4

Raspršenja i interakcija nukleon-nukleon

4.1 Raspršenje i udarni presjek

Pogledajmo za početak općenit formalizam raspršenja. Neka se upadna čestica (projektil) giba duž z-osi; pretpostavimo da ju možemo opisati kao ravni val e^{ikz}, gdje je $k{=}p/\hbar$. Izlaznu ćemo česticu opisati pomoću sfernog vala, pa je poželjno i ulazni ravni val napisati kao superpoziciju sferičnih:

$$\psi_{in} = Ae^{ikz} = A\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta) \quad , \tag{4.1}$$

gdje je A odgovarajuća normalizacijska konstanta, radijalna fukcija $j_l(kr)$ je tzv. sferična Besselova funkcija, kutna ovisnost je dana Legandrovim polinomima $P_l(\cos\theta)$. Gornji izraz se uobičajeno naziva "*razvoj po parcijalnim valovima*".

Kada je val daleko od jezgre ($kr{\gg}l$), sferična Besselova funkcija postaje:

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - l\pi/2)}{kr} = i\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{+i(kr-l\pi/2)}}{2kr} \quad .$$

Uvrštavanjem u izraz 4.1 dobivamo:

$$\psi_{in} = Ae^{ikz} = \frac{A}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{+i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta) \quad . \tag{4.2}$$

Prvi član u uglatoj zagradi reprezentira ulazni sferični val, a drugi član izlazni - raspršenje utječe *samo* na izlazni i to na dva načina: kroz promjenu amplitude i kroz "pomak u fazi". *Oba* ova efekta uključujemo kroz kompleksan koeficijent η_l kojim množimo izlazni sferični val da bi dobili ukupan val:

$$\psi = Ae^{ikz} = \frac{A}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)\left[e^{-i(kr-l\pi/2)} - \eta \cdot e^{+i(kr-l\pi/2)}\right]P_l(\cos\theta) \quad . \tag{4.3}$$

Dobiveni izraz je superpozicija ulaznog i raspršenog vala:

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{rasp} \quad ,$$

pa za raspršeni val dobivamo:

$$\begin{aligned}\psi_{rasp} &= \frac{A}{2kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1}(2l+1)(1-\eta_l)\cdot e^{i(kr-l\pi/2)}P_l(\cos\theta) = \\ &= \frac{A}{2k}\frac{e^{ikr}}{r}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta) \quad .\end{aligned}$$

Udarni presjek računamo krećući od:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{j_{rasp}\mathrm{d}A}{j_{in}} = \frac{j_{rasp}r^2\mathrm{d}\Omega}{j_{in}} \quad , \tag{4.4}$$

gdje je *gustoća struje* raspršenih čestica dana:

$$\begin{aligned} j_{rasp} &= \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial^*\psi}{\partial r}\psi\right) = \\ &= |A|^2\frac{\hbar}{4mkr^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta)\right|^2 \quad , \end{aligned}$$

a gustoća struje ulaznih čestica s:

$$j_{in} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \quad .$$

Diferencijalni udarni presjek je dakle jednak:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i(1-\eta_l)P_l(\cos\theta)\right|^2 \quad . \tag{4.5}$$

Za elastično raspršenje $|\eta_l| = 1$ pa se uvodi zamjena:

$$\eta_l = e^{2i\delta_l} \quad , \tag{4.6}$$

gdje je δ_l tzv. *fazni pomak* za l-ti parcijalni val; uz ovu zamjenu imamo:

$$\begin{aligned} i(1-\eta_l) &= i\left(1-e^{2i\delta_l}\right) = i\left(1-\cos(2\delta_l) - i\sin(2\delta_l)\right) = \\ &= i\left(1-\cos^2\delta_l + \sin^2\delta_l - 2i\sin\delta_l\cos\delta_l\right) = 2i\sin^2\delta_l - 2i\cdot i\sin\delta_l\cos\delta_l = \\ &= 2\sin\delta_l\left(\cos\delta_l + i\sin\delta_l\right) = 2\sin\delta_l e^{i\delta_l} \quad . \end{aligned}$$

