ni aditivna), pa nije linearan funkcional.

Svojstvo da determinanta promijeni predznak pri zamjeni redaka ili stupaca iskorišeno je pri formalizaciji Paulijevog principa u kvantnoj mehanici.

Primjer 296 (Slaterova determinanta)**.** *Paulijev princip glasi: Ukupna elektronska valna funkcija, koja uključuje i spin, mora biti antisimetrična na izmjenu bilo kojeg para elektrona. Jednostavnija formulacija je: nikoja dva elektrona u istom atomu ne mogu imati iste sve kvantne brojeve. To se izvodi iz nemogućnosti razlikovanja elektronâ.*

Valne funkcije su funkcije koje opisuju vjerojatnost da se neki elektron nađe u nekoj točki prostora. Ako atom ima n elektrona, svaki od njih je opisan po jednom valnom funkcijom $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Želimo li opisati ukupnu valnu funkciju koja opisuje svih n elektrona istovremeno, najjednostavnija ideja bila bi definirati ju kao produkt svih valnih funkcija pojedinih elektrona, no tako definirana ukupna valna funkcija omogućavala bi razlikovanje elektronâ pa nije prihvatljiva. Primjerice, za slučaj dva elektrona $\mathbb{1}$ i $\mathbb{2}$ (možemo ih poistovjetiti primjerice s njihovim pozicijama tj. radij-vektorima), moguće su dvije valne funkcije sustava: $\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}$ i $\psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$. Zbog nemogućnosti razlikovanja elektronâ slijedi da ne možemo dati prednost jednoj od te dvije funkcije, pa se kao ukupna valna funkcija uzima jedna od dvije funkcije

$\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}) \pm \psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$. *Čestice kojima odgovara opis pomoću antisimetrične varijante (promjena redoslijeda mijenja predznak valne funkcije)* $\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}) - \psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbb{1}) & \psi_1(\mathbb{2}) \\ \psi_2(\mathbb{1}) & \psi_2(\mathbb{2}) \end{vmatrix}$ *zovu se fermioni (to su primjerice elektroni), a one kojima odgovara simetrična varijanta* $\psi_1(\mathbb{1})\psi_2(\mathbb{2}) + \psi_1(\mathbb{2})\psi_2(\mathbb{1})$ *zovu se bosoni (primjerice fotoni).*

Poopćenjem gornje ideje dobiva se da je za sustav od n elektrona (ili općenitije fermiona) ukupna valna funkcija dana tzv. Slaterovom determinantom

$$\psi(\mathbb{1}, \mathbb{2}, \ldots, \mathbb{n}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \begin{vmatrix} \psi_1(\mathbb{1}) & \psi_1(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_1(\mathbb{n}) \\ \psi_2(\mathbb{1}) & \psi_2(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_2(\mathbb{n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_n(\mathbb{1}) & \psi_n(\mathbb{2}) & \ldots & \psi_n(\mathbb{n}) \end{vmatrix}.$$

Prethodni teorem se može iskoristiti za pojednostavljivanje izračunavanja determinanti velikih matrica.

Primjer 297.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 25 & -6 & -29 \\ 0 & 6 & 25 & -4 & -16 \\ 0 & -2 & 14 & -1 & -17 \\ 0 & 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 25 & -6 & -29 \\ 6 & 25 & -4 & -16 \\ -2 & 14 & -1 & -17 \\ 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} =$$

(zadnji korak bio je razvoj po prvom stupcu, a sad dvostruki prvi red dodan drugom, četvrti dodan trećem)

$$= - \begin{vmatrix} -3 & 25 & -6 & -29 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 2 & 12 & -8 & -23 \end{vmatrix} =$$

(prvi red puta 2, četvrti puta 3)

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -6 & 50 & -12 & -58 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 6 & 36 & -24 & -69 \end{vmatrix} =$$

(prvi red dodan četvrtom)

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -6 & 50 & -12 & -58 \\ 0 & 75 & -16 & -74 \\ 0 & 26 & -9 & -40 \\ 0 & 86 & -36 & -127 \end{vmatrix} = -(-6)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 75 & -16 & -74 \\ 26 & -9 & -40 \\ 86 & -36 & -127 \end{vmatrix} =$$

(prvi stupac dodan trećem)

$$= \begin{vmatrix} 75 & -16 & 1 \\ 26 & -9 & -14 \\ 86 & -36 & -41 \end{vmatrix} =$$

(prvi red oduzet od trećeg)

$$= \begin{vmatrix} 75 & -16 & 1 \\ 26 & -9 & -14 \\ 11 & -20 & -42 \end{vmatrix} = \ldots = -8079.$$

Koristeći prethodni teorem zaključujemo i da ako u matrici imamo dva proporcionalna retka (ili stupca), oduzimanje prikladnog višekratnika jednog od drugog ne mijena determinantu, ali rezultira matricom s nulretkom (odnosno nulstupcem). Dakle, vrijedi:

Propozicija 8. *Ako matrica sadrži dva proporcionalna retka (ili stupca), determinanta joj je* 0.

Iako determinanta nema svojstvo linearnosti, ima jedno drugo dobro svojstvo:

Teorem 35 (Binet-Cauchy)**.** *Determinanta produkta matrica jednaka je produktu determinanti:*

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

za $A, B \in M_n$.

Posljedica Binet-Cauchyjevog teorema je da je determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne matrice. Naime, iz $A\cdot A^{-1} = I_n$ slijedi $\det(A\cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Po Binet-Cauchyjevom teoremu lijeva strana zadnje jednakosti je $\det(A)\cdot\det(A^{-1})$ pa je

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Iz toga se ponovno vidi da vrijedi svojstvo istaknuto u definiciji: Ako je matrica invertibilna, determinanta joj je različita od nule i obrnuto: Ako je $\det(A) \neq 0$, onda je A invertibilna.

Kako je za ortogonalne matrice $A^t = A^{-1}$, a znamo $\det(A^t) = \det(A)$, imamo da za ortogonalne matrice vrijedi

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

tj.

$$\det(A)^2 = 1.$$

Kako su elementi ortogonalne matrice realni, slijedi da joj je i determinanta realan broj pa dobivamo:

Teorem 36. *Determinanta ortogonalne matrice je uvijek ili* 1 *ili* -1.

Slično se može provjeriti da je determinanta unitarne matrice uvijek kompleksan broj apsolutne vrijednosti 1.

S obzirom na to da je determinanta invarijanta operatora, tj. sve matrice istog operatora imaju jednake determinante, zaključujemo:

Korolar 4. *Svaki operator simetrije u svakoj bazi ima matricu s determinantom* 1 *ili* -1 *(a u svakoj ortonormiranoj bazi matrica mu je uz to i ortogonalna).*

Kako smo vidjeli neke slučajeve kad je lako vidljivo da je determinanta matrice jednaka nula, zaključujemo: Matrice koje imaju nul-redak, nul-stupac, dva proporcionalna retka ili dva proporcionalna stupca nisu invertibilne.

Jedna od primjena determinanti je i Cramerovo pravilo za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Cramerov sustav je $n \times n$ sustav s jedinstvenim rješenjem (dakle, sustav $AX = B$ s invertibilnom A). Komponente rješenja takvog sustava lako se opisuju preko determinanti: Ako su nepoznanice x_1, x_2, ..., x_n, onda je

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

za sve i, gdje je $D = \det(A)$, a D_i je determinanta matrice koju iz A dobijemo tako da joj i-ti stupac zamijenimo stupcem slobodnih članova B. Ove formule imaju dosta nedostataka. Praktične su samo za 2×2- i 3×3-sustave jer za veće $n \times n$ sustave zahtijevaju više računa nego Gaussova metoda eliminacija. Nadalje, u slučaju da je $D = 0$, nije vidljivo ima li sustav beskonačno mnogo rješenja ili ih uopće nema. Uz to, te formule nisu primjenjive na sustave kod kojih broj nepoznanica nije jednak broju jednadžbi.

Primjer 298. *Riješimo sustav*

$$2x - y + z = 2,$$

$$-x - y + 3z = 0,$$

$$x + 2y - 5z = 1$$

Cramerovim pravilom. Imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -11, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

pa je $x = (-4)/(-1) = 4$, $y = (-11)/(-1) = 11$ *i* $z = (-5)/(-1) = 5$.

Zadatak 75. *Za kakve* m *i* n *sustav*

$$mx + ny = 1, \quad x + y = mn$$

ima jedinstveno rješenje?

Ponovimo bitno... Kvadratna matrica je invertibilna ako i samo ako joj je determinanta različita od 0. U tom je slučaju determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne matrice. Posebno, determinanta ortogonalne matrice je 1 ili -1. Matrice koje sadrže nulredak (nulstupac) ili dva proporcionalna retka (stupca) imaju determinantu 0, dakle nisu invertibilne.

Transponiranje ne mijenja determinantu, kao ni pribrajanje jednog retka (stupca) nekom drugom. Zamjena dva retka (stupca) mijenja predznak determinante. Ako iz nekog retka (stupca) izlučimo neki faktor, time smo ga izlučili iz čitave determinante. Determinanta nije linearna, ali je determinanta umnoška matrica jednaka umnošku njihovih determinanti.

8.5.4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

U ovom zadnjem od odjeljaka vezanih za linearnu algebru u ovom udžbeniku upoznat ćemo se s dvama za kemičare i fizičare izuzetno korisnim pojmovima vezanim za linearne operatore.

Primjer 299. *Vektori paralelni s osi rotacije se u odnosu na ostale vektore prostora V^3 ističu (s obzirom na odnos prema rotaciji) time da se ne mijenjaju: Ako je $\overrightarrow{v}$ paralelan s osi rotacije $\hat{\rho}$, onda je $\hat{\rho}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$.*

Primjer 300. *Promotrimo linearni operator određen matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na standardni način (dakle, operator $\hat{A} : M_{2,1} \to M_{2,1}$, $\hat{A}X = A \cdot X$). Za $X = (x_1\ x_2)^t$ imamo

$$\hat{A}X = \begin{pmatrix} x_1 + 5x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Postoji li za ovaj operator vektor domene koji se preslika u samog sebe? Ako da, trebalo bi vrijediti $(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, x_2)$. U drugoj komponenti sigurno dolazi do podudaranja, a iz uvjeta podudarnost prvih komponenti ($x_1 = x_1 + 5x_2$) proizlazi uvjet $x_2 = 0$. Dakle, ako je $X = (x_1\ 0)^t$, onda je $\hat{A}X = X$.

Primjer 301. *Skalarni operator određen skalarom α svaki vektor v preslikava u αv.*

Svojstveni vektor linearnog operatora je vektor kojeg taj operator preslika u njegov skalarni višekratnik (a odgovarajući skalar je svojstvena vrijednost). S obzirom da su za svaki vektor on i njegov svaki skalarni višekratnik elementi istog vektorskog prostora, definicija i određivanje svojstvenih vektora ima samo za linearne operatore kojima se domena i kodomena podudaraju. Neka je dakle u nastavku $\hat{A} : V \to V$ linearni operator.

Nadalje, budući je sigurno $\hat{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$ za svaki skalar α, nulvektor u ovoj priči nije zanimljiv.

Definicija 70 (Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti)**.** *Neka je $\hat{A} : V \to V$ linearan operator. Za skalar λ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora $\hat{A}$ ako postoji vektor $v \in V$, $v \neq \mathbf{0}$, takav da je*

$$\hat{A}v = \lambda v.$$

U tom slučaju v zovemo svojstvenim vektorom (operatora $\hat{A}$ pridruženi svojstvenoj vrijednosti λ).

Zašto smo u definiciji zabranili nulvektor kao svojstveni vektor? Zato jer bi onda svaki skalar bio svojstvena vrijednost:

$$\hat{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$$

za sve skalare λ.

Ako je vektor v svojstveni vektor operatora $\hat{A}$, onda su svi njemu proporcionalni vektori $w = \mu v$ također svojstveni za $\hat{A}$:

$$\hat{A}(\mu v) = \mu \hat{A} v = \mu \lambda v = \lambda(\mu v).$$

Dakle, ako operator ima svojstveni vektor koji pripada nekoj svojstvenoj vrijednosti λ, ima ih beskonačno mnogo. Štoviše, skup $V_{\hat{A},\lambda}$ svih svojstvenih vektora linearnog operatora (koji pripadaju istoj svojstvenoj vrijednosti λ) kad mu dodamo nulvektor čini vektorski prostor (tzv. svojstveni potprostor od V), tj. za danu svojstvenu vrijednost zbroj dva svojstvena vektora je svojstveni vektor i skalar puta svojstveni vektor je svojstveni vektor.

Primjer 302. *Stacionarna Schrödingerova jednadžba $\hat{H}\psi = E\psi$ je problem svojstvenih vrijednosti Hamiltonijana: Svojstveni vektori su valne funkcije, a pripadne svojstvene vrijednosti su energije sustava.*

Jedinični operator $\hat{I} : V \to V$ je definiran s $\hat{I}v = v = 1 \cdot v$ za svaki v. Stoga je za njega 1 svojstvena vrijednost, a svi vektori prostora V su svojstveni vektori jediničnog operatora $\hat{I}$ (pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1): $V_{\hat{I},1} = V$. Slično, za skalarni operator definiran kao množenje s α je α jedina njegova svojstvena vrijednost, a svi vektori prostora su odgovarajući svojstveni vektori.

Pogledajmo linearne operatore simetrija na $V^2(O)$ i $V^3(O)$. U dvodimenzionalnom slučaju imali smo samo operatore rotacije oko O i operatore osne simetrije s obzirom na pravac kroz O. Netrivijalna rotacija u dvodimenzionalnom slučaju nema svojstvenih vektora ni vrijednosti jer svakom vektoru osim nulvektora mijenja smjer. Osna simetrija čuva smjer vektorima koji su paralelni ili koji su okomit na os simetrije. Prvi se preslikavaju sami u sebe, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost 1, odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 je skup svih vektora na osi simetrije. Drugi se preslikavaju u sebi suprotne, pa je odgovarajuća svojstvena vrijednost -1, odnosno svojstveni potprostor osne simetrije koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -1 je skup svih vektora na pravcu kroz O koji je okomit na os simetrije. U trodimenzionalnom slučaju imamo i centralne simetrije, no one su skalarni operatori s faktorom -1 pa im je cijeli $V^3(O)$ svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost -1 i nemaju drugih svojstvenih vrijednosti. Rotacija u trodimenzionalnom slučaju – to smo već vidjeli u uvodnom primjeru – ima svojstvenu vrijednost 1, pripadni svojstveni potprostor čine vektori na osi rotacije. Zrcaljenje u trodimenzionalnom slučaju je analogno osnoj simetriji u dvodimenzionalnom slučaju – imamo dvije svojstvene vrijednosti 1 i -1, prvoj odgovara svojstveni potprostor vektora u ravnini simetrije, a drugoj svojstveni potprostor vektora na normali ravnine simetrije.

Posljednji slučaj se ističe u odnosu na ostale – za zrcaljenje u $V^3(O)$ imamo svojstvenu vrijednost (to je 1) kojoj odgovara svojstveni potprostor dimenzije veće od 1. U takvom slučaju govorimo o degeneracij: Ako istoj svojstvenoj vrijednosti odgovaraju dva ili više linearno nezavisnih svojstvenih vektora (tj. svojstveni potprostor ima dimenziju veću od 1), tu svojstvenu vrijednost nazivamo degeneriranom.

Da rezimiramo kako identificirati vrstu operatora simetrije za slučaj $V^2(O)$ i $V^3(O)$ pomoću determinanti i svojstvenih vrijednosti (ove tvrdnje nećemo dokazivati):

- Ako je $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ operator simetrije i $\hat{A} \neq \hat{I}$, onda:
  - Ako je $\det \hat{A} = 1$ i $\hat{A}$ nema svojstvenih vrijednosti (dakle, ni svojstvenih vektora osim $\overrightarrow{0}$), radi se o operatoru rotacije oko O. Kut rotacije α se određuje iz činjenice da je trag matrice operatora neovisan o bazi i uvijek iznosi $2\cos\alpha$.
  - Ako je $\det \hat{A} = 1$ i $\hat{A}$ ima svojstvenu vrijednost -1, radi se o operatoru rotacije oko O za kut $180°$. Svi vektori prostora su svojstveni vektori za taj operator.
  - Ako je $\det \hat{A} = -1$, odnosno ako operator ima svojstvene vrijednosti 1 i -1, radi se o operatoru osne simetrije. Svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 mu je os simetrije, a svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -1 je okomica na os simetrije.
- Ako je $\hat{A} : V^3(O) \to V^3(O)$ operator simetrije i $\hat{A} \neq \hat{I}$, onda:
  - Ako je $\det \hat{A} = 1$ i $\hat{A}$ ima svojstvenu vrijednost 1, ali nema svojstvenu vrijednost -1, radi se o operatoru rotacije oko O. Kut rotacije α se određuje iz činjenice da je trag matrice operatora neovisan o bazi i uvijek iznosi $2\cos\alpha + 1$. Svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 1 je os rotacije.
  - Ako je $\det \hat{A} = 1$ i $\hat{A}$ ima svojstvene vrijednosti 1 i -1, radi se o operatoru rotacije za $180°$ oko osi koja je svojstveni potprostor za svojstvenu vrijednost 1.
  - Ako je $\det \hat{A} = -1$ i $\hat{A}$ ima trostruku svojstvenu vrijednost -1 (karakteristična jednadžba je $-(\lambda + 1)^3 = 0$), radi se o operatoru centralne simetrije s obzirom na O. Svi vektori prostora čine svojstveni potprostor za -1.

– Ako je $\det \hat{A} = -1$ i $\hat{A}$ ima jednostruku svojstvenu vrijednost -1, radi se o operatoru rotoinverzije (kompoziciji rotacije oko neke osi kroz O s centralnom simetrijom s obzirom na O). Os rotoinverzije je svojstveni potprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti -1, a kut α se određuje iz činjenice da trag rotoinverzije iznosi $1 - 2\cos\alpha$.

– Ako je $\det \hat{A} = 1$ i $\hat{A}$ ima svojstvene vrijednosti 1 i -1, radi se o operatoru zrcaljenja s obzirom na ravninu kroz O koja je svojstveni potprostro za svojstvenu vrijednost 1. Svojstveni potprostor za -1 je normala na tu ravninu koja prolazi kroz O.

Primjer 303. *U kvantnoj mehanici u slučaju degeneriranih svojstvenih vrijednosti govorimo o degeneriranom stanju sustava. Primjerice, za energetske nivoe (svojstvene vrijednosti Hamiltonijana) opisane glavnim kvantnim brojem $n > 1$ i azimutnim kvantnim brojem $0 < l < n$ dolazi do degeneracija, tj. postoji više neproporcionalnih valnih funkcija (različitih orbitala, primjerice za $l = 1$ i $n = 2$ imamo 3 tzv. 2p-orbitale, koje opisuju elektrone s istom energijom).*

Skup svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora zove se spektar. Dakle, spektar operatora zrcaljenja na $V^3(O)$ je $\{-1, 1\}$.

Ako je operator invertibilan, onda ne može nenul vektor preslikati u nulvektor (zašto?), dakle ne postoji $v \neq 0$ takav da je $\hat{A}v = 0 \cdot v$. Zaključujemo: Linearni operator je invertibilan (odnosno, matrica je invertibilna) točno ako odgovarajući spektar ne sadrži 0.

Također, budući da je $\hat{A}v = \lambda v$ za svaku svojstvenu vrijednost λ i svojstveni vektor $v \neq \mathbf{0}$, u slučaju da je V unitaran imamo $||\hat{A}v|| = |\lambda| \cdot ||v||$. Ako je $\hat{A}$ još i ortogonalan imamo $||\hat{A}v|| = ||v||$, dakle je $|\lambda| = 1$, odnosno dokazali smo

Teorem 37. *Svojstvene vrijednosti ortogonalnih operatora (operatora simetrije) mogu biti samo 1 i -1.*

Kako odrediti svojstvene vektore i vrijednosti? Za linearne operatore na konačnodimenzionalnim prostorima to, bar načelno, nije teško. Neka je $\hat{A}V \to V$ prikazan matricom A obzirom na neku bazu od V te neka je n dimenzija od V. Definicijska jednakost sad poprima matrični oblik

$$Av = \lambda v$$

(v je matrica-stupac koja sadrži koordinate svojstvenog vektora u bazi na koju se odnosi A). Ta je jednakost ekvivalentna s

$$(A - \lambda I_n)v = 0_{n,1}, \tag{8.3}$$

što je matrična jednadžba koja odgovara homogenom $n \times n$-sustavu linearnih jednadžbi s matricom koeficijenata $A - \lambda I_n$. Znamo da takav sustav ima jedinstveno, trivijalno rješenje, točno ako je ta matrica invertibilna, tj. ako joj je determinanta različita od 0. Dakle, ako je $\det(A-\lambda I_n) \neq 0$, onda jedino nulvektor zadovoljava definicijsku jednakost. Ako želimo dobiti svojstvene vektore trebamo imati situaciju s beskonačno mnogo rješenja, dakle vrijedi:

Teorem 38. *Ako je $A \in M_n$ matrica linearnog operatora $\hat{A}$, svojstvene vrijednosti operatora $\hat{A}$ su rješenja jednadžbe (stupnja n)*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ta jednadžba se zove se karakterističnom jednadžbom operatora $\hat{A}$ (odnosno, matrice A).

Napomena 32. *Svojstveni vektori, spektar i karakteristični polinom su invarijante operatora , tj. u gornjem postupku uvijek dobivamo iste rezultate, neovisno o tome obzirom na koju bazu smo odabrali matricu operatora. To je posljedica činjenice da sve matrice linearnog operatora imaju istu determinantu.*

Zadatak 76. *Dokažite da ako su svih n rješenja karakteristične jednadžbe realna, onda je njihov umnožak (svako množimo onoliko puta kolika mu je kratnost) jednak determinanti operatora $\hat{A}$. Uputa: Koristite Vièteove formule.*

Zadatak 77. *Dokažite da linearni operator na trodimenzionalnom prostoru uvijek ima bar jednu realnu svojstvenu vrijednost.*

Budući da je stupanj karakteristične jednadžbe jednak dimenziji od V, vidimo da spektar operatora sadrži najviše n različitih svojstvenih vrijednosti. Ako smo odredili spektar od $\hat{A}$, za svaki λ u spektru odgovarajući svojstveni potprostor je skup rješenja homogenog sustava 8.3. Točnije, rješenja tog sustava daju koordinate svojstvenih vektora koji odgovaraju λ, u bazi na koju se odnosi matrica A.

Primjer 304. *Odredimo spektar i svojstvene vektore operatora $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji je obzirom na neku bazu od $\mathbb{R}^2$ prikazan matricom*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3) = 0.$$

Njena rješenja su $\lambda_1 = -2$ *i* $\lambda_2 = 3$, *dakle spektar našeg operatora je skup* $\{-2, 3\}$.

Svojstvene vektore koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 3 *dobijemo rješavanjem homogenog sustava kojem je matrica koeficijenata* $A - 3I$*:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pa je $x_1 + 4x_2 = 0$, *tj.* $x_1 = -4t$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$. *Rješenja (svojstveni vektori matrice, tj. operatora* A *koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti* 3*) su vektori iz* $\mathbb{R}^2$ *oblika*

$$(x_1, x_2) = (-4t, t) = t(-4, 1).$$

Zadatak 78. *Odredite svojstvene vektore operatora iz prethodnog primjera koji pripadaju svojstvenoj vrijednosti* -2.

Primjer 305. *Primjerice, ako je*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onda je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(4-\lambda)(-1-\lambda)$$

pa je spektar te matrice $\{0, 4, -1\}$.

Gornji rezultat nije slučajan, naime vrijedi:

Teorem 39. *Svojstvene vrijednosti linearnog operatora prikazanog dijagonalnom matricom su brojevi na njenoj dijagonali. Odgovarajući svojstveni vektori su redom vektor baze na koju se odnosi ta matrica.*

Dokaz. Neka je A dijagonalna matrica koja odgovara operatoru $\hat{A}$ u bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Neka su brojevi na njezinoj dijagonali redom $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Po definiciji matrice operatora imamo da je $\hat{A}e_i = \lambda_i e_i$, dakle je za svako i vektor e_i svojstven za svojstvenu vrijednost λ_i. $\square$

S obzirom da su dijagonalne matrice posebno zgodne za sve račune s matricama, postavlja se pitanje dijagonalizacije: Može li se zadani linearni operator dijagonalizirati, tj. postoji li baza za V s obzirom na koju mu je matrica dijagonalna? Za operatore za koje je to moguće, prethodni teorem povlači da se ta baza mora sastojati od svojstvenih vektora. Dakle,

Teorem 40. *Linearni operator se može dijagonalizirati ako i samo ako postoji baza čiji svi elementi su njegovi svojstveni vektori.*

Primjer 306. *U modelu krutog rotora koji se koristi za objašnjenje rotacijskih spektara molekula, molekula se gleda kao skup jezgri na fiksnim međusobnim položajima određenim prosječnom geometrijom molekule u određenom elektronskom i vibracijskom stanju. Kinetička energija T rotacije krutog tijela može se izračunati formulom*

$$T = \frac{1}{2}\omega^t I\omega,$$

gdje je ω vektor kutne brzine, a I tzv. tenzor inercije (kvadratna matrica reda 3 na čijoj dijagonali su momenti inercije obzirom na odabrane koordinatne osi, a izvan dijagonale su tzv. produkti inercije).

Matrica I se uvijek može dijagonalizirati u nekoj bazi $\{a, b, c\}$ — ti dijagonalni elementi (svojstvene vrijednosti $I_a \leq I_b \leq I_c$) zovu se glavni momenti inercije, a vektori baze $\{a, b, c\}$ (odnosno odgovarajuće koordinatne osi) zovu se glavne osi inercije. Vrijedi:

$$T = \frac{1}{2}(I_a\omega_a^2 + I_b\omega_b^2 + I_c\omega_c^2),$$

gdje su $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ koordinate od ω obzirom na bazu $\{a, b, c\}$.

Temeljem te dijagonalizacije rotori se klasificiraju na linearne ($I_a = 0$, $I_b = I_c$), sferne ($I_a = I_b = I_c$), simetrične (dva jednaka glavna momenta inercije, treći različit) i asimetrične (sva tri glavna momenta inercije različita).

Općenito nije lako iz jedne matrice linearnog operatora saznati može li se taj operator dijagonalizirati. Iznimka su simetrični i hermitski operatori na unitarnim prostorima.

Definicija 71 (Simetrični i hermitski linearni operatori)**.** *Ako je V realan (kompleksan) unitaran prostor, linearan operator $\hat{A} : V \to V$ je simetričan (hermitski) ako vrijedi: $\langle \hat{A}v, w\rangle = \langle v, \hat{A}w\rangle$ za sve vektore $v, w \in V$.*

Simetrični i hermitski operatori imaju isključivo realne svojstvene vrijednosti. Za slučaj konačnodimenzionalnih V vrijedi: Sve matrice simetričnog operatora su simetrične, odnosno sve matrice hermitskog operatora su hermitske. Simetrični i hermitski operatori, tj. operatori kojima je u nekoj bazi matrica simetrična odnosno hermitska, mogu se dijagonalizirati.

Primjer 307. *Jedan od postulata kvantne mehanike je ne samo da se dinamičke veličine Ω klasične fizike u kvantnoj mehanici opisuju linearnim operatorima $\hat{\Omega}$ (na prostorima valnih funkcija), nego i da se mjerenjem veličine*

Ω za rezultat mogu dobiti samo svojstvene vrijednosti operatora $\hat{\Omega}$. Primjerice, kad bismo mjerili energiju sustava, dobivali bismo svojstvene vrijednosti Hamiltonijana.

Da bismo se osigurali da mjerne veličine budu realne, postavlja se zahtjev: dinamičke veličine Ω klasične fizike se u kvantnoj mehanici opisuju hermitskim linearnim operatorima $\hat{\Omega}$.

Primjer 308. *Promotrimo linearan operator na $\mathbb{R}^3$ koji obzirom na neku bazu ima matricu*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Njegov karakteristični polinom je

$$k_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$$

pa su mu svojstvene vrijednosti $\lambda = 0$ i $\lambda = 2$. Odredimo svojstvene vektore za svojstvenu vrijednost 2, tj. riješimo homogeni sustav s matricom $A - 2I$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Rješenje sustava su sve trojke (x_1, x_2, x_3) sa svojstvom $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = t \in \mathbb{R}$ i $x_3 = s \in \mathbb{R}$, tj. trojke oblika $(s, t, s) = s(1,0,1) + t(0,1,0)$. Za $t = 0$ dobivamo svojstveni vektor $(1,0,1)$, a za $s = 0$ svojstveni vektor $(0,1,0)$. Vektori $(1,0,1)$ i $(0,1,0)$ nisu proporcionalni, dakle su linearno nezavisni, pa svojstvenoj vrijednosti 2 odgovaraju dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Prema tome, $\lambda = 2$ je degenerirana svojstvena vrijednost operatora prikazanog matricom A.

Zadatak 79. *Argumentirajte zašto se linearni operator čija karakteristična jednadžba ima onoliko različitih rješenja kolika je dimenzija prostora sigurno može dijagonalizirati!*

Ponovimo bitno... Svojstvena vrijednost linearnog operatora $\hat{A} : V \to V$ je skalar za koji postoji nenul vektor kojeg taj operator preslika u taj skalar puta samog sebe; odgovarajući vektor je svojstveni vektor. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora zovemo spektar, skup svih svojstvenih vektora koji odgovaraju pojedinoj svojstvenoj vrijednosti čini potprostor od V (svojstveni potprostor). Ako je svojstveni potprostor dimenzije veće od 1, svojstvenu vrijednost nazivamo degeneriranom.

Ako je V konačnodimenzionalan, spektar je skup rješenja karakterističe jednadžbe, tj. jednadžbe koju dobijemo izjednačavanjem nule i determinante matrice A operatora od koje je oduzeta λI_n. Ako postoji baza za koju je matrica operatora dijagonalna (ta se baza sastoji od svojstvenih vektora), operator se može dijagonalizirati – matrica s obzirom na tu bazu svojstvenih vektora je dijagonalna, na dijagonali su joj točno sve svojstvene vrijednosti tog operatora.

8.6 Dodatak: Linearna algebra u jednom zadatku

Ovim odjeljkom želimo kroz jedan naizgled jednostavan zadatak ponoviti sve bitne pojmove ovog poglavlja. Zadatak je sljedeći:

Zadatak 80. *Odredite sve operatore simetrije* $\hat{A} : V^2(O) \to V^2(O)$ *koji za zadanu proizvoljnu bazu* $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ *vektor* $[1, 1]$ *preslikavaju u* $[1, 0]$*. Odredite i njihove determinante, tragove, svojstvene vrijednosti i svojstvene potprostore.*

Parametre baze označit ćemo s a (duljina prvog vektora baze), b (duljina drugog vektora baze) i γ (kut među njima).

Kao prvo, podsjetimo se definicije ortogonalnog operatora i operatora simetrije (definicija **??**), za razumijevanje koje je pak neophodan pojam unitarnog prostora (definicija **??**) i norme vektora (formula 8.1). Nadalje, podsjetimo se da se za vektorske prostore geometrijskih vektora norma vektora podudara s njegovim iznosom. Također, potrebno nam je razumijevanje značenja koordinata vektora (str. 215) u odnosu na danu bazu prostora (definicija 60). Kombinacija tih znanja za nas znači da

$$\hat{A}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a},$$

posebno da mora vrijediti

$$|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| = a.$$

Kako je $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = a^2 + 2ab\cos\gamma + b^2$, slijedi da je uvjet da operator iz zadatka uopće može postojati $b^2 + 2ab\cos\gamma = 0$. Kako je $b \neq 0$ (nikoja baza ne može sadržavati nulvektor) dobivamo uvjet rješivosti zadatka. Naš zadatak nije rješiv osim ako je

$$b = -2a\cos\gamma. \tag{8.4}$$

Kako duljina vektora ne može biti negativna, a vektora baze niti 0, imamo i da kut γ mora biti tup (točnije, $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ jer je svaki kut između dva vektora između 0 i 180°, ali bazni vektori ne smiju biti kolinearni, pa kut 180° nije dozvoljen).

U drugom koraku iskoristimo sljedeću činjenicu: Ako je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ baza, onda je to i $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}'\}$, gdje je $\overrightarrow{b}' = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$. Naime, baza mora biti linearno nezavisan skup (definicija 59), a dvočlani skup je linearno nezavisan točno ako se nikoji od vektora ne može napisati kao skalar puta drugi vektor. Kad bi $\overrightarrow{b}'$ bio oblika $\alpha\overrightarrow{a}$ za neki skalar (realan broj – $V^2(O)$ je realan vektorski prostor) α, imali bismo $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \alpha\overrightarrow{a}$, odnosno $\overrightarrow{b} = (\alpha - 1)\overrightarrow{a}$, pa bi $\overrightarrow{b}$ bio oblika skalar puta $\overrightarrow{a}$, što je nemoguće jer znamo da je $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ baza.

Pogledajmo sad matricu A' od $\hat{A}$ s obzirom na bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}'\}$. S obzirom na njezinu definiciju 67 i uvjet zadatka da je $\hat{A}\overrightarrow{b}' = \overrightarrow{a}$, drugi stupac od A' mora biti $(1,0)^t$. Nadalje, determinanta je invarijanta matrice operatora (teorem 32), a kako $\hat{A}$ mora biti operator simetrije, $\det A'$ mora biti 1 ili -1 (teorem 36) pa je

$$A' = \begin{pmatrix} p & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Imamo dakle $\hat{A}\overrightarrow{a} = p\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}' = (p \pm 1)\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}$. Nadalje, $\hat{A}\overrightarrow{b} = \hat{A}(\overrightarrow{b}' - \overrightarrow{a})$, što je pak zbog linearnosti operatora $\hat{A}$ (definicija 65) jednako $\hat{A}\overrightarrow{b}' - \hat{A}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} - ((p \pm 1)\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b})$, opet po definiciji matrice operatora. Dakle, $\hat{A}\overrightarrow{b} = (1 - p \mp 1)\overrightarrow{a} \mp \overrightarrow{b}$. Stoga s obzirom na bazu $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ imamo dva tipa moguće matrice za $\hat{A}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} p+1 & -p \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} p-1 & 2-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sad ćemo iskoristiti znanje o svojstvenim vrijednostima (definicija 70), koje za operatore simetrije mogu biti samo 1 i/ili -1 ili pak ne postojati (teorem 37). Svojstvene vrijednosti (u slučaju linearnih operatora) su rješenja karakteristične jednadžbe (teorem 38). Karakteristična jednadžba za matricu A_1 je $\lambda^2 - p\lambda - 1 = 0$, a za A_2 ona je $\lambda^2 - p\lambda + 1 = 0$. Ako u karakterističnu jednadžbu za A_1 uvrstimo moguća rješenja 1 i -1, dobivamo $p = 0$. Ako pak pretpostavimo da A_1 nema svojstvenih vrijednosti, diskriminanta karakteristične jednadžbe mora biti negativna, tj. $p^2 + 4 < 0$, što je nemoguće. Dakle, jedini mogući linearni operator koji zadovoljava da mu je determinanta -1 i da nema svojstvenih vrijednosti osim ± 1 ima matricu A_1

s $p = 0$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako pak pogledamo opcije 1 je svojstvena vrijednost, -1 je svojstvena vrijednost ili nema svojstvenih vrijednosti za A_2, dobivamo da su one redom moguće za $p = 2$, $p = -2$ odnosno $p^2 - 4 < 0$ (tj. $|p| < 2$). Imamo dakle tri opcije za matricu A_2 koja zadovoljava naše uvjete:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(determinanta 1, svojstvena vrijednost 1),

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(determinanta 1, svojstvena vrijednost -1) i

$$A_4 = \begin{pmatrix} p-1 & 2-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

uz $|p| < 2$ (determinanta 1, spektar – skup svih svojstvenih vrijednosti – je prazan).

Ostaje pitanje koje od tih četiriju matrica A_1, A_2 , A_3, A_4 su stvarno operatori simetrije, tj. čuvaju normu. S obzirom na to da ćemo za provjeru čuvanja norme morati uspoređivati norme (iznose) proizvoljnih vektora prije i poslije preslikavanja, praktično je izvesti formulu za kvadrat iznosa vektora $[x, y] = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$, naravno uz pretpostavku iz formule **??**. Imamo:

$$|[x, y]|^2 = x^2a^2 + 2xya(-2a\cos\gamma)\cos\gamma + y^2(-2a\cos\gamma)^2,$$

odnosno

$$|[x, y]|^2 = a^2(x^2 + 4y(y - x)\cos^2\gamma). \tag{8.5}$$

Npr, $|[2, 1]|^2 = a^2(4 + 4 \cdot (1 - 2)\cos^2\gamma) = 4a^2(1 - \cos^2\gamma)$.

Kao što znamo, djelovanje operatora u matričnom obliku postaje množenje matrice operatora s matricom-stupcem koja sadrži koordinate vektora. Dakle, $\hat{A}_1[x, y] = [x, x - y]$. Iz formule 8.5 dobivamo da je $|[x, x - y]|^2 = a^2(x^2 + 4((x - y)^2 - x(x - y))\cos^2\gamma)$. Kad sredimo desnu stranu, dobit ćemo točno isti izraz kao u formuli 8.5, dakle je $|[x, y]| = |\hat{A}[x, y]|$ za svaki vektor $[x, y]$, odnosno operator određen matricom A_1 je stvarno operator simetrije.

Lako je vidjeti da A_2 i A_3 ne preslikavaju prvi bazni vektor u vektor istog iznosa pa nisu operatori simetrije: $a = |[1, 0]|$, ali $|A_2[1, 0]| = |[1, -1]| =$

$a\sqrt{1+8\cos^2\gamma}$ pa bi moralo biti $1 = 1+8\cos^2\gamma$, odnosno $\gamma = 90°$, što nije tupi kut. Analogno, $|A_3[1,0]| = |[-3,-1]| = a\sqrt{9-8\cos^2\gamma}$, pa bi moralo biti $9-8\cos^2\gamma = 0$, odnosno $\cos^2\gamma > 1$, što je nemoguće.

Ako uvjet očuvanja duljine pri preslikavanju prvog baznog vektora ispišemo za A_4, dobijemo (nakon sređivanja) uvjet $p^2+2p(2\cos^2\gamma-1) = 0$. Dakle, operator određen s A_4 je operator simetrije samo ako je $p = 0$ ili ako je $p = 2-4\cos^2\gamma$ (uočimo da oba zadovoljavaju uvjet $|p| < 2$). Dobili smo dakle još dva operatora simetrije:

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(stari A_4 uz $p = 0$) i

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1-4\cos^2\gamma & 4\cos^2\gamma \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(stari A_4 uz $p = 2-4\cos^2\gamma$). Oba čuvaju duljinu od $\overrightarrow{a}$. Provjerimo još čuvaju li duljinu proizvoljnog vektora $[x,y]$, tj. provjerimo jesu li duljine slika od $[x,y]$ putem A_4 odnosno A_5 jednake izrazu u formuli 8.5.

Za A_4 imamo

$$A_4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-x \\ y-x \end{pmatrix},$$

a po formuli 8.5 je

$$|[2y-x,y-x]|^2 = a^2((2y-x)^2+4(y-x)(y-x-2y+x)\cos^2\gamma) = a^2((2y-x)^2-4y(y-x)\cos^2\gamma).$$

To bi za sve x i y moralo biti jednako $|[x,y]|^2 = a^2(x^2+4y(y-x)\cos^2\gamma)$ (ako je A_4 matrica operatora simetrije), dakle imamo uvjet

$$x^2+4y(y-x)\cos^2\gamma = 4y^2-4xy+x^2-4y(y-x)\cos^2\gamma$$

za sve x i y. Odnosno, mora vrijediti $2y(y-x)\cos^2\gamma = y(y-x)$ za sve x i y, pa stoga dobivamo $2\cos^2\gamma = 1$. Budući da γ mora biti tupi, zaključujemo: Matrica A_4 je matrica operatora simetrije ako i samo ako je $\gamma = 135°$ (i $b = -2a\cos\gamma = a\sqrt{2}$).

Za A_5 imamo

$$A_5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4\cos^2\gamma(y-x) \\ y-x \end{pmatrix},$$

a po formuli 8.5 je

$$|[x+4\cos^2\gamma(y-x),y-x]|^2 = a^2((x+4\cos^2\gamma(y-x))^2+4(y-x)((1-4\cos^2\gamma)(y-x)-x)\cos^2\gamma) =$$

$$= a^2(x^2+8x(y-x)\cos^2\gamma+16(y-x)^2\cos^4\gamma+4(y-x)^2\cos^2\gamma-16(y-x)^2\cos^4\gamma-4x(y-x)\cos^2\gamma) =$$
$$= a^2(x^2+8x(y-x)\cos^2\gamma+4(y-x)^2\cos^2\gamma-4x(y-x)\cos^2\gamma) =$$
$$= a^2(x^2+4(y-x)\cos^2\gamma(2x+y-x-x) = a^2(x^2+4y(y-x)\cos^2\gamma),$$

što je i trebalo dokazati. Dakle, A_5 je matrica operatora simetrije za sve baze koje zadovoljavaju početni uvjet.

Naposlijetku, primijetimo: $A_5 = A_4$ ako je $\gamma = 135°$.

Zaključujemo: Ako je γ tup i $b = -2a\cos\gamma$, onda postoje dva tipa operatora simetrije koji preslikavaju $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ u $\overrightarrow{a}$:

- Operator određen matricom A_1 u bazi $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, kojemu je determinanta -1 i ima svojstvene vrijednosti 1 i -1, te
- operator određen matricom A_5 u bazi $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, kojemu je determinanta 1 i ima svojstvenu vrijednost -1 (ako je $\gamma = 135°$) ili nema svojstvenih vrijednosti (za ostale dopustive γ).

Prema karakterizaciji operatora simetrije temeljem determinanti i svojstvenih vrijednosti (str. 321) te skicirajući jediničnu ćeliju i njezinu sliku putem A_1 odnosno A_5, zaključujemo: Operator određen s A_1 je osna simetrija s obzirom na simetralu od $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a}$ (a okomica na nju je kolinearna s $\overrightarrow{b}$ i ona je svojstveni potprostor za -1), dok je operator određen s A_5 rotacija oko O za kut θ koji zadovoljava $\mathrm{tr}A_5 = 2\cos\theta = 2 - 4\cos^2\gamma$, dakle $\theta = \arccos(1 - 2\cos^2\gamma)$.

Poglavlje 9

Obične diferencijalne jednadžbe

U odjeljku 3.7 upoznali smo se s pojmom diferencijalne jednadžbe i njezinog rješenja te saznali kako za konkretnu funkciju provjeriti je li ona rješenje zadane diferencijalne jednadžbe ili nije, te ako jest, kako iskoristiti početne uvjete da se ta funkcija jednoznačno odredi. U ovom ćemo poglavlju formalizirati navedene pojmove i saznati kako se rješavaju neki česti tipovi diferencijalnih jednadžbi, tj. jednadžbi u kojima je nepoznanica funkcija, a jednadžba iskazuje vezu između te nepoznate funkcije, njezine nezavisne varijable i njezinih derivacija (a najviši red derivacije nepoznate funkcije u jednadžbi se naziva redom diferencijalne jednadžbe).

Preciznije rečeno, bavit ćemo se samo običnim diferencijalnim jednadžbama, a to su one čije nepoznanice su funkcije jedne nezavisne varijable. Diferencijalne jednadžbe čije nepoznanice su funkcije više varijabli nazivaju se parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i odgovarajuća teorija je izvan dometa ovog udžbenika. Budući da ćemo se dakle baviti isključivo običnim diferencijalnim jednadžbama, najčešće ćemo ispuštati pridjev „obična”.

Prije formalne definicije obične diferencijalne jednadžbe promotrimo jedan primjer vezan za prethodno poglavlje.

Primjer 309. *Deriviranje po x je linearan operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ kojemu recimo kao domenu i kodomenu uzmemo (beskonačnodimenzionalni) vektorski prostor funkcija jedne varijable (sa zajedničkom domenom) koje posjeduju derivacije svih redova. Taj operator djeluje na funkciju tako da joj pridružuje njezinu derivaciju:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f'.$$

Svojstveni vektori i svojstvene vrijednosti operatora deriviranja su onda funkcije f i skalarni (realni brojevi) λ za koje je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \lambda f,$$

tj. $f'(x) = \lambda f(x)$ *za sve* x*. Vidimo da je problem određivanja svojstvenih vektora i vrijednosti za operator deriviranja diferencijalna jednadžba (prvog reda jer se u njoj pojavljuje samo prva derivacija nepoznate funkcije).*

Formalizirajmo sad gornje ideje:

Definicija 72 (Obična diferencijalna jednadžba)**.** *Obična diferencijalna jednadžba je jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

gdje je F *izraz ovisan o više varijabli (formalno: skalarna funkcija* $n + 2$ *varijabli).*

Rješenje takve jednadžbe na intervalu I *je funkcija* $y : I \to \mathbb{R}$ *čije uvrštavanje u jednadžbu daje istinitu jednakost za svaku vrijednost varijable* $t \in I$*.*

Red (stupanj) obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije nepoznate funkcije koja se u njoj pojavljuje: red jednadžbe $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *je* n*.*

Nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednadžbi najčešće se označava s y ili f, a njena nezavisna varijabla s t ili x.

Primjer 310. *Jednadžba* $\sin \frac{y}{y'} = e^t$ *je diferencijalna jednadžba prvog reda,* $y'y'' = y$ *je diferencijalna jednadžba drugog, a* $y''' - 3y' = 2e^y - t$ *je diferencijalna jednadžba trećeg reda.*

Primjer 311. *Funkcija* $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $y(t) = e^t$ *je rješenje diferencijalne jednadžbe* $y' = y$ *jer uvrštavanje daje* $e^t = e^t$*, što vrijedi za sve* t*. Možete li pogoditi još koje rješenje iste diferencijalne jednadžbe?*

Osnovna tehnika u pozadini rješavanja diferencijalnih jednadžbi je integriranje. Najjednostavnije diferencijalne jednadžbe su oblika

$$y' = f(t)$$

i one se mogu riješiti direktnim integriranjem.

Primjer 312. *Jednadžba*

$$y' = \sin x$$

je diferencijalna (prvog reda), i to takva da ju možemo riješiti direktnim integriranjem:

$$\int y' \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}x,$$

$$y(x) = -\cos x + C.$$

Postoje mnoge podvrste diferencijalnih jednadžbi, razni postupci za njihovo rješavanje, a neke nisu egzaktno rješive. Mi ćemo se baviti onim vrstama koje su egzaktno rješive, a česte su kao modeli kemijskih i fizikalnih problema.

Kako su u primjenama najčešće diferencijalne jednadžbe one u kojima je varijabla nepoznate funkcije vrijeme t, a same jednadžbe iskazuju vezu između nepoznate funkcije (pozicije, koncentracije, ...) i brzine njezine promjene te eventualno ubrzanja, slijedi da su za primjene najbitnije diferencijalne jednadžbe prvog i drugog reda, te ćemo se baviti (gotovo) isključivo s njima. U kemiji, diferencijalne jednadžbe se najviše pojavljuju u kemijskoj kinetici.

Primjer 313. *Kretanje čestice mase m po pravcu (opisano pozicijom $x(t)$ u trenutku t), pod utjecajem sile $F(t)$, opisano je drugim Newtonovim zakonom, koji je diferencijalna jednadžba drugog reda:*

$$F(t) = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = m\ddot{x}.$$

Ovisno o formuli koja opisuje silu koja djeluje na česticu, ta jednadžba može poprimiti mnogo različitih konkretnih oblika. Primjerice, za slobodni pad ona poprima oblik

$$m\ddot{z} = -mg.$$

Rješenje dobivamo tako da dvaput integriramo: $z'(t) = -gt + C_1$, $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2$.

Posljednja dva primjera ukazuju na to da je u pozadini rješavanja diferencijalne jednadžbe prvog reda jednog integriranje koje rezultira jednom konstantom integriranja, a za jednadžbe drugog reda potrebno je dvaput integrirati pa dobivamo dvije konstante integriranja. Takva rješenja jednadžbi (koja sadrže neodređene konstante integriranja) nazivaju se općim.

Definicija 73 (Opće, partikularno i singularno rješenje)**.** *Opće rješenje diferencijalne jednadžbe reda n je njeno rješenje koje sadrži n neodređenih konstanti.*

Partikularno rješenje je ono koje odgovara uvrštavanju konkretnih vrijednosti konstanti u opće rješenje.

Singularno rješenje diferencijalne jednadžbe je njeno rješenje koje se ne može dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti u konstante općeg rješenja.

Primjer 314. *Opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$ je $y(x) = Ce^x$. Primjer partikularnog rješenja te jednadžbe je $y(x) = 0$ koje se dobije za $C = 0$.*

Primjer 315. *Opće rješenje Clairautove jednadžbe*

$$y = xy' + (y')^2$$

je $y(x) = Cx + C^2$. *No, i funkcija* $y_S(x) = -\frac{1}{4}x^2$ *je također rješenje, koje ni za koji* C *ne možemo dobiti iz općeg rješenja:* y_S *je singularno rješenje Clairautove jednadžbe.*

U primjenama se u pravilu uz samu diferencijalnu jednadžbu pojavljuje i početni uvjet koji omogućuje odabir partikularnog rješenja koje odgovara postavljenom problemu.

Primjer 316. *Slobodni pad tijela mase* m *opisan je diferencijalnom jednadžbom* $mz''(t) = -mg$, *odnosno*

$$z''(t) = -g.$$

Ukoliko ishodište stavimo u mjesto otkud je tijelo počelo padati i pretpostavimo da je samo ispušteno, onda su nam poznata i dva dodatna podatka koja čine početni uvjet za gornju jednadžbu:

$$z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m},$$

$$z'(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Definicija 74 (Početni uvjet)**.** *Diferencijalna jednadžba* $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ *je zadana s početnim uvjetom ako su poznate vrijednosti* $y(t_0)$, $y'(t_0)$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)$ *za neku konkretnu vrijednost varijable* t_0.

Primjer 317. *Za slobodni pad integriranje daje* $z'(t) = -gt + C_1$ *pa* $z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$. *Prema zadanim podacima o trenutku* $t = 0\,\mathrm{s}$ *slijedi*

$$z(0\,\mathrm{s}) = C_2 = 0\,\mathrm{m},$$

$$z'(0\,\mathrm{s}) = C_1 = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Dakle, partikularno rješenje koje opisuje poziciju tijela koje je ispušteno s pozicije $z(0\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ *je*

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2.$$

Početni uvjeti se uvijek „iskorištavaju” na kraju, tj. tek kad je određen potpun oblik općeg rješenja diferencijalne jednadžbe; oni služe odabiru partikularnog rješenja, a to ima smisla tek kad je određeno opće rješenje.

Napomena 33. *Strogo matematički, osnovno pitanje oko diferencijalnih jednadžbi je pitanje uz koje uvjete postoje njihova rješenja, odnosno kad su jedinstvena. Mi ćemo ovdje podrazumijevati da su za sve razmatrane tipove jednadžbi odgovarajući teoremi o postojanju i po potrebi o jedinstvenosti rješenja dokazani. Zainteresirani čitatelj može potrebnu matematičku teoriju naći u svakom standardnom udžbeniku o običnim diferencijalnim jednadžbama za studij matematike.*

Ponovimo bitno... Obične diferencijalne jednadžbe su jednadžbe koje opisuju nepoznatu funkciju jedne varijable preko veze između varijable, te funkcije i njenih derivacija. Najviša derivacija koja se u jednadžbi pojavljuje je red diferencijalne jednadžbe. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je njeno rješenje koje sadrži onoliko neodređenih konstanti koliki je red jednadžbe; uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za te konstante dobivamo partikularno rješenje. Rješenja koja se ne mogu dobiti kao partikularna zovu se singularna. Ukoliko su uz diferencijalnu jednadžbu zadane vrijednosti nepoznate funkcije i njenih derivacija (do reda za jedan manjeg od reda jednadžbe) u nekoj konkretnoj vrijednosti varijable, kažemo da je jednadžba zadana s početnim uvjetom; početni uvjet omogućuje odabir vrijednosti konstanti u općem rješenju tako da dobijemo partikularno rješenje koje odgovara tom uvjetu.

