NUMERIČKE METODE I MATEMATIČKO MODELIRANJE

4. PREDAVANJE

PRIMJENA NUMERIČKIH METODA U RJEŠAVANJU DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

NUMERIČKE METODE ZA DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- Diferencijalne jednadžbe omogućuju matematički zapis zakona koji određuju fizikalne fenomene u prirodi (npr. drugi Newtonov zakon za opis gibanja u polju sile)
- Široka primjena diferencijalnih jednadžbi od inženjerstva, financija, do temeljnih istraživanja u biologiji, kemiji, mehanici, fizici, ekološkim modelima, medicini…
- *Primjeri u teorijskoj fizici:* npr. valna jednadžba, Maxwellove jednadžbe u elektromagnetizmu, jednadžba toka topline u termodinamici, Laplace-ova jednadžba, Poisson-ova jednadžba , Schroedingerova jednadžba u kvantnoj mehanici, Navier-Stokesova jednadžba u dinamici fluida, Lotka-Volterra populacijska jednadžba, itd, itd…

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- red obične diferencijalne jednadžbe odnosi se na red derivacije sa lijeve strane jednadžbe

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- jednadžba drugog reda može se zapisati kao

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, \frac{dy}{dt}, y)$$

- npr. jednadžba drugog reda je drugi Newton-ov zakon

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- npr. Schroedingerova jednadžba je parcijalna diferencijalna jednadžba

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}\right) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t)$$

OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

- razlikujemo linearne i nelinearne diferencijalne jednadžbe

npr.: $$\frac{dy}{dt} = g^3(t)y(t)$$ $$\frac{dy}{dt} = g^3(t)y(t) - g(t)y^2(t)$$

- zadavanje početnih i rubnih uvjeta je ključno za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

- vezani sustavi diferencijalnih jednadžbi – npr. Opis neutronske zvijezde → jednadžbe za masu (m) i tlak (P).

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)/c^2,$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r)/c^2$$

Rubni uvjeti :
1) masa je 0 u središtu zvijezde, m(0) = 0
2) tlak je 0 na površini zvijezde, P(R) = 0, m(R) = M

→jednadžbu treba riješiti u koracima po r

- *diferencijalnu jednadžbu drugog reda možemo zapisati kao dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda*
- Npr. u slučaju drugog Newton-ovog zakona:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= y^{(1)}(t) \\ v(t) &= y^{(2)}(t) \end{aligned}\right\} \qquad \frac{dy^{(1)}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} = y^{(2)}(t)$$

  - dobivamo vezani skup dvije diferencijalne jednadžbe prvog reda:

$$\left\{\begin{aligned} & m\frac{dy^{(2)}(t)}{dt} = -kx(t) = -ky^{(1)}(t) \\ & \frac{dy^{(1)}(t)}{dt} = y^{(2)}(t) \end{aligned}\right.$$

Općenito:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

METODE KONAČNIH RAZLIKA

- metoda konačnih razlika → tzv. metoda sa jednim korakom
- zadana je početna vrijednost funkcije y(t)

$$y_0 = y(t = t_0)$$

- diferencijalnu jednadžbu želimo riješiti za t u intervalu [a,b]

- definirajmo korak h dijeljenjem [a,b] na N podintervala

$$h = \frac{b-a}{N}$$

- ako se funkcija "dobro" ponaša u području [a,b], može se koristiti konstantan korak h, u suprotnom je potreban promjenjiv korak

- ovdje pretpostavljamo slučaj sa konstantnim korakom h

METODE KONAČNIH RAZLIKA – EULEROVA METODA

- nova vrijednost rješenja y određena je pomoću vrijednosti u prethodnom koraku i promjene zbog pomaka za iznos koraka

$$y_{i+1} = y(t = t_i + h) = y(t_i) + h\Delta(t_i, y_i(t_i)) + O(h^{p+1})$$

- za određivanje Δ, kreće se od Taylorovog razvoja funkcije y

$$y_{i+1} = y(t = t_i + h) = y(t_i) + h(y'(t_i) + \cdots + y^{(p)}(t_i)\frac{h^{p-1}}{p!}) + O(h^{p+1})$$

$$\Delta(t_i, y_i(t_i)) = (y'(t_i) + \cdots + y^{(p)}(t_i)\frac{h^{p-1}}{p!})$$

- definirajmo funkciju f: $y'(t_i) = f(t_i, y_i)$

- ako odrežemo članove razvoja iza prve derivacije, dobije se EULER-ova metoda

$$\boxed{y_{i+1} = y(t_i) + hf(t_i, y_i) + O(h^2)}$$

METODE KONAČNIH RAZLIKA – EULEROVA METODA

- u svakom koraku je napravljena greška zbog aproksimacije veličine reda $O(h^2)$, međutim ukupna greška se dobiva sumiranjem greške preko svih koraka:

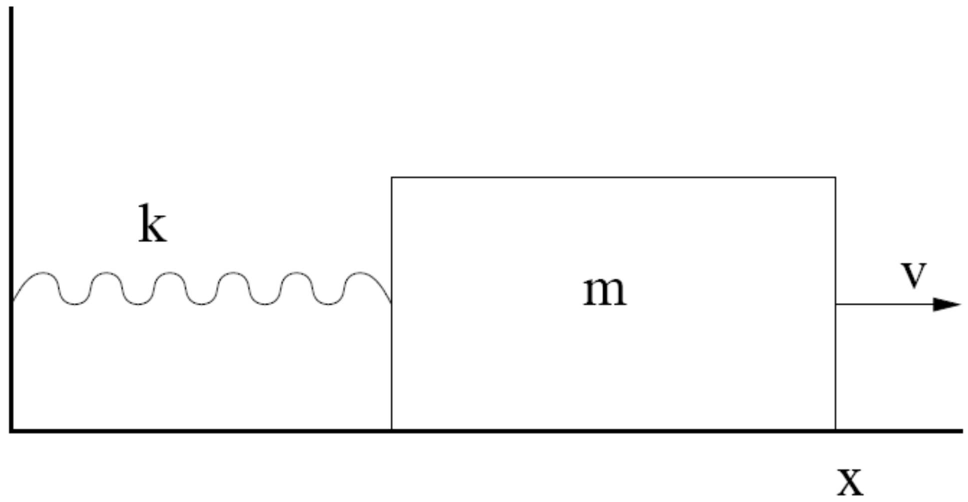
$$NO(h^2) \approx O(h)$$

- da bi se povećala preciznost Eulerove metode, potrebno je smanjiti korak (povećati N)
- Oprez! Numerički proračun derivacije sadrži potencijalnu opasnost pojave greške zaokruživanja kod oduzimanja dva vrlo slična broja

- Eulerova metoda je praktična i jednostavna za upoznavanje sa mogućim rješenjima, međutim, ne koristi se u ozbiljnijim numeričkim proračunima

FIZIKALNI PRIMJER – HARMONIČKI OSCILATOR

- Primjer: primjenom numeričkih metoda riješiti problem harmoničkih oscilacija bloka koji bez trenja klizi po površini



- ako opruga nije previše istegnuta ili komprimirana, sila na blok na danom položaju x je dana sa

$$F = -kx$$

FIZIKALNI PRIMJER – HARMONIČKI OSCILATOR

- odgovarajuće jednadžbe gibanja harmoničkog oscilatora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

- postoji analitičko rješenje jednadžbe H.O.

$$x(t) = Acos(\omega_0 t + \nu)$$

- tražimo numeričko rješenje diferencijalne jednadžbe → prvo treba raspisati diferencijalnu jednadžbu drugog reda kao dvije vezane jednadžbe prvog reda:

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \qquad \frac{dv(t)}{dt} = -\omega_0^2 x(t)}$$

- Numeričko rješenje se može provjeriti usporedbom sa analitičkom rješenjem, provjera perioda

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$$

FIZIKALNI PRIMJER – HARMONIČKI OSCILATOR

- pretp. početne uvjete

$$x(t=0) = 1\ \mathrm{m} \qquad v(t=0) = 0\ \mathrm{m/s}$$

- potencijalna energija u t=0

$$E_0 = \frac{1}{2}kx(t=0)^2 = \frac{1}{2}k$$

- Ukupna energija u svakom trenutku t mora biti sačuvana, zakon sačuvanja se može koristiti za provjeru numeričkog rješenja:

$$E_0 = \frac{1}{2}kx(t)^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2$$

ALGORITAM ZA HARMONIČKI OSCILATOR

- 1) zadati početnu brzinu i položaj; zadati konačno vrijeme za proračun t_f

- 2) izabrati metodu za rješavanje diferencijalne jednadžbe. Podijeliti vremenski interval $[t_i, t_f]$ na podintervale sa korakom

$$h = \frac{t_f - t_i}{N}$$

- 3) izračunati ukupnu energiju E_0 koja će biti korištena za provjeru numeričkog rješenja

ALGORITAM ZA HARMONIČKI OSCILATOR

- 4) primjenom metode za rješavanje diferencijalnih jednadžbi izračunati x_{i+1} i v_{i+1} koristeći prethodne vrijednosti x_i i v_i

- 5) nakon proračuna $x(v)_{i+1}$ treba uvećati vrijeme $t_{i+1} = t_i + h$

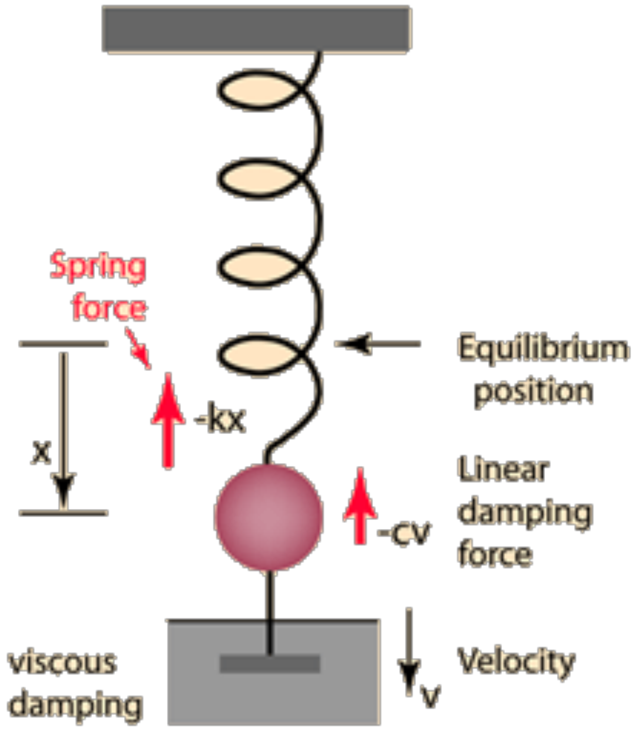
- 6) iterativni postupak se ponavlja dok se ne dođe do maksimalnog vremena t_f

- 7) provjeriti rezultate u usporedbi sa egzaktnim rješenjem

- 8) provjeriti stabilnost numeričkog rješenja s obzirom na broj točaka primjenjen u proračunu (N)

ZADATAK 4:

- Pomoću Eulerove metode numerički riješiti problem harmoničkog oscilatora s viskoznim gušenjem



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\gamma = \frac{c}{m}$$ koeficijent gušenja

- Zadani su parametri oscilatora ω_0=10 i γ=1. Za proizvoljne početne uvjete treba grafički prikazati rješenja x(t) i v(t).