Diferencijalni udarni presjek sada možemo zapisati kao:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\right|^2 \quad . \tag{4.7}$$

Integriranjem po kutu (i upotrebom relacija ortogonalnosti za Legendreove polinome), dobivamo za ukupni udarni presjek za elastično raspršenje:

$$\sigma_{rasp}^{\mathrm{tot}} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^2}{\pi}(2l+1)\sin^2\delta_l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \quad . \tag{4.8}$$

Slično se za reakcijski udarni presjek (koji uključuje sve procese osim elastičnog raspršenja) može pokazati (vidi npr. *Krane* str. 412):

$$\sigma_r = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^2}{4\pi}(2l+1)\left(1-|\eta_l|^2\right) \quad . \tag{4.9}$$

Zadatak 4.1
Pri energiji od 5 MeV-a u sustavu centra mase, fazni pomaci koji opisuju raspršenje neutrona na nekoj jezgri su $\delta_0 = \pi/6$ i $\delta_1 = \pi/18$. Pretpostavljajući da su ostali fazni pomaci zanemarivi, izračunajte diferencijalni udarni presjek u ovisnosti o kutu raspršenja (tzv. kutnu raspodjelu). Koliki je ukupni udarni presjek? Što možemo iz navedenoga reći o dosegu potencijala?

Rješenje 4.1
Krećemo od izraza za diferencijalni udarni presjek (4.7):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta)\right|^2 \quad .$$

U zadatku se pretpostavljaju doprinosi samo članova s $l = 0$ i 1 (ostali su zanemarivi), pa stoga imamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{k^2}\left|e^{i\delta_0}\sin\delta_0 + 3e^{i\delta_1}\sin\delta_1\cos\theta\right|^2 \quad .$$

Eksplicitnim računanjem kvadrata na desnoj strani jednadžbe (te uz $|e^{ix}|^2 = 1$, $\sin\pi/6 = 0.50$, $\sin\pi/18 = 0.174$), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &\approx \frac{1}{k^2}\left[\sin^2\delta_0 + 6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos\theta e^{i\delta_1 - i\delta_0} + 9\sin^2\delta_1\cos^2\theta\right] \approx \\
&\approx \frac{1}{k^2}\left(\sin^2\frac{\pi}{6} + 6\cdot\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{18}\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right) + 9\cdot\sin^2\frac{\pi}{18}\cos^2\theta\right) \approx \\
&\approx \frac{1}{k^2}\left(0.25 + 0.49\cos\theta + 0.27\cos^2\theta\right) \quad .
\end{aligned}$$

Parametar k je iznos valnog vektora neutrona (projektila) u sustavu centra mase. Ako pretpostavimo da je masa atomske jezgre bitno veća od mase neutrona (m_n), tada se laboratorijski sustav i sustav centra mase poklapaju, pa slijedi:

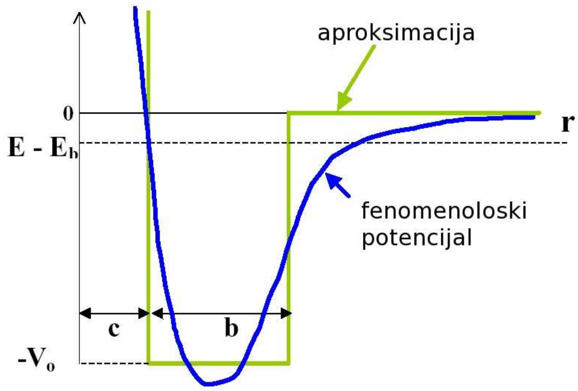
$$k^2 \approx \frac{2m_n E}{\hbar^2} = 2.4\cdot 10^{25}\ \mathrm{cm}^{-2} \quad .$$

Ukupni udarni presjek dan je s:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int d\Omega\frac{d\sigma}{d\Omega} = \\
&= \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{\pi} d\theta\sin\theta\left(0.25 + 0.49\cos\theta + 0.27\cos^2\theta\right) = \\
&= \frac{4\pi}{k^2}(0.25 + 0.27/3 + 0.49\cdot 0) = \\
&= 1.8\cdot 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2 = \\
&= 0.18\ \mathrm{barn}
\end{aligned}$$

Zadatak 4.2

Raspršenje nukleona na nukleonu može se proučavati na osnovi potencijala prikazanog na slici - plavom bojom dan je fenomenološki potencijal interakcije nukleon-nukleon, a zelenom njegova pojednostavljena aproksimacija u kojoj imamo područje I širine c (gdje je potencijal beskonačan), područje II širine b gdje je potencijal dubine V_0, te područje III gdje je potencijal jednak 0.