9.1 Metoda separacije varijabli

Mnoge diferencijalne jednadžbe prvog reda mogu se svesti na oblik

$$y' = f(t)g(y).$$

Primjerice, jednadžba $y' = y$ je oblika $y' = 1 \cdot y$, tj. $f(t) = 1$ i $g(y) = y$.

Takve diferencijalne jednadžbe (jednadžbe sa separiranim varijablama) rješavaju se sljedećim postupkom separacije varijabli:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t)g(y),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Načelno, svaki od dva integrala u prethodnom koraku sa sobom nosi svoju konstantu integriranja. No, ako je $G(y) + C_y$ neodređeni integral od $1/g(y)$, a $F(t)+C_t$ neodređeni integral od $f(t)$, dobili bismo $G(y)+C_y = F(t)+C_t$, tj. $G(y) = F(t)+C_y - C_t$. Kako je razlika konstanti konstanta, možemo to kraće pisati $G(y) = F(t)+C$, tj. pri integriranju jednadžbe sa separiranim varijablama konstantu integriranja pišemo samo na desnoj strani.

Primjer 318. *Riješimo jednadžbu*

$$xy' = y.$$

Imamo

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

pa integriranje daje

$$\ln|y| = \ln|x| + C_0.$$

Kako nas zanima funkcija y, a ne $\ln|y|$, ako na prethodnu jednadžbu djelujemo s inverznom funkcijom (eksponencijalnom s bazom e) dobivamo

$$|y| = e^{C_0}|x|.$$

Kako je C_0 konstanta, i e^{C_0} je konstanta pa ćemo ju zvati C:

$$|y| = C|x|.$$

Kako je $|y|$ jednak y ili $-y$ i analogno za $|x|$, možemo smatrati da je odgovarajuće kombinacija predznaka uključena u konstantu C te je konačni oblik rješenja

$$y = Cx.$$

Često je moguće da se jednadžba koja nije rješiva separacijom varijabli prikladnom supstitucijom svodi na jednadžbu sa separiranim varijablama. Važen tip takvih jednadžbi su homogene diferencijalne jednadžbe.

9.1.1 Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe su jednadžbe koje se mogu zapisati u obliku

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right).$$

Ne valja ih miješati s homogenim linearnim jednadžbama, o kojima ćemo govoriti u sljedećem odjeljku. Homogene diferencijalne jednadžbe rješavaju se supstitucijom

$$u = \frac{y}{t}$$

(„staru” nepoznatu zavisnu varijablu y nezavisne varijable t zamjenjujemo novom nepoznatom zavisnom varijablom u iste nezavisne varijable t). Dakle, $u' = \frac{ty'-y}{t^2} = \frac{y'}{t} - \frac{u}{t}$, iz čega slijedi $tu' = y' - u$, tj.

$$y' = tu' + u.$$

Time naša jednadžba poprima oblik

$$tu' + u = F(u),$$

a ona se može riješiti separacijom varijabli.

Primjer 319. *Jednadžba $ty' = 5t + 2y$ je homogena: dijeljenjem s t poprima oblik*

$$y' = 5 + 2\frac{y}{t}.$$

Supstitucija $u = \frac{y}{t}$ daje $tu' + u = 5 + 2u$, tj. $tu' = 5 + u$. Separacija varijabli prevodi ju u oblik

$$\frac{\mathrm{d}u}{5+u} = \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Integriranje daje $\ln|5+u| = \ln|t| + C_0$, odnosno

$$5 + \frac{y}{t} = Ct.$$

Stoga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = Ct^2 - 5t.$$

9.1.2 Jednadžbe sa separiranim varijablama u primjenama

Jednadžbe sa separiranim varijablama su prilično česte u primjenama. Slijede neki karakteristični, važni primjeri.

Prvi tip primjena su eskponencijalni i logistički procesi. Eksponencijalni procesi su oni kod kojih je brzina promjene praćene veličine u svakom trenutku razmjerna iznosu te veličine (konstanta proporcionalnosti se obično naziva stopom rasta ili pada). Klasičan primjer eksponencijalnog procesa je radioaktivni raspad.

Brzina raspadanja radioaktivne tvari, tj. brzina promjene broja radioaktivnih čestica u vremenu t, razmjerna je trenutnoj brojnosti N radioaktivnih čestica:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

(λ je pozitivna konstanta koju nazivamo stopom pada).[1] Separacijom varijabli dobivamo rješenje

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t).$$

Kao primjer eksponencijalnog rasta često se navodi rast populacija u biologiji. No, u stvarnom svijetu neograničeni rast populacija nije moguć, dakle u jednadžbu treba uključiti ograničenje rasta: maksimalni kapacitet okoline dotične populacije (opisan konstantom K).

Rast populacija u biologiji nije jedini takav proces. Mnogi procesi nisu eksponencijalni, nego su prvo tijekom nekog vremena eksponencijalni, da bi se zatim eksponencijalni rast usporio (eksponencijalni pad ubrzao) i nastavio prema nekoj stabilnoj vrijednosti (horizontalnoj asimptoti). Takvi procesi nazivaju se logistički.

Ideja logističkog modela je sljedeća: Dok je N puno manji od K rast je eksponencijalan (određen stopom rasta – konstantom r), no što je N bliži K, to se rast više usporava. Odgovarajući graf ovisnosti N o t je stoga rastuˇci, ali s jednom točkom infleksije (u kojoj konveksni rast prelazi u konkavni) i desnom horizontalnom asimptotom.

Na razini diferencijalne jednadžbe, diferencijalnu jednadžbu eksponencijalnog rasta ($\dot{N} = rN$) trebamo podesiti. To se ćini tako da na desnoj strani dodamo faktor $\frac{K-N}{K}$. Dok je N puno manji od K, on iznosi približno $K/K = 1$, odnosno za N mnogo manji od K od bitno ne mijenja jednadžbu eksponencijalnog procesa. No, $\lim_{N\to K} \frac{K-N}{K} = 0$, dakle za velike N imamo približno $\dot{N} = 0$, odnosno N postaje približno konstantan.

Logistička jednadžba je stoga

$$N' = rN \cdot \frac{K-N}{K} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Kao i jednadnžba eksponencijalnog procesa, ona u pravilu dolazi s početnim uvjetom $N(0) = N_0$.

Metodom separacije varijabli dobija se njezino partikularno rješenje

$$N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}.$$

Uočimo: Budući da je $N_0 < K$, prirodna domena od N je cijeli skup $\mathbb{R}$, a N poprima samo pozitivne vrijednosti manje od K. Kako s porastom t ($t \to \infty$) $e^{-rt} \to 0$, vidimo i da je $N = K$ horizontalna asimptota. Nadalje, kako je $N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) > 0$ za sve t, N je rastuća funkcija.

[1] Uočimo da je ovo jednadžba koja iskazuje da je funkcija N svojstveni vektor operatora deriviranja za svojstvenu vrijednost koja je suprotna vrijednost stope pada.

Deriviranjem logističke jednadžbe dobivamo

$$N'' = rN' - \frac{2rNN'}{K} = r^2N\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(1 - \frac{2N}{K}\right)$$

Od svih tih faktora jedini koji može biti 0 je zadnji, i to ako je $N = K/2$ (koji je pripadni t?), i tu N'' mijenja predznak, tj. imamo točku infleksije.

Napomena 34. *Logistička jednadžba opisuje mnoge prirodne zakonitosti: ovisnost brojnosti neke biološke populacije o vremenu uz ograničene resurse za preživljavanje, u medicini ovisnost veličine tumora o vremenu, u ekonomiji ovisnost širenja neke inovacije na tržištu, u kemiji ovisnosti koncentracija reaktanata i produkata u autokatalitičkim reakcijama, ...*

Jednadžbe sa separiranim varijablama česte su i u kemijskoj kinetici. U tu svrhu trebamo uvesti nekoliko osnovnih pojmova (za dublje razumijevanje upućujemo na literaturu iz fizikalne kemije):

- Stehiometrijski koeficijenti (oznaka: ν) reaktanata uzimaju se kao negativni, a oni od produkata pozitivni.
- Brzina reakcije je
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t},$$
gdje je J proizvoljni sudionik reakcije (dakle, bilo reaktant bilo produkt), a [J] njegova koncentracija u trenutku t.
- Veličina x ovisi o vremenu[2] i za nju uvije vrijedi $x(0) = 0$.

Integriramo li $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \cdot \frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t}$ po t od 0 do nekog iznosa t, dobijemo $\nu_\mathrm{J} x(t) = [\mathrm{J}] - [\mathrm{J}]_0$, odnosno

$$(\heartsuit) \quad [\mathrm{J}] = [\mathrm{J}]_0 + \nu_\mathrm{J} \cdot x. \tag{9.1}$$

Formula 9.1 je korisna jer omogućuje određivanje koncentracija svih sudionika J o vremenu ako je određena ovisnost x o vremenu. Ona pomaže i za slučaj da je samo određena koncentracija jednog sudionika A o vremenu jer je u toj formuli x isti za sve sudionike, pa se može izraziti preko koncentracije od A i onda uvrstiti u istu takvu formulu za koncentraciju bilo kojeg drugog sudionika J.

Diferencijalne jednadžbe koje opisuju kinetiku reakcije proizlaze iz zakona brzine reakcije. To je eksperimentalno potvrdđeno pravilo da je brzina svake

[2] Naziva se koncentracijom izvedenih pretvorbi.

reakcije (u svakom trenutku) proporcionalna umnošku prikladnih potencija trenutnih koncentracija svih reaktanata:

$$v = k \cdot [\mathrm{J}_1]^{n_1} \cdot [\mathrm{J}_2]^{n_2} \cdot \ldots,$$

gdje su J_1, J_2, ... svi reaktanti. Zbroj eksponenata koncentracija u zakonu brzine ($n = \sum n_i$) se zove red reakcije, a pojedinačni eksponenti n_i se zovu parcijalni redovi reakcije s obzirom na reaktante J_i. Konstanta proporcionalnosti k (ovisna o temperaturi, ali konstantna pri danoj temperaturi) zove se koeficijent brzine reakcije. Uvrstimo li na lijevu stranu zakona brzine definiciju brzine reakcije i iskoristimo formulu 9.1 dobivamo diferencijalni oblik zakona brzine reakcije:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}_1]_0 + \nu_{\mathrm{J}_1} \cdot x)^{n_1}([\mathrm{J}_2]_0 + \nu_{\mathrm{J}_2} \cdot x)^{n_2} \ldots .$$

Primijetimo da je to uvijek diferencijalna jednadžba prvog reda, sa separiranim varijablama. Njezino rješenje naziva se integriranim oblikom zakona brzine reakcije.

Promotrimo reakcije na čiju brzinu utječe samo jedan reaktant J. Tada je zakon brzine oblika

$$\frac{1}{\nu_\mathrm{J}} \frac{\mathrm{d}[\mathrm{J}]}{\mathrm{d}t} = k([\mathrm{J}]_0 + \nu_\mathrm{J} \cdot x)^n.$$

Za $n = 1$ ovo je poput radioaktivnog raspada, za $n = 0$ brzina je neovisna o trenutnim koncentracijama sudionika.

Zadatak 81. *Odredite odgovarajući integrirani oblik za sve n.*

Zadatak 82. *Za $n = 0, 1, 2$ skicirajte graf ovisnosti koncentracije bilo kojeg reaktanta ili produkta o vremenu.*

Zadatak 83. *Neka reakcija stehiometrije $A + 2B \longrightarrow C$ je prvog reda i brzina joj ovisi samo o koncentraciji reaktanta A. Početne koncentracije od A i B su jednake i iznose $0{,}10\,\mathrm{mol/L}$, a koeficijent brzine reakcije iznosi $0{,}50\,\mathrm{s}^{-1}$. Nakon koliko vremena će koncentracija od A pasti na pola početne koncentracije? Ovisi li to vrijeme o početnoj koncentraciji od A? Kolika će u tom trenutku biti koncentracija od B?*

Zadatak 84. *Za reakciju drugog reda koja ima parcijalne redove 1 s obzirom na dva reaktanta A i B, dakle za reakciju za koju je*

$$v = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}],$$

odredite integrirani oblik zakona brzine uz pretpostavku da je početna koncentracija od A jednaka a, od B jednaka b, te da je stehiometrija te reakcije $A_3{}^+B \longrightarrow 2\,C$. Kolika će biti koncentracija od C nakon 1 minute?

Zadatak 85. *Neka reakcija stehiometrije $2\,A^{+}B_{3}{}^{+}C \longrightarrow D$ je 3. reda (parcijalno prvog obzirom na svakog od reaktanata). Neka su nadalje početne koncentracije reaktanata A, B i C redom a, b i c. Odredite formulu ovisnosti umnoška koncentracija od A, B i C o vremenu.*

Ponovimo bitno... Separacijom varijabli možemo riješiti one diferencijalne jednadže prvog reda koje se mogu zapisati u obliku u kojem su svi članovi s nepoznatom funkcijom na jednoj, a svi članovi s njenom varijablom na drugoj strani jednakosti. U tom slučaju za dobivanje općeg rješenja potrebno je integrirati obje strane jednadžbe.

Homogene diferencijalne jednadžbe su prvog reda koje se mogu svesti na oblik u kojem je derivacija nepoznate funkcije y izjednačena s izrazom koji se može zapisati kao funkcija od u gdje je $u = y/t$ (t je varijabla nepoznate funkcije y). Supstitucijom $u = y/t$ one se svode na oblik rješiv separacijom varijabli.

9.2 Linearne diferencijalne jednadžbe

9.2.1 Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

Ako ste riješili zadatak 64, uvjerili ste se da je skup svih rješenja obične diferencijalne jednadžbe oblika $y' + a(t)y = 0$ vektorski prostor, isto kao što je i skup svih rješenja *homogenog* sustava *linearnih* jednadžbi vektorskih prostor. Stoga takav tip diferencijalne jedndžbe nazivamo *homogenom linearnom* diferencijalnom jednadžbom 1. reda. Preciznije:

Definicija 75 (Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda)**.** *Linearna diferencijalna jednadžba 1. reda je (obična) diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$y' + a_0(t)y = f(t).$$

Ako je $f(t) = 0$ za sve t, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda.

Homogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda (takva je bila npr. jednadžba eksponencijalnog procesa) lako se rješava separacijom varijabli: $y' + a_0(t)y = 0$ je ekvivalentno s

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a_0(t)\,\mathrm{d}t,$$

pa integriranje daje $\ln|y| = -\int a_0(t)\,\mathrm{d}t$, odnosno

$$|y(t)| = \exp(-\int a_0(t)\,\mathrm{d}t).$$

Za rješavanje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda $y' + a_0(t)y = f(t)$ koristimo metodu varijacije konstante. Metoda varijacije konstante ima dva koraka:

1. Riješimo pripadnu homogenu jednadžbu $y' + a_0(t)y = 0$. Njezino opće rješenje y_H sadrži jednu neodređenu konstantu C.

2. Pretpostavimo da je opće rješenje y polazne nehomogene jednadžbe istog oblika kao y_H, ali s C funkcijom nezavisne varijable t („variramo konstantu") te taj pretpostavljeni oblik rješenja deriviramo i uvrstimo u polaznu jednadžbu. Time dobivamo eksplicitni izraz za $C'(t)$ te se $C(t)$ može dobiti integriranjem.

Primjer 320. *Sjetimo se pečene patke iz primjera 97. Temperatura patke koja se peče u pećnici opisana je diferencijalnom jednadžbom oblika*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k(200°\mathrm{C} - \vartheta)$$

koja potječe iz Newtonovog zakona hlađenja. Tu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\dot{\vartheta} + k\vartheta = k \cdot 200°\mathrm{C}$$

iz kojeg vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. *reda. Pripadna homogena jednadžba je*

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} = -k\,\mathrm{d}t$$

i njezino rješenje, dobiveno separacijom varijabli, je $\vartheta_H = C\exp(-kt)$. *Stoga pretpostavljamo da je rje senje polazne jednadžbe oblika*

$$\vartheta(t) = C(t)\exp(-kt).$$

Deriviramo: $\dot{\vartheta} = C'(t)\exp(-kt) - kC(t)\exp(kt)$. *Uvrstimo* ϑ *i* $\dot{\vartheta}$ *u polaznu jednadžbu:*

$$C'(t)\exp(-kt) - kC(t)\exp(-kt) + k \cdot C(t)\exp(-kt) = k \cdot 200°\mathrm{C},$$

odnosno $C'(t) = k \cdot 200°\mathsf{C}\exp(kt)$ *pa je* $C(t) = 200°\mathrm{C}\exp(kt) + C_1 \Rightarrow$, *dakle je opće rješenje naše jednadžbe*

$$\vartheta(t) = (200°\mathsf{C}\exp(kt) + C_1)\exp(-kt) = 200°\mathrm{C} + C_1\exp(-kt).$$

Uz ovakve primjere iz fizike, linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda pojavljuju se i u tzv. problemima miješanja. U takvim se problemima podrazumijeva da su sve otopine u svakom trenutku homogene, a brzina promjene količine (mase, množine, ...) jednaka je razlici brzina ulijevanja i izlijevanja (mase, množine, ...).

Primjer 321. *U cisternu obujma* 1000 L *ulijeva se i iz nje izlijeva vodena otopina neke tvari. Na početku je u cisterni* 800 L *otopine, od čega je* 20 g *otopljene tvari. Otopina s masenom koncentracijom spomenute tvari od* 50 g/L *ulijeva se brzinom* 3 L/h*. Otopina se iz cisterne izlijeva brzinom* 2 L/h*. Kad masa otopljene tvari u cisterni dosegne* 5 kg *ili kad se dosegne kapacitet cisterne (što god od tog dvoje da se prvo desi), prekida se dovod tekućine. Kad će se to dogoditi?*

Imamo:

$$m' = m'_{in} - m'_{out}.$$

S obzirom na podatke je $m'_{in} = V'_{in}\gamma_{in} = 150\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}}$*, a* $m'_{out} = V'_{out}\gamma_{out} = 2\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{m(t)}{V(t)}$*. Kako u* 1 *satu u cisternu dodatno uđu* 3*, a izađu* 2 *litre, slijedi da je* $V(t) = V_0 + 1\frac{\mathsf{L}}{\mathsf{h}} \cdot t$*. Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu za* m*:*

$$m' = 150\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} - 2 \cdot \frac{m(t)/\mathrm{h}}{800 + t/\mathrm{h}}$$

s početnim uvjetom $m(0) = 20$ g*. Rješenje pripadne homogene jednadžbe je* $m_H(t) = \frac{C}{(800+t/\mathrm{h})^2}$*, a za* C *se metodom varijacije konstante dobije* $C = 50(800 + t/\mathrm{h}) + C_1$*, dakle je*

$$m(t) = \frac{50\,\mathrm{g}}{800 + t/\mathrm{h}} + \frac{C_1}{(800 + t/\mathrm{h})^2}.$$

Početni uvjet povlači $C_1 = 15950$ g*. Izjednačavanjem* $m(t)$ *s* 5000 g *i* $V(t)$ *s* 1000 L *te odabirom manjeg od dva rješenja dobivamo traženo vrijeme.*

Primjer 322. *RL-strujni krug s jednim otpornikom otpora* R *i jednom zavojnicom induktiviteta* L *te baterije elektromotorne sile* E *opisan je (temeljem Kirchhoffovog zakona) nehomogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom 1. reda:*

$$L\dot{I} + RI = E.$$

Primjer 323. *Objekt mase m izbačen je iz helikoptera. Potrebno je odrediti njegovu brzinu u proizvoljnom trenutku ako se pretpostavi da je u svakom trenutku otpor zraka proporcionalan trenutnoj brzini. Odgovarajuća diferencijalna jednadžba je nehomogena linearna diferencijalna jednadžbe* 1*. reda:*

$$m\dot{v} = mg - kv.$$

Poopćenjem gornje ideje na slučaj kad otpor zraka (ili sila trenja) nisu proporcionalne trenutnoj brzini, nego nekoj njezinoj potenciji, dobiva se Bernoullijeva diferencijalna jednadžba.

$$y' + a_0(t)y = f(t)y^n$$

(s $n \neq 0, 1$). Bernoullijeva se jednadžba rješava supstitutcijom

$$v(t) = y(t)^{1-n},$$

koja povlači da je $v' = (1-n)y^{-n}y'$ te izvorni oblik jednadžbe svodi na linearnu:

$$\frac{v'}{1-n} + a_0(t)v = f(t).$$

Primjer 324. *Riješimo Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu*

$$y' + \frac{4y}{t} = t^3y^2$$

s početnim uvjetom $y(2) = -1$, za pozitivne t.

Supstituiramo $v = y^{-1}$, dakle je $v' = -y^{-2}y'$, odnosno $y = v^{-1}$ i $y' = -y^2v' = -v^{-2}v'$, pa dobivamo $-v^{-2}v' + 4v^{-1}t^{-1} = t^3v^{-2}$, odnosno

$$v' - \frac{4}{t}v = t^3.$$

Pripadna homogena jednadžba je $v' = 4v/t$, njezino rješenje je $v_H(t) = Ct^4$. Variramo konstantu: $v(t) = C(t)t^4$. Uvrstimo $v' - \frac{4}{t}v = t^3$ te dobijemo $C'(t) = t^{-1}$, dakle je $C(t) = \ln t + C_1$, odnosno

$$v(t) = (\ln t + C_1)t^4,$$

dakle

$$y(t) = \frac{1}{(\ln t + C_1)t^4}.$$

Uvrštavanje početnog uvjeta ($t = 2$, $y = -1$) daje $C_1 = -\ln 2 - \frac{1}{16}$, dakle je traženo partikularno rješenje

$$y(t) = \frac{1}{(\ln \frac{t}{2} + \frac{1}{16})t^4}.$$

Ono je definirano ako je $\ln \frac{t}{2} \neq -\frac{1}{16}$, odnosno $t \neq T = 2\exp(-1/16) \approx 1{,}88$. Kako gledamo samo pozitivne t, imamo dva intervala za naše rješenje: $\langle 0, T\rangle$ i $\langle T, +\infty\rangle$. Ono što nismo istakli u ranijim definicijama, kako bi ovo *poglavlje bilo što jednostavnije za pratiti, ipak spominjemo sada: Rješenja diferencijalnih jednadžbi definiraju se ne na prirodnim domenama, nego na pojedinim intervalima (onima koji sadrže t_0 ako je početni uvjet zadan u t_0). Kako je naš $t_0 = 2 \in \langle T, +\infty\rangle$ zaključujemo: Funkcija $y(t) = \frac{1}{(\ln \frac{t}{2} + \frac{1}{16})t^4}$ je rješenje Bernoullijeve diferencijalne jednadžbe $y' + \frac{4y}{t} = t^3y^2$ s početnim uvjetom $y(2) = -1$ na intervalu $\langle 2\exp(-1/16), +\infty\rangle$.*

9.2.2 Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda

Posvetimo se sad linearnim diferencijalnim jednadžbama reda 2 i višeg:

Definicija 76. *Linearna diferencijalna jednadžba reda n je diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku*

$$y^{(n)} + \ldots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t). \tag{9.2}$$

Ako je f nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj jednadžbi.

U slučaju nehomogene jednadžbe, jednadžbu koja se dobije zamjenom f s nulfunkcijom zovemo pripadnom homogenom jednadžbom.

Ako su sve funkcije a_n, ..., a_0 konstantne, govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima (homogenoj ili nehomogenoj).

Primjer 325. *Jednadžba $y'y'' = y$ je nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda.*

Jednadžba $y' - y\cos t = 2$ je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba prvog reda.

Jednadžba $y''' - 3y' = 2e^t - t$ je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba trećeg reda s konstantnim koeficijentima.

Jednadžba $y'' = y'\sin t - ty$ je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda.

Jednadžba $4y'' - 5y' = 0$ je homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Općenito kao i za linearne jednadžbe 1. reda vrijedi: Da bismo riješili nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu, prvo treba riješiti pripadnu homogenu jednadžbu. Naime, ako je y_P bilo koje partikularno rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe, a y_H opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, iz aditivnosti deriviranja proizlazi (usporedite s korolarom 3):

Teorem 41. *Opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe uvijek je oblika*

$$y_H + y_P,$$

gdje je y_P jedno partikularno rješenje zadane nehomogene jednadžbe, a y_H opće rješenje pripadne homogene jednadžbe.

Nije teško pokazati da iz linearnosti deriviranja slijedi sljedeći teorem, koji opravdava naziv „linearna" za upravo opisane diferencijalne jednadžbe (dokaz da se stvarno radi o vektorskom prostoru prepuštamo za vježbu, dokaz o jednakosti dimenzije i reda jednadžbe je nešto teži):

Teorem 42. *Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda je n-dimenzionalni vektorski prostor, potprostor prostora svih beskonačno puta derivabilnih funkcija (zadanih na istom otvorenom intervalu).*

To specijalno znači da postoji baza za prostor rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda, odnosno da se svako njezino rješenje može zapisati kao linearna kombinacija nekih njezinih n linearno nezavisnih rješenja. Takva baza naziva se fundamentalnim skupom rješenja. Dok je provjera jesu li dvije funkcije linearno nezavisne jednostavna (čim jedna nije višekratnik druge, nezavisne su), za više funkcija $y_1, \ldots, y_n$ nije tako očito kako provjeriti jesu li linearno nezavisne, tj. ako su $y_1, \ldots, y_n$ različita rješenja iste homogene linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda, nije očito kako provjeriti da se radi o fundamentalnom skupu. Odgovor na to pitanje daje Wronskijan (determinanta Wronskoga). Za funkcije $y_1, \ldots, y_n$ to je determinanta

$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & \ldots & y_n''(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Ako $W(y_1, \ldots, y_n)$ nije nulfunkcija, onda možemo zaključiti da su $y_1, \ldots, y_n$ linearno nezavisne (no ako je $W(y_1, \ldots, y_n)$, to ne mora značiti njihovu zavisnost).

Zadatak 86. *Pokažite da su sinus, kosinus i proizvoljna afina funkcija (koja nije nulfunkcija) uvijek linearno nezavisne.*

S obzirom na gore navedeno vidimo: Da bismo riješili zadanu linearnu diferencijalnu jednadžbu, potrebno je prvo odrediti fundamentalni skup rješenja pripadne homogene jednadžbe. Za jednadžbe s nekonstantnim koeficijentima to nije jednostavno te se u nastavku ograničavamo na linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Rješavanje homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Cilj nam je dakle riješiti jednadžbe oblika

$$y^{(n)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{9.3}$$

s $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Nezavisnu varijablu nepoznate funkcije y označimo s t.

Ako odredimo pripadni n-člani fundamentalni skup rješenja $\{y_1, \ldots, y_n\}$, onda po definiciji baze znači da je opće rješenje jednadžbe 9.3 oblika

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n. \tag{9.4}$$

Dakle, tražimo praktični postupak za određivanje $y_1, \ldots, y_n$.

Pretpostavimo da je rješenje jednadžbe 9.3 oblika $y(t) = \exp(\lambda t)$ za neku konstantu λ. Znamo da je onda $y'(t) = \lambda \exp(\lambda t)$, $y''(t) = \lambda^2 \exp(\lambda t)$, ..., $y^{(n)}(t) = \lambda^n \exp(\lambda t)$. Uvrštavanje u jednadžbu 9.3 daje

$$\lambda^n \exp(\lambda t) + \ldots + a_2 \lambda^2 \exp(\lambda t) + a_1 \lambda \exp(\lambda t) + a_0 \exp(\lambda t) = 0.$$

Dijeljenjem s $\exp(\lambda t) \neq 0$ dobijemo

$$\lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^n + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{9.5}$$

Dakle, ako postoji rješenje jednadžbe 9.3 koje je oblika $y(t) = \exp(\lambda t)$ (eksponencijalna funkcija s bazom e^λ), onda je λ rješenje jednadžbe 9.5. No, to je polinomijalna jednadžba stupnja n te ona ima najviše n različitih realnih rješenja (odnosno, ima točno n komkpleksnih rješenja ako im se računaju kratnosti). S obzirom na to da se pomoću Wronskijana može provjeriti da su eksponencijalne funkcije s različitim bazama uvijek linearno nezavisne, vidimo: Ako jednadžba 9.5 ima n različitih realnih rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, onda je fundamentalni skup rješenja jednadžbe 9.3 $\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_n t)$. No, i u ostalim slučajevima nije teško opisati konstrukciju fundamentalnog skupa iz rješenja jednadžbe 9.5. Prije toga ipak istaknimo:

Definicija 77 (Karakteristična jednadžba)**.** *Za diferencijalnu jednadžbu 9.3 se polinomijalna jednadžba 9.5 naziva njezinom karakterističnom jednadžbom.*

Mislite li da je naziv karakteristična jednadžba ovdje slučajno isti kao za karakterističnu jednadžbu za određivanje spektra linearnog operatora, varate se. Pogledajmo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Uvedimo novu nepoznatu funkciju z (iste nezavisne varijable t) definiranu sa $y' = z$ (primjerice, ako je y ovisnost puta o vremenu, z je ovisnost brzine o vremenu). Tada je $z' = y'' = -a_1 y' - a_0 y = -a_1 z - a_0 y$, tj. dobili smo homogeni sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s konstantnim koeficijentima:

$$y' = 0 \cdot y + 1 \cdot z$$
$$z' = -a_0 y - a_1 z.$$

Kraće taj sustav možemo zapisati u matričnom obliku:

$$Y' = A \cdot Y.$$

Pritom je $Y = (y, z)^t$, a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristična jednadžba za A u prethodnom primjeru je

$$(-\lambda)(-a_1 - \lambda) + a_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

tj. točno karakteristična jednadžba polazne diferencijalne jednadžbe $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Kao gore, tako i općenitije vrijedi:

Teorem 43. *Svaka homogena linearna diferencijalna jednadžba reda n ekvivalentna je homogenom sustavu linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda, koji se u matričnom obliku može zapisati kao $Y' = AY$, gdje je Y matrica-stupac koja sadrži nepoznate funkcije sustava, tj. izvornu nepoznatu funkciju y i redom njezine derivacije do reda $n - 1$.*

Pritom je karakteristična jednadžba polazne homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda n jednaka karakterističnoj jednadžbi matrice A, dakle su njezina rješenja svojstvene vrijednosti od A.

Više o vezi sustava linearnih diferencijalnih jednadžbi i svojstvenih vrijednosti ćemo reći kasnije, u odjeljku **??**. Vratimo se sad rješavanju homogenih linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Vidjeli smo da je prvi korak u određivanju fundamentalnog skupa rješenja jednadžbe 9.3 rješavanje pripadne karakteristične jednadžbe 9.5. To je jednadžba stupnja n za λ, dakle ima ukupno n rješenja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ u skupu kompleksnih brojeva (ako se svakom rješenju uračuna i njegova kratnost, vidi str. 57).

Ukoliko su svi λ_i različiti i realni brojevi, onda su odgovarajuće funkcije $y_i(t) = \exp(\lambda_i t)$ realne i linearno nezavisne (provjerite to!), dakle je u tom slučaju opće rješenje jednadžbe 9.3 njihova linearna kombinacija.

Primjer 326. *Riješimo jednadžbu*

$$y''' - 4y'' - 4y' + 4 = 0.$$

. *Pripadna karakteristična jednadžba je*

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Lijevu stranu je lako faktorizirati: $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^3 - 4\lambda - 4\lambda^2 + 4 = \lambda(\lambda^2 - 1) - 4(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$. *Stoga su rješenja karakteristične jednadžbe (koja je stupnja* 3*) tri različita realna broja* 4*,* 1 *i* -1*, te je opće rješenje polazne jednadžbe*

$$y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{-t}.$$

Slučajeve kad nisu sva rješenja karakteristične jednadžbe različita, ili kad ima i kompleksnih među njima, detaljno ćemo razmotriti samo za slučaj $n = 2$. U tom slučaju karakteristična jednadžba je kvadratna. Ako ona nema dva različita realna rješenja λ_1 i λ_2, onda ona ili ima jedno dvostruko realno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2$ (kad je diskriminanta 0) ili ima dva konjugirano kompleksna rješenja (kad je diskriminanta negativna).

Kako je svaki vektor zavisan sam sa sobom, ne možemo uz $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ uzeti i $y_2(t) = \exp(\lambda_1 t)$.[3] Da bismo dobili y_2 nezavisan s y_1, množimo ga s t: $y_2(t) = t\exp(\lambda_1 t)$. Sad su y_1 i y_2 nezavisne, što se lako provjeri pomoću Wronskijana, i y_2 jest rješenje jednadžbe 9.3, dakle smo dobili fundamentalni skup rješenja i opće rješenje je njegova linearna kombinacija.

Primjer 327. *Riješimo jednadžbu*

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Njezina karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ *i ona ima jedno dvostruko rješenje* -2*. Stoga je* $y_1(t) = \exp(-2t)$*, a* $y_2(t) = t\exp(-2t)$*, odnosno opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe je*

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

Ako pak karakteristična jednadžba (i dalje smo u slučaju $n = 2$) ima dva različita konjugirano kompleksna rješenja $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, problem nije u nezavisnosti funkcija $y_1(t) = \exp(\lambda_1 t)$ i $y_2(t) = \exp(\lambda_2 t)$, nego u tome što

[3] Za $n > 2$, u slučaju da je λ_i realno rješenje kratnosti k, ono definira k funkcija u fundamentalnom skupu: $\exp(\lambda_i t)$, $t\exp(\lambda_i t)$, …, $t^{k-1}\exp(\lambda_i t)$.

bi one bile kompleksne, a rješavajući jednadžbu 9.3 tražimo realne funkcije. Kako odvojiti realni dio tih funkcija? Uvrštimo y_1 i y_2 u formulu za opće rješenje i raspišemo $\lambda_{1,2}$:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}(c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t}) =$$

$$= e^{at}(c_1 \cos(bt) + ic_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt) - ic_2 \sin(bt)) =$$

$$= e^{\alpha t}((c_1 + c_2)\cos(\beta t) + i(c_1 - c_2)\sin(\beta t)) =$$

$$= e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

Naime, za svaka dva (realna) broja C_1 i C_2 uvijek je moguće jednoznačno riješiti (u $\mathbb{C}$) sustav $c_1 + c_2 = C_1$, $ic_1 - ic_2 = C_2$ (determinanta matrice koeficijenata tog sustava je $-2i \neq 0$ pa se radi o Cramerovom sustavu). Stoga je realni dio kompleksnog općeg rješenja $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ jednak

$$y(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t))$$

te je to opće rješenje jednadžbe 9.3 za slučaj $n = 2$ i nepostojanje realnih rješenja karakteristične jednadžbe.[4]

Primjer 328. *Riješimo jednadžbu*

$$2y'' + y' + 5y = 0.$$

Pripadna karakteristična jednadžba je $2\lambda^2 + \lambda + 5 = 0$, *dakle je*

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-40}}{4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{39}}{4},$$

odnosno imamo $\alpha = -\frac{1}{4}$ *i* $\beta = \frac{\sqrt{39}}{4}$ *te je opće rješenje naše jednadžbe*

$$y(t) = e^{-t/4}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{4}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{4}t\right)\right).$$

Harmonijski oscilator

Linearne diferencijalne jednadžbe modeli su mnogih fizikalnih pojava, među kojima se posebice ističe harmonijski oscilator. Harmonijski oscilator je fizički sustav koji se sastoji od objekta koji periodički titra oko ravnotežnog položaja. Ekvivalentno, radi se o objektu koji oscilira oko ravnotežnog

[4] Za $n > 2$, svaki par kompleksno konjugiranih rješenja karakteristične jednadžbe doprinosti ukupnom općem rješenju funkcijom ovog oblika.

položaja pod utjecajem sile koja je po iznosu proporcionalna odmaku iz ravnotežnog položaja.

Ovdje ćemo se baviti samo jednodimenzionalnim slučajem, u kojem je za opis položaja tijela dovoljna jedna koordinata x ovisna o vremenu t (inače bi model vodio na parcijalnu diferencijalnu jednadžbu). Kao ravnotežni položaj uzimamo poziciju 0. Po definiciji harmonijskog oscilatora, na objekt (mase m) na poziciji $x(t)$ djeluje sila $F(t) = -kx(t)$, gdje je $k > 0$ konstanta (za titranje na opruzi, to je konstanta opruge, a gornji izraz je Hookeov zakon). Drugi Newtonov zakon ($F(t) = m\ddot{x}$) daje nam odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Vidimo dakle da je osnovni model harmonijskog oscilatora homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća karakteristična jednadžba je $m\lambda^2 + k = 0$, a njena rješenja su

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Vidimo da se radi o slučaju s dva konjugirano kompleksna rješenja karakteristične jednadžbe (s $\alpha = 0$ i $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$), pa je stoga ovisnost pozicije o vremenu za harmonijski oscilator dana s

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

uz oznaku $\omega = \sqrt{k/m}$ (kutna frekvencija), odnosno definicija harmonijskog oscilatora preko sile stvarno povlači periodičke oscilacije, s temeljnim periodom $\omega = \sqrt{k/m}$.

Napomena 35. *Gornji oblik se može svesti na oblik $x(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, u kom je A amplituda gibanja, a δ fazni pomak.*

Kako se ovdje radi o fizikalnom problemu, uobičajeno je zadavanje početnih uvjeta:

$$x(0\,\mathsf{s}) = x_0, \quad x'(0\,\mathsf{s}) = v_0.$$

Deriviranjem $x(t)$ dobivamo $x'(t) = -C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t)$ pa uvrštavanje početnih uvjeta daje $C_1 = x_0$, $C_2\omega = v_0$. Stoga je konačno, partikularno rješenje za jednodimenzionalni harmonijski oscilator s početnim odmakom x_0 od ravnotežnog položaja i početnom brzinom v_0 dano formulom

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Dodamo li na temeljni harmonijski oscilator efekt trenja, to znači da na objekt uz silu $-kx(t)$ djeluje i sila trenja $-fv(t) = -f\dot{x}(t)$ ($f > 0$ je konstanta trenja), dakle je $F(t) = -kx(t) + f\dot{x}(t)$, tj. drugi Newtonov zakon sad daje diferencijalnu jednadbu

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0.$$

Vidimo da je model harmonijskog oscilatora s trenjem i dalje homogena linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima. Odgovarajuća karakteristična jednadžba je

$$m\lambda^2 + f\lambda + k = 0.$$

Za razliku od „čistog" harmonijskog oscilatora, sad karakteristična jednadžba ne mora uvijek imati kompleksna rješenja. Označimo njezinu diskriminantu s Δ: $Delta = f^2 - 4mk$. Imamo tri slučaja

- Za $\Delta > 0$ (tj. $f > 2\sqrt{mk}$)

  $$\lambda_{1,2} = \frac{-f \pm \sqrt{\Delta}}{2m} < 0$$

  (jer je $-f - \sqrt{f^2 - 4mk} < -f + \sqrt{f^2 - 4mk} < -f + \sqrt{f^2} = 0$) pa je opće rješenje u ovom slučaju

  $$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

  Ono ima t-os kao horizontalnu asimptotu jer za $t \to \infty$ funkcije oblika $\exp(\lambda t)$ s negativnim λ teže u nulu.

- Za $\Delta = 0$, tj. $f = 2\sqrt{mk}$ dobivamo $\lambda = -\frac{f}{2m} < 0$ i

  $$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}.$$

  I to rješenje ima t-os kao horizontalnu asimptotu jer za $t \to \infty$ ne samo funkcija oblika $\exp(\lambda t)$ s negativnim λ teži u nulu, nego i funkcija oblika $t\exp(\lambda t)$ isto teži u nulu (jer padajuća eksponencijalna funkcija pada brže od ikojeg polinoma (formula 4.5).

- Za $\Delta < 0$, tj. $f < 2\sqrt{mk}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, uz $\alpha = -\frac{f}{2m} < 0$ i $\beta = \frac{\sqrt{4mk-f^2}}{2m}$ pa je

  $$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

  I u ovom slučaju je t-os horizontalna asimptota, jer je linearna kombinacija sinusa i kosinusa uvijek ograničena, a α je ovdje negativan. Ovo je slučaj prigušenih oscilacija.

Vidimo dakle da kod harmonijskog oscilatora s trenjem do oscilacija dolazi samo uz dovoljno mali koeficijent trenja ($f < 2\sqrt{mk}$), a neovisno o tome uz trenje uvijek imamo efekt gušenja, odnosno postepenog smanjivanja odmaka od ravnotežnog položaja.

Uz gore opisani model tzv. klasičnog harmonijskog oscilatora za fiziku i kemiju bitan je i kvantnoteorijski model harmonijskog oscilatora. Kvantna verzija kinetičke energije jednodimenzijskog gibanja je linearni operator

$$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},$$

a potencijalne energije operator $\hat{V} = V(x)\cdot$, gdje je je $V(x) = \frac{k}{2}x^2$. Ukupnu energiju sad modelira Hamiltonijan $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$. Svi ti operatori djeluju na valne funkcije ψ (čija nezavisna varijabla je pozicija x):

$$\hat{H}\psi = (\hat{T} + \hat{V})\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{k}{2}x^2\psi(x).$$

To po Schrödingerovoj jednadžbi mora biti jednako $E\psi$. Dakle: Jednadžba kvantnomehaničkog (jednodimenzionalnog) harmonijskog oscilatora je

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \left(\frac{k}{2}x^2 - E\right)\psi = 0. \tag{9.6}$$

I ova je diferencijalna jednadžba i dalje homogena, linearna i drugog reda, ali više nema konstantne koeficijente (koeficijent uz ψ ovisi o njezinoj varijabli x). Stoga nju više ne možemo rješavati preko karakteristične jednadžbe.

Napomena 36. *Test-rješenje za jednadžbu 9.6 $\psi(x) = \exp(-ax^2)$. Ako tu funkciju dvaput deriviramo i uvrstimo u jednadžbu 9.6, dobivam*

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(4a^2x^2 - 2a) + \left(\frac{k}{2}x^2 - E\right) = 0,$$

odnosno

$$x^2\left(\frac{k}{2} - \frac{2\hbar^2a^2}{m}\right) = E - \frac{\hbar a}{m} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2\hbar}\sqrt{km}.$$

Budući da $|\psi^2|$ po Bornovoj interpretaciji mora biti funkcija gustoće vjerojatnosti da se promatrana čestica nalazi na poziciji x, mora vrijediti $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi^2(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, odnosno funkcija $|\psi^2(x)| = \exp(-2ax^2)$ sigurno mora imati x-os kao (obostranu) horizontalnu asimptotu, dakle otpada $a < 0$ i ostaje $a = \frac{1}{2\hbar}\sqrt{km}$. Stoga je jedno rješenje Schrödingerove jednadžbe za harmonijski oscilator valna funkcija

$$\psi_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sqrt{km}x^2\right).$$

Uvrštavanje tog rješenja natrag u jednadžbu 9.6 povlači $E_0 = \frac{\hbar}{2m}\sqrt{km}$. Dakle, za svojstvenu vrijednost $E_0 = \frac{\hbar}{2m}\sqrt{km}$ od $\hat{H}$ jedan pripadni svojstveni vektor je $\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\hbar}\sqrt{km}x^2\right)$. Ovo je samo jedno od beskonačno mnogo rješenja $(E_\nu, \psi_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ (ovo je rješenje s najnižom mogućom energijom E_0, koja se zove energijom nulte točke).

Vratimo se na klasiči harmonijski oscilator, sa ili bez trenja. U slučaju da na tijelo koje oscilira djeluje još neka vanjska sila opisana formulom $f(t)$, drugi Newtonov zakon daje nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$m\ddot{x}(+f\dot{x}) + kx = f(t). \tag{9.7}$$

U tom je slučaju (po teoremu 41) pozicija opisana formulom

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t),$$

gdje je x_H opće rješenje za harmonijski oscilator bez vanjske sile (bez ili sa trenjem), a x_P je partikularno rješenje gornje jednadžbe. Postavlja se dakle pitanje, kako odrediti partikularno rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Prije nego se posvetimo tom pitanju, navedimo samo još jedan primjer.

Primjer 329. *Promotrimo strujni krug (jednostavnu strujnu petlju) koje se sastoji od izvora napona E, otpornika otpora R, kondenzatora kapaciteta C, zavojnice konstantne induktivnosti L i sklopke koja se zatvara u početnom trenutku ($I(0\,\mathsf{s}) = 0$ A).*

Po definiciji je $I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Nadalje, prema Ohmovom zakonu, pad napona na otporniku je $U = RI = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. Pad napona na zavojnici pak iznosi $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}$, a na kondenzatoru Q/C. Prema drugom Kirchhoffovom zakonu stoga mora vrijediti

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = E.$$

Ukoliko su induktivnost, otpor i kapacitet konstantni, vidimo da smo dobili nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima, analognu općem modelu harmonijskog oscilatora 9.7. Vidimo da ovdje ulogu pozicije igra naboj, ulogu mase induktivnost, ulogu koeficijenta trenja otpor, a ulogu koeficijenta opruge recipročni kapacitet. Za razliku od harmonijskog oscilatora, ovdje će napon E (bio on konstantan ili ovisan o vremenu, sigurno nema smisla da je konstantno 0) uzrokovati da sigurno imamo nehomogenu jednadžbu.

Određivanje partikularnog rješenja

Za određivanje partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe 9.2 postoje dvije metode. Za obje se pretpostavlja da je prvo riješena pripadna homogena jednadžba, tj. da je određen $y_H(t)$.

Prva metoda je metoda neodređenih koeficijenata. U njoj se ovisno o nehomogenom članu $f(t)$ pretpostavi određeni oblik y_P, koji će sadržavati jednu ili više neodređenih konstanti, zatim ga se u jednadžbu 9.2 i odrede te konstante. Ova metoda je primjenjiva ako je $f(t)$ umnožak

- polinoma (konstantna funkcija je polinom stupnja 0) i/ili
- eksponencijalne funkcije $\exp(\alpha t) = a^t$ (dakle, $\alpha = \ln a$) i/ili
- linearne kombinacije sinusa i kosinusa od βt ($c\cos(\beta t) + d\sin(\beta t)$, pri čemu c ili d može biti 0.

Tada se za y_P pretpostavlja isti oblik kakav ima $f(t)$, s tim da se svi konkretni koeficijenti polinoma, te c i d zamijene neodređenim koeficijentima. Taj oblik uvrštavamo u polaznu jednadžbu i određujemo te koeficijente.

Primjer 330. *Ako je*

$$f(t) = 6 \cdot 3^t \cdot \cos(2t)$$

(polinom stupnja 0 *pomnožen s eksponencijalnom funkcijom s bazom* 3 *i linearnom kombinacijom* $0\sin(2t) + 1\cos(2t)$*) pretpostavlja se*

$$y_P(t) = A \cdot 3^t \cdot (B\cos(2t) + C\sin(2t)),$$

a ako je

$$f(t) = t^2 e^{-t}$$

(polinom 2. *stupnja pomnožen s eksponencijalnom funkcijom s bazom* e^{-1}*) pretpostavlja se*

$$y_P(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-t}.$$

Može se dogoditi da se iz gornje pretpostavke ne mogu odrediti neodređeni koeficijenti. To će se dogoditi ako je pretpostavljeni oblik y_P već uključen u y_H. U takvom slučaju potrebno je prvotno pretpostavljeni y_P pomnožiti s najmanjom potencijom od t tako da se taj oblik ne pojavljuje kao komponenta u y_H.

Primjer 331. *Riješimo*

$$y'' - 6y' + 9y = \exp(3t).$$

Pripadna homogena jednadžba je $y'' - 6y' + 9y = 0$, *odgovarajuća karakteristična jednadžba je* $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ *s jedinstvenim (dvostrukim) realnim rješenjem* $\lambda = 3$, *dakle je* $y_H(t) = C_1 \exp(3t) + C_2 t \exp(3t)$.

Nehomogeni član je $f(t) = \exp(3t)$, *dakle konstanta pomnožena s eksponencijalnom funkcijom s bazom* e^3, *te bi trebalo pretpostaviti* $y_P(t) = A\exp(3t)$. *No, pokušaj uvrštavanja* y_P *u polaznu jednadžbu neće omogućiti određivanje* A *jer je* $A\exp(3t)$ *prva komponenta rješenja pripadne homogene jednadžbe. Isto tako pretpostavka* $y_P(t) = At\exp(3t)$ *neće uroditi plodom (u ovom slučaju radi se o drugoj komponenti u* y_H*). Najmanja potencija od* t *s kojom možemo pomnožiti* $A\exp(3t)$ *bez da dobijemo komponentu u* y_H *je* t^2, *dakle korektna pretpostavka je* $y_P(t) = At^2\exp(3t)$. *Deriviramo ga dvaput:* $y_P'(t) = At(3t+2)\exp(3t)$, $yP''(t) = A(9t^2 + 12t + 2)\exp(3t)$. *Uvrstimo u polaznu jednadžbu:*

$$A(9t^2 + 12t + 2)\exp(3t) - 6At(3t+2)\exp(3t) + 9At^2\exp(3t) = \exp(3t).$$

Podijelimo s $\exp(3t)$ *(koji nikad nije* 0*) i sredimo te ostaje* $2A = 1$, *tj.* $A = 1/2$, *dakle je opće rješenje zadane jednadžbe*

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1\exp(3t) + C_2 t\exp(3t) + \frac{1}{2}t^2\exp(3t).$$

Metoda neodređenih koeficijenata može se koristiti i ako je $f(t)$ zbroj više članova opisanog oblika: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots$, gdje je sva. Tada se tom metodom odredi po jedan $y_{P,i}$ za svaki f_i, a ukupni y_P je zbroj dobivenih $y_{P,i}$-ova.

Primjer 332. *Za jednadžbu*

$$y'' - 4y' - 12y = 8e^{6t} + 216t^2$$

pripadno homogeno rješenje je

$$y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t}.$$

Sad tražimo partikularno rješenje koje odgovara članu $f_1(t) = 8e^{6t}$, *tj. ponašamo se kao da rješavamo jednadžbu* $y'' - 4y' - 12y = 8e^{6t}$. *Pretpostavka* $y_{P,1} = Ae^{6t}$ *neće pomoći (*e^{6t} *je komponenta od* y_H*) pa pretpostavljamo* $y_{P,1} = Ate^{6t}$ *i dobijemo* $A = 1$: $y_{P,1} = te^{6t}$.

Naposlijetku tražimo partikularno rješenje koje odgovara članu $f_2(t) = 216t^2$, *tj. ponašamo se kao da rješavamo jednadžbu* $y'' - 4y' - 12y = 216t^2$. *Nehomogeni član je sad kvadratni polinom, dakle pretpostavljamo* $y_{P,2} = At^2 + Bt + C$ *i dobijemo* $y_{P,2} = -18t^2 + 12t - 7$.

Stoga je rješenje polazne jednadžbe

$$y = y_H(t) + y_{P,1}(t) + y_{P,2}(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{6t} + te^{6t} - 18t^2 + 12t - 7.$$

Drugačija metoda za određivanje partikularnog rješenja je generalizacija ranije opisane metode varijacije konstante za linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda. Kao i tamo, ovdje se partikularno rješenje određuje indirektno, tako da se modificira y_H pretpostavljajući da njegove konstante zapravo nisu konstante. Dok je gore opisana metoda neodređenih koeficijenata bez modifikacija primjenjiva i za linearne diferencijalne jednadžbe reda većeg od 2, metodu varijacije konstante ovdje ćemo opisati samo za slučaj reda 2. Ipak, napominjemo da je metoda varijacije konstante generalnija te je primjenjiva i za slučajeve kad nehomogeni član nije zbroj članova koji su umnošci polinoma, eksponencijalne funkcije i linearne kombinacije sinusa i kosinusa istog temeljnog perioda. Pretpostavimo dakle da smo dobili rješenje $y_H(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$ jednadžbi $y'' + a_1y' + a_0y = f(t)$ pripadne homogene jednadžbe. Sad za konstante C_1 i C_2 pretpostavimo da ovise o t: $y(t) = C_1(t)y_1(t)+C_2(t)y_2(t)$. Uvrstimo to u jednadžbu $y''+a_1y'+a_0y = f(t)$, što će rezultirati dugim izrazom na lijevoj strani. No, nama nije cilj odrediti sve funkcije C_1 i C_2 za koje je $y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$ rješenje, nego nam je dovoljno naći jedan par takvih C_1 i C_2. Stoga uvodimo uvjet

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0,$$

kojim se rezultat uvrštavanja $y(t) = C_1(t)y_1(t)+C_2(y)y_2(t)$ u $y''+a_1y'+a_0y = f$ skraćuje na

$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = f(t).$$

Dakle, dobili smo 2×2-sustav za C_1' i C_2' iz kog možemo odrediti C_1' i C_2', pa onda integriranjem i C_1 i C_2. Ovo je primjer sustava koji je doduše moguće rješavati i supstitucijom ili eliminacijom, ali je zgodnije iskoristiti Cramerovo pravilo. Determinanta matrice koeficijenata tog sustava je točno Wronskijan našeg fundamentalnog skupa rješenja pripadne homogene jednadžbe:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2).$$

Po Cramerovom pravilu dobivamo da je

$$C_1'(t) = \frac{-f(t)y_2(t)}{W(y_1, y_2)},$$

$$C_2'(t) = \frac{f(t)y_1(t)}{W(y_1, y_2)}.$$

Iz toga direktnim integriranjem dobivamo $C_1(t)$ i $C_2(t)$.

Primjer 333. *Zadana je jednadžba*

$$y'' + y = \operatorname{tg} t.$$

Za nju nije primjenjiva metoda neodređenih koeficijenata. Karakteristična jednadžba je $\lambda^2 + 1 = 0$ *te je* $y_H(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$*, dakle pretpostavljamo* $y(t) = C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t$*. Postavljamo sustav*

$$C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t = 0,$$

$$C_1'(t) \cos t - C_2'(t) \sin t = \operatorname{tg} t.$$

Po Cramerovom pravilu imamo redom

$$D = W(y_1, y_2) = -\sin^2(t) - \cos^2(t) = -1,$$

$$C_1'(t) = \sin t,$$

$$C_2'(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos t},$$

pa je

$$C_1(t) = \int \sin t \,\mathrm{d}t = -\cos t + c_1,$$

$$C_2(t) = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \,\mathrm{d}t = \sin t - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c_2$$

i naposlijetku

$$y(t) = (-\cos t + c_1) \sin t + \left(\sin t - \ln \left| \operatorname{tg} (\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}) \right| + c_2 \right) \cos t.$$

Ponovimo bitno... Linearne diferencijalne jednadžbe su one obične diferencijalne jednadžbe koje se mogu svesti na oblik u kojem je linearna kombinacija nepoznate funkcije i njenih derivacija izjednačena s nekom funkcijom nezavisne varijable. Ako je ta funkcija nulfunkcija, govorimo o homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi, a inače zamjenom te funkcije s nulfunkcijom dobivamo pripadnu homogenu jednadžbu. Skup svih rješenja homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda n je n-dimenzionalni vektorski prostor. Njegovu bazu $\{y_1, \ldots, y_n\}$ nazivamo fundamentalnim skupom rješenja.

Koeficijenti linearne kombinacije nepoznate funkcije i njenih derivacija mogu ovisiti o nezavisnoj varijabli, a ako ne ovise, govorimo o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima. Za homogene linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima fundamentalni skup rješenja odredjujemo preko karakteristične jednadžbe, tj. polinomijalne jednadžbe stupnja n (istog kao red diferencijalne jednadžbe koju rješavamo) s nepoznanicom λ, a koja proizlazi iz uvrštavanja test-rješenja $\exp(\lambda t)$ u polaznu jednadžbu. Svako realno rješenje λ kratnosti k karakteristične jednadžbe doprinosti fundamentalnom rješenju s funkcijama $\exp(\lambda t)$, $t\exp(\lambda t)$, $\ldots$, $t^{k-1}\exp(\lambda t)$. Svaki (jednostruki) par konjugirano kompleksnih rješenja $\alpha \pm \beta i$ karakteristične jednadžbe doprinosi fundamentalnom rješenju s funkcijama $\exp(\alpha t)\cos(\beta t)$ i $\exp(\alpha t)\sin(\beta t)$.

Opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe je zbroj općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe i jednog partikularnog rješenja (dobivenog metodom neodređenih koeficijenata ili metodom varijacije konstanti).

Harmonijski oscilator je fizikalni sustav koji se sastoji od tijela koje oscilira oko ravnotežnog položaja pod utjecajem sile koja je po iznosu proporcionalna odmaku iz ravnotežnog položaja. Jednodimenzionalni harmonijski oscilator je i u klasičnoj i u kvantnoj fizici opisan homogenom linearnom diferencijalnom jednadžbom 2. reda, s tim da je ona u klasičom slučaju s konstantnim koeficijentima, a u kvantnom ima nekonstantne koeficijente.

9.3 Sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi

Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi sastoje se od više običnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju vezu između više nepoznatih funkcija $y, z, \ldots$ iste nezavisne varijable t i njihovih derivacija.

Primjer 334. *Takozvani SIR-model širenja zarazne bolesti unutar neke populacije polazi od pretpostavke da se populacija može podijeliti u tri kategorije: S (*susceptible *– oni koji mogu biti zaraženi), I (*infected *– zaraženi) i R (*removed *– oni koji su imuni jer su prebolili zarazu). Pritom se radi o brojnostima ta tri dijela populacije, te su S, I i R funkcije vremena t.*

Zatim se uvode pretpostavke o brzinama promjene brojnosti u te tri populacije. U najjednostavnijem modelu uzima se da, budući da inficiranje ovisi o kontaktu između S i I, brzina promjene S razmjerna s I i S (i to s negativnom konstantom proporcionalnosti):

$$\dot{S} = -\beta I S.$$

Za brzinu oporavka (brzina kojom se povećava R) uzima se da je razmjerna s trenutnim brojem I:

$$\dot{R} = \nu I.$$

Nadalje, razumno je pretpostaviti da je $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = 0$ (zašto?), dakle je

$$\dot{I} = \beta IS - \nu I.$$

Vidimo da se radi o sustavu tri obične diferencijalne jednadžbe za tri nepoznate funkcije vremena.

Neki sustavi diferencijalnih jednadžbi mogu se riješiti supstitucijom.

Primjer 335. *Harmonijski oscilator mogli smo opisati i kao sustav diferencijalnih jednadžbi za poziciju i brzinu:*

$$x'(t) = v(t),$$

$$mv'(t) = -kx(t).$$

Supstitucijom prve u drugu jednadžbu dobivamo jednu diferencijalnu jednadžbu za poziciju ($mx'' + kx = 0$).

U kemijskoj kinetici sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi modeliraju kemijske procese, razmatrajući ih kao slijedova više tzv. elementarnih procesa. Ukupna kemijska promjena tu se gleda kao rezultat osnovnih koraka na molekulskoj razini (elementarni procesi), za koje je – za razliku od jednadžbi kemijskih reakcija – moguće iz jednadžbe postaviti zakon brzine:

Elementarni proces	Zakon brzine
$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{P}$	$v = k[\mathrm{A}]$
$2\,\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{P}$	$v = k[\mathrm{A}]^2$
$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{P}$	$v = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$
$2\,\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{P}$	$v = k[\mathrm{A}]^2[\mathrm{B}]$
$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{P}$	$v = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}][\mathrm{C}]$

Primjer 336. *Mehanizam usporednih reakcija je mehanizam*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{B} \\ & \nearrow & \\ \mathrm{A} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathrm{C} \end{array}$$

Imamo dakle dva elementarna procesa sa zakonima brzine $v_1 = k_1^{(1)}[\mathrm{A}]$ i $v_2 = k_1^{(2)}[\mathrm{A}]$. Ukupna brzina mehanizma je $v = v_1 + v_2$, dakle se ovaj sustav svodi na jednu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = (k_1^{(1)} + k_1^{(2)})[\mathrm{A}].$$

Primjer 337. *Mehanizam povrativih (reverzibilnih) reakcija je mehanizam oblika* $A \rightleftharpoons B$*, tj. mehanizam koji se sastoji od dva elementarna procesa* $A \longrightarrow B$ *i* $B \longrightarrow A$*. Odgovarajući sustav diferencijalnih jednadžbi je dan s*

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1^{(1)}[\mathrm{A}], \\ v_2 &= k_1^{(-1)}[\mathrm{B}] \end{aligned}.$$

Gledajući ukupnu brzinu dobivamo

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t} = k_1^{(1)}[\mathrm{A}] - k_1^{(-1)}[\mathrm{B}],$$

tj. sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima koji je oblika

$$y'(x) = -z'(x) = ay(x) + bz(x).$$

Ako u početku nije bilo produkta B, tj. $[\mathrm{B}]_0 = 0$*, onda je* $[\mathrm{B}] = [\mathrm{A}]_0 - [\mathrm{A}]$ *pa imamo*

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = (k_1^{(1)} + k_1^{(-1)})[\mathrm{A}] - k_1^{(-1)}[\mathrm{A}]_0.$$

To je linearna jednadžba prvog reda te dobivamo rješenje

$$[\mathrm{A}] = \frac{[\mathrm{A}]_0}{k_1^{(1)} + k_1^{(-1)}} \left(k_1^{(-1)} + k_1^{(1)} \exp(-(k_1^{(1)} + k_1^{(-1)})t) \right)$$

i iz njega

$$[\mathrm{B}] = \frac{k_1^{(1)}[\mathrm{A}]_0}{k_1^{(1)} + k_1^{(-1)}} \left(1 - \exp(-(k_1^{(1)} + k_1^{(-1)})t) \right).$$

Primjer 338. *Mehanizam predravnoteže je mehanizam*

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightleftharpoons \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{D}$$

Radi se o tri elementarna procesa $A + B \longrightarrow C$*,* $C \longrightarrow A + B$ *i* $C \longrightarrow D$*, za koje koeficijente brzina označimo redom s* k_1*,* k_{-1} *i* k_2*. Zakoni brzina su redom*

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1[\mathrm{A}][\mathrm{B}], \\ v_{-1} &= k_{-1}[\mathrm{C}], \\ v_2 &= k_2[\mathrm{C}]. \end{aligned}$$

Ukupna brzina cijelog mehanizma je, kao i uvijek, recipročna vrijednost stehiometrijskog koeficijenta bilo kojeg sudionika pomnožena s derivacijom njegove *koncentracije. Primjerice, ako želimo izraziti brzinu mehanizma preko reaktanta A, brzina je* $-\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t}$*. U prvom od procesa se A troši, u drugom („minus prvom") nastaje, a u zadnjem A ne sudjeluje. Dakle, brzina s obzirom na A je* $v_1 - v_2$*, odnosno*

$$-\frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}][\mathrm{B}] - k_{-1}[\mathrm{C}].$$

Analogno dobivamo i preostale jednadžbe sustava koji modelira ovaj mehanizam:

$$-\frac{\mathrm{d[B]}}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}][\mathrm{B}] - k_{-1}[\mathrm{C}],$$

$$\frac{\mathrm{d[C]}}{\mathrm{d}t} = k_1[\mathrm{A}][\mathrm{B}] - k_{-1}[\mathrm{C}] - k_2[\mathrm{C}],$$

$$\frac{\mathrm{d[D]}}{\mathrm{d}t} = k_2[\mathrm{C}].$$

Taj sustav nije moguće riješiti egzaktno, no često se pojednostavljuje uzimajući tzv. pretpostavku ustaljenog stanja (nakon kratkog početka, [C] je konstantan, tj. derivacija po t mu je 0*). Uz tu pretpostavku dobijemo* $[\mathrm{C}] = \frac{k_1}{k_{-1}+k_2}[\mathrm{A}][\mathrm{B}]$*, što uvršteno u drugu jednadžbu daje*

$$\frac{\mathrm{d[D]}}{\mathrm{d}t} = \frac{k_1 k_2}{k_{-1}+k_2}[\mathrm{A}][\mathrm{B}].$$

Već smo istakli i da je svaka linearna diferencijalna jednadžba reda n s nepoznatom funkcijom y ekvivalentna sustavu n linearnih diferencijalnih jednadžbi reda 1 za $y, y', \ldots, y^{n-1}$. Formalno, sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s nepoznatim funkcijama $y_1, \ldots, y_n$ nezavisne varijable t je sustav

$$Y' = A \cdot Y + B,$$

gdje je

$$Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \; A = \left(a_{ij}(t) \right)_{i,j}.$$

Kažemo da se radi o sustavu s konstantnim koeficijentima ako su sve a_{ij} konstantne, tj. ako je $A \in M_n$, a homogen je ako je $B = 0_{n,1}$ nulmatrica.

Primjer 339. *Sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s konstantnim koeficijentima je primjerice*

$$y' = 2y - z + e^t,$$

$$z' = -y + 3z - t.$$

Deriviranje prve jednadžbe daje

$$y'' = 2y' - z' + e^t.$$

Uvrstimo li tu na desnu stranu z' iz polazne druge jednadžbe i z izražen iz polazne prve dobijemo

$$y'' = 5y' + 6y + t - 2e^t.$$

Odredimo li njeno rješenje y, funkciju z možemo dobiti iz druge diferencijalne jednadžbe polaznog sustava.

Vrijedi:

Teorem 44. *Skup svih rješenja Y homogenog sustava $Y' = AY$ linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda je vektorski prostor, tj. zbroj dva rješenja je rješenje istog sustava i skalar puta rješenje je rješenje istog sustava. Dimenzija tog vektorskog prostora je n.*

Dakle, potrebno je naći n linearno nezavisnih rješenja sustava (bazu prostora), a opće rješenje je njihova linearna kombinacija. Za nehomogene sustave vrijedi kao i ranije za pojedinačne jednadžbe:

Teorem 45. *Opće rješenje nehomogenog sustava $Y' = AY + B$ je zbroj općeg rješenja pripadnog homogenog sustava $Y' = AY$ i jednog partikularnog rješenja.*

Homogen sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s konstantnim koeficijentima može se rješavati pomoću svojstvenih vrijednosti matrice A, dakle preko karakteristične jednadžbe koja je ujedno karakteristična jednadžba homogene linearne diferencijalne jednadžbe reda n s konstatnim koeficijentima koja po već opisanom principu odgovara tom sustavu.

Pretpostavimo da je rješenje sustava $Y' = AY$ oblika

$$(y_1, \ldots, y_n) = e^{\lambda t}(y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}),$$

gdje su $y_{i,0}$ i λ konstante. Tada dobijemo

$$(y_1', \ldots, y_n') = \lambda(y_1, \ldots, y_n)$$

pa iz $Y' = AY$ dobivamo da λ i Y_0 moraju biti takvi da vrijedi

$$AY_0 = \lambda Y_0,$$

odnosno λ mora biti svojstvena vrijednost od A i Y_0 pripadni svojstveni vektor. Za skup od n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $Y_{0,1}, \ldots, Y_{0,n}$ opće rješenje našeg sustava je dano s

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 t} Y_{0,1} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} Y_{0,n}.$$

Primjer 340. *Zadan je sustav*

$$y' = 3y + 2z,$$

$$z' = 4y + z.$$

Pripadna matrica A je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

čije svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 5$ i $\lambda_2 = -1$.

Svojstvene vektore za λ_1 dobivamo rješavanjem sustava $(A - 5I)X = 0$: $(x_1, x_2) = (t, t) = t(1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Odgovarajući svojstveni vektor je stoga npr. $Y_{0,1} = (1, 1)^t$. Slično, svojstvene vektore za λ_2 dobivamo iz sustava $(A + I)X = 0$: $(x_1, x_2) = (t, -2t) = t(1, -2)$, $Y_{0,2} = (1, -2)^t$.

Rješenje polaznog sustava diferencijalnih jednadžbi je

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 t} Y_{0,1} + C_2 e^{\lambda_2 t} Y_{0,2} =$$

$$= C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

odnosno $y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$, $z(t) = C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t}$.

Primjer 341. *Promotrimo mehanizam $A \longrightarrow B \rightleftharpoons C$, uz pretpostavku da su početne koncentracije od B i C 0. Traži se vremenska ovisnost produkta C.*

Odgovarajući sustav DJ je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t} &= -k_1[\mathrm{A}], \\ \frac{\mathrm{d[B]}}{\mathrm{d}t} &= k_1[\mathrm{A}] - k_2[\mathrm{B}] + k_{-2}[\mathrm{C}], \ . \\ \frac{\mathrm{d[C]}}{\mathrm{d}t} &= k_2[\mathrm{B}] - k_{-2}[\mathrm{C}] \end{aligned}$$

Odgovarajuća matrica je

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & k_2 & -k_{-2} \end{pmatrix}.$$

čiji karakteristični polinom je

$$(-k_1 - \lambda)((-k_2 - \lambda)(-k_{-2} - \lambda) - k_2 k_{-2}) = -\lambda(\lambda + k_1)((\lambda + k_2 + k_{-2}).$$

Svojstvene vrijednosti od A su 0, $-k_1$ i $-k_2 - k_{-2}$.

Nađimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost 0*:*

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & k_2 & -k_{-2} \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_{-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. $(x_1, x_2, x_3) = (0, k_{-2}t, k_2 t) = t(0, k_{-2}, k_2)$*. Dakle, pripadni svojstveni vektor je* $Y_{0,1} = (0, k_{-2}, k_2)^t$*, analogno dobijemo* $Y_{0,2} = (k_1 - k_2 - k_{-2}, -k_1 + k_{-2}, k_2)^t$ *i* $Y_{0,3} = (0, 1, -1)^t$*.*

Ukupno rješenje sustava je stoga

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} \\ \mathsf{B} \\ \mathsf{C} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ k_{-2} \\ k_2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-k_1 t} \begin{pmatrix} k_1 - k_2 - k_{-2} \\ -k_1 + k_{-2} \\ k_2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-(k_2 + k_{-2})t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Iz početnih uvjeta dobivamo:

$$C_1 = \frac{[\mathrm{A}]_0}{k_2 + k_{-2}}, C_2 = \frac{[\mathrm{A}]_0}{k_1 - k_2 - k_{-2}}, C_3 = \frac{[\mathrm{A}]_0 k_1 k_2}{(k_1 - k_2 - k_{-2})(k_2 + k_{-2})}.$$

$$[\mathrm{A}]_0 = C_2(k_1 - k_2 - k_{-2}) \Rightarrow C_2 = \frac{[\mathrm{A}]_0}{k_1 - k_2 - k_{-2}},$$

$$[\mathrm{B}]_0 = C_1 k_{-2} + C_2(k_{-2} - k_1) + C_3, [\mathrm{C}]_0 = C_1 k_2 + C_2 k_2 - C_3 \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{[\mathrm{A}]_0}{k_2 + k_{-2}}, C_3 = \frac{[\mathrm{A}]_0 k_1 k_2}{(k_1 - k_2 - k_{-2})(k_2 + k_{-2})} \Rightarrow$$

$$[\mathrm{C}] = [\mathrm{A}]_0 k_2 \left(\frac{1}{k_2 + k_{-2}} + \frac{1}{k_1 - k_2 - k_{-2}} e^{-k_1 t} - \right.$$

$$\left. - \frac{k_1}{(k_1 - k_2 - k_{-2})(k_2 + k_{-2})} e^{-(k_2 + k_{-2})t} \right).$$

Ponovimo bitno... Svaka linearna diferencijalna jednadžba reda n s nepoznatom funkcijom y nezavisne varijable t je ekvivalentna sustavu linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s nepoznatim funkcijama y, y', $\ldots$, y^{n-1} i obrnuto, svaki sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda s nepoznatim funkcijama y_1, $\ldots$, y_n iste varijable t ekvivalenatn je jednoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi reda n s nepoznatom funkcijom t. Stoga isti teoremi o skupovima rješenja vrijede za sustave linearnih diferencijalnih jednadžbi kao i za linearne diferencijalne jednadžbe. Ako je sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda zapisan u matričnom obliku $Y' = AY + B$, ukoliko je $B = 0$ kažemo da je homogen, a ako je A konstantna matrica govorimo o sustavu s konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednadžba matrice A je točno karakteristična jednadžba odgovarajuće linearne diferencijalne jednadžbe reda n.

Poglavlje 10

Funkcije više varijabli

10.1 Skalarne funkcije više varijabli

Svaki kemičar zasigurno zna jednadžbu stanja idealnog plina:

$$pV = nRT.$$

Dosad smo ju mogli promatrati samo tako da smo po dvije veličine uzeli kao nezavisnu i zavisnu varijablu, a ostale uzeli kao konstantne (npr. gledali smo tlak p kao funkciju volumena V pri konstantnoj temperaturi T i množini n). No, u stvarnosti u toj jednadžbi imamo četiri varijable p, V, n i T (koje su skalarne veličine, dakle se uz fiksirani odabir jedinica mogu poistovjetiti s realnim brojevima), a iz jednadžbe bilo koju od njih možemo izraziti preko ostalih, tj. bilo koja od njih je zavisna varijabla jednoznačno određena iznosima preostalih triju nezavisnih varijabli. Možemo primjerice kao zavisnu varijablu uzeti tlak p pa formula poprima oblik

$$p = p(V, T, n) = \frac{nRT}{V}. \tag{10.1}$$

Matematički ekvivalent te formule je

$$f(x, y, z) = \frac{8{,}3145yz}{x}, \tag{10.2}$$

gdje je $x = V/\mathrm{m}^3$, $y = T/\mathrm{K}$, $z = n/\mathrm{mol}$ (i $f(x, y, z) = p/\mathrm{Pa}$). Takve funkcije nazivamo realnim ili skaralnim funkcijama više varijabli.

Definicija 78 (Skalarne funkcije više varijabli)**.** *Skalarna (ili realna) funkcija od n varijabli je funkcija koja uređenim n-torkama*[1] *brojeva pridružuje realne*

[1] Podsjetimo se: Uređena n-torka brojeva je skup od n brojeva kojima smo definirali redoslijed.

brojeve, tj. funkcija čija domena je podskup od $\mathbb{R}^n$, a kodomena je podskup od $\mathbb{R}$.

S obzirom na to da se u ovom poglavlju nećemo baviti pitanjima surjektivnosti, za skalarne funkcije ćemo u pravilu kao kodomenu uzimati jednostavno $\mathbb{R}$.

Napomena 37. *Kad god se u ovom poglavlju pozivamo na koordinanti sustav, podrazumijevamo da se radi o Kartezijevom koordinantom sustavu.*

Kao i prije (poglavlje **??**), prirodna domena matematičkog ekvivalenta pravila može biti veća od stvarne domene. Naime, dok u formulu 10.2 možemo uvrstiti sve brojeve x, y i z osim $x = 0$, pa je prirodna domena od f skup $\mathbb{R}^3$ bez (y, z)-ravnine ($\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0\}$), domena koja nama treba je zapravo $\langle 0, \infty\rangle^3$ jer ne želimo uvrštavati 0 ni negativne brojeve i za koju od promatranih veličina.

Primjer 342. *Skalarna funkcija 4 varijable zadana pravilom $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2x_3 - \exp(x_4)$ za prirodnu domenu ima cijeli $\mathbb{R}^4$.*

Skalarna funkcija 2 varijable zadana pravilom $g(x, y) = \frac{\pi}{x^2+y^2}$ za prirodnu domenu ima skup $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tj. definirana je na cijeloj (x, y)-ravnini osim u ishodištu.

Skalarna funkcija 3 varijable zadana pravilom $h(x, y) = \frac{1}{xyz}$ za prirodnu domenu ima skup $\mathbb{R}^3$ bez koordinatnih ravnina.

Primjer 343. *Formulom $f(x, y) = 2x - 5y^2 \ln x$ zadana je skalarna funkcija s 2 varijable. Njena prirodna domena je skup svih uređenih parova brojeva (x, y) za koje je $x > 0$.*

Njena vrijednost za $x = e$ i $y = 1$ iznosi $f(e, 1) = 2e - 5 \ln e = 2e - 5$, a za $x = 1$ i $y = e$ iznosi $f(1, e) = 2 - 5e^2 \ln 1 = 2$.

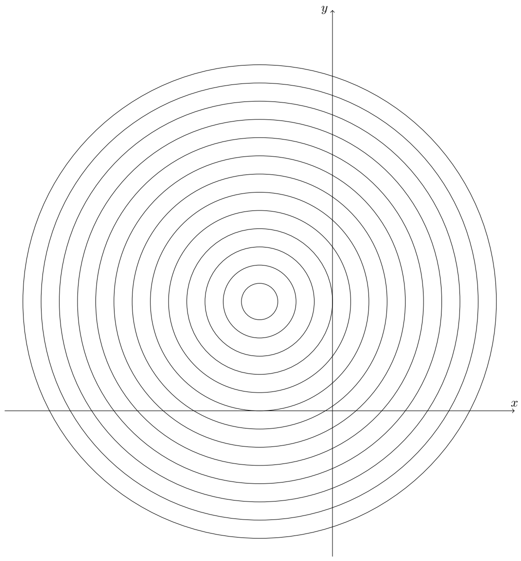
Podsjetimo se kako glasi jednadžba kružnice polumjera 5 sa središtem $(-2, 3)$ u ravnini:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Vidimo da se radi o jednadžbi u kojoj je jedna skalarna funkcija dviju varijabli izjednadčena s konkretnom vrijednosšću zavisne varijable:

$$f(x, y) = C$$

uz $f(x, y) = (x + 2)^2 + (y - 3)^2$ i $C = 25$. Ako bismo varirali vrijednost C, ali zadržali funkciju f, dobili bismo (sve dok je $C > 0$) kružnice različitih polumjera, ali sve s istim središtem $(-2, 3)$ (slika 10.1). Za $C = 0$ dobili bismo samo točku, a za $C < 0$ ništa – naša funkcija f ne može postići negativne vrijednosti. Ovakvi prikazi skalarnih funkcija dviju varijabli kao niza krivulja u ravnini nazivaju se nivo-krivulje (ili implicitno zadane krivulje) u ravnini.



Slika 10.1: Nivo-krivulje funkcije $f(x,y)=(x+2)^2+(y-3)^2$

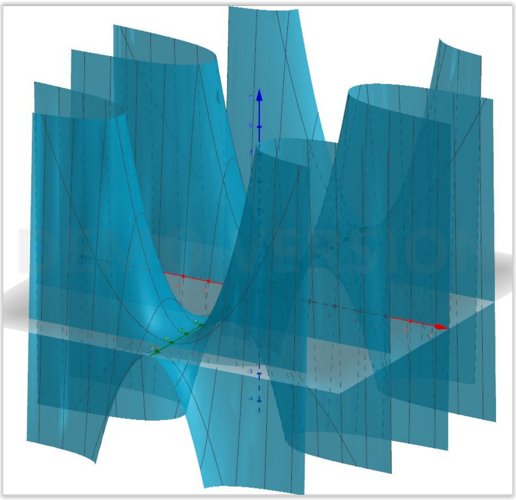
Definicija 79 (Nivo-krivulja (implicitno zadana krivulja) u ravnini)**.** *Neka je f skalarna funkcija dviju varijabli x i y. Sve krivulje u koordinantoj ravnini s jednadžbom oblika $f(x,y)=C$ nazivaju se nivo-krivuljama funkcije f (odnosno, to su funkcijom f implicitno zadane krivulje).*

Napomena 38. *Kako smo već rekli u odjeljku 3.9, jednadžbom $f(x,y)=C$ je implicitno zadana funkcija jedne varijable y. To znači da se za svaku točku (x_0,y_0) na toj krivulji (nivo-liniji od f), osim ako je u toj točki tangenta na krivulju paralelna s y-osi, dio te krivulje oko te točke moži shvatiti kao graf funkcije g jedne varijable x (čija je domena neki interval oko x_0).*

Zadatak 87. *Kako izgleda nulta nivo-krivulja funkcije zadane s $f(x,y)=x^4-x^2+y^2$? Je li ta krivulja graf neke funkcije jedne varijable? Oko kojih se točaka može njen dio shvatiti kao graf funkcije jedne varijable?*

Primjer 344. *Ako je z nadmorska visina točke s geografskim koordinatama (x,y), z je skalarna funkcija od (x,y) i odgovarajuće nivo-krivulje su izohipse.*

Nivo-krivulje naravno nisu grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli. Podsjetimo se: Graf funkcije f je skup svih uređenih parova oblika $(X,f(X))$, gdje je X element domene od f. Dakle, ako funkcija ima n varijabli, graf funkcije se sastoji od uređenih $(n+1)$-torki brojeva oblika $(x_1,x_2,\ldots,x_n,f(x_1,x_2,\ldots,x_n))$, pri čemu su $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ u domeni od f.

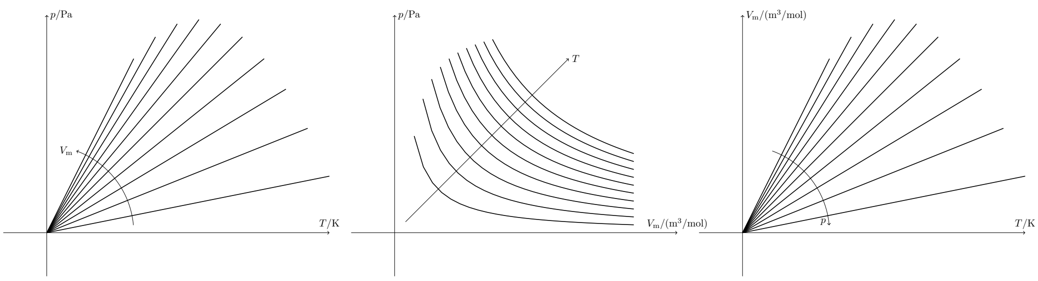


Slika 10.2: Graf funkcije zadane s $f(x, y) = x^2 \sin y$ (slika izrađena programom Geogebra)

Za realne funkcije jedne varijable graf se sastojao od uređenih parova brojeva pa se mogao prikazivati u koordinatnoj ravnini. Graf skalarne funkcije dviju varijable se sastoji od uređenih trojki brojeva u kojima su prva dva člana koordinate elementa domene, a treći je tom elementu pridružena vrijednost funkcije. Stoga se graf skalarne funkcije dviju varijabli može prikazati samo u prostornom koordinatnom sustavu u kojemu u (x, y)-ravnini nanosimo elemente domene, a na aplikatu pridružene rezultate. Dakle, domena skalarne funkcije dviju varijabli se vizualizira kao podskup (x, y)-ravnine. Ukoliko domena skalarne funkcije dviju varijabli ima površinu veću od nule, graf će biti ploha u prostoru (slika 10.2; preciznu definiciju ploha dat ćemo u odjeljku 10.1.2).

Kako vidimo, iako grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli atraktivno izgledaju, teško ih je nacrtati, a i ako su nacrtani, iz njih je bitno teže iščitati informacije o funkciji nego što je to bilo u slučaju realnih funkcija jedne varijable. Nadalje, ako skalarna funkcija ima više od dvije varijable, točke njezina grafa imaju više od 3 koordinate pa se graf ne može crtati jer se nalazi u prostoru dimenzije veće od 3. Znači li to da za skalarne funkcije više varijabli moramo odustati od grafičkih prikaza? Odgovor je ne. Grafove ćemo doduše koristiti samo za funkcije dviju varijabli i oni će nam biti dovoljni da uočimo neke specifičnosti vezane za funkcije više varijabli, no umjesto grafova često se koriste analogoni izotermi i izohora.

Primjer 345. *Pogledajmo tlak p idealnog plina u ovisnosti o molarnom vo-*



Slika 10.3: Izohore, izoterme i izobare idealnog plina (strelicama su označeni smjerovi porasta fiksiranih varijabli)

lumenu $V_\mathrm{m} = \frac{V}{n}$ *i temperaturi* T*. On je sad skalarna funkcija dviju varijabli koju možemo opisati pomoću dva tipa funkcija jedne varijable:*

- $p_{V_\mathrm{m}}(T) = \frac{R}{V_\mathrm{m}} \cdot T$*, koja za svaku odabranu (fiksiranu) vrijednost* V_m *ovisi samo o* T*. Grafovi tih funkcija* p_{V_m} *nazivaju se izohore (slika 10.3 lijevo);*

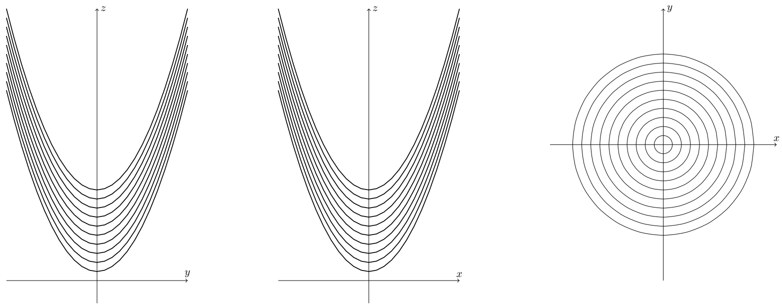
- $p_T(V_\mathrm{m}) = RT \cdot \frac{1}{V_\mathrm{m}}$*, koja za svaku odabranu (fiksiranu) vrijednost* T *ovisi samo o* V_m*. Grafovi tih funkcija* p_T *nazivaju se izoterme (slika 10.3 sredina).*

Primijetimo da su za ovu funkciju p *njezine nivo-krivulje izobare (slika 10.3 desno).*

Kao u prethodnom primjeru možemo dakle umjesto grafa skalarne funkcije f koja ima n varijabli $x_1, \ldots, x_n$ crtati n serija grafova funkcija po jedne varijable x_i koju dobijemo tako da u formuli funkcije f sve varijable osim x_i smatramo konstantnim (ali crtamo grafove za nekoliko odabira iznosa tih „konstanti"). Za slučaj funkcije dviju varijabli x i y odgovarajuće prikaze ćemo, u analogiji za izohore i izoterme, nazivati izo-x-icama i izo-y-icama (a nivo-krivulje su u tom slučaju izo-z-ice). Uočimo da su u tom slučaju izo-x-ice pogledi duž x-osi na presjeke grafa funkcije s ravninama paralelnim (y, z)-ravnini, izo-y-ice su pogledi duž y-osi na presjeke grafa funkcije s ravninama paralelnim (x, z)-ravnini, a izo-z-ice su pogledi duž z-osi na presjeke grafa funkcije s ravninama paralelnim (x, y)-ravnini.

Posebno su ilustrativni i za nastavak gradiva korisni grafovi i izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za sljedeće četiri skalarne funkcije dviju varijabli:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.



Slika 10.4: Izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. $g(x, y) = x^2$.

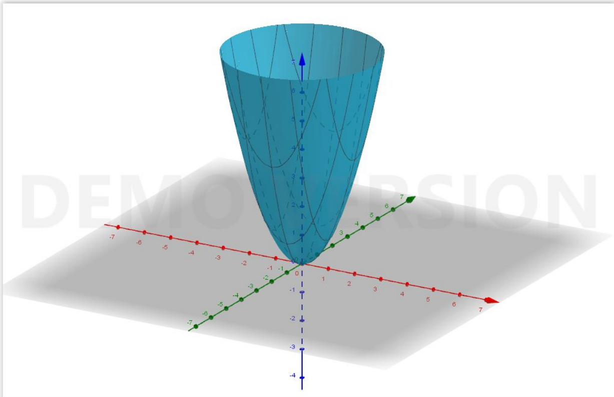
3. $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

4. $i(x, y) = x^2 - y^2$.

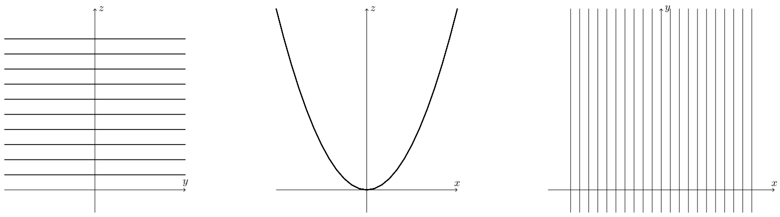
Za funkciju f, izo-x-ice su grafovi funkcija $f_x(y) = x^2 + y^2$, koje su kao funkcije od y tipa nenegativna konstanta plus y^2, dakle su to parabola $z = y^2$ i njene prema gore translatirane pozicije u (y, z)-koordinatnom sustavu. Zbog simetričnosti funkcije f s obzirom na zamjenu x i y, zaključujemo da su izo-y-ice parabola $z = x^2$ i njene prema gore translatirane pozicije u (x, z)-koordinatnom sustavu. Izo-z-ice, tj. nivo-krivulje, imaju jednadžbe $x^2 + y^2 = C$, dakle se radi o kružnicama sa središtem u ishodištu (x, y)-koordinatnog sustava. Dakle, iz smjerova x-osi i y-osi presjeci grafa s ravninama paralelnim (y, z)-ravnini odnosno (x, z)-ravnini izgledaju kao parabole, a odozgor horizontalni presjeci izgledaju kao kružnice (slika 10.4). Zaključujemo da je graf funkcije f rotacioni paraboloid kojemu je os pozitivni dio z-osi (slika 10.5).

Za funkciju g, izo-x-ice su grafovi funkcija $g_x(y) = x^2$, tj. konstantnih pozitivnih funkcija, dakle su to horizontalni pravci u gornjoj poluravnini (y, z)-koordinatnog sustava. Izo-y-ice su pak $g_y(x) = x^2$, dakle su sve jedna te ista parabola $z = x^2$ u (x, z)-koordinatnom sustavu. Izo-z-ice, tj. nivo-krivulje, imaju jednadžbe $x^2 = C$, što je ekvivalentno s $|x|$ =konstanta, dakle su to parovi vertikalnih pravaca simetričnih s obzirom na y-osu u (x, y)-koordinatnog sustava (slika 10.6). Zaključujemo da je graf funkcije g parabolični otvoreni cilindar koji „leži na” y-osi (slika 10.7).

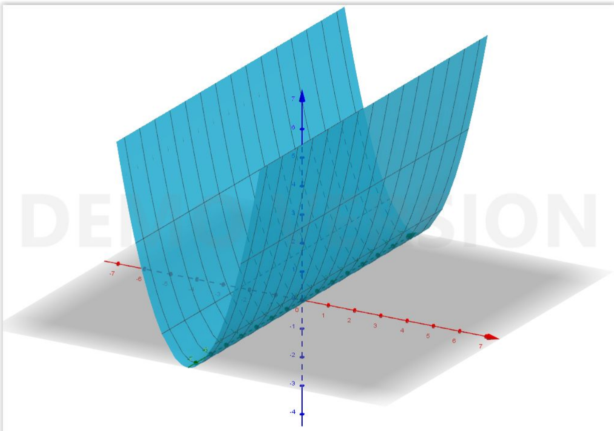
Budući da je $h(x, y) = 1 - f(x, y)$, lako je zaključiti da su izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za funkciju h dane slikom 10.8, a da je graf funkcije h prikazan slikom 10.9.



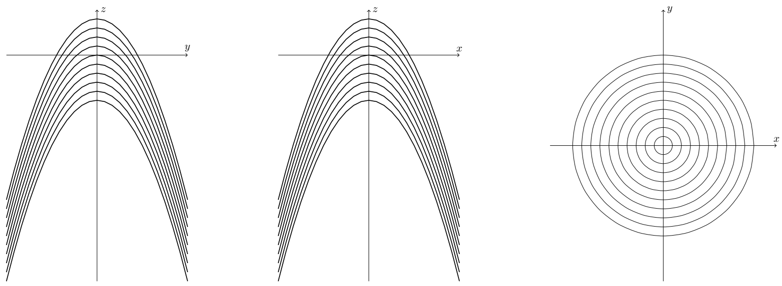
Slika 10.5: Graf funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ (slika izrađena programom Geogebra)



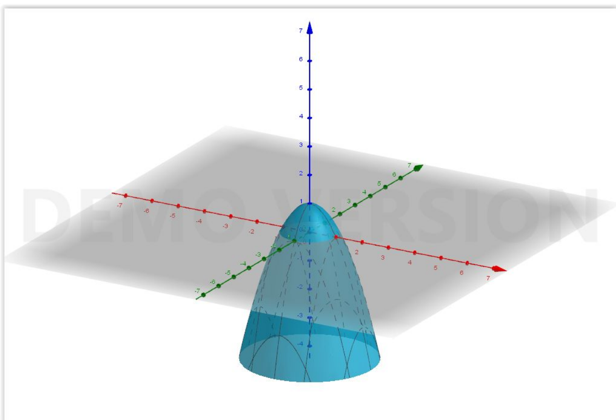
Slika 10.6: Izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za $g(x, y) = x^2$



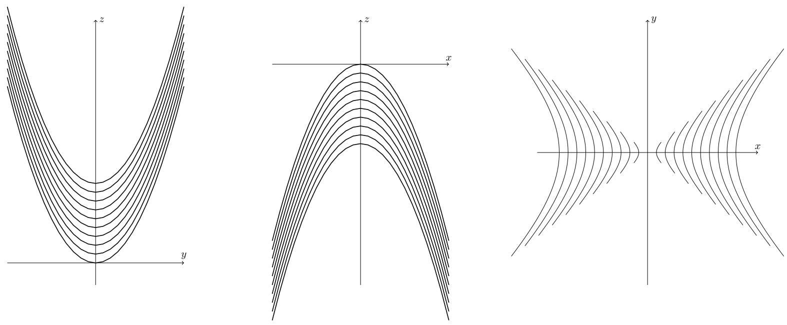
Slika 10.7: Graf funkcije $g(x, y) = x^2$ (slika izrađena programom Geogebra)



Slika 10.8: Izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$



Slika 10.9: Graf funkcije $h(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ (slika izrađena programom Geogebra)



Slika 10.10: Izo-x-ice, izo-y-ice i izo-z-ice za $i(x, y) = x^2 - y^2$

Najzanimljivije osobine ima funkcija i. Njezine izo-x-ice izgledaju kao izo-x-ice funkcije f, a izo-y-ice izgledaju kao izo-y-ice funkcije h (spuštene za 1). Izo-z-ice imaju jednažbe $x^2 - y^2 = C$ te se radi o istostranim hiperbolama u (x, y)-ravnini (slika 10.10). Dakle, ishodište je na grafu ove funkcije (slika 10.11) i ta točka iz smjera x-osi izgleda kao točka maksimuma, a iz smjera y-osi kao točka minimuma. Takve situacije su jedan od razloga zašto je teorija funkcija više varijabli drugačija i ponešto kompliciranija nego za funkcije jedne varijable.

10.1.1 Parcijalne derivacije

Podsjetimo se definicije derivacije funkcije f jedne varijable u točki c:

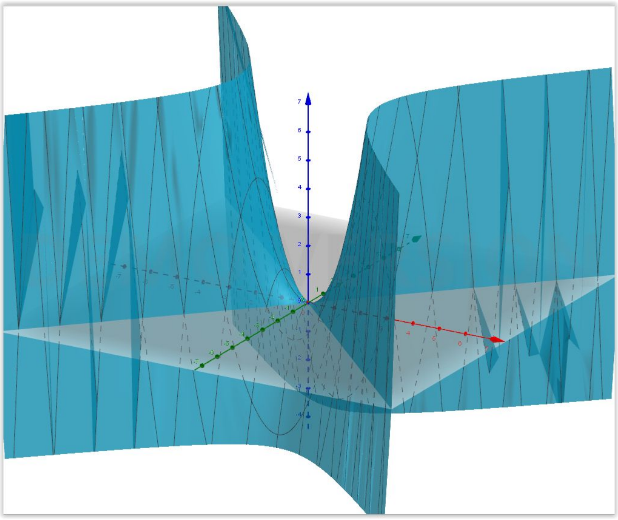
$$f'(c) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Smisao derivacije bio je aproksimacija relativne promjene vrijednosti funkcije pri maloj promjeni varijable. U slučaju skalarnih funkcija više varijabli koriste se parcijalne derivacije. Parcijalne derivacije aproksimiraju relativnu promjenu vrijednosti funkcije pri maloj promjeni *samo jedne* od varijabli, dok se druge drže konstantnim. Preciznije:

Definicija 80 (Parcijalne derivacije prvog reda)**.** *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ skalarna funkcija s n varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Parcijalna derivacija (prvog reda) od f po varijabli x_i u točki $X \in \Omega$ je, ako postoji, limes*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X + e_i \Delta x) - f(X)}{\Delta x}.$$

U definiciji je s e_i označen i-ti vektor kanonske baze (e_i ima sve koordinate 0, osim i-te koja je 1), a zbrajanje točaka je zbrajanje u vektorskom prostoru



Slika 10.11: Graf funkcije $i(x, y) = x^2 - y^2$ (slika izrađena programom Geogebra)

$\mathbb{R}^n$. Primjerice, za parcijalnu derivaciju po varijabli x_2 varijabla $X + e_2\Delta x$ ima koordinate koje se iz koordinata od X dobiju tako da na drugo mjesto dodamo Δx, a ostale koordinate ne mijenjamo. Općenito, $X + e_i\Delta x$ je točka koja ima sve koordinate iste kao X osim i-te koja je povećana za Δx. Kako stoga limes iz gornje definicije opisuje graničnu vrijednost relativne promjene funkcije kad se samo jedna (i-ta) varijabla mijenja, a ostale ne, možemo reći: Parcijalna derivacija funkcije po nekoj varijabli dobije se tako da funkciju deriviramo kao da joj je to jedina varijabla, odnosno za vrijeme deriviranja ostale varijable tretiramo kao konstante.

No, deriviranjem ne možemo izgubiti varijable (odnosno promijeniti domenu) – parcijalne derivacije imat će istu domenu kao i derivirana funkcija.[2] Primjerice, za $f(x, y) = x + e^y$ imamo $\frac{\partial f}{\partial y} = e^y$, no $\frac{\partial f}{\partial y}$ je i dalje funkcija dviju varijabli x i y, a ne samo varijable y.

Radi veće jasnoće, raspišimo prethodnu definiciju za neke posebne slučajeve. U slučaju funkcije f s dvije varijable x i y njene parcijalne derivacije po x i y u točki $X = (x_0, y_0)$ su definirane limesima

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

[2] U ovom poglavlju nećemo razmatrati situacije kad neka funkcija u nekoj točki domene ne posjeduje neku od parcijalnih derivacija, već ćemo se baviti samo s funkcijama koje su parcijalno derivabilne na čitavim domenama.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

U slučaju funkcije f s tri varijable x, y i z njene parcijalne derivacije u točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ su definirane limesima

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(X) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}.$$

Iz prethodnog je vidljivo da funkcija ima onoliko parcijalnih derivacija prvog reda koliko ima varijabli (naravno, ako odgovarajući limesi postoje, no to ćemo u daljnjem podrazumijevati jer za većinu funkcija koje se koriste u primjenama ti limesi postoje). Uobičajeno je umjesto $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ pisati jednostavno $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, no treba biti svjestan da ta oznaka označava funkciju koja točkama $X \in \Omega$ pridružuje brojeve (usporedite: $f'(c)$ je broj, a f' je funkcija).

Primjer 346. *Uzmimo funkciju definiranu formulom*

$$f(x, y, z) = \frac{x + yz^2}{e^x}.$$

Njene parcijalne derivacije prvog reda su:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^{-x} + yz^2e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} - yz^2e^{-x} = \frac{1 - x - yz^2}{e^x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(xe^{-x} + z^2e^{-x}y) = 0 + z^2e^{-x} = \frac{z^2}{e^x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(xe^{-x} + ye^{-x}z^2) = 0 + 2ye^{-x}z = \frac{2yz}{e^x}.$$

Iznos parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial \heartsuit}(\heartsuit_0, \ldots)$ predstavlja aproksimaciju promjene vrijednosti funkcije f ako se varijabla $\heartsuit$ malo promijeni u odnosu na vrijednost $\heartsuit_0$, a ostale varijable ne promijene vrijednost.

Primjer 347. *Uzmimo funkciju definiranu formulom* $f(x, y, z) = \frac{x+yz^2}{e^x}$. *Njene parcijalne derivacije prvog reda su:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1 - x - yz^2}{e^x}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{z^2}{e^x}, \; \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2yz}{e^x}.$$

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = 1$, *zaključujemo da se povećanjem* x *od* 0 *do* Δx, *ako pritom* y *i* z *ostaju* 0, *funkcija* f *poveća za približno* $1 \cdot \Delta x$ *u odnosu na svoju vrijednost* $f(0, 0, 0) = 0$. *Primijetimo:* $f(1, 0, 0) = \frac{1}{e} \neq 1$.

Geometrijska interpretacija parcijalnih derivacija skalarnih funkcija je analogna ranijoj: Parcijalna derivacija od f po x_i u točki X_0 je koeficijent smjera na jedan od grafova koje smo dobili tako da crtamo graf od f kao funkciju samo od x_i za različite konstante vrijednosti ostalih varijabli (vidi str. 373). Na koji od njih i u kojoj točki? Na onaj graf koji odgovara vrijednostima ostalih (od x_i različitih) varijabli kako su dane u X_0 i u točki na tom grafu koja ima apscisu jednako i-toj koordinati od X_0.

Konkretno, za skalarnu funkciju dviju varijabli, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na izo-y-icu koja odgovara vrijednosti $y = y_0$, a u točki s apscisom x_0; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na izo-x-icu koja odgovara vrijednosti $x = x_0$, a u točki s apscisom y_0.

Napomena 39. *$\frac{\partial}{\partial \heartsuit}$ je linearan operator na prostoru funkcija kojima je $\heartsuit$ jedna od varijabli i za koje derivacija po $\heartsuit$ postoji.*

Ponekad, posebice u termodinamičkom kontekstu u kojem se često mijenjanju odabiri zavisne i nezavisnih varijabli, koristi se proširena notacija za parcijalne derivacije:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \heartsuit}\right)_{x,y,\ldots}$$

je oznaka za parcijalnu derivaciju skalarne funkcije (zavisne varijable) Y po njezinoj varijabli $\heartsuit$ dok su njezine ostale varijable $x, y, \ldots$ (i one su pri deriviranju konstantne). Pomoću parcijalnih derivacija definiraju se mnoge termodinamičke veličine.

Primjer 348. *Unutrašnja energija U plina općenito ovisi o temperaturi T, volumenu V, tlaku p i sastavu (množinama sastojaka: $n_1, n_2, \ldots, n_k$). Drugim riječima, U se može shvatiti kao skalarna funkcija s $k+3$ varijable.*

U izohornim okolnostima (konstantan V) radi se o funkciji $k+2$ varijable[3], a njezina parcijalna derivacija po varijabli T naziva se izohornim toplinskim kapacitetom:

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,p,n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

Vidimo da je C_V funkcija nezavisnih varijabli T (po njoj smo derivirali) i V, p, n_1, …, n_k (one su pri deriviranju bile konstantne).

Primjer 349. *Ako je Y neko ekstenzivno svojstvo termodinamičkog sustava,[4]*

[3]Zapravo, njih $k+1$ jer jednadžba stanja izražava p u ovisnosti o ostalim varijablama.