(a) Pokažite da je fazni pomak δ_0 za s-val dan s uvjetom:

$$K \cdot \mathrm{ctg}(Kb) = k \cdot \mathrm{ctg}\left[k(c+b) + \delta_0\right] \quad ,$$

gdje je:

$$K = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar \qquad , \qquad k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad .$$

(b) Odredite parametar odboja c koristeći sljedeće eksperimentalne podatke: E_{lab}= 350 MeV, δ_0= -0.25, V_0= 73 MeV, b= 1.337.
(c) Odredite udarni presjek za raspršenje neutrona na protonu na energiji E= 1 MeV koristeći sljedeće eksperimentalno određene parametre: V_0= 73 MeV, b= 1.337, c= 0.4 fm.

Rješenje 4.2

(a) Krećemo od Schrödingerove jednadžbe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r\theta\phi) = (E - V)\Psi(r\theta\phi) \quad .$$

Na standardan način odvojimo radijalni dio valne funkcije u_l:

$$\Psi(r\theta\phi) = \frac{u_l}{r} Y_l^m(\theta\phi) \quad .$$

Raspisano po područjima I, II i III, za radijalnu komponentu dobivamo (razmatramo samo s-val, pa se ne pojavljuje centrifugalni član):
- područje I ($r \leq c$, V=∞):

$$u_I = 0 \quad ,$$

- područje II ($c \leq r \leq c$+b, V=-V_0):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{II}}{\mathrm{d}r^2} + K^2 u_{II} = 0 \quad ,$$

- područje III ($c+b \leq r$, V=0):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{III}}{\mathrm{d}r^2} + k^2 u_{III} = 0 \quad .$$

Rješenja dobivenih jednadžbi su:
- područje I ($r \leq c$):

$$u_I = 0 \quad ,$$

- područje II ($c \leq r \leq c+b$):

$$u_{II} = A \sin\left[K(r-c)\right] \quad ,$$

- područje III ($c+b \leq r$):

$$u_{III} = B \sin\left(kr + \delta_0\right) \quad .$$

Rješenja su namještena tako da se ispravno ponašaju u granici velikih r (vidi npr. *Krane* str. 88):

$$r \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad u_l(r) \to \sin\left(kr - l\pi/2 + \delta_l\right) \quad ,$$

(u našem je slučaju l=0). Van dosega potencijala valna duljina je veća i radijalna funkcija je sporo-oscilirajući harmonijski val. Rubni uvjet koji povezuje dva područja je zahtjev na neprekinutost $u(r)$ i $\mathrm{d}u(r)/\mathrm{d}r$ u točki r=b+c:

$$A \sin\left(Kb\right) = B \sin\left[k(b+c) + \delta_0\right] \quad ,$$

$$AK \cos\left(Kb\right) = Bk \cos\left[k(b+c) + \delta_0\right] \quad ,$$

$$\Rightarrow K \mathrm{ctg}(Kb) = Bk \,\mathrm{ctg}\left[k(b+c) + \delta_0\right] \quad .$$

(b) Invertiranjem ove jednadžbe dobiva se:

$$c = -b + \frac{1}{k}\left[n\pi - \delta_0 + \mathrm{arc\ ctg}\left(\frac{K}{k}\mathrm{ctg}(Kb)\right)\right] \quad , \quad n \in N \quad .$$

Iz zadanih veličina računamo:

$$E_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{2} E_{\mathrm{lab}} = 175 \text{ MeV} \quad ,$$