[4]Ekstenzivna su ona svojstva čiji su iznosi razmjerni veličini sustava, primjerice volumen V ili unutrašnja energija U.

pripadni reakcijski gradijent se definira s

$$\Delta_{\mathrm{r}} Y = \frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

gdje je doseg ξ definiran sa

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}n_{\mathrm{J}}} = \frac{1}{\nu_{\mathrm{J}}},$$

a J je bilo koji sastojak sustava.

Posebno često se koristi reakcijski gradijent Gibbsove energije G, zvan reakcijska Gibbsova energija:

$$\Delta_{\mathrm{r}} G = \frac{\partial G}{\partial \xi}.$$

Što se pravila za računanje parcijalnih derivacija tiče, sva su ista (linearnost kao i pravila za deriviranje produkta i kvocijenta funkcija) kao za funkcije jedne varijable, s jednom važnom iznimkom: lančano pravilo (pravilo za deriviranje kompozicije funkcije). Znamo da za funkcije jedne varijable vrijedi

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

i to su mnogi zasigurno doživjeli kao „kraćenje diferencijala" $\mathrm{d}y$. No, u slučaju funkcija više varijabli ne možemo postupati tako. Potpuno lančano pravilo objasnit ćemo u odjeljku 10.3.2, no sad ističemo jednu formulu:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Ta formula vrijedi za svake tri međusobno ovisne varijable x, y i z i naziva se Eulerovo cikličko pravilo. Kad bismo mogli „kratiti" parcijalne diferencijale, na lijevoj strani bismo dobili 1, a ne -1. Dakle, zasad zapamtimo: Parcijalni diferencijalni, odnosno bilo kakvi diferencijali u kontekstu funkcija više varijabli ne mogu se „kratiti". Primijenimo Eulerovo cikličko pravilo na jedan primjer iz termodinamike.

Primjer 350. *U izotermnim odnosno izoentropisjkim okolnostima sljedećim je formulama definirana izotermna odnosno adijabatska kompresibilnost (stlačivost):*

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n},$$

$$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}.$$

Opće definicije izohornog i izobarnog toplinskog kapaciteta su:

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n},$$

$$C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}.$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

Po definiciji toplinskih kapaciteta imamo

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{p,n}}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,n}}.$$

Korištenjem Eulerovog cikličkog pravila u brojniku i u nazivniku dobije se da je prethodni kvocijent dalje jednak

$$\frac{-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{S,n}}{-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{T,n}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{S,n}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,n}}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S,n}} = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}.$$

U zadnjem redu smo za dobivanje prve jednakosti koristili formulu $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$*, koja se može dokazati i za funkcije više varijabli, za dobivanje druge smo lančano pravilo za funkcije jedne varijable u brojniku i nazivniku (jer se u brojniku situacija svela na derivacije za koje se iste varijable drže konstantim, a tako i u nazivnuku), a za dobivanje zadnje smo razlomak proširili faktorom* $-\frac{1}{V}$.

Osim parcijalnih derivacija prvog reda, moguće je promatrati i parcijalne derivacije viših redova. Pritom, budući da je svaka parcijalna derivacija prvog reda skalarne funkcije također skalarna funkcija istih varijabli (njih n), imamo po n parcijalnih derivacija drugog reda koje se računaju iz svake od parcijalnih derivacija prvog reda, dakle ukupno n^2 parcijalnih derivacija drugog reda. Primjerice, ako je polazna funkcija f ovisila o dvije varijable x i y, njene dvije parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ možemo ponovno derivirati po x i po y čime dobivamo četiri parcijalne derivacije drugog reda. To su $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (funkciju f deriviramo po x i zatim njenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}$ ponovno po x), $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (funkciju f deriviramo po x i zatim njenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial x}$ po y), $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (funkciju f deriviramo po y i zatim njenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ po x), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (funkciju f deriviramo po y i zatim njenu parcijalnu derivaciju $\frac{\partial f}{\partial y}$ ponovno po y). Općenito definiramo:

Definicija 81 (Parcijalne derivacije drugog reda). *Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ skalarna funkcija s n varijabli koja posjeduje*[5] *parcijalnu derivaciju prvog reda $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ po varijabli x_i. Parcijalna derivacija drugog reda od f po varijabli x_i pa po x_j u točki $X \in \Omega$ je, ako postoji, limes*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X).$$

Iz definicije je vidljivo i zašto redoslijed deriviranja kod parcijalnih derivacija drugog reda pišemo zdesna ulijevo: oznaka $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ je kratica za $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Time se ističe da je $\frac{\partial}{\partial y}$ (deriviranje po nekoj varijabli y) linearan operator.

Primjer 351. *Odredimo parcijalne derivacije drugog reda za funkciju iz primjera 346. Kako se radi o funkciji tri varijable, dobit ćemo devet parcijalnih derivacija drugog reda:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2 + x + yz^2}{e^x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{z^2}{e^x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{2yz}{e^x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{z^2}{e^x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{2z}{e^x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{2yz}{e^x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{2z}{e^x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2y}{e^x}.$$

U prethodnom primjeru može se primijetiti da vrijedi $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$. To nije slučajno — u većini „normalnih" slučajeva kod određivanja parcijalnih derivacija drugog reda nije potrebno paziti na redoslijed jer vrijedi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Preciznije, vrijedi

Teorem 46 (Schwarz). *Ako u točki $X \in \Omega$ postoje i neprekidne*[6] *su parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, onda su one jednake (u točki X).*

[5]Kad kažemo da funkcija posjeduje parcijalnu derivaciju mislimo: na odgovarajućem dijelu domene, u pravilu na cijeloj domeni, postoji limes iz definicije.

[6]Pojam neprekidnosti nismo definirali za funkcije više varijabli. Kao i u slučaju jedne varijable vrijedi: funkcija je neprekidna ako male promjene njenih varijabli mogu izazvati samo male promjene vrijednosti funkcije. I ovdje vrijedi: funkcije koje su opisane formulom koja je oblika elementarne funkcije su neprekidne na svojoj domeni, neovisno o broju varijabli koje su uvrštene.

Posljedično u većini slučajeva za funkciju od n varijabli nije potrebno računati n^2 već samo $\frac{n(n+1)}{2}$ parcijalnu derivaciju drugog reda (usporedite primjer 351 u kojem vidimo da je od $n^2 = 9$ parcijalnih derivacija drugog reda samo njih $\frac{n(n+1)}{2} = 6$ različito).

Radi preglednog zapisa, a s obzirom na kasnije korištenje za određivanje lokalnih ekstrema skalarnih funkcija, ovdje uvodimo zapis parcijalnih derivacija drugog reda u matricu poznatu kao Hesseova matrica.

Definicija 82 (Hesseova matrica)**.** *Za skalarnu funkciju f od n varijabli koja posjeduje sve parcijalne derivacije drugog reda (u točki X iz svoje domene) njena Hesseova matrica (u toj točki) je matrica $H = H(f)(X)$ koja na poziciji (i, j) ima iznos $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(X)$.*

Zbog Schwarzovog teorema, za funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda (a to su gotovo sve koje se mogu susresti u primjenama) Hesseova matrica je simetrična.

Primjer 352. *Hesseova matrica funkcije iz primjera* **??** *i 351 u svakoj točki (x, y, z) ima oblik*

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2+x+yz^2)}{e^x} & -\frac{z^2}{e^x} & -\frac{2yz}{e^x} \\ -\frac{z^2}{e^x} & 0 & \frac{2z}{e^x} \\ -\frac{2yz}{e^x} & \frac{2z}{e^x} & \frac{2y}{e^x} \end{pmatrix}.$$

Ponovimo bitno... Skalarne funkcije više varijabli su funkcije kojima je domena podskup od $\mathbb{R}^n$, a kodomena podskup od $\mathbb{R}$. Graf skalarne funkcije n varijabli se nalazi u $\mathbb{R}^n$ te se može vizualizirati samo za funkcije dviju varijabli.

Parcijalna derivacija (prvog reda) takve funkcije po nekoj od njezinih varijabli je derivacija te funkcije po toj varijabli ako pri deriviranju ostale varijable smatramo konstantama. Parcijalne derivacije drugog reda su parcijalne derivacije parcijalnih derivacija prvog reda i mogu se uredno ispisati u Hesseovu matricu (retci odgovaraju varijablama po kojima se derivira u drugom koraku, a stupci varijablama po kojima se derivira u prvom koraku). Skalarna funkcija s n varijabli ima n parcijalnih derivacija prvog reda i n^2 parcijalnih derivacija drugog reda, pri čemu za većinu funkcija vrijedi da pri dvostrukom deriviranju nije bitan redoslijed varijabli u deriviranju, tj. za većinu funkcija je Hesseova matrica simetrična.

10.1.2 Gradijent, krivulje u ravnini i plohe u prostoru

Pogledajmo funkciju zadanu formulom

$$f(x,y) = y\ln x.$$

Njezine parcijalne derivacije su

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln x.$$

Dakle, za svaki uređeni par $X = (x,y)$ u domeni od f dobili smo pripadni uređeni par parcijalnih derivacija:

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{y}{x}, \ln x\right).$$

Taj par nazivamo gradijentom od f u točki X:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x\right).$$

Primjerice, gradijent od f u $(1,1)$ je $\nabla f(1,1) = (1,0)$, a $\nabla f(e,e^2) = (e,1)$.

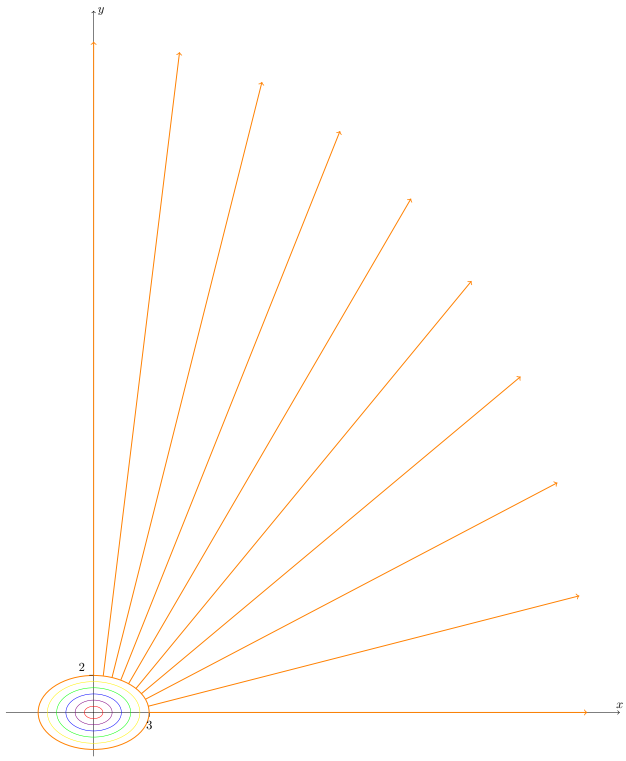
Općenito definiramo:

Definicija 83 (Gradijent)**.** *Gradijent skalarne funkcije f u nekoj točki $X = (x_1,\ldots,x_n)$ njene domene je vektor $\nabla f(X)$ prvih parcijalnih derivacija od f izračunatih u toj točki:*

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \ldots\right).$$

Gradijent je za funkcije dviju i triju varijabli moguće i vizualizirati: Ako X interpretiramo kao točke, njoj pridruženi gradijent se zamišlja kao geometrijski vektor $\nabla f(X)$ s početkom u X.

Primjer 353. *Neke nivo-krivulje funkcije $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$ prikazane su slikom 10.12. Nivo-krivulja koja odgovara vrijednosti $z = 1$ je elipsa jednadžbe $4x^2 + 9y^2 = 1$ (narančasto na slici 10.12), tj. elipsa s poluosima duljina 3 i 2 (i središtem u ishodištu). Za sve točke na njoj je $f(x,y) = 1$. Ako za točke na toj elipsi izračunamo pripadne gradijente $\nabla f(x,y) = (8x, 18y)$ i ucrtamo ih, dobit ćemo vektore kao na slici 10.12. Primjerice, točki $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ (točka na elipsi s polarnim kutom od 60°) pridružen je gradijent $(12, 18\sqrt{3})$.*



Slika 10.12: Nivo-krivulje funkcije $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ i gradijent duž dijela jedne od njih

Primijetimo posebno da je u svim istaknutim točkama prethodnog primjera gradijent u pojedinoj točki bio okomit na tangentu u istoj točki. To nije slučajno.

Ako je krivulja u ravnini zadana jednadžbom $f(x,y) = C$ (dakle, ako je zadana kao nivo-krivulja neke skalarne funkcije dviju varijabli x i y), onda je u svakoj točki $T = (x,y)$ te krivulje $\nabla f(T) \neq (0,0)$ vektor okomit na tangentu u toj točki. Uočimo pritom: Točke na krivulji $f(x,y) = C$ čine podskup domene od f (to su one točke domene za koje f postiže vrijednost C). Budući da je $\nabla f(T) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$, vidimo da je koeficijent smjera tangente u točki T na krivulji $f(x,y) = C$ jednak

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}.$$

To je upravo ono što smo u odjeljku 3.9 dobili tzv. implicitnim deriviranjem. Primijetimo također da je u gornjem primjeru vidljivo, a vrijedi i općenito: U svakoj točki $T = (x,y)$ krivulje zadane s $f(x,y) = C$ orijentacija vektora $\nabla f(T)$ pokazuje smjer najbržeg porasta vrijednosti f, tj. smjer u kojem se nalaze nivo-krivulje sa što brže rastućim C.

Kao što krivulje u ravnini možemo opisati kao nivo-krivulje skalarnih funkcija dviju varijabli (i vidjeli smo pritom da u točkama krivulje gradijent funkcije koja određuje krivulju nije nulvektor), tako se plohe u (trodimenzionalnom) prostoru $\mathbb{R}^3$ opisuju kao nivo-skupovi skalarnih funkcija triju varijabli:

Definicija 84 (Ploha u prostoru)**.** *Za zadanu konstantu C, ploha zadana funkcijom $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je skup*

$$S = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = C\} \subseteq D,$$

uz uvjet da je

$$\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$$

za svaku točku $(x,y,z) \in S$.

Primjer 354. *Znamo da je s $2x - y + 5z = 3$ zadana ravnina u prostoru. Uzmimo $f(x,y,z) = 2x - y + 5z$ i $c = 3$. Tada s „$2x - y + 5z = 3$ je jednadžba ravnine" mislimo reći da toj ravnini pripadaju točno one točke (x,y,z) koje zadovoljavaju jednadžbu $2x - y + 5z = 3$, tj. naša ravnina je skup $S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = 3\}$. Gradijent od f je konstantna vektorska funkcija, $\nabla f = (2,-1,5)$, dakle nigdje (specijalno, niti u točkama iz S) ne postaje nulvektorom. Stoga je ova ravnina ploha. Analogno se vidi da* *je i svaka druga ravnina ploha u prostoru (zato što od koeficijenata A, B i C u općoj jednadžbi ravnine bar jedan nije nula, pa $[A, B, C]$ nikad nije nulvektor).*

Primjer 355. *Promotrimo jednadžbu $x^2+y^2+z^2=1$. Uzmimo $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Tada je $\nabla f = (2x, 2y, 2z) = 2(x,y,z)$. Jedini slučaj kad bi taj vektor bio nulvektor je ako ga računamo u ishodištu $(0,0,0)$: $\nabla F(0,0,0) = (0,0,0)$. Kako ishodište očigledno ne zadovoljava jednadžbu $x^2+y^2+z^2=1$, vidimo da jednadžba predstavlja plohu u prostoru $x^2+y^2+z^2=1$ (jediničnu sferu). Analogno se vidi da je i svaka druga sfera (jednadžbe*

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2)$$

s pozitivnim polumjerom r ploha.

Rekli smo da su grafovi skalarnih funkcija dviju varijabli plohe u prostoru. Provjeri mo sad je li to u skladu s gornjom definicijom. Neka je f skalarne funkcija dviju varijabli x i y. Njen graf je po definiciji skup $\Gamma_f = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$. Definirajmo funkciju $\tilde{f}$ jednadžbom $\tilde{f}(x,y,z) = f(x,y) - z$. Nivo-skup koji odgovara vrijednosti 0 za $\tilde{f}$ je skup jednadžbe $f(x,y) - z = 0$, dakle to je točno graf od f. Gradijent od $\tilde{f}$ je

$$\nabla \tilde{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Budući je treća koordinata tog gradijenta uvijek -1, slijedi da on ni za koji odabir x i y ne može biti nulvektor, čak ni kad bi gradijent od f bio nulvektor. Stoga za svaku funkciju f dviju varijabli (koja posjeduje prve parcijalne derivacije po tim varijablama) vrijedi da je njen graf ploha u prostoru.

Kao i u slučaju dviju varijabli i nivo-krivulja, vrijedi i sad: Gradijent (njegov smjer i orijentacija) u točki plohe $f(x,y,z) = C$ pokazuje smjer pomakom u kojem dolazi do najvećeg porasta vrijednosti funkcije f. Kako je ploha skup točaka kojima f pridružuje vrijednost c, znači da se u smjeru kojeg pokazuje gradijent nalazi ploha $f(x,y,z) = c'$ s $c' > c$.

Primjer 356. *Ako je θ funkcija koja opisuje trenutnu temperaturu u pojedinoj točki X Zemljine atmosfere, onda vektor $\nabla\theta(X)$ pokazuje u kojem smjeru se objekt na poziciji X treba pomaknuti tako da mu bude što toplije.*

Primijetimo da u slučaju ploha nema smisla govoriti o tangentama na njih, već o tangencijalnim ravninama (koje sadrže sve tangente u promatranoj točki plohe). Upravo zbog mogućnosti definicije tangencijalne ravnine u definiciji plohe smo zahtijevali da gradijent funkcije koja zadaje plohu ni u kojoj točki plohe nije nulvektor. Naime, kao što je u slučaju dviju varijabli i nivo-krivulja gradijent bio vektor okomit na tangentu, tako će vrijediti i sad: Ako je $X = (x_0, y_0, z_0)$ točka plohe zadane jednadžbom $f(x, y, z) = C$, onda je $\nabla f(X)$ vektor normale na tangencijalnu ravninu te plohe u točki X.

Definicija 85 (Tangencijalna ravnina na plohu). *Tangencijalna ravnina na plohu $F(x, y, z) = 0$ u nekoj njenoj točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ je ravnina kroz tu točku kojoj je $\nabla F(X)$ vektor normale.*

Prema odjeljku 6.2.2 zaključujemo: Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $f(x, y, z) = C$ u točki $X = (x_0, y_0, z_0)$ te plohe je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(X) \cdot (z - z_0) = 0.$$

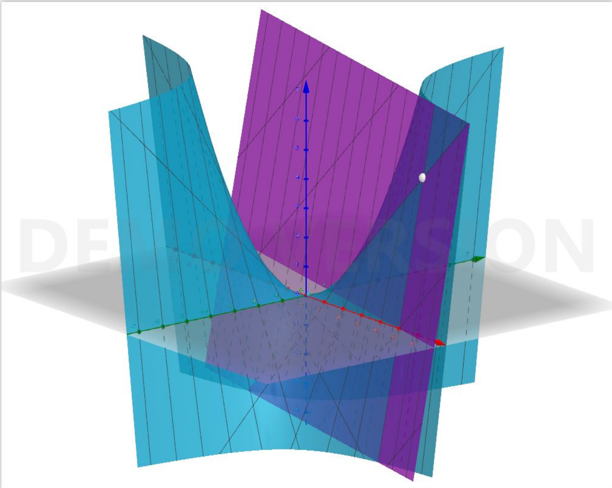
Primjer 357. *Odredimo jednadžbu tangencijalne ravnine na jediničnu sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ u točki $(1, 0, 0)$. Odgovarajući gradijent $2(x, y, z)$ treba izračunati u toj točki kako bi se dobio vektor normale, dakle vektor normale na tangencijalnu ravninu je $(2, 0, 0)$. Stoga je jednadžba tražene tangencijalne ravnine dana s $2(x - 1) + 0(y - 0) + 0(z - 0) = 0$, tj. $x = 0$.*

Primjer 358. *Na slici 10.13 plavo je prikazana ploha poznata pod nazivom majmunovo sedlo. Radi se o grafu funkcije $f(x, y) = xy$. Bijelo je istaknuta jedna točka te plohe, $T(5, 1, 5)$ (za $x = 5$ i $y = 1$ je $z = f(x, y) = 5$). Ljubičasto je prikazana tangencijalna ravnina u toj točki. Njezina jednadžba je $z = x + 5y - 3$. Naime, gradijent od f u ovom slučaju daje – kako smo maločas vidjeli – samo prve dvije koordinate vektora normale: $\nabla f(x, y) = (y, x)$, dakle $\nabla f(1, 5) = (1, 5)$. To je vektor u dvodimenzionalnom prostoru, no vektor normale na tangencijalnu ravninu je vektor u trodimenzionalnom prostoru i kako smo vidjeli njegova treća koordinata, ako je ploha zadana kao graf funkcije dviju varijabli, tj. jednadžbom $z = f(x, y)$, je uvijek -1, pa je vektor normale u našem slučaju $[1, 5, -1]$, odnosno ravnina ima jednadžbu $(x - 5) + 5(y - 1) - (z - 5) = 0$, dakle $x + 5y - z = 5$.*

Još jednom ističemo: Plohe su nivo-skupovi, a ne grafovi, funkcija *triju* varijabli, a neke od njih su grafovi funkcija dviju varijabli – ako je f funkcija dvije varijable x i y, njen graf je nivo-skup funkcije $\tilde{f}(x, y, z) = f(x, y) - z$.

10.1.3 Lokalni ekstremi skalarnih funkcija više varijabli

Pogledajmo ponovno grafove skalarnih funkcija dviju varijabli na slikama 10.5 i 10.9. Na njima su uočljive točke minimuma odnosno maksimuma, a vidljivo



Slika 10.13: Graf funkcije $m(x, y) = xy$ (slika izrađena programom Geogebra)

je i da su u tim točkama tangencijalne ravnine na grafove horizontalne, što prema prethodnom odjeljku znači da je u tim točkama gradijent funkcije čiji su to grafovi nulvektor.

Napomena 40. *U ovom poglavlju ne razmatramo mogućnost da se točka ekstrema postiže u točki u kojoj neka od parcijalnih derivacija ne postoji.*

Definicija 86 (Lokalni i globalni ekstremi skalarnih funkcija)**.** *Za skalarnu funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ točku $X_0 \in \Omega$ zovemo*

- *točkom lokalnog minimuma funkcije f ako za sve $X \in \Omega$ iz neke okoline[7] od X_0 vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$;*
- *točkom lokalnog maksimuma funkcije f ako za sve $X \in \Omega$ iz neke okoline od X_0 vrijedi $f(X) \leq f(X_0)$;*
- *točkom globalnog minimuma funkcije f ako za sve $X \in \Omega$ vrijedi $f(X) \geq f(X_0)$;*
- *točkom globalnog maksimuma funkcije f ako za sve $X \in \Omega$ vrijedi $f(X) \leq f(X_0)$.*

[7] Okolinu točke $X \in \mathbb{R}^n$ čini svaki otvoren skup oko X; otvoreni skupovi su malo napredniji matematički pojam, no možemo ih zamišljati kao skupove koji ne sadrže svoje rubove. Npr. u ravnini $\mathbb{R}^2$ primjer otvorenog skupa je nutrina bilo kojeg kruga, poligona, ...

Za funkcija dviju varijabli, njihovi grafovi nam omogućuju vizualizaciju gore definiranih pojmova: lokalni ekstremi su „dna udolina" odnosno „vrhovi bregova" na plohi koja je graf funkcije, dok su globalni ekstremi najviše odnosno najniže točke na čitavoj plohi. Pritom vrijedi kao i za funkcije jedne varijable: Jedinstvenost lokalnog ekstrema ne mora značiti da je on globalni ekstrem (vidi npr. sliku 10.14).

Metode određivanja globalnih ekstrema skalarnih funkcija više varijabli su komplicirane i nećemo ih ovdje opisivati. S druge strane, postupak određivanja lokalnih ekstrema za funkcije koje posjeduju sve parcijalne derivacije prvog i drugog reda je relativno jednostavan i analogan postupku za funkcije jedne varijable: Prvo se (pomoću derivacija prvog reda) odrede „kandidati" za točke lokalnog ekstrema, a zatim se (pomoću derivacija drugog reda) provjeri radi li se o točki lokalnog ekstrema i ako da, radi li se o minimumu ili maksimumu. Budući da ne razmatramo situacije u kojima neka parcijalna derivacija ne postoji, za nas su ovdje jedini „kandidati" za točke ekstrema stacionarne točke.

Definicija 87 (Stacionarna točka)**.** *Stacionarna točka skalarne funkcije više varijabli je nultočka njenog gradijenta, tj. element domene te funkcije u kojemu su sve parcijalne derivacije prvog reda jednake nuli.*

Ako se radi o funkciji dviju varijabli, u stacionarnoj je točki tangencijalna ravnina na graf paralelna s (x, y)-ravninom.

Primjer 359. *Neka je funkcija dviju varijabli zadana formulom*

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y.$$

Njen gradijent je

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 2xy, x^2 - 2y - 4),$$

pa stacionarne točke dobijemo rješavanjem sustava

$$3x^2 + 2xy = 0,$$

$$x^2 - 2y - 4 = 0.$$

Iz druge jednadžbe supstituiramo $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ u prvu jednadžbu te dobivamo jednadžbu za apscise stacionarnih točaka: $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$. Jedno njezino rješenje je $x_1 = 0$, njemu odgovara $y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 = -2$, dakle je prva stacionarna točka $S_1 = (0, -2)$. Dijeljenjem $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$ s x preostaje jednadžba $x^2 + 3x - 4 = 0$ čija rješenja su $x_2 = 1$ i $x_3 = -4$. Odgovarajuće ordinate su $y_2 = -\frac{3}{2}$ i $y_3 = 6$, dakle naša funkcija ima još dvije stacionarne točke, $S_2 = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ i $S_3 = (-4, 6)$.

Napomenimo ovdje da iako se prvi korak u određivanju lokalnih ekstrema, tj. određivanje stacionarnih točakal, čini jednostavnim, u mnogim (osobito primijenjenim) slučajevima on to nije jer dobiveni sustav može biti vrlo teško ili čak nemoguće egzaktno riješiti. Za takve slučajeve koriste se razni programi koji omogućuju aproksimativno rješavanje tog sustava.

Ulogu druge derivacije za ispitivanje je li pojedina stacionarna točka točka lokalnog ekstrema za funkcije više varijabli preuzima Hesseova matrica (definicija 82).

Primjer 360. *Hesseova matrica za funkciju iz primjera 359 je*

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}.$$

No, u Hesseovoj matrici su sad za svaku stacionarnu točku bar 4 broja. Koji od njih nam govori radi li se o lokalnom minimumu ili maksimumu? Nijedan sam za sebe. Umjesto toga potrebno je računati tzv. minore Hesseove matrice.

Definicija 88 (Minore kvadratne matrice)**.** *Za kvadratnu matricu $A \in M_n$ njene (glavne) minore su determinante kvadratnih matrica A_1, A_2, ..., A_{n-1}, $A_n = A$, gdje je A_k matrica koja se iz A dobije tako da uzmemo njenih prvih k redaka i k stupaca (tj. $A_i = (a_{ij}) \in M_k$).*

Primjer 361. *Minore matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

su determinante

$$|1|, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 9 & 10 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}.$$

Uvjet za lokalne ekstreme skalarnih funkcija više varijabli glasi: Funkcija f u stacionarnoj točki S ima

- lokalni minimum, ako su sve minore Hesseove matrice $H(f)(S)$ pozitivne.

- lokalni maksimum, ako predznaci minora Hesseove matrice $H(f)(S)$ alterniraju počevši s negativnim.
- Ukoliko je neka od minora jednaka 0, tretiramo ju kao istovremeno pozitivnu i negativnu. To znači da ako bi razmatranje 0 bilo kao pozitivnog bilo kao negativnog broja svelo redoslijed predznaka na jedan od gore navedenih dvaju, onda je moguće – ali nije sigurno – da je S točka lokalnog ekstrema. U takvom slučaju je potrebno drugim metodama provjeriti radi li se o točki lokalnog ekstrema.
- U svim ostalim slučajevima govorimo o sedlastoj točki: **Sedlasta točka funkcije** je stacionarna točka koja nije točka ekstrema.

U slučaju funkcija jedne varijable primjer sedlaste točke je 0 za funkciju $f(x) = x^3$. Ipak, tu je situacija bitno jednostavnija nego kod funkcija više varijabli jer su jedine moguće sedlaste točke realne funkcije jedne varijable one stacionarne točke za koje funkcija u njihovoj okolini ili raste ili pada. Kod funkcija dviju varijabli osim takvih sedlastih točaka, moguće su i one koje ovisno o perspektivi gledanja na graf s (bar) jedne strane izgledaju kao lokalni minimumi i s (bar) jedne strane kao lokalni maksimumi (vidi ishodište na slici 10.11).

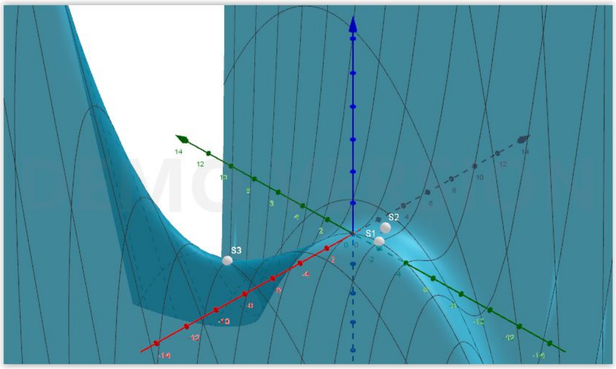
Primjer 362. *Provjerimo koje od stacionarnih točaka iz primjera 360 su točke lokalnih ekstrema, a koje su sedlaste. Uvrstimo ih redom u Hesseovu matricu, dobit ćemo*

$$H(f)(S_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, H(f)(S_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, H(f)(S_3) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Minore od $H(f)(S_1)$ su -4 i 8, dakle imamo alternaciju $-+$ te je S_1 točka lokalnog maksimuma. Minore od $H(f)(S_2)$ su 3 i -10, dakle nemamo ni alternaciju $++$ ni $-+$ te je S_2 sedlasta točka. Minore od $H(f)(S_3)$ su -12 i -40, dakle je i S_3 sedlasta točka. Na slici 10.14 možete vidjeti graf funkcije f iz ovog primjera i sve tri stacionarne točke.

Ponovimo bitno... Gradijent skalarne funkcije f u točki X_0 njezine domene je vektor parcijalnih derivacija prvog reda od f u X_0.

Ploha u prostoru je skup svih točaka prostora koje zadovoljavaju jednadžbu oblika $F(x, y, z,) = C$, pri čemu za svaku točku plohe (tj. točku $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ koja zadovoljava jednadžbu plohe) gradijent od F u toj točki mora biti različit od nulvektora. Gradijent $\nabla F(X_0)$ je u tom slučaju vektor normale tangencijalne ravnine na plohu $F(x, y, z) = 0$ u X_0, a njegov smjer i orijentacija ukazuju na smjer najvećeg porasta funkcije F.



Slika 10.14: Graf funkcije $f(x,y) = x^3+x^2y-y^2-4y$ ima dvije sedlaste točke i jednu točku lokalnog maksimuma koja nije točka globalnog maksimuma (slika izrađena programom Geogebra)

Stacionarna točka skalarne funkcije je element domene te funkcije u kojem je gradijent nulvektor. Stacionarna točka može biti točka lokalnog ekstrema ili sedlasta točka. Za stacionarnu točku X_0 funkcije f provjera radi li se o točki lokalnog ekstrema provodi se korištenjem minora Hesseove matrice $Hf(X_0)$. (Glavne) minore kvadratne matrice A su determinante kvadratnih podmatrica od A kojima je gornji lijevi kut zajednički s A.

10.1.4 Uvjetni ekstremi

U primijenjenim kontekstima često uz funkciju koju želimo maksimizirati ili minimizirati imamo i jedan ili više uvjeta koje tražena točka ekstrema treba zadovoljavati. Ti uvjeti mogu biti jednadžbe ili nejednadžbe koje se odnose na nezavisne varijable. Mi ćemo se ovdje baviti samo uvjetima koji su oblika jednadžbi.

Primjer 363. *Zadatak je odrediti dimenzije otvoren kutije oblika kvadra maksimalnog obujma koja ima oplošje* 64 cm^2. *Ako su x, y i z tražene duljine bridova te kutije (u centimetrima), zadatak se svodi na određivanje maksimuma funkcije*

$$V(x,y,z) = xyz$$

uz uvjet

$$2xy + 2xz + yz = 64.$$

Pritom uočimo da nas zanimaju isključivo rješenja s $x,y,z > 0$ (ako je neki od njih 0, volumen kutije je 0 i to očigledno nije maksimalni, već minimalni *mogući volumen, a negativne duljine nemaju smisla). Dakle, tražimo tri pozitivna broja takva da im je umnožak što veći, a da pritom zadovoljavaju određenu jednakost.*

Ponekad je takve zadatke supstitucijom iz uvjeta moguće svesti na traženje lokalnih ekstrema bez uvjeta, tj. na tehnike prethodnog odjeljka odnosno odjeljka 3.5.

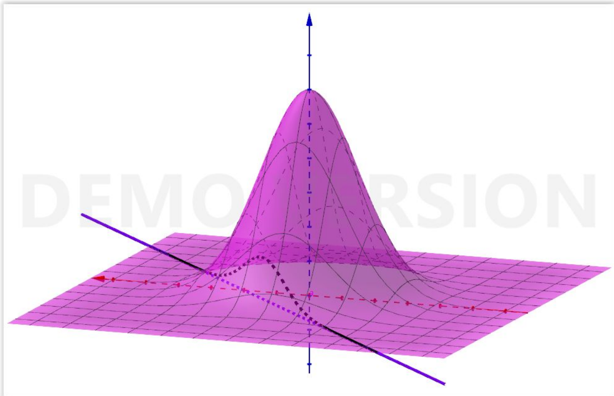
Primjer 364. *Funkcija $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ je definirana na cijelom $\mathbb{R}^2$. Postupak određivanja lokalnih ekstrema dao bi da ona postiže lokalni maksimum u $(0,0)$ (štoviše, kako se radi o e na nepozitivne brojeve, jasno je da je $f(x,y) \leq 1$ za sve x i y, a $f(0,0) = 1$ pa je to i globalni maksimum, što je vidljivo i na slici 10.15).*

No, što ako nas zanimaju samo one točke (x,y) domene koje su na pravcu $x + y = 1$ (ljubičasto na slici 10.15)? Za koje točke tog pravca uvrštavanje u funkciju f daje (lokalno) maksimalne ili minimalne vrijednosti? Vizualno (vidi sliku 10.15) se radi o promatranju dijela plohe (crnoj crtkanoj krivulji na plohi) koja predstavlja dio grafa funkcije f koji je iznad pravca $x + y = 1$ (koji je podskup domene), dakle tražimo ekstreme samo na crno označenoj krivulji sa slike.

U ovom slučaju, moguće je problem riješiti supstitucijom: Budući da nas zanimaju samo (x,y) sa svojstvom $x + y = 1$ tj. $y = 1 - x$, možemo to supstituirati u f čime dobivamo funkciju jedne varijable $F(x) = e^{-2x^2+2x-1}$. Ona postiže lokalni (štoviše, globalni) maksimum za $x = 1/2$, dakle se traženi uvjetni lokalni maksimum funkcije f uz uvjet $x + y = 1$ postiže u $(x,y) = (x, 1 - x) = (1/2, 1 - 1/2) = (1/2, 1/2)$.

Primjer 365. *Godine 1613., Johannes Kepler se u gradu Linzu ženio po drugi puta. Za svadbu je nabavio bačvu vina, no pri kupnji mu se čudnom učinila metoda kojom je trgovac određivao cijenu vina: Cijenu je uzimao razmjernu volumenu, ali volumen je određivao pomoću štapa kojeg je provukao kroz rupu u sredini ruba bačve, dok ne dotakne jedan od kružnih krajeva na suprotnoj strani te zatim izmjerio koliko je dug mokri dio štapa. Kepler je primijetio da mokri dio štapa može biti jednako dug za bačve različitih volumena te je odlučio odrediti za kakve je dimenzije bačve i danu duljinu mokrog dijela štapa (cijenu) volumen bačve najveć i.*

U tu je svrhu zamislio da su bačve valjkastog oblika. Kepler je dakle rješavao zadatak: Koliko iznosi omjer promjera d i duljine h valjkaste bačve maksimalnog volumena V ako je fiksirana duljina L mokrog dijela štapa (slika 10.16)?



Slika 10.15: Graf funkcije $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ je ružičasta ploha; uvjet iz primjera 364 je ljubičasti pravac (slika izrađena programom Geogebra)

Volumen valjkaste ba čve promjera d i visine h je

$$V(d, h) = r^2 h\pi = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

Uvjet kojeg imamo je da je

$$d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = L.$$

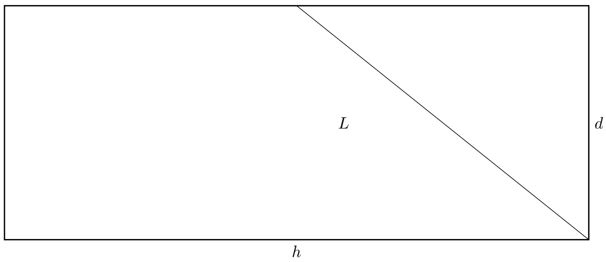
Iz tog uvjeta vidimo da mora biti $d^2 = L - \frac{h^2}{4}$, dakle smo funkciju volumena sveli na funkciju jedne varijable

$$v(h) = \frac{L\pi}{4} h - \frac{\pi}{16} h^3$$

s domenom $[0, \infty\rangle$. Deriviranjem dobijemo $v'(h) = \frac{L\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} h^2 = 0$ pa, odbacujući negativnu stacionarnu točku kao besmislenu za naš problem, imamo jedinu stacionarnu točku $h = +2\sqrt{\frac{L}{3}}$. Ona mora biti točka maksimuma jer je iz konteksta jasno da se minimum postiže u drugoj kritičnoj točki $h = 0$. Dakle, $d^2 = \frac{2L}{3}$ pa je traženi omjer $d : h = \sqrt{L/3}$.

Kako vidimo, zajedničko prethodnim trima primjerima je da se radi o rješavanju istog tipa problema:

Definicija 89 (Problem uvjetnog ekstrema). *Problemom uvjetnog ekstrema naziva se zadatak određivanja minimuma i/ili maksimuma skalarne funkcije s više varijabli, uz jedan ili više uvjeta koji su oblika jednadžbi s tim varijablama. Rješenja takvog problema nazivaju se uvjetnim ekstremima.*



Slika 10.16: Ilustracija uz Keplerov problem bačve

Jedna od metoda rješavanja problema uvjetnih ekstrema jest kako smo vidjelu u zadnja dva primjera supstitucija pojedinih nepoznanica iz uvjeta i time svođenje problema na određivanje bezuvjetnih ekstrema funkcije s manje varijabli.

Općenitija i standardnija je metoda Lagrangeovih multiplikatora. U njoj se pretpostavlja da su svi uvjeti zapisani u obliku

$$g(x, y, \ldots) = 0,$$

dakle u obliku u kom su svi članovi prebačeni na lijevu stranu. Za svaki uvjet dodaje se po jedna nova varijabla λ, koju nazivamo Lagrangeovim multiplikatorom (dotičnog uvjeta). Ako je s f označena funkcija koju u našem problemu želimo maksimizirati odnosno minimizirati (tzv. ciljna funkcija), onda se Lagrangeova funkcija L problema uvjetnog ekstrema formira po sljedećem pravilu:

$$L(x, y, \ldots) = f(x, y, \ldots) - \lambda \cdot g(x, y, \ldots) - \ldots.$$

Dakle, Lagrangeova funkcija ovisi o nezavisnim varijablama našeg problema (x, y, $\ldots$) i dodatno o Lagrangeovim multiplikatorima (λ, $\ldots$) i jednaka je ciljnoj funkciji od koje su oduzeti umnošci Lagrangeovih multiplikatora s lijevim stranama odgovarajućih uvjeta.

Primjer 366. *Za problem s kutijom maksimalnog volumena (primjer 363) Lagrangeova funkcija je*

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda \cdot (2xy + 2yz + xz - 64).$$

Vrijedi sljedeći važan teorem:

Teorem 47. *Ako ciljna funkcija f postiže traženi uvjetni ekstrem u točki $(x, y, \ldots)$, onda postoje Lagrangeovi multiplikatori $\lambda, \ldots$ tako da je $X = (x, y, \ldots, \lambda, \ldots)$ stacionarna točka za Lagrangeovu funkciju F.*

Dakle, jedini kandidati za rješenje problema uvjetnog ekstrema su dijelovi stacionarnih točki Lagrangeove funkcije koji su iznosi izvornih nezavisnih varijabli.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} - \dots, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} - \dots, \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \frac{\partial g}{\partial x}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

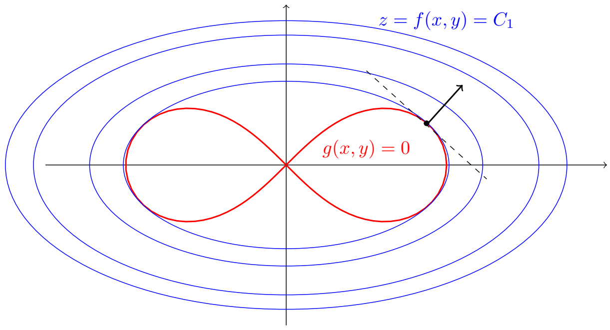
Uovičimo dakle da izjednačavanje parcijalnih derivacija od F po Lagrangeovim multiplikatorima s nulom samo iznova ispisuje ujvete našeg problema. Dakle, $(x, y, \dots, \lambda, \dots)$ je stacionarna točka za F ako i samo ako ona zadovoljava sve izvorne uvjete problema i dodatno $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \dots$ (u toj točki gradijent ciljne funkcije je linearna kombinacija gradijenata funkcija određenih uvjetima pri čemu su koeficijenti u toj linearnoj kombinaciji odgovarajući Lagrangeovi multiplikatori).

Odakle takav uvjet? Ograničimo se na slučaj dvije nezavisne varijable x i y i jednog uvjeta:

$$f(x, y) \to \min/\max,$$

$$g(x, y) = 0.$$

Sad je naš uvjet krivulja u ravnini (nivo-krivulja od g, crveno na slici 10.17) i ona je podskup domene od f (jer hoćemo elemente domene koji su na toj krivulji). Na njoj tražimo točku u kojoj f postiže minimum odnosno maksimum, recimo da tražimo maksimum. Mogli bismo u (x, y)-ravnini crtati nivo-krivulje funkcije f (plavo na slici 10.17) i tražimo onu s najvećom vrijednošću koja dodiruje krivulju $g(x, y) = 0$. Ako krenemo od neke s velikom vrijednosti f (jedne od vanjskih plavih krivulja na slici 10.17) i smanjujemo vrijednost f (kao da „ispuhujemo balon") prije ili kasnije nivo-krivulja od f će dotaknuti krivulju $g(x, y) = 0$. Odgovarajuća vrijednost od f je traženi maksimum (za sve veće nivo-krivulje se ne dodiruju). Uvjet $\nabla F(x, y, \lambda) = 0$ svodi se sad na $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) = 0$, dakle na traženje točke na krivulji u kojoj su gradijenti od f i g kolinearni – upravo kako vidimo na slici 10.17: U točki rješenja tangente su zajedničke, odnosno normale – gradijenti od f i g – su iste, dakle postoji λ takav da je $\nabla f = \lambda \nabla g$ i pritom je to točka na $g(x, y) = 0$, dakle stvarno imamo zadovoljen uvjet $\nabla F(x, y, \lambda) = \mathbf{0}$.



Slika 10.17: Uvjetni ekstrem funkcije dviju varijabli uz jedan uvjet se postiže u točki u kojoj su gradijent ciljne funkcije i funkcije uvjeta kolinearni

Dakle, ukoliko se radi o određivanju lokalnog ekstrema funkcije f uz jedan jedini uvjet oblika $g = 0$, kandidati za tražene točke ekstrema nalaze se među rješenjima sustava

$$\nabla f(x, y, \ldots) = \lambda \nabla g(x, y, \ldots),$$
$$g(x, y, \ldots) = 0,$$

budući da su to točno stacionarne točke odgovarajuće Lagrangeove funkcije. Kako za stacionarnu točku Lagrangeove funkcije zaključiti radi li se o točki minimuma, maksimuma ili nijedno? Formalna tehnika je izvan opsega ovog udžbenika, ali u većini slučajeva lako je iz konteksta zaključiti koja stacionarna točka je rješenje postavljenog problema.

Primjer 367. *Riješimo problem kutije postavljen u primjeru 363. Primijetimo da se traži maksimalni volumen i da je iz postavke problema (ograničeno oplošje) očito da postoji rješenje problema. Također, primijetimo da ako je ijedan od bridova duljine* 0*, volumen je* 0 *pa su stoga eventualne stracionarne točke za koje je* $x = 0$ *ili* $y = 0$ *ili* $z = 0$ *točke minimuma i možemo i ignorirati.*

Pogledajmo uvjete koji proizlaze iz Lagrangeove funkcije:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z),$$

$$g(x, y, z) = 0.$$

Oni se svode na sustav

$$yz = \lambda(2y + z),$$
$$xz = \lambda(2x + 2z),$$
$$xy = \lambda(2y + x),$$

$$2xy + 2yz + xz = 64.$$

Pomnožimo prvu od jednadžbu s x, drugu s y i treću sa z te imamo

$$(xyz =)\lambda x(2y + z) = \lambda y(2x + 2z) = \lambda z(x + 2y).$$

To može vrijediti za $\lambda = 0$, no to rješenje nas ne zanima, jer bi onda bilo $yz = xz = xy = 0$ te bi bar jedan brid bio duljine 0. Stoga posljednje jednakosti možemo podijeliti s λ i dobijemo $2xy+xz = 2xy+2yz = xz+2yz$, dakle (jer $x, y, z \neq 0$) $x = z = 2y$. To uvrstimo u četvrtu jednadžbu (izvorni uvjet) i dobivamo $12x^2 = 64$ odnosno $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$ cm i $x = z = \frac{8}{\sqrt{3}}$ cm. Budući da je to jedini kandidat za rješenje osim onih u kojima bi neki brid bio duljine 0, prema rečenom zaključujemo da se radi o traženoj točki maksimuma.

Primjer 368. *U fizici se često određuju ekstremi funkcija tipa*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j$$

(tzv. kvadratne forme), uz „energetski" uvjet tipa

$$\sum_i x_i^2 = 1.$$

Jednadžbe koje odgovaraju određivanju stacionarne točke odgovarajuće Lagrangeove funkcije tad se nazivaju sekularnim jednadžbama. Primjer su jednadžbe koje se dobivaju u tzv. Hückelovoj metodi za određivanje molekulskih orbitala kao linearnih kombinacija atomskih orbitala (u tom slučaju Lagrangeov multiplikator λ postaje svojstvena vrijednost prikladne matrice).

Ponovimo bitno... O uvjetnim ekstremima skalarne funkcije f govorimo ako smo se pri određivanju ekstrema te funkcije ograničili na one točke domene koje zadovoljavaju jednu ili više jednadži. Točke uvjetnih ekstrema nalaze se među stacionarnim točkama Lagrangeove funkcije, koju dobijemo tako da od funkcije f za svaki uvjet oduzmemo produkt jedne nove varijable (Lagrangeovog multiplikatora) s lijevom stranom jednadžbe koja opisuje taj uvjet (podrazumijevamo da su svi nenul članovi jednadžbe zapisani na lijevoj strani).

10.1.5 Metoda najmanjih kvadrata

Jedna od najvažnijih metoda za obradu eksperimentalnih podataka je metoda najmanjih kvadrata. Osnovni problem kojeg rješava ova metoda je: Kako iz dobivenih eksperimentalnih podataka dobiti formulu funkcionalne ovisnosti.

Konkretno:

Problem 1: Za zadani niz parova brojeva (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, uz pretpostavku da veličina y ovisi o veličini x, traži se formula funkcije $y = f(x)$ takva da je ukupna greška aproksimacije što manja.

Formulu funkcije f obično tražimo iz jednog od razloga (ili iz oba): Da bismo mogli procijentiti iznos y za x koji nije bio među zadanima ($x \neq x_1, \ldots, x_n$) i/ili da bismo mogli procijeniti iznose nekih nepoznatih parametara. Vrsta funkcije f (afina, kvadratna, skalirana eksponencijalna, ...) u pravilu je ili poznata iz teorije ili se pretpostavlja temeljem podataka.

Primjer 369. *Arrheniusova jednadžba*

$$k = Ae^{-E_a/(RT)}$$

opisuje ovisnost koeficijenta k brzine reakcije o temperaturi T. Vrijednosti A (predeksponencijalni faktor) i E_a (energija aktivacije) su konstantne, ali u pravilu nepoznate.

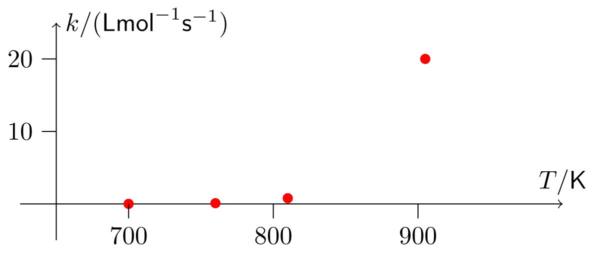
Mjerenjima pri nekoj reakciji su dobiveni sljedeći podaci:

$(T/\mathsf{K}$	$k/(\mathsf{L}/(\mathsf{mol\,s}))$
700	0,0110
760	0,105
810	0,789
910	20,0

Koliko iznose predeskponencijalni faktor i energija aktivacije za tu reakciju? Koliko iznosi koeficijent brzine te reakcije pri temperaturi 800 K*? Primijetimo da je iz grafičkog prikaza zadanih podataka (slika 10.18), čak i bez znanja da je ovisnost oblika danog Arrheniusovom jednadžbom (kompozicija racionalne i eksponencijalne funkcije), očigledno da funkcijska ovisnost k o T nije afina.*

U pravilu pri mjerenjima očekujemo da točke (x_i, y_i) zapravo nisu egzaktno na grafu funkcije ovisnoti y o x, tj. očekujemo da postoji eksperimentalna greška. Stoga tražimo funkciju čiji graf ne mora prolaziti točno kroz te točke (ne zahtijevamo $y_i = f(x_i)$ za sve i), nego tražimo funkciju tako da je ukupno „rasipanje” zadanih točaka oko njenog grafa što manje: $f(x_i) \approx y_i$ za sve i.

Problem 2: Kako za danu funkciju $y = f(x)$ opisati ukupnu grešku obzirom na zadane parove (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$?



Slika 10.18: Zadani podaci za primjer 369

Obično podrazumijevamo da nema greške u apscisama[8], pa je razumno gledati samo vertikalna odstupanja od vrijednosti funkcije: $y_i - f(x_i)$ odnosno $f(x_i) - y_i$. Budući je obično nebitno je li rezultat manji ili veći od točnog (i da ne želimo da jedan manjak poništi jedan višak), kao mjeru greške za pojedinu točku mogli bismo uzeti $|f(x_i) - y_i|$. No, s obzirom na to da ćemo funkciju greške htjeti minimizirati i da je za to poželjna derivabilnost, a apsolutna vrijednost nije posvuda derivabilna, grešku aproksimacije funkcijom f u točki (x_i, y_i) u metodi najmanjih kvadrata opisujemo izrazom $E_i = (f(x_i) - y_i)^2$. **Ukupna greška aproksimacije** se pak definira kao zbroj lokalnih grešaka:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2.$$

Kako minimizirati E? Da bi bilo moguće odgovoriti na to pitanje mora se pretpostaviti oblik funkcije f kojom ćemo aproksimirati podatke. Najčešće se koriste afine funkcije $f(x) = ax+b$ i kvadratne funkcije $f(x) = ax^2+bx+c$. Stvarni problem je sada:

Problem 3: Ako smo pretpostavili oblik funkcije f, s nepoznatim parametrima a, b, c, ..., kako minimizirati E?