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} \approx \frac{1}{2} m_p \approx \frac{938}{2} \text{ MeV} \quad ,$$

$$k^{-1} = \frac{197.33}{\sqrt{2 \cdot 938/2 \cdot 175}} = 0.486 \text{ fm} \quad ,$$

$$\frac{K}{k} = \sqrt{\frac{V_0}{E} + 1} = 1.42 \quad ,$$

$$Kb = \sqrt{2 \cdot 938/2 \cdot (175+73)} \cdot \frac{1.337}{197.32} = 3.27 \quad .$$

Uvrštavanjem za c:

$$c = \left[-1.337 + 0.486 \cdot (n\pi + 0.25 + 0.091)\right] \text{ fm} = (-1.172 + 1.527 \cdot n) \text{ fm} \quad .$$

Prvi n za koji je c>0 je n=1, što daje **c= 0.36 fm**.

(c) Iz veličina zadanih u ovom dijelu:

$$k(b+c) = \sqrt{2 \cdot 938/2 \cdot 1} \cdot \frac{0.4 + 1.337}{197.32} = 0.27 \quad ,$$

$$\frac{K}{k} = \sqrt{\frac{V_0}{E} + 1} = 8.61 \quad ,$$

$$Kb = \sqrt{2 \cdot 938/2 \cdot 74.3} \cdot \frac{1.337}{197.32} = 1.79 \quad ,$$

$$\delta_0 = -k(b+c) + \text{arc ctg}\left(\frac{K}{k}\text{ctg}(Kb)\right) = 2.391 \quad .$$

Pretpostavljamo da raspršenju doprinosi samo s-val, pa je udarni presjek dan s (vidi izraz 4.8):

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 242.4 \text{ fm}^2 \quad .$$

Zadatak 4.3

Iskoristite isti potencijal upotrebljen u prethodnom zadatku (za opis raspršenja nukleona na nukleonu) za opis vezanog stanja neutrona i protona (tj. za jezgru deuteron). Izračunajte dubinu potencijalne jame (V_0), uz upotrebu sljedećih eksperimentalnih rezultata za deuteron: E_B= 2.225 MeV, RMS-polumjer dobiven elektronskim raspršenjem R_d= 2.1 fm, te parametar c= 0.4 fm.

Rješenje 4.3

Razlika u odnosu na prethodni zadatak je ta da je energija E sada negativna (tj. nukleoni se nalaze u vezanom stanju). Opet rješavamo Schrödingerovu jednadžbu:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r\theta\phi) = (E - V)\Psi(r\theta\phi) \quad .$$

Odvajamo radijalni dio valne funkcije u_l:

$$\Psi(r\theta\phi) = \frac{u_l}{r} Y_l^m(\theta\phi) \quad .$$

Pretpostavljamo da su neutron i proton u stanju relativnog gibanja s l=0; tada vrijedi: $Y_l^m(\theta\phi)$=$1/\sqrt{4\pi}$. Uz

$$K = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar \qquad , \qquad k = \sqrt{2m(-E)}/\hbar \quad ,$$

raspisano po područjima I, II i III, za radijalnu komponentu dobivamo:
- područje I ($r \leq c$, V=∞):

$$u_I = 0 \quad ,$$

- područje II ($c \leq r \leq c$+b, V=-V_0):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{II}}{\mathrm{d}r^2} + K^2 u_{II} = 0 \quad ,$$

- područje III ($c+b \leq r$, $V=0$):

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_{III}}{\mathrm{d}r^2} - k^2 u_{III} = 0 \quad .$$

Rješenja dobivenih jednadžbi su:
- područje I ($r \leq c$):

$$u_I = 0 \quad ,$$

- područje II ($c \leq r \leq c+b$):

$$u_{II} = A \sin\left[K(r-c)\right] \quad ,$$

- područje III ($c+b \leq r$):

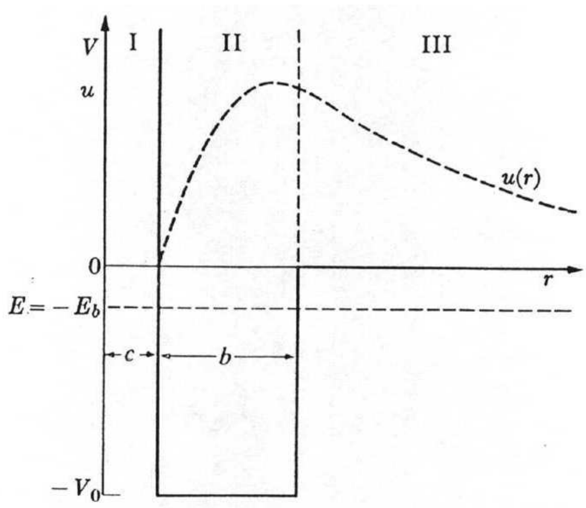
$$u_{III} = B e^{-kr} \quad .$$

Rubni uvjet koji povezuje dva područja (I i II, te II i III) je zahtjev na neprekinutost $u(r)$ i $\mathrm{d}u(r)/\mathrm{d}r$ u točki $r=b+c$:

$$A \sin(Kb) = B e^{-k(b+c)} \quad ,$$

$$AK \cos(Kb) = Bk e^{-k(b+c)} \quad ,$$

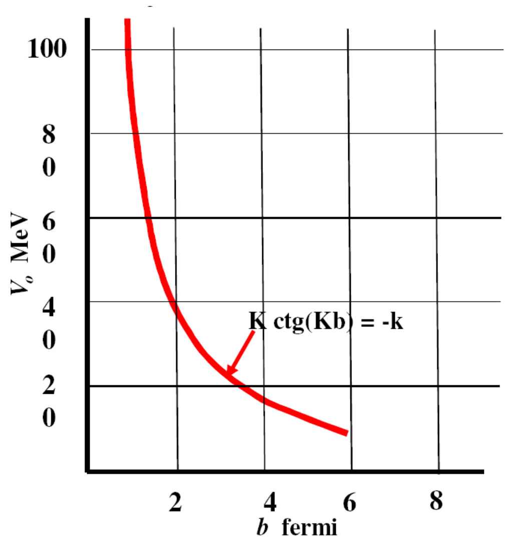
$$\Rightarrow K \mathrm{ctg}(Kb) = -k \quad . \tag{4.10}$$



Valna funkcija je dana na slici. Relacija 4.10 može biti ispunjena mmnogim kombinacijama V_0 i b (K ulazi u V_0). Ovisnost V_0 o b prikazana je na sljedećoj slici.

Da bi se jednoznačno odredili dubinu i doseg potencijala koji veže neutron i proton u deuteron, potrebno je poznavanje dodatnih eksperimentalnih informacija. U tekstu zadatka je dan eksperimentalno određen polumjer deuterona; da bi taj podatak mogli iskoristiti, moramo normalizirati dobivenu valnu funkciju:

$$\int \Psi^2 \mathrm{d}V = 1 \quad ,$$



Imamo dakle:

$$\begin{aligned}\int \Psi^2 \mathrm{d}V &= \int \left[\frac{u(r)}{r} Y_l^m(\theta\phi)\right]^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \\ &= \int_0^c u_I^2(r)\mathrm{d}r + \int_c^{b+c} u_{II}^2(r)\mathrm{d}r + \int_{b+c}^{\infty} u_{III}^2(r)\mathrm{d}r = \\ &= 0 + A^2 \int_c^{b+c} \sin^2[K(r-c)]\mathrm{d}r + B^2 \int_{b+c}^{\infty} e^{-2kr}\mathrm{d}r = \\ &= A^2 \left[\frac{1}{2}(r-c) - \frac{1}{4K}\sin[2K(r-c)]\right]_c^{b+c} + B^2 \left(\frac{-1}{2k}e^{-2kr}\right)_{b+c}^{\infty} \\ &= A^2 \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{\sin(2Kb)}{4K}\right) + B^2 \cdot \frac{e^{-2k(b+c)}}{2k} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Uz:

$$A\sin(Kb) = Be^{-k(b+c)} \quad ,$$

možemo riješiti sistem dvije jednadžbe s dvije nepoznanice (A i B):