Konkretno, u navedena dva slučaja aproksimacije afinom odnosno kvadratnom funkcijom imamo redom

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2,$$

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

[8]Možemo to reći i ovako: Uzima se da je sva greška akumulirana u ordinatama.

Uočimo da su ovdje poznate vrijednosti (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, a nepoznati su parametri $a, b, c, \ldots$. Stoga tražimo (globalni) minimum funkcije oblika $E(a, b, c, \ldots)$. Vidimo da se radi o problemu određivanja ekstrema diferencijabilne realne funkcije više varijabli. Kako su jedine kritične točke takve funkcije stacionarne točke, mogući koeficijenti $a, b, c, \ldots$ dobiju se rješavanjem sustava

$$\nabla E = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial E}{\partial b} = \frac{\partial E}{\partial c} = \ldots = 0.$$

Kod aproksimacije afinom funkcijom imamo redom

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 a + 2\sum_{i=1}^{n} x_i b - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i a + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

Stacionarna točka (a, b) za funkciju ukupne greške E bit će stoga rješenje sustava dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice a i b:

$$s_{x^2} \cdot a + s_x \cdot b = s_{xy}$$

$$s_x \cdot a + n \cdot b = s_y$$

pri čemu je

$$s_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

(zbroj kvadrata apscisa),

$$s_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

(zbroj apscisa),

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

(zbroj produkata apscisa s odgovarajućim ordinatama),

$$s_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

(zbroj ordinata), a n je broj parova podataka (u pravilu to je broj mjerenja). Cramerovo pravilo za rješavanje sustava daje nam formule za nepoznati koeficijent smjera pravca

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{ns_{x^2} - s_x^2} \tag{10.3}$$

i slobodni član

$$b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{ns_{x^2} - s_x^2}. \tag{10.4}$$

Za slučaj **aproksimacije kvadratnom funkcijom** na analogan način dobivamo sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice a, b i c:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^4)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^3)b + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i,$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^3)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)b + (\sum_{i=1}^{n} x_i)c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

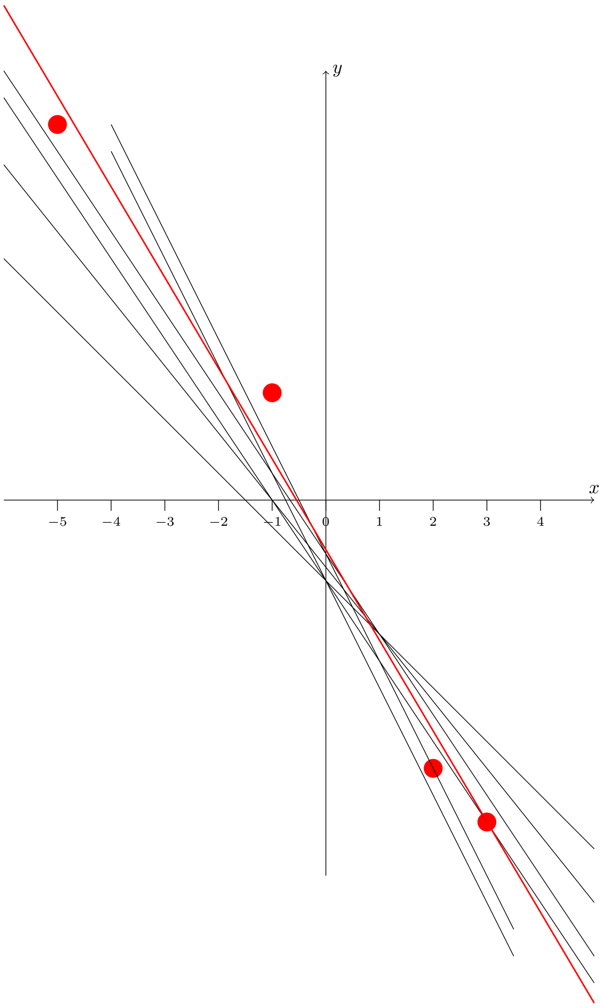
$$(vx_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Iz prethodnog vidimo da bismo za konkretnu tablicu (x_i, y_i)-ova lako izračunali koeficijente sustava i riješili sustav. Time bismo dobili stacionarnu točku za ukupnu grešku E. Radi li se o točki minimuma? Da. Intuitivni razlog za to je da je E „u bîti" kvadratna funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom (odnosno, zbroj takvih funkcija) pa očekujemo da ima točno jedan ekstrem koji je ujedno globalni minimum. Precizniji dokaz dobivamo pomoću Hesseove matrice.

Ostanimo pri aproksimaciji afinom funkcijom, tj. pravcem. Izračunati koeficijenti a i b precizno nam opisuju pravac u ravnini koji najbolje opisuje ovisnost koju smo eksperimentalno dobili u obliku n točaka. Pritom „najbolje" znači da se radi o pravcu koji (u pravilu) ne prolazi tim točkama, ali je to među svim pravcima u ravnini onaj oko kojeg su te točke najmanje rasute (ima najmanji zbroj odstupanja pojedinih točaka).

Primjer 370. *Odredimo pravac koji najbolje aproksimira točke* $(-5, 7)$, $(-1, 2)$, $(2, -5)$, $(3, -6)$. *Dakle, među mnoštvom pravaca u ravnini, tražimo onaj koji izgleda kao crveni pravac na slici 10.19.*

Imamo $n = 4$, $s_x = -1$, $s_y = -2$, $s_{x^2} = 39$, $s_{xy} = -65$ *pa po formulama 10.3 i refmnkb dobivamo* $a = -\frac{262}{155}$ *i* $b = -\frac{143}{155}$, *odnosno traženi pravac ima jednadžbu* $y = -\frac{262}{155}x - \frac{143}{155}$.



Slika 10.19: Aproksimacija afinom funkcijom

Kao što vidimo iz prethodnog primjera, vrlo je bitno imati neki argument za korištenje određenog tipa aproksimacijske funkcije. Konkretno, Clausius-Clapeyronova jednadžba je bila argument da $\ln \frac{p}{1\,\mathrm{torr}}$ aproksimiramo afinom funkcijom od $1/T$. Često ne postoji takav teorijski argument, nego eventualno skica parova podataka može sugerirati odgovarajući tip funkcije. Često je nužno isprobati i više mogućih aproksimacija.

Primjer 371. *Nastavimo primjer 369. Tamo smo već komentirali da zadane podatke nema smisla aproksimirati pravcem, tj. nema smisla uzeti $x = T/\mathrm{K}$, $y = k/(\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s}))$ i tražiti a i b tako da dobijemo $y = ax+b$ jer bi to značilo da tvrdimo da k afino ovisi o T. U ovakvim se slučajevima, osim eventualno ako na raspolaganju imamo računalne programe s mogućnošću primjene metode najmanjih kvadrata na funkcije koje nisu afine ni kvadratne, obično koristi linearizacija zadane ovisnosti, kako je opisana u odjeljku 2.8.*

Za Arrheniusovu jednadžbu imamo

$$\ln \frac{k}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})} = \ln \frac{A}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})} - \frac{E_\mathrm{a}}{R} \cdot \frac{1}{T}$$

pa uzimamo

$$y = \ln \frac{A}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})}, \quad x = \frac{1}{T}$$

$$a = -\frac{E_\mathrm{a}}{R}, \quad b = \ln \frac{A}{\mathrm{L}/(\mathrm{mol\,s})}.$$

Ako dakle umjesto T-ova za x-eve uzmemo njihove recipročne vrijednosti, a umjesto k-ova za y-e uzmemo njihove prirodne logaritme, ima smisla tražiti aproksimaciju y (logaritma koeficijenta brzine reakcije) kao afine funkcije od x (recipročne temperature).

Iz zadanih podataka računamo tablicu za primjenu metode najmanjih kvadrata:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
$1{,}42857 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}50986$	$2{,}04082 \cdot 10^{-6}$	$-6{,}44266 \cdot 10^{-3}$
$1{,}31579 \cdot 10^{-3}$	$-2{,}25379$	$1{,}73130 \cdot 10^{-6}$	$-2{,}96552 \cdot 10^{-3}$
$1{,}23457 \cdot 10^{-3}$	$-0{,}23699$	$1{,}52416 \cdot 10^{-6}$	$-0{,}29258 \cdot 10^{-3}$
$1{,}09890 \cdot 10^{-3}$	$2{,}99573$	$1{,}20758 \cdot 10^{-6}$	$3{,}29201 \cdot 10^{-3}$
$s_x = 5{,}07783 \cdot 10^{-3}$	$s_y = -4{,}00482$	$s_{x^2} = 6{,}50386 \cdot 10^{-6}$	$s_{xy} = -6{,}40875 \cdot 10^{-3}$

Ako zajednički nazivnik iz formula 10.3 i 10.4 označimo s Δ, imamo

$$\Delta = n s_{x^2} - s_x^2 = 2{,}31082 \cdot 10^{-7},$$

pa je

$$a = \frac{ns_{xy} - s_x s_y}{\Delta} = -22932{,}14036, \quad b = \frac{s_{x^2} s_y - s_x s_{xy}}{\Delta} = 28{,}1101045.$$

Dakle,

$$E_{\mathsf{a}} = -Ra = 1{,}91 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}, \quad A = 1{,}61 \cdot 10^{12} \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,s}}.$$

Zaključujemo da za podatke iz primjera 369 imamo ovisnost

$$k = 1{,}61 \cdot 10^{12} \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,s}} \exp(-22{,}9 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{K}/T).$$

Primjerice, za $T = 800$ K *sad možemo procijeniti da je odgovarajući* $k = 1{,}61 \cdot 10^{12} \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,s}} \exp(-22{,}9/800) = 0{,}572 \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,s}}$.

Za kraj dajmo još jedan primjer.

Primjer 372. *Recimo da smo pri nekoj kemijskoj reakciji mjerili koncentracije (jedinog) reaktanta i želimo odrediti kojeg je reda reakcija. Imamo osnove za pretpostavku da je reakcija reda bar* 1 *i najviše* 3. *Reakcije s jednim reaktantom koje su prvog reda opisane su integriranim zakonom brzine*

$$\ln \frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}} = \ln \frac{[\mathrm{A}]_0}{c^{\ominus}} - k_1 \nu_{\mathrm{A}} t,$$

reakcije drugog reda zakonom

$$\frac{1}{[\mathrm{A}]} = \frac{1}{[\mathrm{A}]_0} - k_2 \nu_{\mathrm{A}} t,$$

a reakcije trećeg reda s

$$\frac{1}{[\mathrm{A}]^2} = \frac{1}{[\mathrm{A}]_0^2} - 2k_3 \nu_{\mathrm{A}} t.$$

Za dane podatke, ako ne znamo kojeg je reda reakcija, možemo isprobati tri aproksimacije afinom funkcijom i vidjeti koja daje najmanje greške $E_i = |f(x_i) - y_i|$.

Konkretno, neka su dani podaci

t/min	$[\mathrm{A}]/\mathrm{mol\,L^{-1}}$	$\ln \frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}}$	$1/[\mathrm{A}]/\mathrm{L\,mol^{-1}}$	$1/[\mathrm{A}]^2/\mathrm{L^2\,mol^{-2}}$
5	0,715	−0,33547	1,39860	1,95609
10	0,602	−0,50750	1,66113	2,75935
15	0,501	−0,69115	1,99601	3,98405
20	0,419	−0,86988	2,38663	5,69603
25	0,360	−1,02165	2,77778	7,71605
30	0,300	−1,20397	3,33333	11,11111
35	0,249	−1,39030	4,01606	16,12877
40	0,214	−1,54178	4,67289	21,83597
45	0,173	−1,75446	5,78035	33,41241

Pretpostavimo li da je reakcija prvog reda ($y = \ln\frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}}$, $x = \frac{t}{1\,\mathrm{min}}$, $a = -k_1\nu_{\mathrm{A}}\cdot 1\,\mathrm{min}$, $b = \ln\frac{[\mathrm{A}]_0}{c^{\ominus}}$) dobijemo $\ln\frac{[\mathrm{A}]}{c^{\ominus}} = -0{,}0350\,\mathrm{min}^{-1}\cdot t - 0{,}159$ i pritom imamo greške[9] *redom* $-0{,}00077921$, $0{,}0012463$, $-0{,}00321276$, $-0{,}00418592$, $0{,}00481993$, $0{,}00189726$, $-0{,}00119771$, $0{,}00400898$, $-0{,}00324552$

Pretpostavka da je reakcija drugog reda ($y = 1\,\mathrm{mol\,L^{-1}}/[\mathrm{A}]$, $x = t/\mathrm{min}$, $a = -k_2\nu_{\mathrm{A}}\cdot 1\,\mathrm{mol\,min/L}$, $b = 1\,\mathrm{mol\,L^{-1}}/[\mathrm{A}]_0$) daje $\frac{1}{[\mathrm{A}]} = 0{,}105\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\,min}}t + 0{,}485\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol}}$ *i pritom imamo greške*[10] *redom* $0{,}562624$, $-0{,}430326$, $0{,}452274$, $0{,}403668$, $0{,}352597$, $0{,}295654$, $0{,}246145$, $0{,}211982$, $0{,}171498$.

Pretpostavka da je reakcija trećeg reda ($y = 1\,\mathrm{mol^2\,L^2}/[\mathrm{A}]^2$, $x = t/\mathrm{min}$, $a = -2k_3\nu_{\mathrm{A}}\cdot 1\,\mathrm{mol^2\,min/L^2}$, $b = 1\,\mathrm{mol^2\,L^2}/[\mathrm{A}]_0^2$) daje $\frac{1}{[\mathrm{A}]^2} = 0{,}709\frac{\mathrm{L^2}}{\mathrm{mol^2}}\,\mathrm{min}\cdot t - 6{,}11\frac{\mathrm{L^2}}{\mathrm{mol^2}}$ *i pritom imamo greške*[11] *redom* $2{,}259$; $0{,}888$; $0{,}263$; $1{,}19$; $1{,}953$; $2{,}029$; $1{,}293$; $0{,}212$; $3{,}803$.

Očito smo u prvom slučaju dobili najmanje greške (što je lako potvrditi i odgovarajućim grafovima) te zaključujemo da je reakcija prvog reda, a koeficijent brzine reakcije je $k_1 = 0{,}0350\ \mathrm{min}^{-1}$.

Ponovimo bitno... Metoda najmanjih kvadrata služi određivanju one funkcije zadanog tipa (afine, kvadratne, ...) čija greška u odnosu na zadane podatke je najmanja; takvu funkciju zovemo najboljom aproksimacijom danih podataka. Ako su zadani podaci uređeni parovi realnih brojeva, greška funkcije f u odnosu na njih se definira kao zbroj kvadrata razlika između ordinata koje su poznate i ordinata koje dobijemo uvrštavanjem odgovarajuće apscise u funkciju f. Ako smo odabrali tip funkcije, onda greška E ovisi o dva ili više parametara koji određuju konkretnu funkciju (primjerice, ako funkcija treba biti afina, greška ovisi o koeficijentu smjera i slobodnom članu). Formule za određivanje nepoznatih koeficijenata tražene najbolje aproksimacije dobijemo sređivanjem formula dobivenih traženjem stacionarne točke greške E.

10.2 Osnove vektorske analize

Vidjeli smo: Gradijent skalarne funkcije f je za svaku točku X iz domene te funkcije vektor $\nabla f(X)$ parcijalnih derivacija te funkcije izračunatih u X. Možemo dakle reči: ∇f je funkcija koja X-u pridružuje vektor $\nabla f(X)$. Funkcije poput ∇f, kojima je kodomena podskup nekog $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$, nazivaju se

[9] Ove greške su računate kao $c_i - (e^{y(x_i)}\ \mathrm{mol/L})$.

[10] Ove greške su računate kao $c_i - \frac{\mathrm{mol/L}}{y(x_i)}$.

[11] Ove greške su računate kao $c_i - \frac{\mathrm{mol^2/L^2}}{y(x_i)^2}$.

vektorskim funkcijama. Ako se broj koordinata u domeni i kodomeni (broj nezavisnih i zavisnih varijabli) podudara govorimo o vektorskim poljima. Primjerice, gradijent skalarne funkcije je uvijek vektorsko polje:

$$(x_1,\ldots,x_n)\overset{f}{\mapsto} f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R},(x_1,\ldots,x_n)\overset{\nabla f}{\mapsto}\nabla f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Primjer 373. *Gradijent funkcije zadane formulom $f(x,y)=xy^3$ je vektorsko polje zadano s*

$$\nabla f(x,y)=(y^3,3xy^2).$$

Primjer 374. *Funkcija zadana s*

$$F(x,y,z)=(x+y,xyz)$$

je primjer vektorske funkcije s domenom $\mathbb{R}^3$ i kodomenom $\mathbb{R}^2$. Ona primjerice trojci $(1,2,3)$ pridružuje par $(1+2,1\cdot 2\cdot 3)=(3,6)$. Ova vektorska funkcija nije vektorsko polje.

Svaku vektorsku funkciju F s n nezavisnih varijabli čija kodomena je (podskup od) $\mathbb{R}^m$ možemo shvatiti kao uređenu m-torku skalarnih funkcija istih tih varijabli:

$$F(X)=(F_1(X),F_2(X),\ldots,F_m(X))$$

ili kraće $F=(F_1,F_2,\ldots,F_m)$, gdje smo s X kratko označili elemente $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ domene od F. Funkcije F_1, F_2, …, F_m zovemo koordinatnim funkcijama od F i njihova domena je ista kao domena od F, ali su one realne, tj. kodomena im je $\mathbb{R}$.

Primjer 375. *Funkcija F iz primjera 374 ima kodomenu $\mathbb{R}^2$, dakle može se prikazati kao uređeni par svoje dvije koordinatne funkcije. One su*

$$F_1(x,y,z)=x+y$$

i

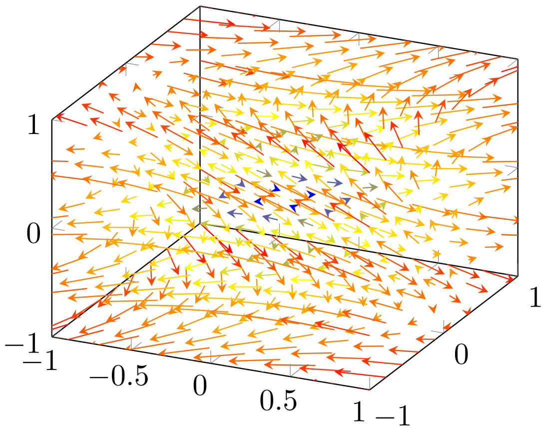
$$F_2(x,y,z)=xyz.$$

Iako u teoriji smisleni, grafovi vektorskih funkcija se obično ne crtaju. No, za vektorska polja s dvije ili tri varijable povremeno se koriste određeni grafički prikazi.

Primjer 376. *Promotrimo vektorsko polje $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definirano s*

$$F(x,y)=(-y,x)$$

Ako F želimo prikazati grafički, to činimo tako da s početkom u točki (x,y) ucrtamo orijentiranu dužinu koja prikazuje toj točki pridruženi vektor $F(x,y)=-y\vec{i}+x\vec{j}$.



Slika 10.20: Vizualizacija vektorskog polja $F(x, y, z) = (3y, 2z, x)$

Dakle, ako imamo vektorsko polje s 2 ili 3 varijable ono se vizualizira nizovima geometrijskih vektora (orijentiranih dužina) u ravnini ili (trodimenzionalnom) prostoru, pri čemu je za svaki taj vektor njegov početak interpretiran kao element domene, a sam vektor se interpretira kao tom elementu domene pridruženi element kodomene (slika 10.20).

Svaka promjena koordinatnog sustava može se interpretirati kao vektorsko polje jer je u svakom koordinatnom sustavu broj koordinata fiksiran (to je dimenzija vektorskog prostora koji se koordinatizira).

Primjerice, promjena koordinata iz Kartezijevih u polarne koordinate i obrnutu u ravnini opisana je formulama

$$K = (u, v) : (x, y) \mapsto (r, \varphi) \overset{f}{\mapsto} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, (\pi+)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

$$P = (u', v') : (r, \varphi) \overset{g}{\mapsto} (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Vidimo da se radi o dva vektorska polja s dvije varijable.

Dakle, ako izvorne koordinate x, y u ravnini želimo promijeniti u nove koordinate x', y', one će biti povezane formulama tipa

$$x' = u(x, y)$$

$$y' = v(x, y)$$

koje se mogu interpretirati kao vektorsko polje F s koordinatnim funkcijama u i v: $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

Osim Kartezijevog koordinatnog sustava i kosokutnih varijanti opisanih u poglavlju **??**, u (trodimenzionalnom) prostoru se često koriste još dva tipa koordinatnih sustava: cilindrički i sferni.

Cilindrički koordinatni sustav je direktno poopćenje polarnog koordinatnog sustava na tri dimenzije: Prve dvije koordinate su polarne koordinate projekcije promatrane točke na (x, y)-koordinatnu ravninu, a treća je jednostavno aplikata točke. Dakle, veza između cilindričkih i Kartezijevih koordinata dana je formulama

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Primjer 377. *Točka koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate* $(1, 1, 1)$ *ima cilindričke koordinate* $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$ *i* $z = 1$.

Primjer 378. *U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba* $r = 4$ *predstavlja cilindar kojemu je os* z*-os i polumjer* 4.

U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba $\varphi = 90°$ *predstavlja poluravninu koja je pola* (y, z)*-ravnine (ona polovina za koju su ordinate pozitivne).*

U cilindričkom koordinatnom sustavu jednadžba $z = 2$*, kao i u Kartezijevom koordinatnom sustavu, predstavlja ravninu paralelnu s* (x, y)*-ravninom na „visini”* 2.

Sferni koordinatni sustav je definiran malo drugačije, ali također uz referencu na „pripadni” Kartezijev. Položaj točke T u sfernom koordinatnom sustavu se opisuje s udaljenošću $r \geq 0$ (udaljenost T do ishodišta), kutom φ (azimut, tj. polarni kut projekcije točke na (x, y)-ravninu) i kutom θ (polarna udaljenost) koji opisuje otklon dužine $\overline{OT}$ pozitivnog dijela z-osi. Raspon za θ se u pravilu uzima od 0 do $\pi = 180°$. Veza između Kartezijevih koordinata (x, y, z) i sfernih (r, ϕ, θ) jedne te iste točke je dana jednadžbama

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$

odnosno

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Primjer 379. *Sferni koordinatni sustav je u osnovi prilagođeni zemljopisni koordinatni sustav. Ako Zemlju aproksimiramo kuglom, sve točke na njezinoj površini imaju istu prvu sfernu koordinatu (to je prosječni polumjer Zemlje).*

Kao (x, y)-ravnina uzima se je ravnina ekvatora, a z-os je pravac kroz sjeverni i južni pol.

Zemljopisna dužina je azimut točke na Zemljinoj površini, tj. otklon ravnine njezinog meridijana u odnosu na nulti meridijan (uzima se raspon od $-180°$ do $+180°$ umjesto matematički standardnijeg od 0 do $360°$). Negativni azimuti odgovaraju zapadnim zemljopisnim dužinama, a pozitivni istočnim.

Zemljopisna širina je polarna udaljenost točke na Zemljinoj površini, pri čemu se ne gleda otklon od spojnice središta sa sjevernim polom, nego od ravnine ekvatora, pa ovdje imamo raspon od $-90°$ (južni pol) do $+90°$ (sjeverni pol), odnosno zemljopisna širina je $90° - \rho$.

Primjer 380. *Sferne koordinate točke koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(1, -1, 0)$ su $\theta = 90°$ (jer je točka u (x, y)-ravnini), $r = \sqrt{2}$ i $\varphi = 225°$.*

Primjer 381. *U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba $r = 4$ predstavlja sferu polumjera 4 sa središtem u ishodištu.*

U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba $\varphi = 90°$ predstavlja poluravninu koja je pola (y, z)-ravnine (ona polovina za koju su ordinate pozitivne).

U sfernom koordinatnom sustavu jednadžba $\theta = 30°$ predstavlja konus s vrhom u ishodištu kojemu je pozitivni dio z-osi os simetrije, a kojemu je kut pri vrhu jednak $60°$.

Općenito imamo: Ako prostorne koordinate x, y, z (bile one Kartezijeve ili ne) želimo zamijeniti novim koordinatama x', y', z', njihova veza je uvijek opisana jednadžbama tipa

$$\begin{aligned} x' &= u(x, y, z), \\ y' &= v(x, y, z), \\ z' &= w(x, y, z), \end{aligned}$$

tj. promjena koordinatnog sustava u prostoru opisuje se vektorskim poljem $F = (u, v, w)$.

Vratimo se općenito na vektorske funkcije. Primijetimo da nema smisla govoriti o derivaciji vektorske funkcije, čak ni parcijalnoj. No, s obzirom na to da je svaka vektorska funkcija F oblika $(F_1, \dots, F_n)$, gdje su njezine koordinatne funkcije F_i skalarne, ima smisla gledati derivacije

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

koordinatnih funkcija po varijablama. Ako one postoje – a u ovom poglavlju, rekli smo, gledamo samo derivabilne funkcije – one se mogu uredno zapisati u matricu koja na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju i-te po redu koordinatne funkcije po j-toj varijabli. Tu matricu zovemo Jacobijevom matricom JF od F. Druga česta oznaka za Jacobijevu matricu je

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(X).$$

Primjer 382. *Jacobijeva matrica funkcije iz primjera 374 je*

$$JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}.$$

Dakle, broj redaka Jacobijeve matrice jednak je broju koordinatnih funkcija vektorske funkcije, a broj stupaca jednak je njezinom broju varijabli. Posebno, za vektorska polja pripadna Jacobijeva matrica je kvadratna. Determinantu Jacobijeve matrice vektorskog polja F nazivamo Jakobijanom od F (u X).

Primjer 383. *Odredit ćemo Jakobijan za tri opisane promjene koordinata iz Kartezijevih u polarne, cilindričke i sferne koordinate. Odgovarajuća vektorska polja su, kako smo vidjeli, polja P, C i S:*

$$P(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

$$C(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z),$$

$$S(r, \varphi, \rho) = (r\cos\varphi\sin\rho, r\sin\varphi\sin\rho, r\cos\rho).$$

Stoga su odgovarajući Jakobijani redom

$$\det JP(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

$$\det JC(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

$$\det JS(r, \varphi, \rho) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Za promjene koordinata (i općenito za „lokalno invertibilna” vektorska polja, tj. polja F koja za svaku točku Y iz svoje slike imaju okolinu na kojoj postoji inverz) vrijedi:

$$JF^{-1}(Y) = JF(X)^{-1} \quad (Y = F(X)).$$

To posebno znači (jer znamo da je determinanta inverzne matrice recipročna determinanti polazne) da su Jakobijani prijelaza iz polarnih, cilindričkih odnosno sfernih u Kartezijeve koordinate recipročni onima za prijelaz iz Kartezijevih u polarne, cilindričke odnosno sferne.

Primjer 384. *Jakobijan prijelaza iz polarnih u Kartezijeve koordinate u ravnini je*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

što je ujedno i Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u cilindričke koordinate. Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u sferne koordinate je

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta} = \frac{1}{r \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}}.$$

Od velikog su fizikalnog značenja skalarnim i vektorskim funkcijama po određenim principima iz pripadnih parcijalnih derivacija konstruirana nova skalarna i vektorska polja. Posebnu važnost tu ima linearni operator poznat pod nazivon nabla-operator, u oznaci

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

On na funkcije kojima su nezavisne varijable $x_1, \dots, x_n$ može djelovati na tri načina:

1. ako djeluje na skalarnu funkciju f, rezultat djelovanja nabla-operatora je njezin gradijent $\nabla f = \operatorname{grad} f$, koji je vektorsko polje s kojim smo se već upoznali;

2. ako djeluje na vektorsko polje F tako da rezultat bude skalarna funkcije, radio se o računanju divergencije $\nabla \cdot F = \operatorname{div} F$ tog vektorskog polja;

3. ako djeluje na vektorsko polje F s tri varijable i to tako da rezultat bude novo vektorsko polje, radi se o računanju rotacije $\nabla \times F = \operatorname{rot} F$ tog vektorskog polja.

Prije nego detaljnije proučimo divergenciju i rotaciju vektorskih polja, dajmo još jedan primjer za gradijent.

Primjer 385. *Potencijalna energija međudjelovanja dvaju naboja Q_1 i Q_2 udaljenih za r je*

$$V = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Sila koja djeluje na drugi naboj uslijed postojanja prvog je

$$\overrightarrow{F} = -\nabla V = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r} = \frac{Q_1 Q_2 \overrightarrow{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Pritom je $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ pa je $\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$ i analogno za deriviranje po y i z. Stoga je

$$\overrightarrow{F} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}[-x, -y, -z] = \frac{Q_1 Q_2 \overrightarrow{r_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

gdje je $\overrightarrow{r}_1$ jedinični vektor smjera i orijentacije kao $\overrightarrow{r}$ (vektor pozicije drugog naboja u odnosu na prvi). Sila po jedinici drugog naboja (dakle, sila kojom prvi naboj djeluje na jedinicu naboja na poziciji $\overrightarrow{r}$) je elektrostatsko polje naboja Q_1:

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{Q_2}\overrightarrow{F} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{r_1}.$$

Primijetimo:

$$\overrightarrow{E} = -\nabla\phi$$

gdje je $\phi = V/Q_2$ pripadno skalarno polje elektrostatskog potencijala.

Primijetimo i da se gradijent može koristiti za procjenu promjene vrijednosti funkcije pri promjenama varijabli u iznosima $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$:

$$\nabla f(X) \cdot [\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\Delta x_i \approx \Delta f.$$

Neka je sad F vektorsko polje. Njegova divergencija $\nabla \cdot F$ je skalarna funkcija koja je jednaka zbroju prvih parcijalnih derivacija svih koordinatnih funkcija od F redom po odgovarajućim varijablama, tj. divergencija vektorskog polja je trag njegove Jacobijeve matrice:

$$\operatorname{div} F(X) = \nabla \cdot F(X) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(X) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(X).$$

Primjer 386. *Neka je $F(x, y) = (\ln y, \frac{x}{y})$. Tada je*

$$\nabla \cdot F(x, y) = \frac{\partial \ln y}{\partial x} + \frac{\partial x y^{-1}}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

Primjer 387. *Gaußov zakon za magnetsko polje* $\mathbf{B}$ *ima oblik* $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$*, čime se iskazuje da nema točkastih izvora magnetskog polja.*

Rotacija vektorskog polja se definira samo za vektorska polja triju varijabli, dakle za $F = (F_x, F_y, F_z) : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rot} F(X) = \nabla \times F(X) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje s istim varijablama.

Primjer 388. *Ako je* $F(x, y, z) = (y, z, x) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$*, onda je*

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = (-1, -1, -1).$$

Napomena 41. *Oznake za tri načina djelovanja nabla-operatora na funkcije potječu od sličnosti pravila izračunanja s tri tipa produkata vezanih za geometrijske vektore:*

- *Poput množenja vektora skalarom —* ∇f*, gdje je* f *skalarna funkcija;*
- *Poput skalarnog produkta vektora —* $\nabla \cdot F$*, gdje je* F *vektorsko polja;*
- *Za* $n = 3$*: poput vektorskog produkta vektora—* $\nabla \times F$*, , gdje je* F *vektorsko polje.*

Nabla-operator je u sva svoja tri načina djelovanja linearan, dakle je

$$\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g,$$

$$\nabla \cdot (aF + bG) = a\nabla \cdot f + b\nabla \cdot G,$$

$$\nabla \times (aF + bG) = a\nabla \times f + b \times \cdot G,$$

za sve konstante a i b i skalarne funkcije f i g, odnosno vektorska polja F i G.

Za skalarne funkcije f, g i vektorska polja F, G (uz uvjet da izrazi u formulama imaju smisla) vrijede i sljedeće formule:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

$$\begin{gathered}\nabla\times(fF)=(\nabla f)\times F+f(\nabla\times F),\\ \nabla\times(F\times G)=(\nabla\cdot G)F+(G\cdot\nabla)F-(\nabla\cdot F)G-(F\cdot\nabla)G,\\ \nabla\cdot(fF)=(\nabla f)\cdot F+f(\nabla\cdot F),\\ \nabla\cdot(F\times G)=(\nabla\times F)\cdot G-F\cdot(\nabla\times G),\\ \nabla(F\cdot G)=F\times(\nabla\times G)+G\times(\nabla\times F)+(F\cdot\nabla)G+(G\cdot\nabla)F.\end{gathered}$$

Ponekad je potrebno odrediti „dvostruko” djelovanje nabla-operatora. Budući da je ∇f (gradijent) vektorsko polje, na njega ∇ može djelovati kao divergencija ($\nabla\cdot\nabla f=\operatorname{div}\operatorname{grad}f$), a u slučaju triju varijabli i kao rotacija ($\nabla\times\nabla f=\operatorname{rot}\operatorname{grad}f$). Budući da je $\nabla\cdot F$ (divergencija) skalarna funkcija, na njegu ∇ može djelovati samo kao gradijent ($\nabla\nabla\cdot F=\operatorname{grad}\operatorname{div}f$). Budući da je $\nabla\times F$ (rotacija) vektorsko polje triju varijabli, na njega ∇ može djelovati kao divergencija ($\nabla\cdot\nabla\times F=\operatorname{div}\operatorname{rot}F$) i kao rotacija ($\nabla\times\nabla\times F=\operatorname{rot}\operatorname{grad}F$).

Primjer 389. *Neka je f skalarna funkcija varijabli x, y, z. Onda je rotacija njezinog gradijenta*

$$\nabla\times\nabla f=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right),$$

što je po Schwartzovom teoremu nulvektor.

Dakle, pokazali smo: Rotacija gradijenta skalarne funkcije triju varijabli je nul-polje:

$$\nabla\times(\nabla f)=\mathsf{rot\,grad}f=[0,0,0].$$

Npr., rotacija elektrostatskog polja točkastog naboja je nul-polje: $\nabla\times\vec{E}=-\nabla\times\nabla\phi=\vec{0}$.

Slično se pokaže: Divergencija rotacije vektorskog polja s tri varijable je nul-funkcija:

$$\nabla\cdot(\nabla\times F)=\mathsf{div\,rot}F=0.$$

Među preostala tri smislena dvostruka djelovanja nabla-operatora ističe se divergencija gradijenta skalarne funkcije, koja se naziva Laplaceovim operatorom:

$$\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f.$$

Primjer 390. *Raspišimo Laplaceov operator za funkcije triju varijabli:*

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Općenito je

$$\nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Primjer 391. *Za $f(x,y,z) = A\sin(ax)\sin(by)\sin(cz)$ je*

$$\nabla^2 f(x,y,z) = -(a^2+b^2+c^2) f(x,y,z),$$

tj. funkcija f je svojstveni vektor Laplaceovog operatora koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $-a^2-b^2-c^2$.

Napomena 42. *Laplaceov operator se pojavljuje u mnogim važnim jednadžbama u fizici:*

- *Laplaceova jednadžba $\nabla^2\phi = 0$,*
- *Helmholtzova jednadžba $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$,*
- *valna jednadžba $\nabla^2\phi = \frac{1}{v}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$,*
- *Schrödingerova jednadžba (za stacionarna stanja): $\hat{H}\psi = E\psi$, $\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V$.*

Napomena 43. *Za račune s gradijentima, divergencijama, rotacijama i Laplaceovim operatorom često su potrebne zamjene koordinata (osobito u kvantnoj teoriji iz Cartesiusovih u sferne). Odgovarajuće formule se izvode pomoću lančanog pravila. Tako su primjerice gradijent i Laplaceov operator skalarne funkcije izražene preko sfernih koordinata dani kao*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\right),$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi^2},$$

a divergencija i rotacija vektorskog polja u sfernim koordinatama ($F = (F_r, F_\phi, F_\theta)$) se računaju formulama

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

i

$$\nabla \times F = \frac{1}{r\sin\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi F_\theta) - \frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial F_r}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)\right)\hat{\phi} +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi) - \frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right)\hat{\theta}.$$

U zadnjoj formuli su $\hat{r}$, $\hat{\phi}$ i $\hat{\theta}$ jedinični vektori baze sfernog koordinatnog sustava ($\hat{r} = \cos\theta\sin\phi\overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\phi\overrightarrow{j} + \cos\phi\overrightarrow{k}$, $\hat{\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j}$, $\hat{\phi} = \cos\theta\cos\phi\overrightarrow{i} + \sin\theta\cos\phi\overrightarrow{j} - \sin\phi\overrightarrow{k}$).

Prije nego se posvetimo integralima funkcija više varijabli, istaknimo jednu važnu vrstu vektorskih polja, a to su konzervativna vektorska polja. Znamo da je gradijent skalarne funkcije uvijek vektorsko polje, dakle su bar vektorska polja gradijenti skalarnih funkcija (kao što su i neke funkcije jedne varijable derivacije neke funkcije).

Primjer 392. *Je li $F(x,y) = (x+y, xy)$ gradijent neke skalarne funkcije? Pretpostavimo da jest: $F = \nabla f$, odnosno*

$$(x+y, xy) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

za neku $f = f(x,y)$. Integriranjem $\frac{\partial f}{\partial x} = x + y$ po x dobijemo

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = xy - x.$$

Integriranjem po y dobijemo

$$C(y) = x\frac{y^2}{2} - xy + c,$$

što je nemoguće (C deriviranjem po x mora dati 0). Dakle, nije svako vektorsko polje gradijent neke skalarne funkcije.

Dakle, neka vektorska polja su gradijenti skalarnih funkcija, a neka nisu.

Definicija 90 (Konzervativno vektorsko polje)**.** *Vektorsko polje F zove se konzervativnim ako postoji skalarna funkcija f takva da je $F = \nabla f$. U tom slučaju f se zove potencijalom od F.*

Uočite da je po definiciji ∇f uvijek konzervativno vektorsko polje. Također primijetimo da je rotacija konzervativnog vektorskog polja triju varijabli nul-polje (ako je F konzervativno, onda je $F = \nabla f$, pa je $\nabla \times F = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ kako smo već pokazali).

Ako je $F = \nabla f$, znači da je $F_1 = \frac{\partial f}{x_1}, \ldots, F_n = \frac{\partial f}{x_n}$, pa po Schwartzovom teoremu mora vrijediti

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Gornji uvjet zove se Eulerovim uvjetom: Vektorsko polje zadovoljava Eulerov uvjet ako mu je Jacobijeva matrica simetrična. Vektorsko polje koje ne zadovoljava Eulerov uvjet sigurno nije konzervativno. Preciznije, vrijedi

Teorem 48. *Ako je domena vektorskog polja F otvorena i povezana*[12]*, vektorsko polje F je konzervativno točno onda kad njegove koordinatne funkcije zadovoljavaju Eulerov uvjet.*

Primjer 393. *Vektorsko polje $F(x, y) = (2x^3y^4 + x, 2x^4y^3 + y)$ definirano je na čitavom $\mathbb{R}$. Za njega se Eulerov uvjet svodi na samo jednu jednakost:*

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Budući da je $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 8x^3y^3$ i $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 2x^3y^3$, vidimo da ovo polje zadovoljava Eulerov uvjet, a definirano je na otvorenom povezanom skupu, dakle je sigurno konzervativno.

Stoga znamo da je $F_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ za neki potencijal f, odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3y^4 + x$$

pa integriranje po x daje

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}x^2 + c(y),$$

što deriviranjem po y daje

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^4y^3 + c'(y)$$

što opet zbog konzervativnosti mora biti jednako $F_y = 2x^4y^3 + y$. Stoga je $c'(y) = y$, dakle je $c(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ i zaključujemo da je traženi potencijal

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C.$$

[12] Primjerice, cijeli $\mathbb{R}^n$, $\langle 0, \infty\rangle^n$, otvoreni pravokutnik, otvoreni krug,..., ali primjerice ne ako je domena cijeli prostor bez ishodišta ili neke koordinatne osi.

Ponovimo bitno... Vektorske funkcije su funkcije kojima je domena podskup od nekog $\mathbb{R}^m$ $(m > 1)$; drugačije rečeno, rezultat djelovanja vektorske funkcije je uređena m-torka brojeva. Vektorske funkcije kojima je broj koordinata u domeni i kodomeni jednak nazivaju se vektorskim poljima. Svaku vektorsku funkciju $f : D \to K \subseteq \mathbb{R}^m$ možemo shvatiti kao uređenu m-torku svojih koordinatnih funkcija. Jacobijeva matrica vektorske funkcije na poziciji (i, j) ima parcijalnu derivaciju i-te koordinatne funkcije po j-toj varijabli. Za vektorska polja Jacobijeva matrica je kvadratna, a njezina determinanta naziva se Jakobijan.

Nabla-operator ∇ je linearan operator koji djeluje na skalarne ili vektorske funkcije više varijabli. Ako je funkcija skalarna dobivamo vektorsko polje: gradijent $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^t$. Ako je funkcija vektorsko polje imamo dva načina: divergencija $\nabla \cdot F = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ i rotacija $\nabla \times F$, koja je definirana samo za vektorska polja s tri varijable. Rotacija takvog polja je novo vektorsko polje koje se računa načinom sličnim računanju vektorskog produkta. Divergencija gradijenta naziva se Laplaceovim operatorom, a divergencija rotacije i rotacija gradijenta (za funkcije triju varijabli) su nul-funkcije. Vektorska polja koja su gradijenti skalarnih funkcija (potencijala) nazivaju se konzervativnim vektorskim poljima. Da bi vektorsko polje bilo konzervativno, nužno je da njegova Jacobijeva matrica bude simetrična (to se zove Eulerovim uvjetom).

10.3 Integralni račun funkcija više varijabli

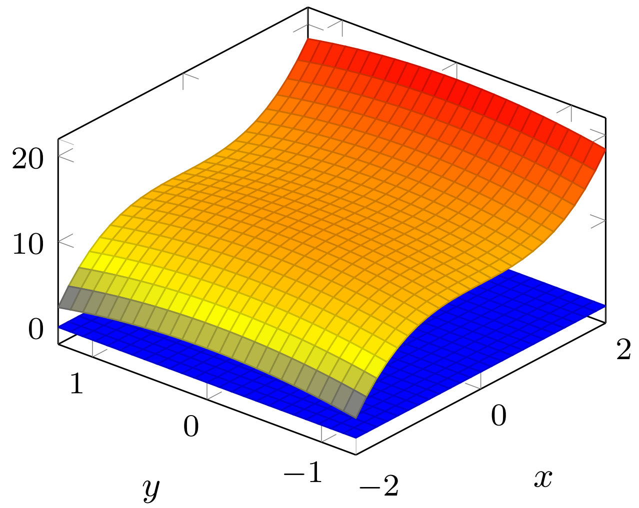
Postoje tri načina na koje obične, Riemannove integrale (poglavlje 5) možemo poopćiti na integrale funkcija više varijabli. To su višestruki integrali te krivuljni integrali prve i druge vrste.

10.3.1 Višestruki integrali

Kao što znamo, za nenegativne po dijelovima neprekidne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

predstavlja površinu omeđenu grafom podintegralne funkcije f, područjem integriranja (segmentom $[a, b]$ kao podskupom x-osi) i vertikalama povućenim u rubovima područja integriranja do grafa. Ideja višestrukih integrala je poopćiti jednostruke (određene, Riemannove) integrale na skalarne funkcije



Slika 10.21: Vizualizacija dvostrukog integrala

više varijabli tako da povećamo i dimenziju rezultata. I u ovom slučaju područje integriranja mora biti podskup domene podintegralne, dakle za funkciju s n varijabli područje integriranja bit će podskup od $\mathbb{R}^n$.

Neka je f nenegativna (neprekidna) skalarna funkcija dviju varijabli i A podskup njezine domene (dakle, podskup (x, y)-ravnine). Dvostruki integral od f po području integriranja A, u oznaci

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ili} \quad \iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$$

je volumen omeđen grafom te funkcije, skupom A i vertikalama povučenim na A u svim točkama ruba od A (slika 10.21: dvostruki integral po plavom području od funkcije čiji graf je žuto-narančasta ploha je volumen omeđen s njima i vertikalama koje spajaju rubove područja integracije s grafom).

Primjer 394. *Graf $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1$, ako je $A = [a, b] \times [c, d]$, je pravokutnik u ravnini $z = 1$ koji se nalazi „točno iznad" (i sukladan je) pravokutniku A. Stoga je*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \cdot (b-a) \cdot (d-c).$$

Dijelovi volumena koji su ispod (x, y)-ravnine se, kao i dijelovi povšine koji su ispod x-osi za obične određene integrale, u integral uključuju s negativnim predznakom.

Primjer 395. *Vrijedi*

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 0.$$

Naime, područje integriranja je jedinični krug u (x, y)-ravnini sa središtem u ishodištu, te je stoga dio prostora čiji volumen se opisuje gornjim integralom „valjak" (polumjera 1 kojemu je os z-os) čija jedna baza je spomenuti jedinični krug, a druga je dio grafa podintegralne funkcije $f(x, y) = y$, tj. dio ravnine $z = y$ (a ona sadrži x os). Stoga je točno pola tog volumena iznad, a pola ispod područja integriranja te je integral jednak 0.

Kao i određeni integrali, i dvostruki (i svi ostali višestruki) integrali su linearni:

$$\iint\limits_A (f(x, y) + g(x, y)) \,\mathrm{d}A = \iint\limits_A f(x, y) \,\mathrm{d}A + \iint\limits_A g(x, y) \,\mathrm{d}A,$$

$$\iint\limits_A k \cdot f(x, y) \,\mathrm{d}A = k \cdot \iint\limits_A f(x, y) \,\mathrm{d}A.$$

Postupak dvostrukog (i višestrukog) integriranja ovisi uvelike i o području integriranja, a ne samo o podintegralnoj funkciji. Najlakše se računaju dvostruki intetrali po području integriranja koje je pravokutnik s bridovima paralelnim koordinatnim osima:

Teorem 49 (Fubini)**.** *Ako je podintegralna funkcija neprekidna na pravokutniku $[a, b] \times [c, d]$, onda vrijedi*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \,\mathrm{d}y.$$

Primjer 396. *Izračunajmo* $\iint_{[-5,4]\times[0,3]} (2x - 4y^3) \,\mathrm{d}A$. *Prema Fubinijevom teoremu, taj je integral jednak*

$$\int_{x=-5}^4 \left(\int_{y=0}^3 (2x - 4y^3) \,\mathrm{d}y \right) \,\mathrm{d}x = \int_{-5}^4 (2xy - y^4)|_{y=0}^3 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-5}^4 (6x - 81) \,\mathrm{d}x = 3x^2 - 81x|_{-5}^4 = -756.$$

Ako je područje integriranja kao u Fubinijevom teoremu i neprekidna podintegralna funkcija se može faktorizirati na zasebne funkcije svojih dviju varijabli, dvostruki integral se svodi na umnožak dva obična, jednostruka integrala. Naime, ako je $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, onda u Fubinijevom teoremu imamo

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d g(x) \cdot h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b g(x) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Dakle, pokazali smo

Korolar 5. *Ako su funkcije g i h neprekidne funkcije na $[a,b]$ odnosno na $[c,d]$, onda vrijedi*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x) \cdot h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

Napomenimo da se prethodna formula, kao i Fubinijev teorem dadu primijeniti i za slučaj nepravih integrala ako je neka od granica a, b, c, d beskonačna.

Primjer 397.

$$\int_1^2 \int_1^2 xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_1^2 y^2\,\mathrm{d}y \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{2}.$$

Naravno, nismo uvijek u situaciji da područje integriranja A bude pravokutnik sa stranicama paralelnim koordinatnim osima. Tada je vrlo često zgodno provesti supstituciju – zamjenu – varijabli kako bismo isto područje jednostavnije opisali u nekom drugom koordinatnom sustavu. Posebno često je zgodan prijelaz na polarne koordinate.

Primjer 398. *Ako je A četvrtina jediničnog kruga sa središtem u ishodištu, ona se sastoji od točaka (x,y) za koje je $0 \leq x \leq 1$, a za svaki takav x odgovarajući y se nalazi u rasponu od 0 do $\sqrt{1-x^2}$. S druge strane, ako umjesto u Kartezijevim koordinatama isto područje A opišemo u polarnim koordinatama, vidimo da se ono sastoji od svih točaka ravnine s $0 \leq r \leq 1$ i $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.*

Kao i u prethodnom primjeru, neka područja integriranja lakše je opisati u polarnim koordinatama. To se posebice odnosi na kružne isječke iz kružnica sa središtem u ishodištu ili pak na kružne vijence sa središtem u ishodištu:

- Kružni isječak iz kruga polumjera a sa središtem u O, a koji se nalazi između polupravaca $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ opisan je s $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, tj. u polarnim koordinatama to je $[0, a] \times [\alpha, \beta]$.

- Kružni vijenac između kružnica $r = a$ i $r = b$ sa središtem u O opisan je s $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, tj. u polarnim koordinatama to je $[a, b] \times [0, 2\pi]$.

Naravno, znamo to još otprije, svaka supstitucija (ovdje: zamjena varijabli) uz efekt na granice integriranja i supstituciju u podintegralnu funkciju sa sobom nosi i efekt na diferencijal. Za slučaj prijelaza iz Kartezijevih u polarne kooordinate diferencijal $\mathrm{d}A$ iz $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ prelazi u $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. To možemo argumentirati ovako: Ako pravokutniku sa stranicama paralelnim koordinatnim osima dodamo pravokutnik širine Δx i visine Δy, došlo je do promjene površine $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Ako pak krugu polumjera r dodamo isječak kružnog vijenca debljine Δr sa središnjim kutom $\Delta\varphi$, to je približno pravokutnik sa stranicama Δr i $r\Delta\varphi$, dakle je sad $\Delta A \approx r\Delta r\Delta\varphi$. Imamo dakle formulu za zamjenu varijabli iz Kartezijevih u polarne kooordinate u dvostrukim integralima:

$$\int\int_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_A f(r, \varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.$$

Primjer 399. *Izračunajmo*

$$\iint\limits_A e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ako je A četvrtina jediničnog kruga koja se nalazi u prvom kvadrantu. U primjeru 398 smo vidjeli da je u polarnim koordinatama $A = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Uz to znamo da je veze Kartezijevih i polarnih koordinata takva da je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dakle imamo:

$$\iint\limits_A e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^r \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_{r=0}^{1} re^r\,\mathrm{d}r \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}\int_{r=0}^{1} re^r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2},$$

pri čemu je posljednji integral izračunat parcijalnom integracijom.

Uočimo: Dodatni koji se pojavio pri zamjeni koordinata iz Kartezijevih u polarne, tj. r, je točno Jakobijan prijelaza iz Kartezijevih u polarne koordinate u ravnini. Tako vrijedi i općenito: Ako prelazimo iz koordinata (x, y)

u koordinate (x', y') u ravnini, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_A f(x',y')\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\right|\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'.$$

Dakle, pri prijelazu iz jednog koordinatnog sustava u drugi, uz očigledne supstitucije pri opisu područja integriranja i unutar podintegralne funkcije kao dodatni faktor pojavljuje se apsolutna vrijednost odgovarajućeg Jakobijana. Zašto apsolutna vrijednost? Ako se sjetimo kako smo dobili Jakobijan, vidjeli smo da se radi o determinanti Jakobijeve matrice vektorskog polja, te stoga njegov predznak ovisi o redoslijedu kojim navodimo koordinatne funkcije vektorskog polja. Kako ne želimo da rezultat integrala ovisi o tome kojim smo redoslijedom naveli nove (ili stare) varijable – svjedno je zovemo li prvom polarnom koordinatom r ili φ – potrebno je pri zamjeni varijabli uzeti apsolutnu vrijednost Jakobijana.