$$A^2 = \frac{2}{b - \frac{\sin(2Kb)}{K} + \frac{\sin^2 Kb}{k}} \quad ,$$

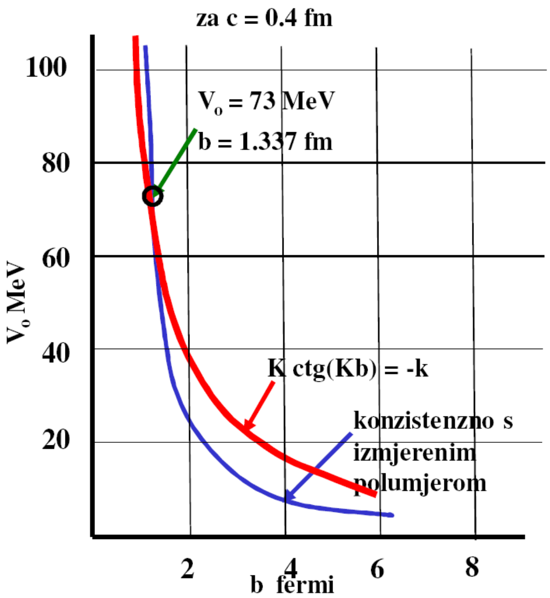
$$B^2 = \frac{2k\sin^2(Kb)e^{2k(b+c)}}{1+kb} \quad .$$

Time su valne funkcije u_{II} i u_{III} posve određene. U sljedećem koraku možemo ih iskoristiti za računanje RMS-polumjera deuterona:

$$R_d^2 = \langle r_d^2 \rangle = \int r^2 \Psi^2 \mathrm{d}V = \int r^2 u^2(r)\mathrm{d}r$$

Postupkom sličnim normalizaciji valne funkcije (s malo kompliciranijim integralima), dobiva se:

$$R_d^2 = \langle r_d^2 \rangle = \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8K^2} + \frac{(2c+b)(1+kb)}{k} + \frac{c^2}{4} - \frac{kb^2}{24(1+kb)} \quad .$$



Budući da se polumjer eksperimentalno mjeri, gornja relacija daje još jednu vezu između parametara b i V_0. Potrebna je još samo vrijednost parametra c koja se određuje npr. raspršenjem (vidi prethodni zadatak); u zadatku je zadano c= 0.4 fm. Na sljedećoj su slici svi uvjeti dani na istom mjestu; jedina točka u grafu V_0 / b koja ih sve zadovoljava je ona s:

$$V_0 = 73 \text{ MeV} \quad , \quad b = 1.337 \text{ fm} \quad .$$

4.2 Dodatni riješeni zadaci

Zadatak 4.4

Procjenite koji dio vremena neutron i proton u deuteronu provode van dosega nuklearne sile. Pretpostavite da je nuklearni potencijal opisan trodimenzionalnom jamom dubine V_0= 35 MeV i širine R= 2.1 fm. Energija vezanja deuterona je 2.2 MeV.

Rješenje 4.4

Zadatak je vrlo sličan prošlom, s tim da je potencijal još više pojednostavljen (nema jako repulzivne sredice u području r<c) - student može probati dobiti traženo vrijeme kao nadopunu prethodnog zadatka.
Kao i prije, krećemo od Schödingerove jednadžbe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r\theta\phi) = [E - V(r)]\Psi(r\theta\phi) \quad ,$$

pa uz zamjenu zbog sferno-simetričnosti (napravljeno i objašnjeno na vježbama u zadacima 4.2 i 4.3):

$$\Psi = \frac{u(r)}{r}Y_l^m(\theta\phi)$$

dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V(r)]u = 0 \quad .$$

Rješenja su:

$$u(r) = \begin{cases} A\sin(Kr)\,; \quad K = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar & \text{za } r \leq R \\ Be^{-kr}\,; \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar & \text{za } r \geq R \end{cases}$$

Rubni uvjet koji povezuje dva područja je zahtjev na neprekidnost $u(r)$ i $u'(r)$ u točki $r{=}R$:

$$A\sin(KR) = Be^{-kR} \quad , \tag{4.12}$$

$$AK\cos(KR) = Bke^{-kR} \quad . \tag{4.13}$$

Kombiniranjem ove dvije jednadžbe dobiva se uvjet:

$$K\mathrm{ctg}(KR) = -k \quad ;$$

odnosno:

$$\cos(KR) = -\frac{k}{K}\sin(KR) \quad . \tag{4.14}$$

Taj se izraz još može presložiti ovako:

$$\sin^2(KR) + \cos^2(KR) = 1 \quad ,$$

$$\sin^2(KR) + \frac{K^2}{k^2}\sin^2(KR) = 1 \quad ,$$

$$\sin^2(KR) = \frac{1}{1 + K^2/k^2} \quad . \tag{4.15}$$

Analitički se rješenje za k kao funkciju od K može tražiti samo numerički ili grafički (kao što je napravljeno na vježbama u zadatku 4.3), ali ne i analitički; no, za potrebe ovog zadatka tu vezu ne treba naći! Dovoljno je normalizirati valnu funkciju:

$$\int \Psi^*\Psi dV = 1 \quad .$$

Pri integriranju r^2 iz dV se pokrati s $1/r^2$ iz veze Ψ i u:

$$\int_0^R 4\pi A^2\sin^2(Kr)dr + \int_R^\infty 4\pi e^{-2kr}B^2dr = 1 \quad , \tag{4.16}$$

$$2\pi A^2\left(R - \frac{\sin(2KR)}{2K}\right) + 2\pi B^2\frac{e^{-2kR}}{k} = 1 \quad .$$

Upotrebom prve relacije koja spaja koeficijente A i B, izraz (4.12), te relacije (4.14), dobiva se:

$$A^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R - \sin(2KR)/(2K) + \sin^2(KR)/k} \quad ,$$

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \frac{1}{e^{-2kR}/k + (R - \sin(2KR)/(2K))\, e^{-2kR}/\sin^2(2KR)} = \\
&= \frac{ke^{2kR}\sin^2(KR)}{\sin^2(KR) + kR - k\sin 2KR/(2K)} = \\
&= \frac{ke^{2kR}\sin^2(KR)}{\sin^2(KR) + kR + \cos^2(KR)} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{k\sin^2(KR)e^{2kR}}{1+kR} \quad .
\end{aligned}
$$

Uz ovako normaliziranu valnu funkciju, vjerojatnost da je udaljenost neutrona i protona veća od R je jednostavno drugi integral u izrazu (4.16)! Upotrebom izraza (4.12) i (4.15), to se još može izraziti i kao:

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi B^2 \frac{e^{-2kR}}{k} = \\
&= 2\pi \frac{1}{2\pi}\frac{k\sin^2(KR)e^{2kR}}{1+kR}\frac{e^{-2kR}}{k} = \\
&= \frac{\sin^2(KR)}{1+kR} = \\
&= \frac{1}{(kR+1)(1+k^2/K^2)} \quad .
\end{aligned}
$$

Iz zadanih numeričkih vrijednosti, dobiva se (pažnja: ne smije se zaboraviti "reducirati" masu):

$$k = \sqrt{2\cdot 938/2\cdot 2.2}/197.33 = 2.3\times 10^{14}\ \mathrm{m}^{-1} \quad ,$$

$$K = \sqrt{2\cdot 938/2\cdot (35-2.2)}/197.33 = 8.9\times 10^{14}\ \mathrm{m}^{-1} \quad ,$$

$$P = 0.63$$

Neutron i proton **63%** svog vremena provode na razmaku većem od dosega potencijalne jame! Deuteron je najjednostavniji primjer tzv. halo-jezgre, odnosno jezgre kod koje se jedan nukleon (ili više njih) značajan dio vremena nalazi "izvan"dosega nuklearnog potencijala (druge takve jezgre su npr. ^{6}He, ^{11}Li, ^{11}Be, ...). Ovaj efekt je direktna posljedica slabog vezanja jezgre - ponašanje halo-jezgara u nuklearnim reakcijama bitno je drukčije od ponašanja "standardnih", jako vezanih jezgara.