Koristeći formulu za zamjenu varijabli i Fubinijev teorem dobivamo još dvije korisne formule za dvostruke integrale. Ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $x = a$, $x = b$ i grafovima funkcija $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Slično, ako je područje integriranja A omeđeno pravcima $y = c$, $y = d$ i grafovima funkcija $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, onda je

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

Primjer 400. *Integrirajmo $f(x, y) = x + 2y$ po dijelu prvog kvadranta omeđenom s y-osi, pravcem $y = 9$ i parabolom $y = x^2$. Područje integriranja A je trokut (s jednom zakrivljenom – paraboličnom – stranicom) s vrhovima O, $(0, 9)$ i $(3, 9)$ (sjecište $y = 9$ s $y = x^2$). Dakle, ono se sastoji od svih točaka (x, y) s $0 \leq x \leq 3$, a za svaki takav x odgovarajući y ide od parabole do $y = 9$, tj. za svaki x je $x^2 \leq y \leq 9$. Stoga računamo*

$$\iint\limits_A (x+2y)\,\mathrm{d}A = \int_{x=0}^3 \left(\int_{y=x^2}^9 (x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x=0}^3 xy + y^2\big|\, y = x^{2^9}\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^3 (9x + 81 - x^3 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{4293}{20}.$$

Daljnjim povećanjem dimenzije dobivamo trostruke (i četverostruke, peterostruke ...) integrale. Konkretno, kao što jednostruki integral jedinične funkcije 1 po $[a, b]$ daje površinu čiji iznos je duljina područja integriranja ($\int_{[a,b]} \mathrm{d}x = (b - a) \cdot 1$) i kao što dvostruki integral jedinične funkcije 1 po području A (u (x, y)-ravnini) daje volumen čiji iznos je površina područja integriranja ($\iint_A \mathrm{d}A = P(A) \cdot 1$), tako će i trostruki integral jedinične funkcije 1 po dijelu prostora W dati iznos jednak volumenu područja integriranja ($\iiint_W \mathrm{d}V = V(W) \cdot 1$), a jedinica tog rezultata je umnožak jedinice volumena i jedinice podintegralne funkcije. Dakle, trostruki integrali se označavaju s

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}V,$$

gdje je $V \subseteq \mathbb{R}^3$ podskup domene podintegralne funkcije, a jedinica rezultata je umnožak jedinica od x, y, z i f. Za trostruke i ostale višestruke integrale vrijede i analogije svih navedenih pravila o dvostrukim integralima: Fubinijev teorem ako je područje integriranja kvadar $V = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ (sa stranama paralelnim koordinatnim ravninama) i f neprekidna na V sad poprima oblike

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

i analogno za ostale odabire redoslijeda integriranja. Također, ako je dodatno f moguće faktorizirati kao $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$ vrijedi

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right) \cdot \left(\int_p^q k(z)\,\mathrm{d}z \right).$$

Pri zamjeni varijabli u trostrukim integralimaponovno se kao dodatni faktor pojavljuje apsolutna vrijednost Jakobijana:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f(x', y', z') \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} \right| \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

Specijalno, za prijelaz iz Kartezijevih u sferne koordinate imamo

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(r, \varphi, z) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

npr.

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(r, \phi, \theta) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Prije nego damo nekoliko primjera kako se trostruki integrali koriste u vjerojatnosnom računu, odnosno kvantnoj teoriji, istaknimo još jedno bitno svojstvo i jednu primjenu integrala.

Znamo da je jednostruki (obični određeni) integral po skupu duljine 0 površina iznosa 0:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za višestruke integrale – ako je mjera područja integriranja u prostoru u kojem se nalazi graf podintegralne funkcije jednaka 0, onda je i integral jednak 0. Konkretno, dvostruki integral po skupu površine 0 je volumen iznosa 0

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}A = 0 \quad (P(A) = 0),$$

kao što je i trostruki integral po skupu volumena 0 jednak 0

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}\Omega = 0 \quad (V(\Omega) = 0).$$

Primjer 401. *Ako je S površina kugle (sfera), onda je za svaku skalarnu funkciju f triju varijabli $\iiint_S f\,\mathrm{d}V = 0$ zato što je volumen sfere jednak 0.*

Također, kao što je kvocijent jednostrukog integrala neke funkcije i duljine područja integriranja prosječna vrijednost te funkcije na tom području integriranja (vidi odjeljak 5.6), tako se to pravilo može proširiti i na skalarne funkcije više varijabli. Tako je prosječna vrijednost funkcije f dviju varijabli x i y ako se one nalaze unutar područja A jednaka $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$ podijeljenom s površinom od A, a prosječna vrijednost funkcije f triju varijabli x, y i z ako se one nalaze unutar dijela prostora V jednaka $\iint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$ podijeljenom s volumenom od V.

Primjer 402. *Prosječna vrijednost funkcije $f(x,y) = xy$ na jediničnom krugu iznosi*

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{r=0}^{1}\iint\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

U odjeljku 5.6 upoznali smo se i s osnovnim principima primjene integrala na računanje vjerojatnosti, očekivane vrijednosti i sl. za neprekidne slučajne varijable opisane funkcijom gustoće vjerojatnosti. Ti se principi prenose i na slučaj funkcija gustoće koje ovise o više varijabli:

Neka je f funkcija gustoće vjerojatnosti za nalaženje nekog objekta na nekoj poziciji u ravnini (funkcija f onda ovisi o dvije varijable) ili u prostoru (pa je f funkcija triju varijabli). Tada vjerojatnost da se taj objekt nalazi unutar dijela ravnine A odnosno dijela prostora V jednaka $P = \iint_A f\,\mathrm{d}A$ odnosno $P = \iiint_V f\,\mathrm{d}V$. Kako se svaki objekt sigurno nalazi negdje, funkcija f mora biti normirana, dakle uvijek za funkcije gustoće vrijedi $\iint_{\mathbb{R}^2} f\,\mathrm{d}A = 1$ (za funkcije dviju varijabli) odnosno $\iiint_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}V = 1$ (za funkcije triju varijabli).

U kvantnoj teoriji funkcija gustoće vjerojatnosti je, prema Bornovoj interpretaciji, kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije (orbitale): $f = |\psi|^2$ (podsjećamo da su u općem slučaju valne funkcije kompleksne). Prosječna (očekivana) vrijednost veličine opisane operatorom $\hat{\Omega}$ je u tom slučaju

$$\langle \Omega \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{\Omega} \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(i analogno za dvodimenzionalni slučaj). Skalarni produkti valnih funkcija računaju se kao integrali po čitavom prostoru, tj. po čitavim njihovim domenama:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_D \psi_1^* \psi_2 \,\mathrm{d}S.$$

Primjer 403. *Odredimo prosječnu (očekivanu) udaljenost elektrona 1s-orbitale do jezgre atoma vodika; 1s-orbitala je funkcija*

$$\psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0},$$

dakle je po Bornovoj interpretaciji funkcija gustoće ovdje

$$f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}.$$

Linearan operator koji odgovara udaljenosti čestice je do jezgre

$$\hat{\Omega} = \hat{r} = r\cdot,$$

dakle radi se o množenju valne funkcije s r. Stoga je

$$\langle r \rangle = \iiint_{\mathbb{R}^3} \psi^* \hat{r} \psi \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathbb{R}^3} r \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} \,\mathrm{d}V =$$

$$= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^3 e^{-2r/a_0} \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2} a_0.$$

Primjer 404. *Pokažimo da su vodikove 1s i 2s orbitale ortogonalne, tj. da je*

$$\langle \psi_{1s}, \psi_{2s} \rangle = 0.$$

Imamo

$$\psi_{2s}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)},$$

a ψ_{1s} *znamo iz prethodnog primjera 403. Dakle, računamo*

$$\langle \psi_{1s}, \psi_{2s} \rangle = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} \psi_{1s}\psi_{2s} \cdot r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

S obzirom na to da multiplikativne konstante nisu 0*, dovoljno je pokazati da je*

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{+\infty} e^{-r/a_0} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)} r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 0.$$

Podintegralna funkcija se faktorizira na funkcije od r*,* φ *i* θ *pa po korolaru Fubinijevog teorema treba izračunati jednostruke integrale po tim varijablama. Imamo*

$$\int_{r=0}^{\infty} \left(2r^2 - \frac{r^3}{a_0}\right) e^{-3r/(2a_0)} \, \mathrm{d}r = 0,$$

koristeći dvaput formulu 5.2. Stoga je i ukupni integral jednak 0*.*

Primjer 405. *Ako je elektron opisan valnom funkcijom* ψ*, a zanima nas vjerojatnost da se on nađe izvan stošca s vrhom u ishodištu, kojemu je os pozitivni dio* z*-osi i kut pri vrhu* $45°$*, a unutar kugle polumjera* R*, potrebno je izračunati*

$$P = \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=22{,}5°}^{\pi} r^2 |\psi|^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi.$$

Osim višestrukih integrala, najavili smo, postoje još dvije generalizacije jednostrukih integrala na funkcije više varijabli. Radi se o dvije vrste krivuljnih integrala, tj. integrala čije područje integriranja je krivulja. Pritom ovdje želimo imati krivulje u prostoru proizvoljne dimenzije, a ne samo u ravnini te nam u tu svrhu nije prikladna ranija definicija ravninske krivulje kao nivo-krivulje skalarne funkcije više varijabli, već će biti prikladnija općenitija definicija, koja se svodi na generalizaciju parametarski definiranih krivulja u ravnini s kojima smo se upoznali u odjeljku .

10.3.2 Krivulje i krivuljni integrali

Definicija 91 (Krivulja). *Krivulja u* $\mathbb{R}^n$ *(*$n > 2$*) je slika neprekidne funkcije* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Funkciju γ također ćemo, malo nepravilno, nazivati krivuljom. Vidimo da se radi o vektorskim funkcijama jedne varijable. U pravilu se podrazumijeva da je funkcija γ iz gornje definicije po dijelovima (dakle, do na konačno mnogo točaka) derivabilna i da je njezina derivacija neprekidna (takve funkcije, odnosno krivulje nazivamo glatkima).

Ako je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ krivulja, onda točku $A = \gamma(a)$ zovemo početkom krivulje,, a točku $B = \gamma(b)$ krajem krivulje. Ako se početak i kraj krivulje podudaraju ($\gamma(a) = \gamma(b)$) kažemo da je krivulja zatvorena. Ako je γ krivulja u $\mathbb{R}^3$ i ako je (za svako t) $\gamma(t)$ element neke plohe, govorimo o krivulji na toj plohi. Uočimo da su ovako definirane krivulje prirodno orijentirane, tj. postoji prirodan smjer obilaska krivulje, a to je u smjeru porasta varijable t (od početka prema kraju).

Primjer 406. *Uzmimo funkciju* $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ *definiranu s* $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$. *Ta funkcija određuje krivulju kojoj je početak točka* $\gamma(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$, *a kraj joj je* $\gamma(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$, *dakle ova krivulja nije zatvorena. Slika te funkcije, tj. tom funkcijom definirana krivulja sastoji se od točaka koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini imaju koordinate* $(\cos t, \sin)$ *kad* t *ide od* 0 *do* π, *dakle su to po definiciji funkcija sinus i kosinus točke polukružnicu polumjera* 1 *sa središtem u ishodištu koja se nalazi u gornjoj poluravnini. Pritom ju obilazimo od* $\gamma(0)$ *prema* $\gamma(\pi)$, *tj. orijentirana u pozitivnom smjeru.*

U svakoj točki krivulje $\gamma(T)$ definira se tangencijalni vektor[13] kao vektor derivacija svih koordinatnih funkcija dane krivulje:

$$\gamma'(T) = (\gamma_1'(T), \ldots, \gamma_n'(T)).$$

Također, duljina $l(\gamma)$ krivulje γ definira se kao integral norme tangencijalnog vektora po domeni krivulje:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}\,\mathrm{d}t,$$

gdje je $\langle ., . \rangle$ standardni skalarni produkt vektora u $\mathbb{R}^n$.

[13]Vektor smjera tangente na krivulju u njenoj točki $\gamma(T)$. Ako je varijabla krivulje interpretirana kao vrijeme, a formula krivulje kao vremenska ovisnost pozicije o vremenu, tangencijalni vektor je vektor brzine.

Za krivulje u trodimenzionalnom prostoru ($\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$) u svakoj njihovoj točci $\gamma(T)$ definirana je i normalna ravnina, tj. ravnina koja je u točki $\gamma(T)$ okomita na krivulju. Drugim riječima, to je ravnina koja sadrži točku $(x(T), y(T), z(T))$ i ima vektor normale $\gamma'(T)$, dakle joj je jednadžba

$$x'(T)(x - x(T)) + y'(T)(y - y(T)) + z'(T)(z - z(T)) = 0.$$

Ponekad je potrebno krivulji promijeniti (obrnuti) orijentaciju.

Primjer 407. *Kružnicu zadanu parametarski s $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ obilazimo u pozitivnom smjeru. Kako postići da ju obilazimo u negativnom smjeru? Nije teško uvjeriti se da je s*

$$x(t) = \cos(-t) = \cos t, \quad y(t) = \sin(-t) = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

definirana ista kružnica, ali s orijentacijom u negativnom smjeru.

Općenito, ako je $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ krivulja, krivulju obrnute orijentacije (ali iste slike funkcije) označavamo s $-\gamma$, a definirana je s

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Osim obrtanja orijentacije krivulje, ponekad je potrebno opisati jednu krivulju kao spoj više drugih.

Primjer 408. *Opišimo parametarski krivulju $\gamma = ABCA$, gdje je dio AB dužina od $A = (0, 0)$ do $B = (1, 0)$, BC četvrtina jedinične kružnice od B do $C = (0, 1)$ i CA dužina $\overline{CA}$. Očigledno je da u točkama B i C dolazi do promjene pravila te ju je prirodnije opisati kao uniju dužine $\gamma_1 = \overline{AB}$, luka kružnice $\gamma_2 = \widehat{BC}$ i dužine $\gamma_3 = \overline{CA}$.*

Krivulja γ_1 se lako parametarski opiše jer su na njoj točke oblika $(t, 0)$ s $0 \leq t \leq 1$:

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2.$$

Primijetimo da γ_1 ima orijentaciju od svog početka $\gamma_1(0) = A$ prema kraju $\gamma_1(1) = B$, kakvu i želimo.

Krivulja γ_2 je parametarski opisana s

$$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t), \gamma_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2.$$

Pritom γ_2 ima orijentaciju od svog početka $\gamma_2(0) = B$ prema kraju $\gamma_\pi/2) = C$, odnosno i ova je orijentacija u skladu sa željenom.

Krivulja γ_3 se analogno kao i γ_1 lako parametrizira:

$$\gamma_3(t) = (0, t), \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2.$$

Primijetimo da γ_3 ima orijentaciju od svog početka $\gamma_3(0) = A$ prema kraju $\gamma_3(1) = C$, što je obrnuto od željene. Stoga γ_3 trebamo zamijeniti s $\gamma_3(0 + 1 - t) = \gamma_3(1 - t) = (0, 1 - t)$, $0 \le t \le 1$.

Krivulja $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ nastala spajanjem dvije krivulje $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ i $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^n$ (pri čemu je $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, tj. kraj prve krivulje je početak druge) općenito je definirana s

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \le t \le b, \\ \gamma_2(t), & b \le t \le c \end{cases}$$

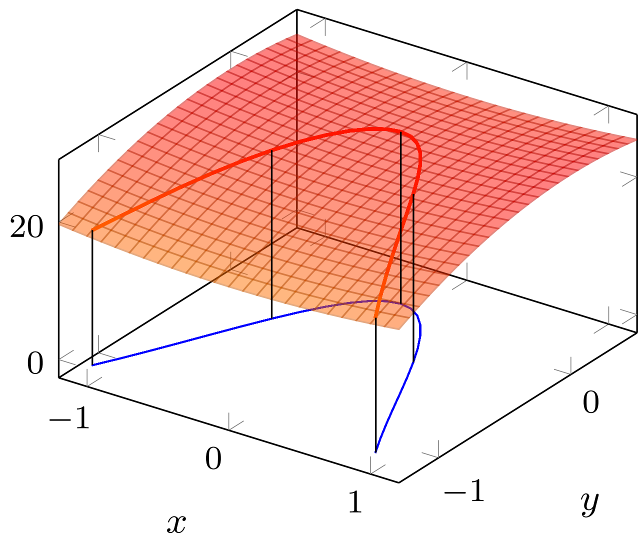
Primijetimo da se u prethodnom primjeru domena od γ_2 ne nastavlja na onu od γ_1, niti ona od γ_3 na onu od γ_2, tako da ako želimo skroz formalno zadovoljiti gornju definiciju moramo varijable od γ_1 i γ_3 translatirati, odnosno uzeti $\gamma_1(t) = (t + 1, 0)$, $-1 \le t \le 0$ i $\gamma_3(t) = \big(0, 1 + \frac{\pi}{2} - t\big)$, $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} + 1$.

Krivulje definirane na opisani način često se koriste u termodinamici. Naime, svako stanje (termodinamičkog) sustava opisuje se preko iznosa određenih skalarnih svojstava, dakle stanje opisano sa m svojstava se interpretira kao točka $X \in \mathbb{R}^m$. Tako svaki (termodinamički) sustav poistovjećujemo sa skupom svih njegovih mogućih stanja, tj. s (otvorenim) podskupom $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$. Procesi su promjene stanja sustava. U infinitezimalnim procesima se te promjene događaju u beskonačno malim iznosima. Svaki infinitezimalni proces može se interpretirati kao orijentirana krivulja γ u skupu Ω; točke na toj krivulji predstavljaju stanja tokom procesa.

Upoznajmo se sad s krivuljnim integralima. Podintegralna funkcija u krivuljnim integralima 1. vrste je skalarna funkcija, a u krivuljnim integralima 2. vrste podintegralna funkcija je vektorsko polje. U oba slučaja područje integriranja je krivulja koja je podskup domene podintegralne funkcije. Za obje vrste krivuljnih integrala se u slučaju integriranja po zatvorenoj krivulji koristi oznaka $\oint$ umjesto $\int$.

Definicija 92 (Krivuljni integral prve vrste)**.** *Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neka neprekidna skalarna funkcija od n varijabli te neka je γ krivulja u Ω (dakle, $\gamma : [a, b] \to \Omega$). Tada je krivuljni integral (prve vrste) od f duž γ definiran s*

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)|| \, \mathrm{d}t.$$



Slika 10.22: Vizualizacija krivuljnog integrala prve vrste

Vizualno, ako je f (pozitivna, neprekidna) skalarna funkcija dviju varijabli i γ krivulja u (x, y)-ravnini unutar njezine domene, $\displaystyle\int_\gamma f\,\mathrm{d}s$ je površina zakrivljenog lika okomitog na (x, y)-ravninu omeđenog s krivuljom i grafom od f (slika **??**).

Primjer 409. *Izračunajmo* $\oint_\gamma xy^4\,\mathrm{d}s$ *ako je* γ *rub polukruga* $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$.

Prvo parametriziramo krivulju po kojoj se integrira:

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t), 0 \leq t \leq \pi.$$

S obzirom na definiciju, treba nam norma njezinog tangencijalnog vektora:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t),$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(-2\sin^2 t)^2 + (2\sin t)^2} = 2.$$

Stoga je po definiciji

$$\oint_\gamma xy^4\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi 2\cos t \cdot (2\sin t)^4 \cdot 2\,\mathrm{d}t = 0.$$

Kao i svi integrali, krivuljni integrali 1. vrste su linearni. Uz to, oni ne ovise o orijentaciji krivulje po kojoj se integrira:

$$\int_{-\gamma} f \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma} f \, \mathrm{d}s.$$

Integral po krivulji nastaloj spajanjem krivulja zbroj je integrala po pojedinim dijelovima:[14]

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} f \, \mathrm{d}s + \int_{\gamma_2} f \, \mathrm{d}s.$$

Za primjene u fizici i fizikalnoj kemiji važniji su krivuljni integrali 2. vrste. Dobro je poznato da se mehanički rad izvršen duž ravnog puta (dužine) uslijed djelovanja sile F u pozicijama x može se izraziti integralom

$$w = \int_a^b F(x) \, \mathrm{d}x = \int_{I=[a,b]} F \, \mathrm{d}x.$$

Što ako put nije ravan, nego je nekakva krivulja γ u ravnini ili prostoru? U tom slučaju F postaje vektorsko polje (u svakoj točci X sila $\overrightarrow{F}(X)$ je vektor) i integral tog vektorskog polja duž krivulje γ bit će izvršeni rad:

$$w = \int_{\gamma} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

gdje $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$ predstavlja infinitezimalni tangencijalni vektor na γ, a $\cdot$ sugerira skalarni produkt vektora. Za opća vektorska polja $F = (F_1, \ldots, F_n)$ umjesto gornje notacije (vezane za vektorska polja na ravnini ili u trodimenzionalnom prostoru) uobičajenija je notacija $\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n$. No, što je to točno $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, odnosno $\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n$?

Definicija 93 (Krivuljni integral druge vrste)**.** *Neka je* $F = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *neko vektorsko polje i* γ *krivulja u* Ω. *Tada je krivuljni integral (druge vrste) vektorskog polja* F *duž* γ *definiran s*

$$\int_\gamma F_1 \, \mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \, \mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \gamma_i'(t) \, \mathrm{d}t,$$

gdje je s $\langle .,. \rangle$ *označen standardni skalarni produkt vektora u* $\mathbb{R}^n$.

[14] Usporedite s pravilom $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$.

Primjer 410. *Ako je γ je dio pravca $y = 2x+1$ za x između 0 i 1, tj. $\gamma(t) = (t, 2t+1)$ za $0 \leq t \leq 1$, onda je*

$$\int_\gamma x\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (t \cdot 1 + t(2t+1)^2 \cdot 2)\,\mathrm{d}t = \frac{37}{6}.$$

Primjer 411. *Neka sila djeluje u točkama prostora tako da je u svakoj točci razmjerna radij-vektoru te točke, tj. $\overrightarrow{F}(x, y, z) = k(x, y, z)$. Koliki rad se izvrši ako se u polju te sile čestica kreće duž spirale $\gamma : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$, od njezinog početka prema kraju?*

Rekli smo:

$$w = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_z\,\mathrm{d}z,$$

dakle je

$$w = \int_0^{10\pi} \langle k(\cos t, \sin t, 2t), (-\sin t, \cos t, 2)\rangle\,\mathrm{d}t = \int_0^{10\pi} 4kt\,\mathrm{d}t = 200k\pi^2.$$

Kao i krivuljni integrali 1. vrste, i krivuljni integrali 2. vrste mogu se računati po dijelovima:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots F_n\,\mathrm{d}x_n = \int_{\gamma_1} F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots F_n\,\mathrm{d}x_n + \int_{\gamma_2} F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots F_n\,\mathrm{d}x_n.$$

Primjer 412. *Izračunajmo krivuljni integral vektorskog polja $F(x, y) = (y^2, x+xy)$ po krivulji ABC koja je unija dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, gdje je $A = (-1, 1)$, $B = (0, 0)$ i $C = (2, 2)$, s tim da se krivulja obilazi od A preko B do C. Koliko taj integral iznosi ako se krivulja obiđe obrnutim smjerom?*

Parametriziramo $\overline{AB}$: $x(t) = t$, $y(t) = -t$, $-1 \leq t \leq 0$, a zatim parametriziramo i $\overline{BC}$: $x(t) = t$, $y(t) = t$, $0 \leq t \leq 2$. Stoga je

$$\int_{ABC} y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \langle((-t)^2, t+t\cdot(-t)), (1, -1)\rangle\,\mathrm{d}t + \int_0^2 \langle(t^2, t+t\cdot t), (1, 1)\rangle\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-1}^0 (2t^2 - t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 (2t^2 + t)\,\mathrm{d}t = 6.$$

Za obilazak u suprotnom smjeru imamo: $\overline{CB}$ je $x(t) = -t$, $y(t) = -t$ za $0 \leq t \leq 2$, a $\overline{BA}$ je $x(t) = -t$, $y(t) = t$ za $-1 \leq t \leq 0$. Slijedi

$$\int_{CBA} y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = -6.$$

Kao u gornjem primjeru, tako i općenito vrijedi:

$$\int_{-\gamma} \omega = -\int_{\gamma} \omega,$$

odnosno kod krivuljnih integrala 2. vrste obrtanje orijentacije krivulje mijenja predznak integrala.[15]

Prije nego istaknemo još jedno važno svojstvno krivuljnih integrala, potrebno nam je opće lančano pravilo za parcijalne derivacije. Neka je f *skalarna* funkcija više varijabli i γ krivulja u njezinoj domeni. Tada je smisleno gledati kompoziciju $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$:[16]

$$f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)).$$

Dakle, $f \circ \gamma$ je sad realna funkcija jedne varijable $t \in [a, b]$ i posjeduje „običnu" derivaciju $\frac{\mathsf{d}(f \circ \gamma)}{\mathsf{d}t}$ (osim u konačno mnogo točaka).

Primjer 413. *Neka je $f(x, y) = x^2 + y^3$ i $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Tada je $f \circ \gamma(t) = \cos^2 t + \sin^3 t$, dakle*

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = 2 \cos t \cdot (-\sin t) + 3 \sin^2 t \cos t.$$

Kao u prethodnom primjeru, tako se i općenito može dokazati sljedeće lančano pravilo za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s krivuljom (vektorskom funkcijom jedne varijable):

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma_i}{\mathrm{d}t}.$$

U odjeljku **??** dat ćemo i općenito lančano pravilo (za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s općom vektorskom funkcijom), a sad se vratimo krivuljnim integralima 2. vrste.

Krivuljni integrali druge vrste imaju i važnu primjenu u termodinamici. Svojstva sustava su skalarne funkcije Y definirane na skupu Ω koji predstavlja sustav (vidi str. 433). No, najčešće nije poznata (ili se čak ni ne može odrediti) eksplicitna formula takve funkcije Y. Pomoću krivuljnih integrala 2. vrste moguće je izračunati promjenu ΔY iznosa od Y tijekom procesa predstavljenog krivuljom γ, ako je poznat diferencijal (preciznija definicija

[15] Usporedite s pravilom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

[16] Uočimo: To je prvi faktor u definiciji krivuljnog integrala 1. vrste.

diferencijala slijedi u odjeljku **??**) $F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n$ kojim je Y indirektno opisana.[17] U tom slučaju naime vrijedi

$$\Delta Y=\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n.$$

Među svojstvima termodinamičkog sustava neka su istaknuta i nazivaju se funkcijama stanja. To su svojstva sustava čija promjena tokom bilo kojeg procesa ne ovisi o samom procesu (o načinu na koji je do promjene došlo), nego samo o početnom i konačnom stanju.[18] Prema navedenom zaključujemo: Funkcija Y opisana diferencijalom $F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n$ je funkcija stanja točno ako $\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n$ ne ovisi o γ, već samo o početnoj i krajnjoj točci od γ. Dakle, poželjno je po poznatim funkcijama $F_1,\ldots,F_n$ (tj. poznatom vektorskom polju $F=(F_1,\ldots,F_n)$) slučaj kad je $\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n$ neovisan o putu integriranja, već samo ovisi o početnoj i konačnoj točci. Pokazuje se da je to slučaj točno ako je vektorsko polje F konzervativno. Pokazat ćemo to pojednostavljenim izvodom.

Neka je F konzervativno vektorsko polje. Tada je $F=\nabla f$ za neki potencijal f, odnosno $F_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$ za sve i, pa je

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n=\int_\gamma\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i=$$

$$=\int_a^b\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(\gamma(t))\right)\,\mathrm{d}t=f(B)-f(A).$$

Dakle, krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja ne ovisi o krivulji, nego samo o njezinom početku i kraju (odnosno, Y opisan s $F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n$ je funkcija stanja ako je $F=(F_1,\ldots,F_n)$ konzervativno).

Sažmimo prethodnu važnu činjenicu:

Teorem 50. *Krivuljni integral 2. vrste konzervativnog vektorskog polja $F=(F_1,\ldots,F_n)$ zadovoljava poopćenje Newton-Leibnizove formule*

$$\int_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1+\ldots+F_n\,\mathrm{d}x_n=f(B)-f(A),$$

gdje je f potencijal („antiderivacija”) od F ($F=\nabla f$) i A i B su početak odnosno kraj krivulje γ.

[17] Smisao je: $F_1\Delta x_1+\ldots+F_n\Delta x_n$ aproksimira promjenu ΔY ako se sve temeljne varijable $x_1,\ldots,x_n$, o kojima ovise funkcije $F_1,\ldots,F_n$, promijene za male iznose Δx_1, $\ldots\Delta x_n$. Takve se promjene u pravilu mogu mjeriti te se mogu dobiti – egzaktno ili aproksimativno – formule funkcija $F_1,\ldots,F_n$ čak i kad se ne može odrediti formula za Y.

[18] Funkcije stanja su praktički sva termodinamička svojstva osim rada w i topline q.

Primijetimo da to posebno znači da je krivuljni integral konzervativnog vektorskog polja po svakoj zatvorenoj krivulji jednak 0 (ako je Y funkcija stanja i γ proces koji završava istim stanjem kojim je i počeo, $\Delta Y = 0$).

Primjer 414. *Izračunajmo*

$$\int_\gamma (2x^3y^4 + x)\,\mathrm{d}x + (2x^4y^3 + y)\,\mathrm{d}y$$

ako je γ negativno orijentirana poluelipsa središta O kojoj su tjemena točke $A(-5,0)$, $B(0,3)$ i $C(5,0)$.

Zadatak se pojednostavljuje ako se sjetimo da je polje koje integriramo konzervativno (primjer 393) pa je stoga traženi integral jednak integralu po dužini $\overline{AC}$, koju je lako parametrizirati kao $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0)$ za $-5 \le t \le 5$. Stoga je naš integral jednak

$$\int_{-5}^{5} (2t^3t^4 + t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Preciznija formulacija prethodnog teorema jest:

Teorem 51. *Za vektorsko polje F ekvivalentne su tvrdnje:*

(i) Integral od F ne ovisi o putu, tj. $\int_{\gamma_1} F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \int_{\gamma_2} F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n$ za svake dvije krivulje γ_1 i γ_2 koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.

(ii) $\oint_\gamma F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = 0$ za sve zatvorene krivulje.

(iii) F je konzervativno vektorsko polje.

Budući da su u termodinamičkom kontekstu, rekli smo, razna svojstva opisana indirektno diferencijalima, na kraju ovog poglavlja potrebno je malo više reći o tom pojmu.

10.4 Diferencijali

Izrazi oblika

$$\omega = F_1\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n\,\mathrm{d}x_n = \sum_i F_i\,\mathrm{d}x_i$$

u kojima sve skalarne funkcije $F_1, \ldots, F_n$ ovise o istim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ nazivaju se diferencijalima (malo preciznije, diferencijalima prvog reda). Očigledno je svaki diferencijal određen[19] vektorskim poljem $F = (F_1, \ldots, F_n)$ čije varijable su $x_1, \ldots, x_n$ pa diferencijal poput gornjeg možemo označiti s ω_F.

[19]Oprez: To nije isto što i diferencijal polja F, u oznaci $\mathrm{d}F$.

Primjer 415. *Vektorskom polju* $F(x,y) = (x+y, x^2-y^2)$ *odgovara diferencijal* $\omega_F = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$.

Dok je – nadamo se – svima jasno što su F_i-ovi, što su to $\mathrm{d}x_i$-ovi? Kao prvo, to nisu „mali prirasti" varijabli:

$$\mathrm{d}x_i \neq \Delta x_i.$$

Diferencijali pojedinih varijabli su također funkcije, štoviše, linearni funkcionali: $\mathrm{d}x_i$ je linearan funkcional s domenom $\mathbb{R}^n$ koji n-torci pridružuje iznos i-te koordinate, tj.

$$\mathrm{d}x_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Primjer 416. *Ako promatramo* $\mathbb{R}^3$ *s koordinatama* (x,y,z)*, onda je* $\mathrm{d}y(1,2,3) = 2$.

Stoga je

$$\mathrm{d}x_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = \Delta x_i,$$

tj. u slučaju male promjene točke u $\mathbb{R}^n$ diferencijal $\mathrm{d}x_i$ ukupnoj promjeni pridružuje promjenu i-te koordinate.

Primjer 417. *Za slučaj realne funkcije jedne varijable, npr.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$*, imamo*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = f'(1) = 2,$$

odnosno $\mathrm{d}f(1) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1)\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}x$, $f'(1) \approx \Delta f/\Delta x = (f(1+\Delta x) - f(1))/\Delta x$. *Dakle,* $\Delta f \approx f'(1) \cdot \Delta x = 2\,\mathrm{d}x(\Delta x) = \mathrm{d}f(1)(\Delta x)$.

Očito je da diferencijal ω_F ovisi o istim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ o kojima ovisi i vektorsko polje F (tj. funkcije $F_1, \ldots, F_n$), odnosno radi se o funkciji s istom domenom kao i F. Pritom se varijabla $X = (x_1, \ldots, x_n)$ pri uvrštavanju u ω_F uvrštava u $F_1, \ldots, F_n$.

Primjer 418. *Za* $\omega_F = (x+y)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\,\mathrm{d}y$ *je* $\omega_F(1,2) = (1+2)\,\mathrm{d}x + (1^2-2^2)\,\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x - 3\,\mathrm{d}y$. *Vidimo dakle da je* $\omega_F(1,2)$ *lineran funkcional (na* $\mathbb{R}^2$*), u kojeg možemo uvrstiti bilo koji par realnih brojeva, npr.* $\omega_F(1,2)(3,4) = 3\,\mathrm{d}x(3,4) - 3\,\mathrm{d}y(3,4) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = -3$.

Imamo dakle redom:

- $$\omega_F = \sum_i \underbrace{F_i}_{\text{skalarna funkcija}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}},$$

  i ω_F je funkcija koja ima istu domenu Ω kao i funkcije F_i;

- uvrštavanje elementa $X_0 \in \Omega$ daje

$$\omega_F(X_0) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{\mathrm{d}x_i}_{\text{lin.funkcional}} = \text{lin. funkcional}$$

  odnosno rezultat djelovanja diferencijala ω_F je linearan funkcional (na $\mathbb{R}^n$). Dakle, diferencijali su funkcije koje elementima domene (elementima podskupa Ω od $\mathbb{R}^n$) pridružuju linearne funkcionale (s domenom $\mathbb{R}^n$);

- uvrštavanje točke iz $\mathbb{R}^n$ u linearni funkcional $\omega_F(X_0)$ daje

$$\omega_F(X_0)(X) = \sum_i \underbrace{F_i(X_0)}_{\text{broj}} \underbrace{x_i}_{\text{broj}} = \text{broj}.$$

  Posebno:

$$\omega_F(X_0)(\Delta X) = \sum_i F_i(X_0)\Delta x_i,$$

  ako smo sa ΔX označili $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$.

Zbog navedene korespondencije između vektorskih polja F i diferencijala ω_F, krivuljni integrali 2. vrste se odnose na jedno i drugo:

$$\int_\gamma \omega_F = \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_n \,\mathrm{d}x_n = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Time smo opravdali notaciju krivuljnih integrala 2. vrste.

Napomena 44. *Prema svemu navedenom vidimo da termodinamički gledano, diferencijali predstavljaju infinitezimalne promjene termodinamičkih svojstava, tj. indirektno opisuju svojstvo Y i da je promjena svojstva Y opisanog diferencijalom ω tijekom procesa γ jednaka*

$$\Delta Y = \int_\gamma \omega.$$

Znamo da krivuljni integrali 2. vrste ne ovise o putu integriranja ako je F konzervativno. Diferencijali koji odgovaraju konzervativnim vektorskim poljima nazivaju se egzaktni (ili potpuni) diferencijali. Ako je F konzervativno, znamo da to po definiciji znači $F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ za neki skalarni potencijal f, dakle takvom polju odgovara egzaktan diferencijal oblika

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n.$$

Egzaktne diferencijale označavamo s $\mathrm{d}f$: Oznaka $\mathrm{d}f$ za neki diferencijal ω_F znači da je f potencijal od F. Kad koristimo oznaku $\mathrm{d}f$, egzaktan diferencijal nazivamo i diferencijalom skalarne funkcije f. Dakle: Egzaktan diferencijal je isto što i diferencijal neke skalarne funkcije, kao što je konzervativno vektorsko polje isto što i gradijent neke skalarne funkcije.

Primjer 419. *Za skalarnu funkciju*

$$f(x, y, z) = e^{x-y}z^2$$

je

$$\nabla f(x, y, z) = (e^{x-y}z^2, -e^{x-y}z^2, 2e^{x-y}z)$$

pa je diferencijal od f

$$\mathrm{d}f(x, y, z) = e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}x - e^{x-y}z^2\,\mathrm{d}y + 2e^{x-y}z\,\mathrm{d}z.$$

Primjer 420. *Budući da je gradijent konstantne funkcije nul-vektorsko polje, diferencijal skalarne funkcije je nulfunkcija, odnosno u svakoj točki domene je to nulfunkcional.*

Teorem 51 sad možemo formulirati i u terminima diferencijala:

Teorem 52. *Za diferencijal ω ekvivalentne su tvrdnje:*

(i) Integral od ω ne ovisi o putu, tj. $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$ za svake dvije krivulje γ_1 i γ_2 koje imaju zajedničke početke i zajedničke krajeve.

(ii) $\oint_\gamma \omega = 0$ za sve zatvorene krivulje.

(iii) ω je egzaktan diferencijal.

Također i Eulerov kriterij egzaktnosti ima svoju ekvivalentnu varijantu u terminologiji diferencijala: Ako su sve F_i glatke fukcije s otvorenom povezanom domenom, diferencijal $\omega_F = \sum_i F_i\,\mathrm{d}x_i$ je egzaktan ako i samo ako je

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$.

Neke diferencijalne jednadžbe povezane su s egzaktnim diferencijalima. Ako je diferencijalna jednadžba oblika

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

pri čemu je $\omega = M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y$ egzaktan, nazivamo ju egzaktnom diferencijalnom jednadžbom. Budući da je tada $\omega = \mathrm{d}f$, određivanjem potencijala f vektorskog polja (M, N) dobivamo rješenje takve jednadžbe u obliku $f(x, y) = C$.

Primjer 421. *Diferencijalna jednadžba* $(2xy - 9x^2)\,\mathrm{d}x + (2y + x^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0$ *je egzaktna. Ako odredimo potencijal* $f(x, y)$ *polja* $(2xy - 9x^2, 2y + x^2 + 1)$*, opće rješenje te jednadžbe su krivulje* $f(x, y) = C$*.*

Ponekad je za diferencijal ω moguće naći funkciju μ jedne ili obiju varijabli x i y tako da je $\mu \cdot \omega$ egzaktan. Tada kažemo da je μ Eulerov multiplikator diferencijala ω.

Primjer 422. *Jednadžba* $(3xy - y^2)\,\mathrm{d}x + x(x - y)\,\mathrm{d}y = 0$ *nije egzaktna, ali to postaje množenjem s* x*.*

Naposlijetku, iskoristimo naučeno da detaljnije promotrimo primjene funkcija više varijabli, posebice diferencijala, u termodinamici. Prema navedenim matematičkim ekvivalentima, termodinamičko svojstvo Y je funkcija stanja točno ako $\int_\gamma \omega$ ne ovisi o γ, već samo o početnoj i krajnjoj točki od γ, tj. točno ako je ω egzaktan diferencijal (što obično možemo provjeriti koristeći Eulerov kriterij egzaktnosti). Uočimo: Ako znamo pravilo, odnosno formulu za Y, diferencijal $\mathrm{d}Y$ je sigurno egzaktan jer je to po definiciji diferencijal određen s ∇Y.

S fizikalne strane, funkcije stanja su sva svojstva koja su odrediva na tzv. apsolutnoj ljestvici. To su npr. volumen, tlak, temperatura, množina, ... To u osnovi znači da je takvim funkcijama načelno moguće odrediti formulu pravila (primjerice, metodom najmanjih kvadrata). S druge strane, za rad w i toplinu q poznato je da iznos promjene (tj. izvršeni rad odnosno razmijenjena toplina) ovisi o načinu na koji je ta promjena postignuta pa diferencijali koji ih opisuju nisu egzaktni. Usprkos tome, uobičajeno ih je označavati s $\mathrm{d}w$ i $\mathrm{d}q$. Ovisno o tipu rada, definiraju se pripadni neegzaktni diferencijali $\mathrm{d}w$. Primjerice, volumni rad je definiran diferencijalom $\mathrm{d}w = -p\,\mathrm{d}V$. U sljedećim primjerima smatrat ćemo njega jedinim mogućim oblikom rada, ali postupci su analogni i ako se koriste diferencijali koji opisuju električni, kemijski ili koji drugi oblik rada.

S druge strane, za neegzaktni diferencijal $\mathrm{d}q$ postoji Eulerov multiplikator i on je termodinamička temperatura T. Dobiveni egzaktni diferencijal je diferencijal skalarne funkcije koja se naziva entropija i označava sa S. Ta je činjenica zapravo termodinamička definicija entropije, sadržana u drugom glavnom stavku termodinamike: (Za svaki termodinamički sustav) postoji jedinstveno, jednoznačno, neprekidno i ekstenzivno svojstvo stanja (funkcija stanja) sustava koje zovemo entropijom, u oznaci S; to je svojstvo karakterizirano time da za reverzibilne procese vrijedi

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}q}{T}.$$

S druge strane, zbroj neegzaktnih diferencijala $\mathrm{d}w$ i $\mathrm{d}q$ je uvijek egzaktan diferencijal. To je sadržaj prvog glavnog stavka termodinamike, kojime je definirana unutrašnja energija: (Za svaki sustav) postoji jedinstveno, jednoznačno, neprekidno i ekstenzivno svojstvo stanja (funkcija stanja) sustava koje zovemo unutrašnjom energijom sustava, u oznaci U; ona je u izoliranom sustavu konstantna, a u svim neadijabatskim procesima njezina promjena jednaka je zbroju izvršenog rada i prenesene topline. Za infinitezimalne procese to znači

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q.$$

Stoga, ukoliko je jedini mogući rad u nekom sustavu volumni te ako se odvija reverzibilni proces, vrijedi

$$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S,$$

odnosno na osnovnoj razini je U skalarna funkcija stanja čije nezavisne varijable su volumen V i entropija S, a one određuju i zavisne varijable – tlak p i termodinamičku temperaturu T.

Primjer 423. *Termodinamički potencijal za određene termodinamičke uvjete je funkcija stanja*[20] Φ *takva da je* $\mathrm{d}\Phi = 0$ *(ako je jedini mogući rad volumni). Za izobarno izotermne uvjete (*$p =$*const.,* $T =$*const.) termodinamički potencijal je Gibbsova energija definirana kao* $G = U + pV - TS$*:*

$$\mathrm{d}G = \mathrm{d}(U + pV - TS) = \mathrm{d}w + \mathrm{d}q + p\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}p - T\,\mathrm{d}S - S\,\mathrm{d}T =$$

$$= -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S + p\,\mathrm{d}V - T\,\mathrm{d}S = 0.$$

Slično se vidi da je entalpija $H = U + pV$ *termodinamički potencijal za izobarne adijabatske sustave (konstantan* p *i* S*, tj.* $\mathrm{d}p$ *i* $\mathrm{d}S$ *su nulfunkcionali).*

Koristeći definiciju egzaktnih diferencijala možemo izvesti mnoge korisne termodinamičke relacije.

Primjer 424. *Kako je* $G = H - TS$ *funkcija stanja, slijedi da je*

$$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$$

egzaktan diferencijal, dakle je oblika

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T.$$

[20] Koja ima (lokalni) minimum u ravnotežnom stanju.

Slijedi:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S.$$

Uvrštavanje posljednje jednakosti u definiciju $G = H - TS$ *daje drugu Gibbs-Helmholtzovu relaciju* $G = H + T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ *odnosno*

$$H = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p.$$

Druge korisne formule mogu se dobiti ako na neke egzaktne diferencijale primijenimo Eulerov kriterij egzaktnosti.

Primjer 425. *Svaka od Maxwellovih formula dobiva se iz egzaktnosti jednog od diferencijalâ* $\mathrm{d}U$, $\mathrm{d}H$, $\mathrm{d}A$ *i* $\mathrm{d}G$. *Primjerice, kako je*

$$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p,$$

budući je $\mathrm{d}G$ *egzaktan, mora zadovoljavati Eulerov uvjet egzaktnosti pa je*

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

To je jedna od četiriju Maxwellovih formula termodinamike.

Za kraj, dajmo opće lančano pravilo za kompoziciju skalarne funkcije više varijabli s općom vektorskom funkcijom lančano pravilo poprima kompliciraniji oblik:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z = \left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)_{x_2,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_1}{\partial X}\right)_Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)_{x_1,x_3,\ldots} \cdot \left(\frac{\partial x_2}{\partial X}\right)_Z + \ldots.$$

Primjer 426. *Za slučaj kompozicije skalarne funkcije dviju varijabli* $f = f(x,y)$ *s vektorskim poljem dviju varijabli* $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Primjer 427. *Ako* U *smatramo funkcijom temperature* T *i volumena* V, *vrijedi*

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$$

(zašto?). Ako pak U smatramo funkcijom temperature T i tlaka p, bit će

$$\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p.$$

Kolika je razlika između relativnih promjena unutrašnje energije obzirom na promjenu temperature (iskazanih parcijalnim derivacijama $\frac{\partial U}{\partial T}$) u ova dva slučaja?

Iskoristimo lančano pravilo:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

odnosno

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

Poglavlje 11

Nizovi i redovi

11.1 Nizovi

Nabrajanja poput

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

ili

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

u svakodnevnom se govoru nazivaju nizovima, bez obzira je li to nabrajanje konačno (do nekog zadnjeg člana, recimo $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\clubsuit$) ili nastavljeno „u beskonačnost" (što naznačavamo s ... nakon prvih nekoliko članova niza). U matematici se pod nizom podrazumijeva beskonačan niz. Glavne karakteristike nizova su:

- Sastoje se od članova, koji su obično (realni ili kompleksni) brojevi.
- Za svaki član moguće je utvrditi ne samo je li u nizu, nego i na kojem mjestu u redoslijedu se nalazi. Pritom su mjesta određena prirodnim (u jeziku: odgovarajućim rednim) brojevima – prvi član, drugi član, ..., sedamnaesti član, ...

Precizna definicija, koja sažeto izražava gore navedene karakteristike niza jest:

Definicija 94 (Niz realnih ili kompleksnih brojeva)**.** *Svaku funkciju kojoj je domena skup $\mathbb{N}$ (ili $\mathbb{N}_0$[1]) zovemo nizom. Ako je kodomena niza $\mathbb{R}$, govorimo o nizu realnih brojeva, a ako je kodomena niza $\mathbb{C}$, govorimo o nizu kompleksnih brojeva.*

[1] Kad gledamo nizove s domenom $\mathbb{N}_0$, iako je formalno a_0 nulti član niza, uobičajeno je zvati ga prvim, tj. pozicije brojati od nulte.

Elementi domene niza, tj. skupa $\mathbb{N}$, predstavljaju redne brojeve, tj. pozicije u nizu, a njima pridružene vrijednosti su odgovarajući članovi niza. Primjerice, $a(5)$ je peti član niza. U slučaju nizova uobičajeno je elemente domene (redne brojeve) označavati s n, a njima pridružene elemente kodomene (članove niza) s a_n (a ne kao kod drugih funkcija s $a(n)$). Kad govorimo o čitavom nizu umjesto s a ga označavamo s $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ili kraće s $(a_n)_n$, dok je a_n oznaka za n-ti član niza (usporedite s razlikom između oznake f i $f(x)$ općenito kod funkcija). Budući je domena svakog niza cijeli skup $\mathbb{N}$, znači da za svaki prirodni broj n postoji n-ti član tog niza pa je niz uvijek beskonačan ako ga doživljavamo kao „nabrajanje".

Nizove, kao i druge funkcije, najčešće opisujemo formulom koja opisuje kako elementu domene pridružiti odgovarajući element kodomene. Kod nizova takvu formulu obično zovemo formulom općeg člana niza.

Primjer 428. *Formulom*

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

zadan je opći član niza recipročnih neparnih prirodnih brojeva $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, \ldots$.

Konstantan niz je niz koji je kao funkcija konstantan:

$$a_n = c, \quad n \in \mathbb{N},$$

pri čemu je c neki fiksan, tj. o n neovisan, broj.

Nizovi se mogu zadati i rekurzivno, pravilom koje kaže kako se iz jednog ili više prethodnih članova dobije sljedeći član:

Primjer 429. *Fibonaccijev niz je niz* (F_n) *definiran tako da su mu prva dva člana jednaka* 1 $(F_1 = F_2 = 1)$*, a svaki sljedeći je zbroj prethodna dva:*

$$F_3 = F_1 + F_2 = 2,$$

$$F_4 = F_2 + F_3 = 3,$$

$$F_5 = F_3 + F_4 = 5,$$

$$F_6 = F_4 + F_5 = 8,$$

$$\ldots$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Među vrstama nizova posebno se ističu aritmetički i geometrijski nizovi.

Definicija 95 (Aritmetički niz)**.** *Niz realnih ili kompleksnih brojeva sa svojstvom da je razlika svaka dva uzastopna člana niza ista zovemo aritmetičkim nizom: niz $(a_n)_n$ je aritmetički ako postoji konstanta d (diferencija aritmetičkog niza) takav da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Primjer 430. *Niz s općim članom $a_n = 2 + 3n$ (tj. $2, 5, 8, 11, \ldots$) je aritmetički jer je razlika svaka dva uzastopna člana 3:*

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 3(n+1) - (2 + 3n) = 3.$$

Opći član aritmetičkog niza s diferencijom d dan je formulom

$$a_n = a_0 + dn, \quad n \geq 0$$

Dakle, aritmetički nizovi su zapravo afine funkcije s domenom $\mathbb{N}_0$.

Definicija 96 (Geometrijski niz)**.** *Niz realnih ili kompleksnih brojeva sa svojstvom da je kvocijent svaka dva uzastopna člana niza isti zovemo geometrijskim nizom: niz $(a_n)_n$ je geometrijski ako postoji neki broj q (kvocijent geometrijskog niza) takav da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Primjer 431. *Niz s općim članom $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (tj. $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$) je geometrijski jer je kvocijent svaka dva uzastopna člana $\frac{1}{3}$:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

Opći član geometrijskog niza s kvocijentom q dan je formulom

$$a_n = a_0 \cdot q^n,$$

gdje je a_0 prvi član niza. To lako dobijemo iz definicije[2] geometrijskog niza:

$$a_n = a_{n-1}q = a_{n-2}q \cdot q = a_{n-2}q^2 = a_{n-3}q \cdot q^2 = a_{n-3}q^3 = \ldots = a_0 q^n.$$

Vidimo dakle da su za $q > 0$ ($q \neq 1$) nizovi zapravo eksponencijalne funkcije restringirane na $\mathbb{N}_0$, no ovdje imaju smisla i druge baze (kvocijenti q) jer dozvoljavamo i da geometrijski niz bude konstantan ($q = 0$ i $q = 1$), ali

[2] Formalni dokaz išao bi matematičkom indukcijom.

također nema potrebe zabraniti $q < 0$ jer ćemo q potencirati samo na prirodne brojeve i 0.

Dakle, geometrijski niz je potpuno zadan prvim članom i kvocijentom. Zbroj prvih n članova geometrijskog niza dan je formulom

$$S_n = a_0 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Primjer 432. *Trokut Sierpinskog jedan je od najpoznatijih jednostavnih primjera fraktala. On nastaje tako da se krene od jednakostraničnog trokuta. Njemu se ucrtaju polovišta stranica, spoje se i izreže se tako nastali „srednji" jednakostranični trokut. Zatim se svima od triju preostalih trokuta ucrtaju polovišta stranica, spoje i izrežu njihovi „srednji" trokuti. Trokut Sierpinskog je ono što bi od našeg trokuta preostalo ako bi se postupak nastavio unedogled. Kolika je površina ostatka trokuta nakon n koraka?*

Ako je polazni trokut površine P, imamo $P_0 = P$. Nadalje, $P_1 = \frac{3}{4}P$ i općenito u svakom koraku preostaje $\frac{3}{4}$ površine iz prethodnog koraka:

$$P_{n+1} = \frac{3}{4} P_n.$$

Dakle, površine čine geometrijski niz s kvocijentom $\frac{3}{4}$, odnosno

$$P_n = P\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Primjer 433. *Otopina početne množinske koncentracije c_0 uzastopno se m-terostruko ($m \in \mathbb{N}$) razrjeđuje vodom:*

$$c_0, c_1 = c_0/m, c_2 = c_1/m = c_0/m^2, \ldots, c_k, \ldots.$$

Dakle, niz koncentracija je geometrijski s kvocijentom $\frac{1}{m}$.

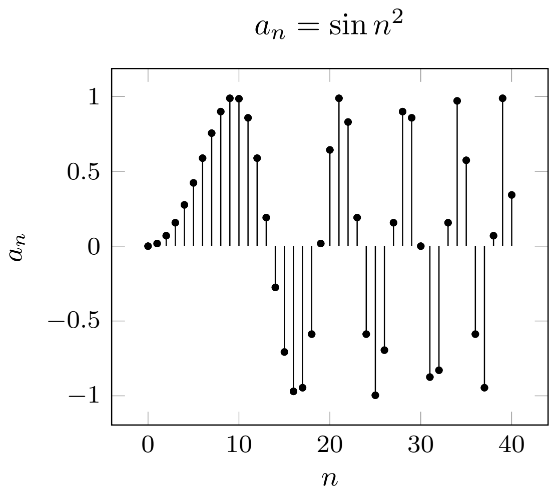
Koncentracija će pasti na manje od $c_{\min}$ (najmanje mjerljive koncentracije) kad je

$$c_k = c_0/m^k < c_{\min}$$

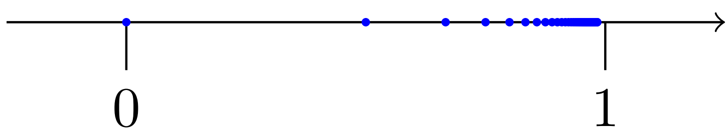
, dakle $c_0 < m^k c_{\min}$ odnosno $m^k > \frac{c_0}{c_{\min}}$. Logaritmiranjem (uočimo da $\log_m$ ima smisla jer je m kao prirodan broj dopustiva baza logaritma, osim za $m = 1$) dobijemo

$$k > \log_m \frac{c_0}{c_{\min}}.$$

Nizove realnih brojeva možemo prikazati grafički tako da crtamo njihove grafove u (Kartezijevom) koordinatnom sustavu. Kako se graf svake funkcije, pa tako i niza, sastoji od uređenih parova oblika $(x, f(x))$ gdje x prolazi



Slika 11.1: Grafički prikaz niza realnih brojeva



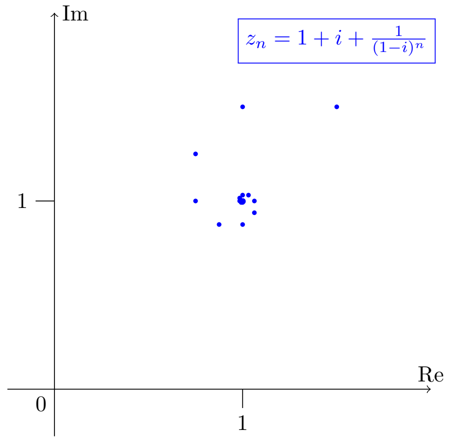
Slika 11.2: Niz realnih brojeva na brojevnom pravcu

domenom, slijedi da se crtež grafa niza sastoji od diskretnih točaka kojima su apscise prirodni brojevi, a ordinate odgovarajuće vrijednosti članova niza. Radi lakšeg očitavanja obično se kao pomoćne linije ucrtavaju spojnice apscisa s odgovarajućim točkama grafa.

Primjer 434. *Na slici 11.1 prikazan je graf niza zadanog formulom* $a_n = \sin n^2$.

Alternativno, niz realnih brojeva ponekad se prikazuje označavanjem točaka na brojevnom pravcu koje predstavljaju članove nize (slika 11.2 prikazuje prvih 60 članova niza definiranog s $a_n = 1 - \frac{1}{n}$). Taj prikaz očigledno nosi manje informacija nego standardni putem grafa, ali može bolje dočarati limes niza (vidi niže).

Graf kompleksnog niza možemo prikazati u trodimenzionalnom prostoru (jedna os za indekse niza, druge dvije kao realna i imaginarna os za članove



Slika 11.3: Grafički prikaz niza kompleksnih brojeva

niza), no takav bi prikaz bio vrlo nepregledan. Stoga se kompleksni nizovi, ukoliko uopće, vizualiziraju kao točke u kompleksnoj ravnini, analogno prethodno opisanom prikazu za realne nizove. Tako dobijemo dijagrame poput onog na slici 11.3.

Nizovi mogu biti ograničeni i neograničeni. Niz realnih brojeva je ograničen ako mu se svi članovi nalaze unutar intervala realnih brojeva kojemu nijedan od rubova nije beskonačan, a niz kompleksnih brojeva je ograničen ako mu se svi članovi nalaze unutar kruga konačnog radijusa. To objednijavamo kao:

Definicija 97 (Ograničeni nizovi)**.** *Niz realnih ili kompleksnih brojeva je ograničen ako postoji realan broj M takav da je*

$$|a_n| \leq M$$

za sve n.

Primjer 435. *Svaki konstantan niz je ograničen.*

Primjer 436. *Niz zadan s $a_n = \frac{1}{n}$ je ograničen jer su mu svi članovi između 0 i 1, dakle $|a_n| \leq 1$ za sve n.*

Niz realnih brojeva može biti ograničen samo odozdo (ako su mu svi članovi veći od nekog konkretnog realnog broja) ili samo odozgo (ako su mu svi članovi manji od nekog konkretnog realnog broja). Ako je niz ograničen i odozgo i odozdo, onda je naravno ograničen.

Primjer 437. *Niz prirodnih brojeva, tj. niz $a_n = n$, je ograničen odozdo jer je $a_n \geq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, ali nije ograničen odozgo.*

U skupu realnih brojeva ima smisla uspoređivati brojeve po veličini pa ima smisla reći da je primjerice niz 1, 4, 9, 16, $\ldots(a_n = n^2)$ rastući, a niz $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots(a_n = -n)$ padajući. Nizovi su rastući ili padajući ako su rastući ili padajući kao funkcije. S obzirom na domenu niza to se svodi na sljedeću definiciju:

Definicija 98 (Rastući i padajući nizovi realnih brojeva)**.** *Niz $(a_n)_n$ realnih brojeva zovemo rastućim ako je*

$$a_n \leq a_{n+1}$$

za sve n, a padajućim ako je

$$a_n \geq a_{n+1}$$

za sve n.

U slučaju da su nejednakosti iz gornje definicije zadovoljene strogo ($<$ odnosno $>$), ponekad se naglašava da je niz strogo rastući odnosno strogo padajući.

Primjer 438. *Samo konstantan niz je istovremeno rastući i padajući.*

Primjer 439. *Niz iz primjera 434 nije ni rastući ni padajući.*

Napomena 45. *Ako niz $(a_n)_n$ raste, njegov suprotni niz $(-a_n)_n$ pada (i obrnuto). Primjerice, niz zadan s $a_n = \frac{1}{n}$ pada, a niz zadan s $b_n = -\frac{1}{n}$ raste.*

Najvažnije matematičko pitanje o nizovima je ima li neki niz limes ili ne.Budući da su nizovi vrsta funkcija, pojam limesa niza je poseban slučaj limesa funkcije (odjeljak 4.1). Podsjetimo se: oznaka $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ podrazumijeva da se x može proizvoljno približiti k c *ostajući u domeni* funkcije f. Kako između svaka dva prirodna broja imamo „rupu”, besmisleno je razmatrati pitanja poput „koliki je limes niza kad n teži k 3?” jer se ostajući u prirodnim brojevima n ne možemo proizvoljno približiti broju 3. Također, kako su u domeni nizova samo nenegativni brojevi, nema smisla govoriti o limesima nizova kad n teži u $-\infty$. Ukratko, u kontekstu nizova ima smisla govoriti samo o limesima u pozitivnoj beskonačnosti te se često govori jednostavno o limesu niza, a ne o limesu niza kad n teži u beskonačnost.

Limes ili granična vrijednost (realnog ili kompleksnog) niza $(a_n)_n$ kad n teži u beskonačnost je, ako postoji, broj L takav da što je veći n, to su članovi niza a_n bliži L (i pritom mogu doći proizvoljno blizu L). Formalno:

Definicija 99 (Limes niza). *Broj L je limes niza $(a_n)_n$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - L| < \varepsilon$.*

Ako je L limes niza $(a_n)_n$ pišemo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

ili kraće $\lim a_n = L$.

Ako limes niza postoji, kažemo da je niz konvergentan, a inače je divergentan.

Smisao gornje formalne definicije limesa niza je da su počevši od nekog mjesta u nizu svi članovi niza na proizvoljno maloj udaljenosti ε od limesa L.

Najjednostavniji primjeri konvergentnih nizova su konstantni nizovi: niz definiran s $a_n = c$ uvijek ima limes c, tj. $\lim_{n\to+\infty} c = c$.

Konvergencija niza tiče se ponašanja njegovih „dalekih članova": Bitno je da se počevši od neke pozicije članovi niza grupiraju oko nekog broja. Stoga odabir početnih (konačno mnogo) članova niza ne utječe na njegovu konvergenciju.

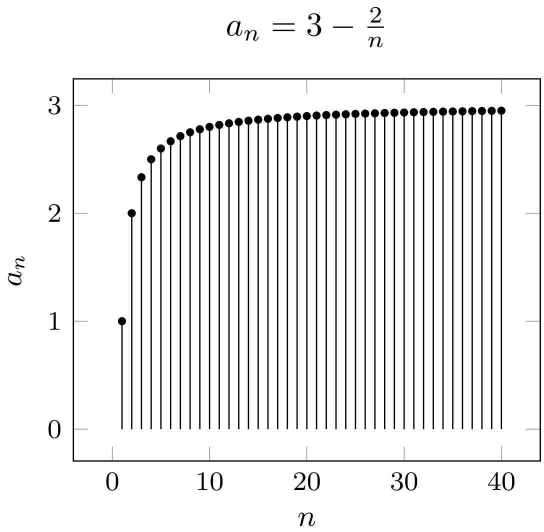
Primjer 440. *Nizovi $2, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ (konstantan niz), zatim niz $1235, i - 45, i, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ te niz $1, 2, 3, \ldots, 10^{100}, 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$ svi imaju limes 2 iako se razlikuju u početnim članovima: u prvom nizu su svi članovi proizvoljno blizu 2, u drugom nizu su svi članovi počevši od četvrtog proizvoljno blizu 2, a u trećem su svi članovi počevši od $10^{100}+1$. člana proizvoljno blizu 2.*

Vizualno konvergenciju niza možemo predočiti na dva načina. Jedan je uočavanje desne horizontalne asimptote u grafu niza (samo za realne nizove; slika 11.4), a drugi je vidljivo grupiranje članova niza oko jedne točke (za niz $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ limes je 1, vidi sliku 11.2, a za niz $z_n = 1 + i + \frac{1}{(1-i)^n}$ limes je $1 + i$, vidi sliku 11.3).

Neki divergentni nizovi realnih brojeva poprimaju proizvoljno velike ili male vrijednosti pa imaju smisla oznake $\lim a_n = +\infty$ i $\lim a_n = -\infty$.

Definicija 100 (Beskonačni limesi nizova). *Ako članovi niza postaju proizvoljno veliki, tj. ako za proizvoljno velik broj M postoji pozicija $n_0 \in \mathbb{N}$ u nizu takva da su za sve daljnje pozicije $n > n_0$ članovi niza veći od M ($a_n > M$), kažemo da niz teži u plus beskonačno i pišemo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$



Slika 11.4: Niz realnih brojeva ima limes ako mu graf ima desnu horizontalnu asimptotu

Slično, ako članovi niza postaju proizvoljno mali tj. ako za proizvoljno malen[3] *broj m postoji pozicija $n_0 \in \mathbb{N}$ u nizu takva da su za sve daljnje pozicije $n > n_0$ članovi niza manji od m ($a_n < m$), kažemo da niz teži u minus beskonačno i pišemo*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Primjer 441. *Aritmetički niz s diferencijom $d \neq 0$ divergira u $+\infty$ ili u $-\infty$, ovisno o predznaku od d.*

Geometrijski nizovi su konvergentni ako im je kvocijent $q = 1$ ili $q = 0$ (konstantni nizovi) ili ako im je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ($|q| < 1$), a inače su divergentni.

Za slučaj realnih geometrijskih nizova $a_n = a_0 q^n$ vrijedi:

$$\lim a_n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ a_0, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1,\ a_0 > 0, \\ -\infty, & q > 1,\ a_0 < 0, \\ \text{neodređen}, & q \leq -1 \end{cases}.$$

[3] Podsjećamo: proizvoljno malen broj znači „jako negativan” broj.

Primjer 442. *U primjeru 432 opisali smo trokut Sierpinskog. Budući da u n-tom koraku njegovog nastajanja je trenutna površina $P_n = P\left(\frac{3}{4}\right)^n$, zaključujemo da je površina trokuta Sierpinskog jednaka* $\lim P_n = 0$.

Među konvergentnim nizovima (osim konvergentnih geometrijskih nizova) vrijedi zapamtiti sljedeće nizove i njihove limese:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

za sve $k > 0$.

Primjer 443.

$$\lim \frac{1}{n^2} = 0.$$

Broj e se definira kao limes niza:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Među divegentnim nizovima vrijedi zapamtiti i sljedeće nizove i njihove limese:

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty$$

i

$$\lim_{n\to+\infty} k^n = +\infty$$

za sve $k > 0$. Za negativne k je limes $\lim_{n\to+\infty} k^n$ neodređen.

Primjer 444.

$$\lim n^3 = +\infty.$$

Primjer 445. $\lim(-2)^n$ *nije određen: Članovi niza su redom* -2, 4, -8, 16, -32, $\ldots$, *tj. alterniraju po predznaku pa niti se grupiraju oko nekog broja (naprotiv, sve se više udaljavaju od nule) niti su počevši od nekog mjesta proizvoljno veliki (iza svakog velikog broja dođe jedan negativan) niti su počevši od nekog mjesta proizvoljno mali (iza svakog malog, negativnog broja dođe jedan pozitivan).*

Osnovna svojstva limesa nizova su analogna svojstvima limesa realnih funkcija:

Teorem 53. *Ako postoje* $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *i* $\lim_{n\to+\infty} b_n$*, onda postoje i limesi* $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$*,* $\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)$ *i* $\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)$ *te vrijedi:*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty} a_n+\lim_{n\to+\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to+\infty} a_n-\lim_{n\to+\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to+\infty} a_n\cdot\lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Nadalje, ako je $\lim_{n\to+\infty} b_n\neq 0$*, onda postoji i* $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$ *i jednak je* $\frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n}$*.*

Primjer 446. *Imamo* $\lim\left(\frac{1}{n}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=\lim\frac{1}{n}+3\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0+0=0.$

Korisno je znati i teorem (koji je poznat kao Heineova karakterizacija neprekidnosti):

Teorem 54. *Realna funkcija* f *je neprekidna u točki* c *ako i samo ako za svaki niz* $(a_n)_n$ *koji konvergira k* c*, niz* $(f(a_n))_n$ *konvergira k* $f(c)$*.*

Ukratko, za neprekidne funkcije f i sve konvergentne nizove $(a_n)_n$ vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=f(\lim_{n\to+\infty} a_n).$$

Primjer 447. *Kako je sinus neprekidna funkcija, vrijedi*

$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{1}{n^2}=\sin\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=\sin 0=0.$$

Posljedica gornjeg teorema su sljedeća svojstva limesa koja se često koriste kod računanja limesa nizova:

$$\lim_{n\to+\infty}(c+a_n)=c+\lim_{n\to+\infty} a_n,$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^n=+\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}=0,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\ln a_n=\ln\lim_{n\to+\infty} a_n$$

(za realne nizove (a_n) s pozitivnim članovima),

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{\lim_{n\to+\infty} a_n}$$

(za realne nizove (a_n) se nenegativnim članovima) itd. Sva navedena pravila vrijede za konvergentne realne nizove (a_n).

Za limese nizova koji su racionalne funkcije od n primjenjuju se isti postupci kao za računanje limesa racionalnih funkcija u beskonačnosti (dijeljenje s najvećom potencijom).

Primjer 448.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2n^2}{1-3n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}-3}=0.$$

Slični postupak (dijeljenje s članom koji najbrže raste) može se primijeniti i na izračunavanje mnogih drugih limesa nizova. Ovdje podsjećamo: Eksponencijalne funkcije s bazom većom od 1 rastu brže od svih polinoma, a kad međusobno uspoređujemo dvije rastuće eksponencijalne funkcije, brže raste eksponencijalna funkcija s većom bazom.

Primjer 449.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-e^n}{5n^2+e^n}=\frac{2\frac{n}{e^n}-1}{5\frac{n^2}{e^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

S teorijske strane dobro je znati i sljedeći teorem:

Teorem 55. *Ako je niz realnih brojeva ograničen i rastući ili ograničen i padajući, onda je konvergentan.*

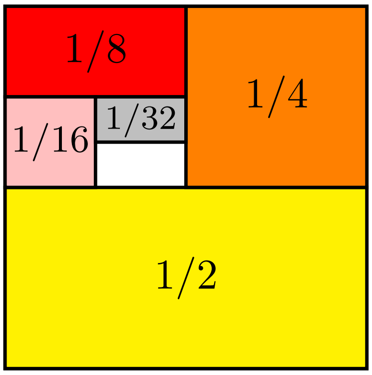
Ponovimo bitno... Nizovi realnih odnosno kompleksnih brojeva su realne odnosno kompleksne funkcije kojima je domena skup prirodnih brojeva (evtl. s nulom). Niz $(a_n)_n$ konvergira k broju L ako vrijedi: Što je veći n, to je iznos a_n bliži L. Na konvergenciju niza ne utječe bilo koji konačan broj početnih članova. Geometrijski nizovi su nizovi za koje vrijedi da je kvocijent dva uzastopna člana konstantan; oni konvergiraju ako je taj kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ili ako su konstantni.

11.2 Redovi

Pojednostavljeno rečeno, red je beskonačna suma, tj. suma nekog niza: $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$.

Primjer 450. *Na slici 11.5 prvih nekoliko članova geometrijskog niza $a_n=\frac{1}{2^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}_0$ predstavljeno je kao površine pravokutnika. Kad bismo nastavili ucrtavati daljnje članove vidimo da će u sredini (u bijelom polju) uvijek biti dovoljno mjesta za ucrtati još po jedan član niza, a ako nastavimo u beskonačnost, čitav kvadrat (površine 1) bit će ispunjen članovima niza. Dakle,*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1.$$



Slika 11.5: Niz i red

Kako sugerira prethodni primjer, pitanje ima li smisla sumi $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ pridružiti određenu vrijednost svodi se na pitanje: Ako zbrojimo što više članova počevši od prvog, približava li se takva suma nekom broju ili ne? Formalno:

Definicija 101 (Red)**.** *Red je uređen par niza $(a_n)_n$ i pripadnog niza parcijalnih suma $(S_n)_n$ definiranog s*

$$S_1 = a_1,$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Član a_n naziva se općim članom reda.

Red je konvergentan ako je njegov niz parcijalnih suma (S_n) konvergentan. U tom slučaju $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ zovemo sumom reda i označavamo s $\sum\limits_n a_n$:

$$\sum_n a_n = \lim_n S_n.$$

Uočimo: Iako niz $(S_n)_n$ nije proizvoljan, već određen nizom $(a_n)_n$ kojeg u redu sumiramo, u definiciji ga ističemo zasebno jer je pitanje sumacije reda pitanje konvergencije niza $(S_n)_n$.

Primjer 451. *U primjeru 450 zbrajali smo članove geometrijskog niza s općim članom $a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$. Znamo da je takvom nizu suma prvih n članova jednaka $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}$, odnosno $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, dakle je $\lim_n S_n = 1$ i stoga pišemo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

Redovi poput prethodnog nazivaju se geometrijskim. Geometrijski red je red dobiven zbrajanjem članova geometrijskog niza, tj. to je red oblika $\sum_n aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$. Geometrijski red konvergira (i suma mu je $\frac{a}{1-q}$) točno ako je $|q| < 1$.

Primjer 452. *Decimalni zapis realnog broja x je njegov zapis kao reda*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{10^n},$$

gdje je a_0 cijeli dio od x, a ostali a_n-ovi su redom decimalne znamenke od x. Svaki konačni decimalni zapis je odabir neke parcijalne sume tog reda.

Primjerice, zapis $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ zapravo znači

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} 3 \cdot \frac{1}{10^n}$$

(primijetimo da je decimalni zapis geometrijski red ako i samo ako je x oblika cijeli broj plus $\frac{a}{9}$ s $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$).

Kad $\frac{1}{3}$ pišemo kao aproksimativno $0{,}33333$ zapravo smo kao aproksimaciju odabrali petu parcijalnu sumu.

Pritom treba misliti na to da se radi samo o aproksimaciji poznatog broja $\frac{1}{3}$, koji je različit od broja $0{,}33333 = 0{,}33333000\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$ gdje je $a_n = 3$ za $n \leq 5$ i $a_n = 0$ za $n > 5$. U tom smislu korektno je (u kemiji i fizici uobičajeno) razlikovanje brojeva $0{,}35$ i $0{,}3500$ jer se u primjenama uvijek radi o aproksimacijama točnih brojeva (nikoje mjerenje ne može dati matematički egzaktnu brojčanu vrijednost) pa se u prvom slučaju radi o broju kod kojeg je iz određenih (praktičnih) razloga kao aproksimacija odabrana druga parcijalna suma, dok se kod drugog broja odabrala četvrta. Pritom u oba slučaja zapravo ne znamo ostatak reda, tj. ti brojevi možda jesu, a možda i nisu jednaki broju $\frac{7}{20} = 0{,}35000\ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{10^n}$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_n = 0$ za $n > 2$.

Primjer 453. *Molekulska particijska funkcija se u statističkoj termodinamici definira formulom*

$$z = \sum_j g_j e^{-E_j/(k_{\mathrm{B}}T)},$$

gdje je k_{B} Boltzmannova konstanta, T termodinamička temperatura, E_j je energija molekule u j-tom stanju, a g_j je degeneracijski broj j-tog stanja *(sumira se po svim mogućim energijskim stanjima jedne molekule). Ako nema degeneriranih stanja, svi su $g_j = 1$ pa je formula jednostavnija:*

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{E_j}{k_B T}\right).$$

Za vibracije dvoatomnih molekula u približenju harmoničkog oscilatora (za promjene geometrije molekule koje ne odstupaju puno od ravnotežne geometrije) poznato je i da vrijedi $E_j = h\nu\left(j + \frac{1}{2}\right)$, gdje je $j \in \mathbb{N}_0$ vibracijski kvantni broj, a ν je vibracijska frekvencija i h Planckova konstanta.

Uvrstimo li to u formulu za z, dobijemo

$$z = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j + \frac{1}{2}h\nu}{k_B T}\right) = \sum_j \exp\left(-\frac{h\nu j}{k_B T}\right) \exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right).$$

Ovo je geometrijski red s početnim članom $\exp\left(-\frac{h\nu}{2k_B T}\right)$ i kvocijentom $q = \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$, koji je pozitivan broj manji od 1, dakle se radi o konvergentnom geometrijskom redu sa sumom

$$z = \frac{e^{\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Uz konvergentne geometrijske redove, najpoznatiji konvergentni redovi su redovi

$$\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}, \quad s > 1.$$

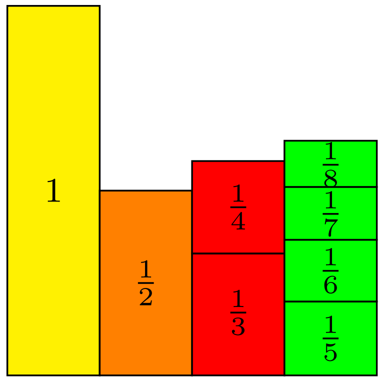
Napomena 46. *Poznato je da vrijedi $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, tj.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(to je u 18. st. pokazao Leonhard Euler).

Primjer 454. *Redovi s konstantnim članovima ($\sum_{n=1}^{+\infty} c = c + c + c + \ldots$) divergiraju osim ako je $c = 0$ ($\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$).*

Primjer 455. *Red $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ divergira jer su mu parcijalne sume $S_n = 0$ za parne n i $S_n = 1$ za neparne n pa je limes niza (S_n) (niza 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) neodređen.*



Slika 11.6: Ilustracija uz dokaz divergencije harmonijskog reda

Među divergentnim redovima ističe se harmonijski red

$$\sum_n \frac{1}{n} = +\infty.$$

Kako se uvjerimo u to da ta suma beskonačna? Prikažimo njegove članove kao površine pravokutnika jednakih širina (slika 11.6), pri čemu ih slažemo u stupce tako da u jedan stupac grupiramo članove od prvog neiskorištenog do prvog sljedećeg koji je oblika $\frac{1}{2^n}$. Sad se vidi (i nije teško formalno dokazati) da u svakom stupcu imamo površinu ne manju $\frac{1}{2}$, dakle je suma cijelog reda veća od beskonačno mnogo polovina, što je beskonačno.

Uočimo: Svim redovima za koje dosad znamo da konvergiraju opći član teži u nulu ne i nikoji red kojeg smo dosad sreli, a da njegov opći član ne teži u nulu, ne konvergira. S druge strane, harmonijskom redu opći član teži u nulu, ali red ipak divergira. I stvarno, a vjerujemo i očekivano, postoji veza između konvergencije niza $(a_n)_n$ i odgovarajućeg reda $\sum_n a_n$ (tj. konvergencije niza $(S_n)_n$):

Teorem 56 (Nužan uvjet konvergencije reda)**.** *Ako red* $\sum_n a_n$ *konvergira, onda je* $\lim_n a_n = 0$.

Kraće i lakše pamtljivo: Red nema „šanse” konvergirati ako mu opći član ne teži u nulu. Ako mu opći član teži u nulu, onda red možda konvergira, a možda i ne.

Primjer 456. *Red* $\sum_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ *divergira jer je* $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$.

Primjer 457. *Red* $\sum_n \cos n$ *divergira jer* $\lim_n \cos n$ *ne postoji, pa nije jednak nuli.*

Da bi se za konkretni red ispitalo konvergira li, postoje razni kriteriji konvergencije. Najvažniji među njima su

- Kriterij uspoređivanja: Ako je $0 \le a_n \le b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_n a_n$. Ako je $0 \le a_n \le b_n$ za sve n (počevši od nekog mjesta) te ako znamo da $\sum_n a_n$ divergira, onda divegira i $\sum_n b_n$.

- D'Alembertov kriterij: Ako $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno)[4] konvergira, a ako je $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

- Cauchyjev kriterij Ako $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, onda red $\sum_n a_n$ (apsolutno) konvergira, a ako je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, onda red divergira. U slučaju da je $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ovaj kriterij ne daje odluku.

- Leibnizov kriterij primjenjuje se za redove kojima članovi alterniraju po predznaku. Red $\sum_n (-1)^n b_n$ (gdje su svi $b_n \ge 0$) konvergira ako je niz (b_n) padajući i konvergira u nulu.

- Integralni kriterij: Ako su svi a_n pozitivni i ako je $a(x)$ definirana tako da u formuli za opći član a_n znak n zamijenimo s x, te ako je tako definirana funkcija a neprekidna za $x \ge 1$ i $\lim_{x\to+\infty} a(x) = 0$, onda red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i integral $\int_1^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Primjer 458. *Znamo da konvergira red $\sum_n \frac{1}{3^n}$ (geometrijski red s kvocijentom $1/3$). Kako je $3^n < 3^n + n$ za sve n, slijedi da je $\frac{1}{3^n+n} \le \frac{1}{3^n}$ za sve n, pa temeljem kriterija uspoređivanja zaključujemo da i red $\sum_n \frac{1}{3^n+n}$ konvergira.*

Primjer 459. *Red $\sum_n \frac{1}{n!}$ konvergira po d'Alembertovom kriteriju jer je*

$$\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Primjer 460. *Red $\sum_n \left(\frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6}\right)^n$ konvergira po Cauchyjevom kriteriju jer je*

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6}\right)^n} = \lim_n \frac{5n-7n^2+n^3}{6n^3+6} = \lim_n \frac{\frac{5}{n^2}-\frac{7}{n}+1}{6+\frac{6}{n^3}} = \frac{1}{6} < 1.$$

[4]Red $\sum_n a_n$ s realnim ili kompleksnim članovima apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_n |a_n|$. Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

Primjer 461. *Red* $\sum_n (-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ *konvergira po Leibnizovom kriteriju jer je* $a_n = \frac{1}{n} > 0$ *za sve* n*, niz* $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *je padajući i* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$*.*

Primjer 462. *Integralnim kriterijem može se pokazati divergencija harmonijskog reda* $\sum_n \frac{1}{n}$*. Kako je* $a_n = \frac{1}{n}$*, znači da uzimamo* $f(x) = \frac{1}{x}$ *i* f *ima tražena svojstva (neprekidna za* $x \geq 1$ *i ima* x*-os kao horizontalnu asimptotu). Kako znamo da* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ *divergira u* $+\infty$*, zaključujemo da je* $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$*.*

Općenito se integralnim kriterijem može pokazati da među redovima $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$ *konvergiraju točno oni kod kojih je* $s > 1$*.*

Napomena 47. *D'Alembertov i Cauchyjev kriterij konvergencije mogu se primijeniti i na redove s kompleksnim općim članom.*

Ponovimo bitno... Red je ureen par nekog niza i pripadnog niza parcijalnih suma. Parcijalna suma niza je zbroj njegovih početnih članova do nekog mjesta. Elemente niza kojeg zbrajamo zovemo općim članovima reda. Red konvergira ako odgovarajući niz parcijalnih suma konvergira. Ako opći član reda ne konvergira u nulu, red ne može konvergirati. Geometrijski red konvergira točno ako je kvocijent geometrijskog niza kojeg zbrajamo po apsolutnoj vrijednosti manji od 1. Red oblika $\sum_n \frac{1}{n^s}$ konvergira točno ako je $s > 1$.

11.3 Redovi funkcija

U primjenama se rijetko pojavljuju redovi u kojima niz $(a_n)_n$ iz kojeg je red nastao ne ovisi o dodatnoj varijabli, označimo ju s x. Redovi oblika

$$\sum_n a_n(x)$$

nazivaju se redovima funkcija. Takvi su primjerice redovi:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n!},$$

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx).$$

Svaki red funkcija za svaki x daje red koji možda konvergira, a možda ne — to ovisi o tome koji konkretan x uzmemo. Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red $\sum_n a_n(x)$ konvergira zove se područjem konvergencije tog reda.

Primjer 463. *Područje konvergencije reda $\sum_n x^n$ je $\langle -1, 1\rangle$ jer je to geometrijski red s kvocijentom x.*

Primjer 464. *Odredimo područje konvergencije reda $\sum_n \frac{(x-2)^n}{n!}$ koristeći d'Alembertov kriterij:*

$$\lim_n \left| \frac{\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x-2)^n}{n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{x-2}{n+1} \right| = 0$$

što je manje od 1 za svaki x, dakle je područje konvergencije $\mathbb{R}$.

Za varijable x iz područja konvergencije (i samo za njih) smisleno je pisati

$$f(x) = \sum_n a_n(x),$$

tj. tom je formulom definirana realna funkcija kojoj je domena točno području konvergencije reda na desnoj strani formule.

Primjer 465. *S*

$$f(x) = \sum_n x^n$$

je definirana funkcija $f : \langle -1, 1\rangle \to \mathbb{R}$. Vrijedi npr.

$$f(0{,}5) = \sum_n 0,5^n = 2, f(0{,}25) = \sum_n 0,25^n = 1{,}333\ldots$$

Za primjene su najvažnije dvije vrste redova funkcija: redovi potencija i trigonometrijski redovi.

11.3.1 Redovi potencija

Definicija 102 (Red potencija)**.** *Za niz $(b_n)_n$ i $c \in \mathbb{R}$ red funkcija oblika*

$$\sum_n b_n(x-c)^n$$

zove se redom potencija (oko točke c).

Primijetimo da je svaka parcijalna suma svakog reda potencija polinom.

Područje konvergencije svakog reda potencija (oko točke c) je interval od $c-R$ do $c+R$, gdje je broj R tzv. radijus konvergencije reda potencija, određen bilo kojom od formula

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|b_n|}},$$

$$R = \lim_n \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|.$$

Ako je $R = \infty$, red potencija konvergira na čitavom skupu $\mathbb{R}$. Inače, interval kovnergencije reda potencija, tj. interval od $c-R$ do $c+R$, može biti otvoren, zatvoren ili poluotvoren: u rubovima $c-R$ i $c+R$ red potencija može i ne mora konvergirati te stoga u rubovima treba zasebno ispitati konvergenciju. Uočimo da radijus konvergencije reda potencija ne ovisi o c, nego samo o nizu koeficijenata $(b_n)_n$.

Primjer 466. *Red funkcije*

$$\sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

je red potencija oko $c = 3$ za koji je

$$b_n = \frac{1}{n}.$$

Izračunajmo radijus konvergencije koristeći prvu od gornjih formula:

$$R = \lim_n \frac{1/n}{1/(n+1)} = 1.$$

Dakle, naš red sigurno konvergira za x izmeđ $3-1=2$ i $3+1=4$. Konvergenciju za $x=2$ i $x=4$ ispitujemo zasebno.

Uvrstimo $x = 2$ u red potencija, čime dobivamo dobivamo red $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ koji konvergira po Leibnizovom kriteriju (primjer 461) a za $x = 4$ dobivamo harmonijski red $\sum \frac{1}{n}$ koji divergira. Dakle, područje konvergencije promatranog reda potencija je $[2, 4\rangle$, odnosno s

$$f(x) = \sum_n \frac{(x-3)^n}{n}$$

je definirana funkcija $f : [2, 4\rangle \to \mathbb{R}$.

Bitno češće od pitanja za koje x red potencija postaje realna funkcija jedne varijable je obrnuto pitanje: Za zadanu realnu funkciju f jedne varijable, kojoj je domena neki otvoren interval I, može li se ona za $x \in I$ izjednačiti s nekim redom potencija (zapisati kao red potencija).

Primjer 467. *Funkcija s pravilom $f(x) = \frac{1}{1-x}$ može se zapisati koa*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

no ta jednakost ne vrijedi na čitavoj domeni od f (to je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, nego s domenom $I = \langle -1, 1\rangle$.

Dakle, pitanje kojim se želimo sad pozabaviti jest: Ako znamo realnu funkciju f jedne varijable, može li se naći red potencija koji kao područje konvergencije ima neki interval I koji je podskup prirodne domene od f i takav da za x iz tog područja konvergencije ima sumu jednaku $f(x)$? Pritom je c fiksirana točka I.

Naime, ako to možemo učiniti, to znači da se $f(x)$ može (za x iz I) aproksimirati parcijalnom sumom tog reda potencija, tj. polinomom. Dakle, cilj nam je za zadanu formulu $f(x)$ i za x blizu neke točke c u domeni te funkcije naći polinom $p_n(x)$ nekog stupnja n takav da je $f(x) \approx p_n(x)$ za x blizu c i da je pritom među svim polinomima odabranog stupnja $p_n(x)$ najbolja aproksimacija za $f(x)$ (graf od p se u blizini točke $(c, f(c))$ najbolje priljubljuje uz graf od f). Drugim riječima, za zadanu $f : I \to \mathbb{R}$ i $c \in I$ (pri čemu c nije rubna točka od I) tražimo red potencija $\sum b_n(x-c)^n$ takav da

$$f(x) = \sum_n b_n(x-c)^n$$

vrijedi na što većem intervalu $I' \subseteq I$ koji sadrži c. U takvom slučaju reći ćemo da je funkcija f razvijena u red potencija oko c. S obzirom na to da su u takvom redu potencija potencije $(x-c)^n$ određene odabirom c, zadatak se svodi na određivanje koeficijenata b_n tako da se postigne gornja jednakost. Njih ćemo odrediti uzevši u obzir da želimo da parcijalne sume reda $\sum_n b_n(x-c)^n$ budu polinomi koji oko c najbolje aproksimiraju f. Te polinome onda nazivamo Taylorovim polinomima funkcije f oko c.

Krenimo redom za $n = 0, 1, 2, \ldots$ Želimo li da polinom stupnja 0 (konstantna funkcija $p_0(x) = b_0$) što bolje aproksimira f oko c, tražimo horizontalni pravac $y = b_0$ koji je „najsličniji" grafu od f oko c. Naravno da to znači da on mora bar prolaziti točkom grafa $(c, f(c))$, dakle mora biti

$$b_0 = f(c).$$

Znamo da je polinom stupnja 1 (afina funkcija $p_1(x) = b_0 + b_1(x - c)$) koja najbolje aproksimira f oko c točno tangenta na graf od f u točki $(c, f(c))$. Jednadžba tangente u toj točki je

$$y = f'(c) \cdot (x - c) + f(c).$$

Slijedi da uz već poznati $b_0 = f(c)$ (tangenta i graf prolaze istom točkom) imamo i

$$b_1 = f'(c).$$

Ako bisom tražili polinom stupnja 2 (kvadratnu funkciju $p_2(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2$) razumno je uz podudaranje iznosa $f(c)$ i $p_2(c)$ (oba prolaze istom točkom) te $f'(c)$ i $p_2'(c)$ (imaju zajedničku tangentu) tražiti i podudaranje zakrivljenosti, tj. druge derivacije. Imamo dakle uvjet

$$f''(c) = p''(c) = 2b_2$$

odnosno

$$b_2 = \frac{1}{2} f''(c).$$

Zaključujemo da će opći uvjet za određivanje formula za b_k-ove biti zahtjev da se u slučaju da f aproksimiramo n-tom parcijalnom sumom $p_n(x) = b_0 + b_1(x - c) + b_2(x - c)^2 + \ldots + b_n(x - c)^n$ derivacije od f i p_n podudaraju u c, redom od nulte do n-te.

Primjer 468. *Uzmimo funkciju $f(x) = e^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i odredimo njezin Taylorov polinom stupnja 3 oko 0, tj. polinom $b_0 + v_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ stupnja 3 koji najbolje aproksimira e^x oko $c = 0$.*

Budući da je $f^{(n)}(x) = e^x$ za sve n, imamo redom uvjete:

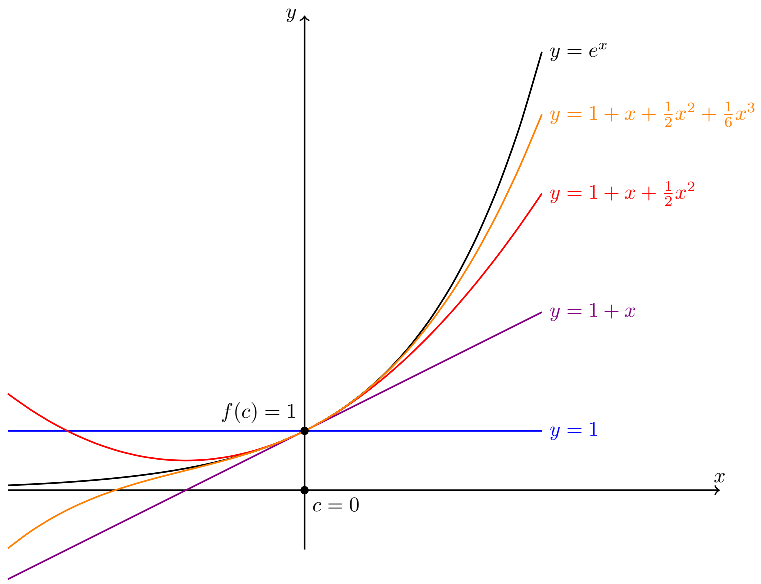
$$e^0 = b_0,$$

$$e^0 = b_1,$$

$$e^0 = 2b_2,$$

$$e^0 = 6b_3.$$

Dakle, traženi polinom je $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$. Na slici 11.7 vidimo kako izgleda taj polinom kao i polinomi stupnjeva 0, 1 i 2 koji oko $c = 0$ najbolje aproksimiraju $f(x) = e^x$.



Slika 11.7: Taylorovi polinomi stupnjeva 0 do 3 za $f(x) = e^x$ i $c = 0$.

Imamo dakle uvjete:

$$\begin{aligned}
p_n(c) &= f(c), \\
p_n'(c) &= f'(c), \\
p_n''(c) &= f''(c), \\
p_n'''(c) &= f'''(c), \\
&\vdots \\
p_n^{(n)}(c) &= f^{(n)}(c).
\end{aligned}$$

Derivirajmo p_n n puta:

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \ldots + b_n(x-c)^n,\\
p_n'(x) &= b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + \ldots + nb_n(x-c)^{n-1},\\
p_n''(x) &= 2b_2 + 3\cdot 2b_3(x-c) + \ldots + n\cdot(n-1)b_n(x-c)^{n-2},\\
p_n'''(x) &= 3\cdot 2b_3 + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot b_n(x-c)^{n-3},\\
&\vdots\\
p_n^{(n-1)}(x) &= (n-1)!b_{n-1} + n!b_n(x-c),\\
p_n^{(n)}(x) &= n!.
\end{aligned}$$

Uvrstimo c u derivacije od p_n:

$$\begin{aligned}
p_n(c) &= b_0,\\
p_n'(c) &= b_1,\\
p_n''(c) &= 2b_2,\\
p_n'''(c) &= 3\cdot 2b_3,\\
&\vdots\\
p_n^{(n-1)}(c) &= (n-1)!b_{n-1},\\
p_n^{(n)}(c) &= n!.
\end{aligned}$$

Naposlijetku ih redom izjednačimo s $f(c)$, $f'(c)$, $f''(c)$, $f'''(c)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(c)$ i $f^{(n)}(c)$ te vidimo da je opća formula za b_n sljedeća:

$$b_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}. \tag{11.1}$$

Drugim riječima, ako naš problem određivanja reda potencija čije parcijalne sume oko c najbolje aproksimiraju f uopće ima rješenja, onda je to red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Taj je red definiran samo ako f u c posjeduje sve derivacije, a naziva se Taylorovim redom funkcije f oko točke c, a njegova parcijalna suma stupnja n naziva se Taylorovim polinomom stupnja n funkcije f oko točke c; njega ćemo označavati s $T_n(x)$. Taylorov polinom stupnja n naravno ima smisla samo ako funkcija f u točki c posjeduje sve derivacije do n-te. U pravilu, ali ne uvijek, povećanjem stupnja n Taylorovog polinoma dobivamo točniju aproksimaciju funkcije f oko c. Za slučaj $c = 0$, Taylorovi redovi nazivaju se Maclaurinovim redovima.

Primjer 469. *Kako je za* $f(x) = e^x$ *i sve* $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

imamo $f^{(n)}(0) = 1$ *za sve* $n \in \mathbb{N}_0$*, dakle je Maclaurinov red za* e^x *dan formulom*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Radijus konvergencije tog reda je

$$R = \lim_n \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_n (n+1) = \infty,$$

dakle Maclaurinov red od e^x *konvergira za sve* $x \in \mathbb{R}$*.*

Dakle, Taylorov red funkcije f oko točke c je red potencija s koeficijentima određenim funkcijom f i točkom c kao u formuli 11.1. Njegovo područje konvergencije je kao i svakom redu potencija interval I od $c - R$ do $c + R$, sa ili bez rubova, gdje je R radijus konvergencije tog reda. Za $x \in I$ stoga Taylorov red od f oko c definira funkciju $T(x)$ koja se s $f(x)$ sigurno podudara bar za $x = c$. Taylorov red funkcije općenito ne mora biti jednak funkciji f nigdje osim u c, tj. nije uvijek moguće staviti jednakost između $f(x)$ i pripadnog Taylorovog reda $T(x)$.[5]

Primjer 470. *Promotrimo funkciju definiranu s*

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Imamo $f(0) = 0$*. Nadalje, po definiciji derivacije je*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\exp(-1/x^2)}{x}.$$

Supstituirajmo $y = 1/x^2$ *pa je prethodni limes jednak*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\exp(-y)}{\pm y^{-1/2}} = \lim_{y \to +\infty} \pm \frac{\sqrt{y}}{\exp(y)} = 0$$

[5]Funkcije za koje je $T(x) = f(x)$ na nekom intervalu oko c nazivaju se analitičkim funkcijama u c.

budući da eksponencijalna funkcija raste brže od svake potencije. Dakle, $f'(0) = 0$. Analogno bi se korištenjem definicije derivacije pokazalo: $f^{(n)}(x) = 0$ za sve n, dakle je Maclaurinov red funkcije f jednak $\sum_n \frac{0}{n!}x^n = 0$, pa se on s f podudara samo u 0.

Ipak, za većinu funkcija koje su beskonačno puta derivabilne u c moći ćemo staviti jednakost između $T(x)$ i $f(x)$:

Teorem 57 (Taylor)**.** *Funkcija je jednaka svom Taylorovom redu (na nekom intervalu I oko c) ako s porastom n greške $R_n(x) = T(x) - T_n(x)$ aproksimacije $f(x)$ s $T_n(x)$ teže u 0 za sve $x \in I$.*

Naposlijetku i za nas najvažnije: Opisani postupak daje rješenje problema najbolje aproksimacije funkcije f oko c polinomom ako taj problem uopće ima rješenje. Formalno se to iskazuje kao teorem:

Teorem 58. *Ako je na nekom intervalu oko c funkcija jednaka nekom redu potencija, onda je to njezin Taylorov red oko c.*

Primjer 471. *Odredimo Taylorov red oko $c = 2$ za polinom $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Imamo: $f'(x) = 3x^2 - 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ i dalje su sve derivacije od f nulfunkcije. Stoga je $f(2) = 9$, $f'(2) = 10$, $f''(2) = 12$, $f'''(2) = 6$, $f^{(n)}(2) = 0$ za $n > 3$ pa je Taylorov red od f oko 2 jednak $T(x) = 9+10(x-2)+\frac{12}{2!}(x-2)^2+\frac{6}{3!}(x-2)^3 = 9+10(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$. Lako se vidi da je on za sve x jednak $f(x)$, tj. $T(x)$ je razvoj od $f(x)$ oko 2 i konvergira na $\mathbb{R}$.*

Kao i u prethodnom primjeru vrijedi i općenito: Taylorovi redovi polinoma su oni sami, raspisani po potencijama od $(x - c)$.

Od svih Taylorovih redova najčešće se koriste Maclaurinovi redovi. Najvažniji Maclaurinovi redovi su sljedeći (područja konvergencije navedena su uz svaki):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in \langle -1, 1].$$

Uz ove česti su i binomni redovi koji poopćavaju redove za $\frac{1}{1\pm x}$. Binomni red je red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

i on konvergira za $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Eksponent α može biti bilo koji realan broj, a $\binom{\alpha}{n}$ je definiran kao

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Primjerice,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{48}x^3 + \dots$$

Osim direktno korištenjem formule 11.1, razvoji u redove potencija često se mogu dobiti iz gornjih razvoja algebarskim manipulacijama te deriviranjem i integriranjem (konvergentni redovi potencija mogu se derivirati i integrirati poput polinoma).

Primjer 472. *Odreddimo Maclaurinov red za 2^x. Znamo da je $2^x = \exp(x \ln 2)$, te koristeći Maclaurinov red za e^x (zamjenom x s $x \ln 2$) imamo*

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n.$$

Budući da Maclaurinov red za e^x konvergira k e^x za sve realne x, gornji razvoj u red također vrijedi za sve realne x.

Primjer 473. *Odreddimo Maclaurinov red za $\operatorname{ch} x$. Po definiciji je*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Iskoristimo ponovno Maclaurinov red za e^x:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{2n!}.$$

Kad god je n neparan imamo $(-x)^n = -x^n$ pa je $x^n + (-x)^n = 0$, odnosno u gornjem razvoju preostaju samo parni članovi. Kad je n paran imamo $x^n + (-x)^n = 2x^n$, dakle je

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n \text{paran}} \frac{2x^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ponovno smo dobili razvoj koji konvergira i jednak je ciljanoj funkciji za sve x.

Uočimo da kao i za razvoj funkcije kosinus, razvoj funkcije kosinus hiperbolni u Maclaurinov red sadrži samo parne potencije. To vrijedi i općenitije: Maclaurinovi redovi parnih funkcija sadrže samo parne članove (točnije rečeno, svi neparni koeficijenti su im 0), a Maclaurinovi redovi neparnih funkcija sadrže samo neparne članove (točnije rečeno, svi parni koeficijenti su im 0).

Primjer 474. *Odreddimo Maclaurinov red za* $\operatorname{arctg} x$. *U ovom slučaju ne možemo postupiti kao u prethodna dva primjera. No,*

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

a posljednji izraz možemo razviti u red supstituirajući x^2 na mjesto x u razvoju za $\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Taj red konvergira za $|x^2| < 1$, dakle za $|x| < 1$. Budući da je to razvoj derivacije, integriranjem (od 0 do x) ćemo dobiti razvoj za arkus-tangens:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} - 0^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

i taj je razvoj korektan za $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Uočimo da iz ovoga i bez deriviranja vidimo: Parne po redoslijedu derivacije arkus-tangensa u 0 su 0, a neparna po redoslijedu n-ta derivacija arkus-tangensa u 0 je $(-1)^n/(2n+1)$.

Primjer 475. *Odreddimo Maclaurinov red za* $(1-x)^{-2}$. *U ovom slučaju zgodnije je polaznu funkciju prvo integrirati pa razvoj u red dobiti deriviranjem. Imamo*

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} = \frac{1}{1-t}\bigg|_0^x = \frac{1}{1-x} - 1 =$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = -1 + (1 + x + x^2 + x3 + \ldots) = x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

za $x \in \langle -1, 1\rangle$. *Deriviramo posljednji izraz pa slijedi*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

za $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Redovi potencija se nerijetko mogu iskoristiti i za izračunavanje suma konvergentnih redova.

Primjer 476. *Vrijedi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\pi)^n}{(2n)!} = -1$$

jer je red na lijevoj strani jednakosti Maclaurinov red funkcije kosinus u koji je uvršten π, *te rezultat mora biti* $\cos\pi = -1$.

Već smo rekli da je glavna primjena redova potencija u praksi aproksimiranje funkcija. Ako je dana funkcija f na nekom intervalu oko c jednaka odgovarajućem Taylorovom redu, onda ju možemo aproksimirati njegovom parcijalnom sumom (Taylorovim polinomom). Pritom je greška aproksimacije $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ obično nepoznata, ali se može procijeniti pomoću formule

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}$$

gdje je M gornja međa za apsolutnu vrijednost od $f^{(n+1)}(t)$ za t-ove između x i c (tj. $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ za sve t između x i c).