4.3 Zadaci za domaću zadaću

1. (1 bod) Kolika je minimalna energija fotona potrebna za disocijaciju deuterona (γ+$d$$\rightarrow$$p$+$n$)? Za koliko je ta energija veća od energije vezanja deuterona? Energija vezanja deuterona je E_B= 2.225 MeV, a masa M= 1875.628 MeV.

2. (2 boda) Neutron i proton vrlo malene relativne brzine interagiraju putem rekacije "radijativnog uhvata": p+$n$$\rightarrow$$d$+$\gamma$. (a) Kolika je minimalna energija fotona emitiranog u ovom procesu? Može li se energija odboja deuterona zanemariti? (b) Procjenite kolika mora biti energija neutrona (u sustavu u kojem proton prije reakcije miruje) ako se radijativni uhvat s nezanemarivom vjerojatnošću odigrava preko p-stanja (tj. s l=1)! Polumjer deuterona je $R_d\approx$ $4\cdot 10^{-15}$ m.

3. (1 bod) Izračunajte magnetski moment čistog D-stanja sistema neutron-proton s J=1! Pretpostavite da se spinovi neutrona i protona vežu u ukupan spin $\hat{S}$, koji se tada veže s orbitalnim kutnim impulsom $\hat{L}$ u ukupan kutni impuls $\hat{J}$. Rezultat izrazite u jedinicama nuklearnih magnetona. Protonski i neutronski magnetski momenti su μ_p=2.79μ_0 i μ_p=-1.91μ_0 (μ_0 je nuklearni magneton).

4. (3 boda) Pretpostavite da je nukleon-nukleon interakcija dobro opisana potencijalom oblika:
$$V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - V_0 \quad .$$
Odredite vrijednosti parametara ω i V_0 koje dobro opisuju veličinu i energiju vezanja deuterona. Je li stanje s l=1 vezano u ovom modelu? Pomoć: valna funkcija osnovnog stanja harmoničkog oscilatora dana je s:
$$\psi(r,\theta,\phi) \sim e^{-m\omega r^2/2\hbar} \quad .$$

5. (2 boda) Pretpostavimo da je osnovno stanje deuterona umjesto $J^\Pi = 1^+$ dano s $J^\Pi = 0^-$. Koje su moguće vrijednosti ukupnog orbitalnog momenta impulsa L, spina S i izospina T ukoliko su ostale činjenice vezane uz deuteron nepromjenjene? Kakve bi ovo posljedice imalo na značajke nuklearne sile.

6. (2 boda) Magnetski moment atomske jezgre koji srećemo u tablicama (moment osnovnog stanja) definiramo kao očekivanu vrijednost operatora magnetskog momenta izrazom:
$$\mu/\mu_N = \langle\alpha; JJ \sum_k (g_{lk}\hat{l}_{lk} + g_{sk}\hat{s}_{sk})|\alpha; JJ\rangle$$
gdje je s μ_N dan Bohrov magneton, $\hat{l}$ i $\hat{s}$ su operatori momenta impulsa u koordinatnom i spinskom potprostoru, a s g su dani žiromagnetski faktori ($g_l = 1$ i $g_s = 5.58$ za proton, a $g_l = 0$ i $g_s = -3.89$ za neutron). Suma u izrazu ide preko svih nukleona koji čine atomsku jezgru. Izvedite izraz za magnetski moment deuterona kao funkciju operatora $\hat{J}_z$. Uzevši da je osnovno stanje deuterona "pretežno" $^3S_1$ s vrlo malom primjesom $^3D_1$ odrediti s pomoću poznate vrijednosti magnetskog momenta deuterona ($0.8574\mu_N$) relativni udio primjese $^3D_1$.

7. (2 boda) Izračunajte kinetičku energiju (u laboratorijskom sustavu) praga za nastanak (a) para piona, (b) jednog kaona u reakcijama nukleon-nukleon.

4.4 Dodatna literatura

1. K. Krane: "*Introductory Nuclear Physics*", John Wiley and Sons, 1988.

2. S.S.M. Wong: "*Introductory Nuclear Physics*", John Wiley & Sons, 2004.