Primjer 477. *Uzmimo* $f(x) = \sin x$ *i recimo da ga aproksimiramo Taylorovim polinomom stupnja* 3 *oko* $c = 0$, *tj. gledamo aproksimaciju*

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$

za $x \approx 0$. *Kolika je greška te aproksimacije za* $x = 0{,}1$? *Izračunajmo* 4. *derivaciju od sinusa:* $(\sin x)^{(4)} = \sin x$. *Stoga gornja formula povlači da je*

$$|R_3(0{,}1)| \leq \frac{M}{4!}|0{,}1 - 0|^4 = \frac{10^{-4}}{24}M,$$

gdje je M *gornja međa za* $|(\sin x)^{(4)}| = |\sin x|$ *za* $x \in \langle 0; 0{,}1\rangle$. *Ta bi se gornja međa mogla i precizno odrediti, no ugrubo je možemo procijeniti s* 1 *jer apsolutna vrijednost sinusa ne premašuje* 1. *Stoga je*

$$|R_3(0{,}1)| \leq \frac{10^{-4}}{24} \approx 4{,}16667 \cdot 10^{-6},$$

odnosno $\sin 0{,}1$ *aproksimiramo s* $0{,}1 - \frac{0{,}1^3}{3!} = 0{,}009833333\ldots$, *greška je najranije na šestoj decimali (u stvarnosti je na sedmoj).*

Češće i korisnije je razmišljati obrnuto: Na koliko velikom intervalu oko c aproksimacija $f(x)$ s $T_n(x)$ neće imati grešku veću od neke zadane maksimalne greške ε.

Primjer 478. *Ako* $\sin x$ *želimo u okolini nule aproksimirati s* $T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *tako da greška bude najviše* $\varepsilon = 10^{-3}$, *na kojem intervalu to možemo postići?*

Tražimo d *tako da za* $|x| < d$ *budemo sigurni da je* $|R_3(x)| \leq 10^{-3}$:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{\sin t}{4!}x^4\right| \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{d^3}{24} \leq 0{,}001 \Rightarrow d \leq 0{,}28845.$$

Dakle, za $x \in \langle -0{,}28845,\ 0{,}28845\rangle$ *greška aproksimacije* $\sin x$ *s* $T_3(x)$ *je manja od* 10^{-3}.

Taylorovi redovi i polinomi pojavljuju se u raznim primjenama. Slijedi nekoliko primjera.

Primjer 479. *Virijalna jednadžba stanja za realni plin ima oblik*

$$pV_{\mathrm{m}} = RT\left(1 + \frac{B}{V_{\mathrm{m}}} + \frac{C}{V_{\mathrm{m}}^2} + \ldots\right),$$

tj.

$$p = p(V_m) = \frac{RT}{V_{\mathrm{m}}} + \frac{RTB}{V_{\mathrm{m}}^2} + \frac{RTC}{V_{\mathrm{m}}^3} + \ldots$$

Koeficijenti B *i* C, *no uglavnom ne i daljnji koeficijenti, mogu se odrediti za konkretne plinove pri određenim temperaturama, npr.* B *je za* CO_2 *pri* $273K$ *jednak* $-149,7\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{mol}^{-1}$.

Primjer 480. *U teoriji relativnosti pojavljuje se formula relativističke mase, tj. ovisnosti mase o brzini:*

$$m = \frac{m_0 c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

(m_0 je masa mirovanja). Pretpostavimo li da je v puno manji od c, aproksimirajmo formulu s Taylorovim polinomom stupnja dva.

Prvo napišemo:

$$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

i stavimo $x = (v/c)^2$ (sad je $x \approx 0$ zbog pretpostavke da je v puno manji od c) pa imamo

$$m(x) = \frac{m_0}{\sqrt{1-x}}, \quad m(0) = m_0,$$

$$m'(x) = -\frac{m_0}{2}(1-x)^{-3/2}, \quad m'(0) = -\frac{m_0}{2},$$

$$m''(x) = \frac{3m_0}{4}(1-x)^{-5/2}, \quad m''(0) = \frac{3m_0}{4}$$

pa je

$$m(x) \approx m_0 - \frac{m_0}{2}x + \frac{3m_0}{8}x^2$$

odnosno

$$m \approx m_0 - \frac{m_0}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3m_0}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4.$$

Greška za slučaj $v \leq 0{,}1c$ ($x \leq 0{,}01$) je najviše ($m'''(x) = \frac{15m_0}{8}(1-x)^{-7/2}$)

$$\left| \frac{15m_0}{3! \cdot 8} \cdot (1 - 0{,}01)^{-7/2} \cdot 0{,}01^3 \right| = 3{,}237 \cdot 10^{-7} m_0.$$

Primjer 481. *Planckov zakon za zračenje crnog tijela glasi*

$$\rho = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right)}.$$

Tu je ρ spektralna gustoća energije zračenja u ovisnosti o valnoj duljini λ, h je Planckova konstanta, k Boltzmannova konstanta, c je brzina svjetlosti, a T temperatura (u kelvinima).

Prije Plancka Rayleigh i Jeans predložili su jednostavniju formulu

$$\rho = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

no kako bi iz te formule slijedilo da ρ jako raste kako se valne duljine približavaju nuli, i to pri svim temperaturama, slijedilo bi da sva tijela emitiraju kratkovalnu i ultraljubičasto zračenje (tu posljedicu Rayleigh-Jeansova zakona nazivamo ultraljubičastom katastrofom). S druge strane, za velike valne duljine Rayleigh-Jeansov zakon pokazuje dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima.

Ako je valna duljina λ jako velika, onda je $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ blizu 0. Stoga je aproksimacija $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ s prva dva člana Maclaurinova razvoja $1 + \frac{hc}{\lambda kT}$ dobra (to bolja, tj. ima to manju grešku, što je x bliži nuli, tj. što je λ veća). Slijedi da je za velike valne duljine nazivnik u Planckovom zakonu $\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right) \approx \lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}$ te Planckov zakon za velike λ poprima oblik

$$\rho(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

što je točno Rayleigh-Jeansova formula. Dakle, s porastom valne duljine Planckov se zakon svodi na Rayleigh-Jeansov.

Naposlijetku, Taylorovi se razvoji mogu iskoristiti i za približno izračunavanje integrala.

Primjer 482. *Znajući da je vjerojatnost da se molekula plina kreće nekom brzinom opisana Maxwell-Boltzmannovom funkcijom gustoće vjerojatnosti*

$$f_{\mathrm{MB}}(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{Mv^2}{2RT}\right),$$

gdje je M molarna masa, R opća plinska konstanta, T temperatura u kelvinima i v brzina molekule, koristeći Taylorov red na dvije značajne znamenke (cijeli postotak) procijenit ćemo vjerojatnost da se molekula dušika pri $25^{circ}\mathrm{C}$ kreće brzinom ne većom od $500\,\mathsf{m/s}$.

Molarna masa molekule dušika je $M = 28{,}02$ g/mol; znamo i $R = 8{,}3145$ J/(K mol) i $T = 298{,}15$ K. Dakle je za zadanu situaciju (ne pišemo jedinice jer je vidljivo da se sve krate)

$$f_{\mathrm{MB}}(v) = 3{,}032 \cdot 10^{-8} v^2 \exp\left(-5{,}652 \cdot 10^{-6} v^2\right).$$

Znamo da se vjerojatnost da slučajna varijabla opisana funkcijom gustoće f nađe u intervali I računa kao integral od f po I, dakle zadatak je procijeniti

$$P = \int_0^{500} f_{\mathrm{MB}}(v) \mathsf{d}v.$$

Razvoj u Maclaurinov red za e^x *povlači*

$$f_{\mathrm{MB}}(v) = 3{,}032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5{,}652 \cdot 10^{-6})^n}{n!} v^{2n+2}$$

dakle integriranje član po član daje

$$P = 3{,}032 \cdot 10^{-8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5{,}652 \cdot 10^{-6})^n}{n!(2n+3)} v^{2n+3}.$$

Računamo redom parcijalne sume za gornji red sve dok nam se ne ponove dvije značajne znamenke: Za $n = 0$ *imamo* $P_0 = 1{,}011 \cdot 10^{-8} 500^3 = 1{,}26375$*, za* $n = 1$ *je* $P_1 = P_0 - 3{,}427 \cdot 10^{-14} 500^5 = 0{,}19281$*, za* $n = 2$ *je* $P_2 = P_1 + 6{,}918 \cdot 10^{-20} 500^7 = 0{,}73328$*, za* $n = 3$ *je* $P_3 = P_2 - 1{,}014 \cdot 10^{-25} 500^9 = 0{,}53523$*, za* $n = 4$ *je* $P_4 = P_3 + \ldots 500^{11} = 0{,}59246$*, za* $n = 5$ *je* $P_5 = P_4 - \ldots 500^{13} = 0{,}57878$ *za* $n = 6$ *je* $P_6 = P_5 + \ldots 500^{15} = 0{,}58157$*, za* $n = 7$ *je* $P_7 = P_6 - \ldots 500^{17} = 0{,}58108$*. S obzirom na to da su se u zadnja dva koraka prve dvije, štoviše tri znamenke poklopile, zaključujemo da je tražena vjerojatnost* 58,1 *% (egzaktna vrijednost je* $P = 58{,}0683\ldots$ *%).*

11.3.2 Trigonometrijski redovi

U ovom ćemo se odjeljku posvetiti (skoro isključivo) periodičnim funkcijama kojima je domena cijeli skup $\mathbb{R}$. Kao što znamo (odjeljak 2.6.5), dvije osnovne trigonometrijske i najpoznatije periodične funkcije s prirodnom domenom $\mathbb{R}$ su sinus i kosinus. Njihovi grafovi izgledaju podjednako do na horizontalni pomak, funkcija sinus je neparna, a funkcija kosinus parna. Transformacije grafova (odjeljak 2.3) povlače da graf funkcije zadane s

$$c(x) = A\cos(Bx) + C$$

izgleda poput grafa funkcije kosinus (ako je $A < 0$, kao graf funkcije kosinus zrcaljen preko horizontalne osi), ali s amplitudom $|A|$ umjesto amplitude 1, s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{B}$ umjesto temeljnog perioda 2π i pomaknut vertikalno prema gore za C (prema dolje za $-C$ ako je $C < 0$), tako da je umjesto 0 prosječna vrijednost na $[0, 2\pi/B]$ od c jednaka C. Pritom je takva funkcija c i dalje parna. Analogno, graf funkcije zadane sa

$$s(x) = A\sin(Bx) + C$$

izgleda poput grafa funkcije sinus (ako je $A < 0$, kao graf funkcije kosinus zrcaljen preko horizontalne osi), ali s amplitudom $|A|$ umjesto amplitude 1, s temeljnim periodom $\frac{2\pi}{B}$ umjesto temeljnog perioda 2π i pomaknut vertikalno prema gore za C (prema dolje za $-C$ ako je $C < 0$), tako da je umjesto 0 prosječna vrijednost na $[0, 2\pi/B]$ od c jednaka C. Pritom je takva funkcija s i dalje parna. Podsjećamo i da ako je T temeljni period periodične funkcije, onda su i svi nT ($n \in \mathbb{N}$) također periodi te funkcije. Primijetimo da možemo stvar gledati i obrnuto: Tražimo li parnu ili neparnu periodičnu funkciju koja ima period T, prototip takve bit će funkcija tipa c odnosno s, gdje je B uzet tako da je jednak $\frac{2\pi}{T}$.

Neka je dakle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija i neka je T njezin period. Označimo

$$L = \frac{T}{2}.$$

Tada je funkcija f u potpunosti određena svojim vrijednostima na segmentu $[-L, L]$ (širine T), a ostale vrijednosti se mogu rekonstruirati po periodičnosti: $f(x) = f(x - (n+1)T)$ gdje je n najveći cijeli broj takav da je $nT \leq x$. Primjerice, $\sin(29) = \sin(29 - 5 \cdot 2\pi) = \sin(-2{,}4150\ldots)$. Vrijedi i obrnuto: Svaka funkcija f zadana na $[-L, L]$ prirodno se proširuje do periodične funkcije na $\mathbb{R}$ perioda $T = 2L$. Stoga ćemo u ovom odjeljku periodične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poistovjećivati s njihovim restrikcijama na $[-L, L]$, odnosno gledati ih kao $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$.

Najjednostavnije funkcije koje imaju period $T = 2L$ su funkcije oblika

$$c_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

i

$$s_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(za $n \in \mathbb{N}_0$).[6]

Primjer 483. *Ako je $L = \pi$, tj. ako promatramo funkcije perioda 2π, onda je*

$$c_m(x) = \cos(mx), \quad s_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da im za m, $n > 1$ broj 2π nije temeljni period ovih funkcija.

Radi jednostavnijeg zapisa, a i zbog fizikalne interpretacije označit ćemo

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

i broj ω_n zvati kutnom frekvencijom funkcija $c_n(x) = \cos(\omega_n x)$ i $s_n(x) = \sin(\omega_n x)$. Primijetimo i da je fizikalna dimenzija od ω_n recipročna fizikalnoj

[6]Primijetimo da je za $n = 0$ funkcija s_n nulfunkcija, pa stoga za funkcije s_n uzimamo samo $n \in \mathbb{N}$.

dimenziji od L, koja je pak jednaka fizikalnoj dimenziji varijable x funkcije f koju razvijamo u Fourierov red.

Cilj ovog odjeljka je opisati kako proizvoljnu periodičnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$) perioda $T = 2L$ aproksimirati linearnom kombinacijom funkcija c_n i s_n. Pretpostavljamo da f ima najviše konačno mnogo prekida unutar $[-L, L]$. Budući da je za dvije realne funkcije f i g zadane na $[-L, L]$ koje imaju najviše konačno mnogo prekida njihov zbroj kao i skalarni višekratnik također realna funkcija s domenom $[-L, L]$ (s najviše konačno mnogo prekida), slijedi da je skup $\mathcal{P}$ svih realnih funkcija (koje imaju najviše konačno mnogo prekida) s domenom $[-L, L]$ vektorski prostor. Štoviše, budući da su realne funkcije zadane na $[-L, L]$ koje imaju najviše konačno mnogo prekida integrabilne, $\mathcal{P}$ je unitaran prostor uz uobičajeni skalarni produkt definiran s

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{P}.$$

Uočimo da kad god je umnožak funkcija f i g neparna funkcija (npr. kad je jedna od njih parna, a druga neparna), onda su funkcije f i g ortogonalne (skalarni produkt im je 0).

U unitarnom prostoru $\mathcal{P}$, svaka funkcija tipa c_m ortogonalna je na svaku funkciju tipa s_n:

$$\langle c_m, s_n\rangle = \int_{-L}^{L} \cos(\omega_m x)\sin(\omega_n)\ \mathrm{d}x = 0$$

jer se radi o integralu neparne funkcije (umnožak parne i neparne funkcije je neparna funkcija) po simetričnom području integracije. Također, za različite indekse m i n svake dvije funkcije istog tipa (C_m i c_n, odnosno s_m i s_n) su međusobno ortogonalne:

$$\langle c_m, c_n\rangle = \int_{-L}^{L} \cos(\omega_m x)\cos(\omega_n x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} (\cos((\omega_m + \omega_n)x) + \cos((\omega_m - \omega_n)x)) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((\omega_m + \omega_n)x)}{\omega_m + \omega_n} + \frac{\sin((\omega_m - \omega_n)x)}{\omega_m - \omega_n}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = 0$$

jer zbog $m \neq n$ je $\omega_m \neq \omega_n$. Analogno se vidi da je za $m \neq n$

$$\langle s_m, s_n\rangle = 0.$$

Dakle, u skupu svih funkcija tipa c_n i s_n svake dvije različite su međusobno ortogonalne (iz tog se može dokazati da se radi o linearno nezavisnom skupu).

S druge strane, ako množimo jednu od tih funkcija skalarno samu sa sobom dobivamo L:

$$\langle c_n, c_n\rangle = \langle s_n, s_n\rangle = L$$

za $n \neq 0$. Za slučaj $m = n = 0$ imamo

$$\langle c_0, c_0\rangle = 2L$$

(s_0 ne gledamo jer je nulfunkcija, no $c_0(x) = \cos(\omega_0 x) = 1$ je konstantna nenul funkcija).

Već smo rekli, ali ponavljamo: U ovom nam je odjeljku cilj zadanu periodičku funkciju f aproksimirati linearnom kombinacijom sinusa i kosinusa s istim periodom, tj. linearnom kombinacijom funkcija f_m i g_n. Kao i kod redova potencija kod kojih je cilj aproksimacija zadane funkcije konačnom sumom (polinomom), ali ne unaprijed određene duljine (stupnja), tako i ovdje: budući da želimo dozvoliti načelno proizvoljno linearne kombinacije kao aproksimacije, promatramo odgovarajuće redove.

Definicija 103 (Trigonometrijski red). *Trigonometrijski red (perioda $T = 2L$) je red funkcija oblika $\sum_{n=0}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x))$.*

Nulti član ($n = 0$) je konstantna funkcija A_0 (jer je s_0 nulfunkcija) pa je uobičajenija notacija trigonometrijskog reda sljedeća:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x)). \tag{11.2}$$

Sad, slično kao i kod redova potencija, imamo: Ako područje konvergencije trigonometrijskog reda sadrži segment $[-L, L]$, onda je sa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n c_n(x) + B_n s_n(x)) \tag{11.3}$$

definirana funkcija na $[-L, L]$, tj. periodična funkcija perioda $2L$. Kao što smo se kod redova potencija pitali za koje koeficijente ćemo dobiti najbolju aproksimaciju parcijalnom sumom i iz tog uvjeta dobili Taylorov red, tako ovdje postavljamo pitanje: Za koje koeficijente u redu 11.2 taj red konvergira na $[-L, L]$ i pritom je njegova suma u svakoj točki x tog intervala jednaka $f(x)$?

Sljedeći izvod formula za koeficijente A_n i B_n nije matematički potpuno precizan, ali osnovna ideja izvoda je ova: Pomnožimo pretpostavljenu jednakost 11.3 skalarno s c_m. Dobijemo

$$\langle f, c_m\rangle = \frac{A_0}{2}\langle c_0, c_m\rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n\langle c_n, c_m\rangle + B_n\langle s_n, s_m\rangle).$$

No, znamo da su svi gornji skalarni produkti jednaki 0, osim $\langle c_n, c_m\rangle$ za $m = n$. Stoga od gornje sume preostaje samo $\frac{A_0}{2} \cdot 2L$ (ako $m = 0$) ili $A_m \cdot L$ (ako $m \neq 0$). Drugim riječima, za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ je $\langle f, c_m\rangle = A_m \cdot L$. Analogno se vidi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ $\langle f, s_m\rangle = B_m \cdot L$. Dakle, ako je uopće moguće f zapisati u obliku 11.3, onda za koeficijente reda vrijede formule

$$A_n = \frac{1}{L}\langle f, c_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{11.4}$$

$$B_n = \frac{1}{L}\langle f, s_n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11.5}$$

Ti se koeficijenti (koeficijenti A_n i B_n izračunati formulama 11.4 i 11.5) nazivaju se Fourierovim koeficijentima funkcije f, a Fourierov red funkcije f je trigonometrijski red 11.3 kojem su koeficijenti upravo Fourierovi koeficijenti. Budući da je skalarni produkt parne i neparne funkcije u našem slučaju (jer je definiran kao integral po simetričnom intervalu) jednak 0, vidimo: Ako je f parna funkcija, onda su svi B_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo kosinusi, a ako je f neparna funkcija, onda su svi A_n jednaki 0, tj. u Fourierovom redu pojavljuju se samo sinusi.

Kao i kod Taylorovih redova, postavlja se pitanje kada možemo periodičku funkciju f izjednačiti s odgovarajućim Fourierovim redom (tj. zapisati ju formulom 11.3). Odgovor je – gotovo uvijek! Preciznije, vrijedi:

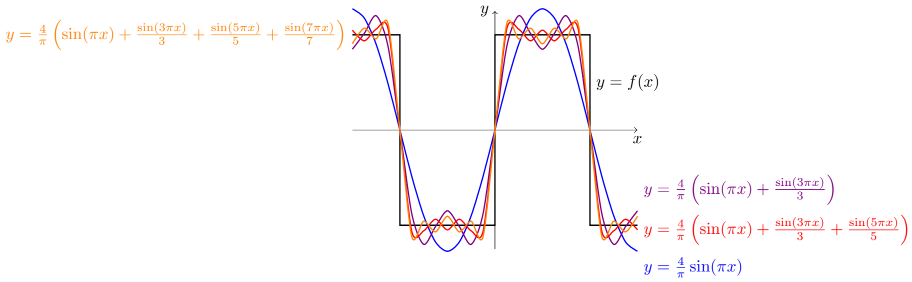
Teorem 59 (Dirichlet)**.** *Neka je $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima najviše konačno mnogo prekida koji su svi skokovi (vidi str. 160) i za koju se $[-L, L]$ može podijeliti na konačno mnogo podintervala tako da je f na svakom od njih neprekidna i monotona (rastuća ili padajuća). Tada za sve x osim eventualno točaka prekida vrijedi formula 11.3 s koeficijentima određenim formulama 11.4 i 11.5.*

Zbog Dirichletovog teorema (a i jer pojedinačna točka ne mijenja vrijednost integrala) se kod razvoja funkcija u Fourierov red obično ne obraća pažnja na vrijednosti funkcije u točkama prekida.

Primjer 484. *Odredimo Fourierov red funkcije definirane s*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Kako je zapisana, ta je funkcija definirana samo na $\langle -1, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$, no podrazumijeva se da i u -1, 0 i 1 ima neke vrijednosti (no one nisu bitne). Stoga se u tim točkama u kojima pravilo nije specificirano graf često povezuje vertikalnim crtama, koje naravno nisu dio grafa. Naravno, podrazumijevamo i da



Slika 11.8: Periodična funkcija i njezine aproksimacije parcijalnim sumama Fourierovog reda.

je f po periodičnosti proširen do funkcije s domenom $\mathbb{R}$. Njezin graf prikazan je crno na slici 11.8.

Funkcija f je neparna, dakle su svi $A_n = 0$, odnosno u razvoju u Fourierov red imamo samo sinuse:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n x).$$

Nadalje, širina intervala na kom je funkcija zadana je $T = 2$, dakle je $L = 1$ i $\omega_n = n\pi$, $s_n(x) = \sin(\omega_n x)$. Po formuli 11.5 imamo:

$$B_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(\omega_n x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-\sin(\omega_n x))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \sin(\omega_n x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\cos(\omega_n x)}{\omega_n}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{\cos(\omega_n x)}{\omega_n}\bigg|_{0}^{1} = \frac{1-\cos\omega_n}{\omega_n} - \frac{\cos\omega_n - 1}{\omega_n} = \frac{2 - 2\cos\omega_n}{\omega_n}.$$

Uzeši u obzir da je $\cos\omega_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$ vidimo: Kad je n paran, $(-1)^n = 1$ pa je $B_n = 0$; kad je n neparan, $(-1)^n = -1$ pa je $B_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$. Dakle,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \dots\right).$$

Jednakost po Dirichletovom teoremu vrijedi za sve x osim točaka prekida, a to su $x = k \in \mathbb{Z}$. Na slici 11.8 obojeno su prikazane i prve tri parcijalne sume gornjeg reda.

Primjer 485. *Neka je f na $[-5, 5]$ zadana s $f(x) = 1 + \frac{2}{5}x$ za $x < 0$ i $f(x) = 1 - \frac{2}{5}x$ za $x \geq 0$, vidimo da se radi o parnoj (neprekidnoj) funkciji, dakle su svi $B_n = 0$ i u Fourierovom redu funkcije f pojavljuju se samo kosinusi. Ovdje je $L = 5$ i $\omega_n = \frac{n\pi}{5}$.*

Prvo izračunamo $A_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$*. Dalje računamo* A_n*,* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$A_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos(\omega_n x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}\left(1+\frac{2}{5}x\right)\cos(\omega_n x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{5}\left(1-\frac{2}{5}x\right)\cos(\omega_n x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$A_n = 2\cdot\frac{2-\pi n\sin(\pi n)-2\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}.$$

Za parne n *je* $\sin(\pi n) = 0$ *i* $\cos(\pi n) = 1$ *pa je* $A_n = 0$*, a za neparne* n *je* $\cos(\pi n) = 0$ *i* $\sin(\pi n) = -1$ *pa je* $A_n = \frac{4+2\pi n}{n^2\pi^2}$*. Dakle,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{5} =$$

$$= \frac{4+2\pi}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{5} + \frac{4+6\pi}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{5} + \frac{4+10\pi}{25\pi^2}\cos(\pi x) + \frac{4+14\pi}{49\pi^2}\cos\frac{7\pi x}{5} + \ldots$$

Slika 11.8 sugerira da najbolje aproksimacije zadane periodične funkcije pomoću sinusa i kosinusa dobivamo tako da (kao i u slučaju aproksimacije polinomom temeljem Taylorovog reda) uzimamo parcijalne sume odgovarajućeg Fourierovog reda. No, dok je to za funkciju na toj slici točno, općenito to ne mora biti tako. Pravilan odabir je tako da biramo članove reda u redoslijedu po njihovoj važnosti (njihovom doprinosu ukupnoj funkciji). Taj se pak redoslijed iščitava iz spektra amplituda, koji je određen kompleksnim oblikom Fourierovog reda.

Kao što znamo iz odjeljka 1.4, za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}.$$

Stoga, ako imamo razvoj funkcije f u Fourierov red (formula 11.3) i koristeći činjenicu $\frac{1}{i} = -z$, možemo ga preoblikovati u

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos(\omega_n x) + B_n\sin(\omega_n x)\right) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n(\exp(i\omega_n x)+\exp(-i\omega_n x)) - iB_n(\exp(i\omega_n x)-\exp(-i\omega_n x))\right) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left((A_n - iB_n)\exp(i\omega_n x) + (A_n + iB_n)\exp(-i\omega_n x)\right) =$$

(primijetimo da je $\omega_{-n} = -\omega_n$)

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{A_{-n} + iB_{-n}}{2} \exp(i\omega_{-n} x) + \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n - iB_n}{2} \exp(i\omega_n x) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(i\omega_n x),$$

ako smo označili

$$\phi_n(x) = \exp(i\omega_n x)$$

i

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad c_n = \frac{A_n - iB_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{A_n + iB_n}{2} (n \in \mathbb{N}).$$

Zapis Fourierovog reda 11.3 u obliku

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \phi_n(i\omega_n x) \tag{11.6}$$

s gore definiranim koeficijentima $c_n \in \mathbb{C}$ i (kompleksnim eksponencijalnim) funkcijama ϕ_n naziva se kompleksnim oblikom Fourierovog reda. Još jednom napominjemo: za sve n je $\omega_{-n} = -\omega_n$.

Uočimo:

- Ako je f realna funkcija, za sve n vrijedi $\overline{c_n} = c_{-n}$.
- Ako je f realna i parna funkcija, svi B_n su 0 pa su svi koeficijenti c_n realni brojevi:
$$c_{\pm n} = \frac{A_n}{2}.$$
- Ako je f realna i neparna funkcija, svi A_n su 0 pa su svi koeficijenti c_n čisto imaginarni brojevi:
$$c_{\pm n} = \pm i \frac{B_n}{2}.$$

Primjer 486. *Nastavimo primjer 485. Budući da se radilo o parnoj funkciji imamo da je $c_n = 0$ za parne $n \in \mathbb{Z}$, a za neparne n je $c_{\pm n} = \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}$, odnosno kompleksni oblik Fourierovog reda za funkciju f je*

$$f(x) = \ldots + \frac{2+5\pi}{25\pi^2} \exp(-i\omega_5 x) + \frac{2+3\pi}{9\pi^2} \exp(-i\omega_3 x) + \frac{2+\pi}{\pi^2} \exp(-i\omega_1 x) + \frac{2+\pi}{\pi^2} \exp(i\omega_1 x) + \frac{2}{}$$

Vezano za kompleksni oblik Fourierovog reda (formula 11.6), točnije, vezano za kompleksne Fourierove koeficijente c_n, definiraju se dva spektra funkcije f: spektar amplituda i fazni spektar. Za to je potrebno kompleksne Fourierove koeficijente c_n zapisati u eksponencijalnom obliku

$$c_n = |c_n| e^{i\varphi_n}.$$

Njihove apsolutne vrijednosti $|c_n|$ čine spektar amplituda, a argumenti φ_n čine fazni spektar. Preciznije, Spektar amplituda periodične funkcije f je funkcija $|c_n|$ u ovisnosti o kutnoj frekvenciji ω_n, a fazni spektar je ovisnost φ_n o ω_n.

Napomena 48. *Formalno gledajući, kompleksni Fourierovi koeficijenti čine kompleksan niz $(c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, tj. $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Ukoliko definiramo $c(\omega_n) = c_n$ doduše formalno imamo drugu funkciju (domena joj je skup svih cjelobrojnih višekratnika od π/L), no efektivno ništa bitno nismo promijenili.*

Primjer 487. *Nastavimo primjer 486 odnosno 485. Budući da je $c_n = 0$ za parne $n \in \mathbb{N}$, a za neparne n su $c_{\pm n} = \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}$ realni brojevi, imamo da je spektar amplituda definiran s*

$$|c_{\pm n}| = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2+\pi n}{n^2\pi^2}, n \text{ neparan}, n \in \mathbb{N} & \end{cases}$$

Kako je uobičajeno spektre izražavati kao funkcije od ω_n, a u našem je primjeru $\omega_n = n\pi/5$, vidimo da je

$$|c_{\pm n}| = \begin{cases} 0, & n \text{ paran}, n \in \mathbb{N}_0 \\ \frac{2+5\omega_n}{25\omega_n^2}, n \text{ neparan}, n \in \mathbb{N} & \end{cases}$$

Budući da za realne funkcije f vrijedi $c_{-n} = \overline{c_n}$ i budući da kompleksan broj i njegov kompleksno konjugirani broj imaju istu apsolutnu vrijednost, slijedi važna i korisna činjenica:

Propozicija 9. *Spektar amplituda realne funkcije uvijek je parna (realna, nenegativna) funkcija.*

S druge strane, fazni spektar parnih realnih funkcija se od 0 i π (jer su tada koeficijenti c_n realni pa su im argumenti 0 ili π), a za neparne realne funkcije fazni se spektar sastoji samo od $\pm\pi/2$ (jer su tada koeficijenti c_n čisto imaginarni).

Primjer 488. *Periodična funkcija opisuje intenzitete niza jednolikih impulsa: Svaki impuls traje konstantnim intenzitetom $\frac{1}{20}$ s, a razmak između* *početaka dva uzastopna impulsa iznosi* $\frac{1}{4}$ *s. Dakle,* $T = \frac{1}{4}$ *s (odnosno,* $L = \frac{1}{8}$ *s i* $\omega_n = 8n\pi$*). Zbog periodičnosti, odabir pozicije* $t = 0$ *je proizvoljan pa ćemo ga podesiti tako da funkcija bude parna, jer znamo da su u tom slučaju računi jednostavniji. Stavimo dakle:*

$$i(t) = \begin{cases} I, & -\frac{1}{40} < \frac{t}{s} < \frac{1}{40} \\ 0, & -\frac{1}{8} < \frac{t}{s} < -\frac{1}{40}, -frac140 < \frac{t}{s} < -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Funkcija je parna pa je

$$c_{\pm n} = \frac{A_n}{2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{8}} \int_{-1/40}^{1/40} I \cos(\omega_n t)\,\mathrm{d}t = 8I \int_0^{1/40} \cos(\omega_n x)\,\mathrm{d}x,$$

$$c_0 = \frac{I}{5},\ c_n = \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{\omega_n}{40} (n \neq 0).$$

Spektar amplituda je stoga jednak

$$|c_0| = \frac{I}{5},\ |c_n| = \frac{1}{\omega_n} |\sin \frac{\omega_n}{40}| (n \neq 0).$$

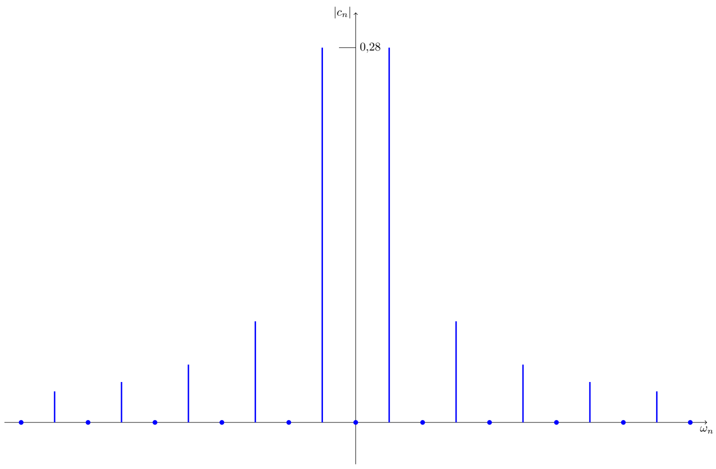
Za $n \neq 0$ *djeljiv s* 5 *amplitude su* 0*. Ako* n *pri dijeljenju s* 5 *daje ostatak* 1 *ili* 4, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi} \sin \frac{\pi}{5} \approx 0{,}0234/n$, *a ako* n *pri dijeljenju s* 5 *daje ostatak* 2 *ili* 3, $|c_n| = \frac{1}{8n\pi} \sin \frac{2\pi}{5} \approx 0{,}0378/n$.

Za našu svrhu odabira najbolje aproksimacije periodične funkcije f određenim brojem funkcije tipa c_n i s_n važniji je spektar amplituda. Naime, onukazuje koje od funkcija ϕ_n u sumi najviše doprinose formiranju aproksimacije funkcije f putem Fourierova reda. Stoga, ako želimo odabrati aproksimaciju od f s nekim brojem članova Fourierovog reda, biramo toliko članova redom po iznosima $|c_n|$. Budući da je spektar realne funkcije paran, uvijek je $|c_n| = |c_{-n}|$ pa bitne članove uzimamo u parovima s istim n.

Primjer 489. *Recimo da smo funkciju iz primjera 485 htjeli aproksimirati s 6 članova Fourierovog reda s najvećim* $|c_n|$*. S obzirom na formulu iz primjera 487, vidimo da je* $y = |c_n|$ *kao funkcija od* $o = \omega_n$ *tipa* $y = \frac{2+5|o|}{25o^2}$*. Budući da je parna, dovoljno ju je gledati za* $o > 0$*. Imamo* $y' = \frac{-5x-4}{25x^3}$*, što je za pozitivne* x *negativno, dakle* y *pada za* $o > 0$*, odnosno* $|c_n|$ *pada s porastom apsolutne vrijednosti neparnih* $n \in \mathbb{Z}$ *(a za parne je* 0*). Spektar amplituda naše funkcije* f *prikazan je slikom 11.9.*

Budući da smo ovdje imali $c_{\pm n} = A_n/2$*, znači da su* 6 *članova koji najviše doprinose funkciji* f *iz primjera 485 oni s* $n = \pm 1$ *(dva najveća* $|c_n|$*), zatim s* $n = \pm 2$ *i* $n = \pm 3$*. Dakle, tražena aproksimacija je*

$$f(x) \approx \frac{2+5\pi}{25\pi^2} \exp(-i\omega_5 x) + \frac{2+3\pi}{9\pi^2} \exp(-i\omega_3 x) +$$



Slika 11.9: Primjer spektra amplituda realne funkcije.

$$+\frac{2+\pi}{\pi^2}\exp(-i\omega_1 x)+\frac{2+\pi}{\pi^2}\exp(i\omega_1 x)+\frac{2+3\pi}{9\pi^2}\exp(i\omega_3 x)+\frac{2+5\pi}{25\pi^2}\exp(i\omega_5 x) =$$

$$= \frac{2+\pi}{\pi^2}\exp(-i\omega_1 x)+\frac{2+\pi}{\pi^2}\exp(i\omega_1 x)+\frac{2+3\pi}{9\pi^2}\exp(-i\omega_3 x)+\frac{2+3\pi}{9\pi^2}\exp(i\omega_3 x)+\frac{2+5\pi}{25\pi^2}\exp(-i\omega_5 x)+$$

$$= \frac{2+\pi}{\pi^2}\cdot 2\cos(\omega_1 x)+\frac{2+3\pi}{9\pi^2}\cdot 2\cos(\omega_3 x)++\frac{2+5\pi}{25\pi^2}\cdot 2\cos(\omega_5 x) =$$

Napomena 49. *Kako su $n \in \mathbb{Z}$, slijedi da se radi diskretnim funkcijama te se ta dva grafa zovu i diskretni frekvencijski spektri ili linijski spektri (vidi sliku 11.9).*

Primijetimo da će uvijek, kao u prethodnom primjeru, po dva člana kompleksnog oblika Fourierovog reda

$$c_{-n}\exp(-i\omega_n x) + c_n \exp(i\omega_n x)$$

dati po dva člana realnog Fourierovog reda

$$A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)$$

(u prethodnom su primjeru koeficijenti B_n bili 0 pa se zato činilo kao da smo iz dva člana kompleksnog oblika dobili samo jedan član realnog oblika reda). Iznimka je naravno $n = 0$.

11.3.3 Uvod u Fourierou transformaciju

Vidjeli smo: Periodične funkcije se (uglavnom) mogu zapisati u obliku kompleksnog Fourierovog reda, koji je određen Fourirerovim koeficijentima (i funkcijom i njezinim periodom).

Kompleksni Fourierovi koeficijenti čine niz $(c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, dakle funkciju $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, preciznije, domena od c je $\{\omega_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Razmaci između spektralnih linija su $\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T/2}$.

Opću funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ možemo zamisliti kao funkciju s jako velikim periodom ($T \to \infty$). Time se razmaci među spektralnim linijama smanjuju i linijski spektar prelazi u kontinuirani spektar (varijabla funkcije c iz diskretne ω_n prelazi u kontinuiranu ω).

Fourierov red, kojeg možemo shvatiti kao sumaciju po ω_n, pritom postaje integracija po $\mathrm{d}\omega$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x} \rightsquigarrow f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega.$$

Gornje ideje dadu se provesti formalno i rezultiraju u:

Definicija 104 (Fourierov transformat). *Ako funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ima svojstvo da nepravi integral*[7] $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *konvergira, kažemo da je apsolutno integrabilna i za takvu funkciju f je s*

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\,\mathrm{d}t$$

definirana kompleksna funkcija $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koja se zove Fourierov transformat od f, a njezina nezavisna varijabla je ω. Funkcija $\mathcal{F}$ koja apsolutno integrabilnoj funkciji f pridružuje njezin Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$ naziva se Fourierova transformacija.

Napomena 50. *Kako je $|e^{-i\omega t}| = 1$ za sve t i ω, intuitivno se vidi (a može se i dokazati) da zahtjev apsolutne integrabilnosti na f povlači konvergenciju integrala kojim je $\mathcal{F}(f)$ definirana.*

Podsjetimo se i da f ne može biti apsolutno integrabilna ako joj x-os nije obostrana horizontalna asimptota, dakle Fourierov transformat nije definiran ni za koju funkciju f koja nema to svojstvo (npr. nema smisla tražiti Fourierov transformat polinoma koji nije nulfunkcija, sinusa, kosinusa, eksponencijalne ili logaritamske funkcije).

[7] Formalno, ovo je kompleksni nepravi integral.

Dakle: Kao što je niz Fourierovih koeficijenata c funkcija s domenom $\{\omega_n : n \in \mathbb{Z}\}$ pridružena periodičnoj funkciji f, tako je $\mathcal{F}(f)$ funkcija s domenom $\mathbb{R}$ (čije elemente označamo s ω) pridružena apsolutno integrabilnoj funkciji f. Općenito će fizikalna dimenzija varijable ω Fourierovog transformata neke funkcije f biti recipročna jedinici varijable t od f (kao što to vrijedi i za ω_n. Tako imamo sljedeću tablicu fizikalnih dimenzija varijable od f i od $\mathcal{F}(f)$ u nekim čestim primjenama:

kontekst	varijabla funkcije f	varijabla od $\mathcal{F}(f)$
akustika, telekomunikacije	vrijeme t	frekvencija ν
kvantna teorija	pozicija x	$\frac{p}{\hbar}$
difrakcija	vektor $\overrightarrow{r}$	vektor $\overrightarrow{s^*}$

Ako je f realna funkcija, $\mathcal{F}(f)(\omega)$ je oblika $a(\omega) + ib(\omega)$ s a parnom, a b neparnom realnom funkcijom. Preciznije:

Teorem 60. *Funkcija f je realna ako i samo ako njen Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$ ima svojstvo da je za sve $\omega \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{F}(f)(-\omega) = \overline{\mathcal{F}(f)(\omega)}.$$

Za Fourierovu transformaciju vrijedi kao i za Fourierove koeficijente: Ako je f parna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je realna, a ako je f neparna i realna, $\mathcal{F}(f)$ je čisto imaginarna.

Fourierova transformacija $\mathcal{F}$ apsolutno integrabilnoj funkciji f pridružuje njen Fourierov transformat $\mathcal{F}(f)$ i ona je, zbog linearnost integriranja, linearan operator, tj. vrijedi:

$$\mathcal{F}(f+g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) + \mathcal{F}(g)(\omega),$$

$$\mathcal{F}(\alpha f)(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f)(\omega),$$

za sve apsolutno integrabilne f, g i sve skalare α. Uz svojstvo linearnosti, Fourierova transformacija ima niz drugih dobrih svojstava:

- Svojstvo pomaka: Pomak nezavisne varijable polazne funkcije za t_0 rezultira skaliranjem odgovarajućeg Fourierovog transformata s $e^{-i\omega t_0}$. Također, skaliranje polazne funkcije s $e^{i\omega_0 t}$ znači pomak za ω_0 za pripadni Fourierov transformat.

- Skaliranje: Ako je $g(t) = f(\alpha t)$, onda je $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$.

- Promjena smjera: Ako je $g(t) = f(-t)$, onda je $\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(-\omega)$.

- Simetrija: Ako je $g(t) = \mathcal{F}(f)(t)$, onda je $\mathcal{F}(g)(\omega) = 2\pi f(-\omega)$.
- Deriviranje: $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)$;
- Modulacija:
  Ako je $g(t) = f(t)\cos\omega_0 t$, onda je $\mathcal{F}(g)(\omega) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(f)(\omega-\omega_0) + \mathcal{F}(f)(\omega+\omega_0)\right)$;
- Konvolucija obzirom na vrijeme: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$;
- Konvolucija obzirom na frekvenciju: $\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(2\pi f(t)g(t))$.

U posljednja dva svojstva spominje se dosad nedefinirani izraz konvolucija. Radi se o operaciji s funkcijama:[8]

Definicija 105 (Konvolucija). *Konvolucija dviju funkcija $f, g : I \to \mathbb{R}$ (gdje je I neki, ne nužno ograničen, interval u $\mathbb{R}$) je funkcija $f * g$ definirana s:*

$$f * g(x) = \int_I f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Operacija $*$ je komutativna, asocijativna, distributivna te kvaziasocijativna. Jedan način kako vizualizirati konvoluciju dvije funkcije je da zamislimo da se graf jedne giba u smjeru osi apscisa jednolikom brzinom preko grafa druge funkcije te da u svakom trenutku računamo površinu presjeka — iznos te površine je vrijednost njihove konvolucije u tom trenutku. Drugi način za vizualizaciju konvolucije je ovaj: Zamislite sliku koju niste dobro fokusirali. Dobivena „zamućena slika" je konvulucija točne slike s funkcijom „zamućivanja". Pritom je za funkciju zamućivanja dovoljno opisati što bi se desilo sa slikom jedne jedine točke. Treći način je sljedeć: konvolucija nekog ograničenog uzorka (npr. sadržaja jedinične ćelije) sa jediničnim signalima u više točaka pravca, ravnine ili prostora (npr. u točkama kristalne rešetke) možemo zamisliti kao kopije te slike u svim tim točkama (u opisanom primjeru kristalnu strukturu).

Kao i Fourierov red, tako i Fourierov transformat funkcije određuje dva spektra funkcije: spektar amplituda i fazni spektar:

$$M(\omega) = |\mathcal{F}(f)(\omega)|,$$
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

Često pitanje je: Ako znamo funkciju F i znamo da je ona Fourierova transformacija nepoznate funkcije f, kako odrediti f? Odgovor na to daje sljedeći teorem.

[8]Konvolucija nije definirana za sve funkcije f i g, već za tzv. Schwartzove funkcije. Pojednostavljeno rečeno, to su funkcije koje teže u 0 kad $x \to \pm\infty$ i to brže negoli ikoja potencija x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$.

Teorem 61 (Inverzna Fourierova transformacija)**.** *Neka je $F \in L^1(\mathbb{R}) \cap A(\hat{\mathbb{R}})$. Pretpostavimo da je $F = \mathcal{F}(f)$ za neku $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tada za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, \mathrm{d}\omega.$$

Gornje ideje lako se poopćavaju na trodimenzionalni slučaj:

$$\mathcal{F}(f)(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{i\pi \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}} \, \mathrm{d}\mathbf{r}$$

gdje je $\mathbf{r}$ radij-vektor promatrane točke u $\mathbb{R}^3$, a $\mathbf{s}$ je vektor u recipročnom prostoru (izomorfnom s $\mathbb{R}^3$). Posjetimo se da je jedinica duljine u recipročnom prostoru recipročna jedinici duljine u direktnom prostoru — to je u skladu s već uočenom činjenicom da je jedinica varijable Fourierovog transformata (ovdje je to $\mathbf{s}$) recipročna jedinici varijable osnovne funkcije f (ovdje je to $\mathbf{r}$).

U standardnoj situaciji kakva se susreće u difrakcijskoj strukturnoj analizi, $\mathbf{r}$ je radij-vektor nekog atoma ili iona u kristalu, f je funkcija elektronske gustoće (nepoznata), a $\mathcal{F}(f)$ je rezultat dobiven difrakcijom na kristalu. Cilj je odrediti točke maksimuma funkcije elektronske gustoće, tj. pozicije atoma. Kako je difrakcijski uzorak ekvivalent Fourierovog transformata elektronske gustoće, teorem o inverznoj Fourierovoj transformaciji omogućuje rekonstrukciju funkcije elektronske gustoće — ali samo teoretski. Naime, zapravo se kao rezultat difrakcije dobiva samo spektar amplituda te se f ne može putem teorema o inverznoj Fourierovoj transformaciji direktno rekonstruirati. Taj problem se problemom faza. Njega se rješava na više različitih načina, primjerice Pattersonovom metodom ili tzv. direktnim metodama.

Poglavlje 12

Formule

Kompleksni brojevi

$$(x+yi) \pm (x'+y'i) = (x \pm x') + (y \pm y')i$$

$$(x+yi)(x'+y'i) = (xx'-yy') + (xy'+yx')i$$

$$|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \overline{x+iy} = x - iy$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \quad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'} = \frac{z \cdot \overline{z'}}{|z'|^2}$$

$$\mathrm{tg}(\arg(z)) = \frac{y}{x}$$

$$\phi = \arg(z): \quad z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}$$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = |z|e^{i\phi}, w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = |w|e^{i\theta}:$$

$$\overline{z} = |z|(\cos\phi - i\sin\phi) = |z|e^{-i\phi}$$

$$zw = |z||w|(\cos(\phi+\theta) + i\sin(\phi+\theta) = |z||w|e^{i(\phi+\theta)}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\phi - i\sin\phi) = \frac{1}{|z|}e^{-i\phi}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi-\theta) + i\sin(\phi-\theta)) = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\phi-\theta)}$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = |z|^n e^{in\phi}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{phi+2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

$$\mathrm{Re}(e^{i\phi}) = \cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} \quad \mathrm{Im}(e^{i\phi}) = \sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}.$$

Razne algebarske formule

- Rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Osnovne trigonometrijske formule

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Deriviranje

- Jednadžba tangente na krivulju $y = f(x)$ u točci $(c, f(c))$:

$$y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$$

- Tablica derivacija:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
a^x	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$

- Deriviranje i operacije s funkcijama:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(Cf(x))' = Cf'(x),$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{za } y = f(x).$$

- Veza predznaka prve i druge derivacije s grafom funkcije:

f	raste	pada
f'	$+$	$-$
f	konveksna	konkavna
f''	$+$	$-$

Dovoljni uvjeti za lokalne ekstreme realne funkcije jedne varijable

Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ i $c \in D$ takav da je $f'(c) = 0$ i $f''(c) > 0$, c je točka lokalnog minimuma za f.

Ako je $f : D \to \mathbb{R}$ i $c \in D$ takav da je $f'(c) = 0$ i $f''(c) < 0$, c je točka lokalnog maksimuma za f.

Parametarski zadane krivulje u ravnini

Ako je krivulja zadana s $x = x(t)$, $y = y(t)$, gdje je $t \in I$ (I je interval u skupu $\mathbb{R}$), onda je koeficijent smjera tangente na tu krivulju u točki $(x(t), y(t))$ jednak $\dfrac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$, a iznos brzine u toj točki je $\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$, uz pretpostavku da se t interpretira kao vrijeme.

Parametarske jednadžbe:

- kružnica polumjera r sa središtem u (p, q) ima parametarske jednadžbe $x(t) = p + r\cos t$, $y(t) = q + r\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$;
- Elipsa s poluosima a i b i središtem u ishodištu ima parametarske jednadžbe $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ za $t \in [0, 2\pi\rangle$.

Polarne koordinate u ravnini

Veza između polarnih i Kartezijevih koordinata u ravnini (polarne: $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$; Kartezijeve: $x, y \in \mathbb{R}$), uz pretpostavku zajedničkog ishodišta i preklapanja polarne osi s pozitivnim dijelom x-osi:

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Uz tu vezu, koeficijent smjera tangente u točki $(\varphi_0, r(\varphi_0))$ je

$$k = \frac{r_0 + r'(\varphi_0)\mathrm{tg}\,\varphi_0}{r'(\varphi_0) - r_0\mathrm{tg}\,\varphi_0}.$$

Polarne jednadžbe:

- kružnica polumjera R sa središtem u ishodištu: $r = R$;
- polupravac pod kutom ϕ u odnosu na polarnu os: $\varphi = \phi$.

Limesi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Bibliografija

[1] P. Atkins, J. De Paula, Physical Chemistry. Oxford University Press, 2006.

[2] T. Cvitaš, materijali iz fizikalne kemije, ftp://ftp.chem.pmf.hr/download/cvitas/Fiz_Kem/, pristupljeno 2. listopada 2009.

[3] P. Dawkins, Paul's Online Math Notes. http://tutorial.math.lamar.edu/, pristupljeno 1. rujna 2017.

[4] D. E. Joyce, Dave's Short Course on Complex Numbers. http://www.clarku.edu/ djoyce/complex/, pristupljeno 1. rujna 2017.

[5] G. Just, D. Oelschlägel, Mathematik für Chemiker. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981.

[6] S. Kurepa, Matematička analiza 2. Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[7] R. G. Mortimer, Mathematics for Physical Chemistry, 3rd ed., Elsevier, 2005.

[8] G. Póta, Mathematical Problems for Chemistry Students. Elsevier, 2006.

[9] E. A. Reinsch, Mathematik für Chemiker. Teubner, 2004.

[10] V. Simeon, Kemijska termodinamika, 1. poglavlje, primjerak za studentsku uporabu. Zagreb, 2004.

[11] E. Steiner, The Chemistry Maths Book. Oxford University Press, 2008.

[12] D. Tibljaš, F. M. Brueckler, materijali iz Kristalografije. http://prelog.chem.pmf.hr/~fmbruckler/kristalografija.htmlhttp://prelog.chem.pmf.hr/ fmbruckler/kristalografija.html, pristupljeno 1. rujna 2017.

[13] University of Cambridge: NRICH enriching mathematics. http://nrich.maths.org/, pristupljeno 1. rujna 2017.

Kazalo