NUMERIČKE METODE I MATEMATIČKO MODELIRANJE

8. PREDAVANJE

NUMERIČKA INTERPOLACIJA, EKSTRAPOLACIJA I PRILAGODBA PODATAKA ANALITIČKIM FUNKCIJAMA

INTERPOLACIJA I EKSTRAPOLACIJA

- numerička interpolacija i ekstrapolacija su među najčešće korištenim numeričkim metodama u fizici

- npr. zadana je funkcija f na skupu točaka $x_1,\ldots,x_n$, međutim, analitički oblik funkcije za proizvoljni x nije poznat

- funkcija f može reprezentirati neke eksperimentalne podatke ili može biti rezultat složenog numeričkog proračuna neke fizikalne veličine, što se ne može jednostavno izraziti u analitičkom obliku

- kada se želi odrediti vrijednost funkcije f za argument x koji nije unutar zadanog skupa točaka $x_1,\ldots,x_n$, onda se primjenjuje interpolacija

INTERPOLACIJA I EKSTRAPOLACIJA

- ako je x izvan skupa točaka na kojem je funkcija zadana, onda treba provesti numeričku ekstrapolaciju (problematičnija metoda)

- osnovne metode interpolacije:

  → polinomna interpolacija
  → metoda kubičnog "spline-a"

spline → klin, savitljiva šipka, utor za klin, uzak drven ili kovinski klin

POLINOMNA INTERPOLACIJA

- metoda polinomne interpolacije → pretp. skup N+1 točaka

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_N = f(x_N)$$

gdje su vrijednosti x_i međusobno različite

- potrebno je odrediti polinom stupnja n takav da je

$$P_N(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \dots, N$$

(za sve točke gdje je funkcija definirana)

- polinom koji ispunjava ovoj uvjet može se zapisati kao

$$\boxed{P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_N(x - x_0)\dots(x - x_{N-1})}$$

POLINOMNA INTERPOLACIJA

- uvrstimo $x_0, x_1, \ldots, x_N$ u izraz za $P_N(x)$, dobije se skup jednadžbi trokutastog oblika:

$$\begin{array}{llll}
a_0 & = f(x_0) & & \\
a_0 + & a_1(x_1 - x_0) & & = f(x_1) \\
a_0 + & a_1(x_2 - x_0) + & a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & = f(x_2) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

- iz gornjeg sustava jednadžbi redom se određuju koeficijenti $a_0, \ldots, a_N$
- klasičnu formulu za interpolaciju odredio je Lagrange,

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} y_i$$

POLINOMNA INTERPOLACIJA

- za samo dvije točke, iz interpolacijske formule slijedi

$$P_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0$$

- u slučaju tri točke (parabolična aproksimacija)

$$P_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0$$

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- kubična "spline" interpolacija je jedna od najčešće korištenih metoda za interpolaciju između točaka podataka čiji argumenti su uređeni kao uzlazni nizovi

- "spline" funkcija sastoji se od polinoma definiranih na podintervalima, funkcije su povezane preko granica intervala koristeći različite relacije neprekidnosti

- Pretp. $n+1$ točaka $x_0, x_1, \dots x_n$ koje su uređene tako da je

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots x_{n-1} < x_n$$

(ove točke zovemo čvorovi)

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- "spline" funkcija s stupnja k sa $n+1$ čvorova definirana je na sljedeći način:

  - na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, s je polinom stupnja $\leq k$

  - s ima $k-1$ neprekidnih derivacija na cijelom intervalu $[x_0, x_n]$

- Primjer: "spline" funkcija stupnja $k=1$ definirana je kao

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = a_0 x + b_0 & x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x) = a_1 x + b_1 & x \in [x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ s_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1} & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

- u ovom slučaju, polinomi se sastoje od niza ravnih linija koje su međusobno spojene preko svakog čvora
- Ovdje je broj neprekidnih derivacija k-1=0

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- najčešće korištene "spline" funkcije su za $k = 3$, tzv. kubične "spline" funkcije

- pretp. $n+1$ čvorova, niz vrijednosti funkcija

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots y_n = f(x_n)$$

- prema definiciji interpolacije

$$s_{i-1}(x_i) = y_i = s_i(x_i) \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

- ukupno postoji n polinoma tipa

$$s_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

- treba odrediti $4n$ koeficijenata
- svaki podinterval određuje uvjete

$$y_i = s(x_i) \qquad s(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- dodatni zahtjev je da su s' i s'' neprekidne na čvorovima

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$$
$$s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$$

- iz gornjih jednadžbi definiraju se dvije vrijednosti druge derivacije u čvorovima:

$$s''_i(x_i) = f_i$$
$$s''_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

- povlačenjem ravne linije između f_i i f_{i+1} dobiva se izraz za općeniti x u intervalu

$$s''_i(x) = \frac{f_i}{x_{i+1} - x_i}(x_{i+1} - x) + \frac{f_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- integriranjem dva puta po x dobije se

$$s_i(x) = \frac{f_i}{6(x_{i+1}-x_i)}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{f_{i+1}}{6(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3$$
$$+ c(x-x_i) + d(x_{i+1}-x)$$

- koristeći uvjete $s_i(x_i) = y_i$ i $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ mogu se odrediti konstante c i d , odatle slijedi

$$\boxed{\begin{aligned} s_i(x) = \; & \frac{f_i}{6(x_{i+1}-x_i)}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{f_{i+1}}{6(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3 \\ + \; & \left(\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_{i+1}(x_{i+1}-x_i)}{6}\right)(x-x_i) \\ + \; & \left(\frac{y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{f_i(x_{i+1}-x_i)}{6}\right)(x_{i+1}-x) \end{aligned}}$$

?

f_i

f_{i+1}

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- kako odrediti vrijednosti drugih derivacija, f_i i f_{i+1} ?
- koristi se uvjet neprekidnosti prvih derivacija za $x = x_i$

$$s'_{i-1}(x_i) = s'_i(x_i)$$

- razlika između dva čvora definirana je kao

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

- uvrštavanjem prethodnog izraza za $s_i(x)$ slijedi

$$h_{i-1}f_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})f_i + h_i f_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

- uvedimo notaciju za

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) \qquad v_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- Problem se svodi na problem rješavanja sustava linearnih jednadžbi koristeći npr. Gaussovu eliminaciju

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & \dots & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & 0 & \dots & & & \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & 0 & \dots & & \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & \dots & & & 0 & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & & 0 & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

- iz ove jednadžbe određuju se druge derivacije f_i koje sada samo treba uvrstiti u prethodno dani izraz za $s_i(x)$
- ovime je određena interpolirana funkcija $s_i(x)$ na svakom intervalu za proizvoljni argument x

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- ova interpolacija može se izvesti koristeći funkcije iz Numerical Recipes: $spline$ i $splint$
- prvo treba pozvati funkciju

```
spline(double x[], double y[], int n, double yp1, double yp2, double y2[])
```

- ulazne vrijednosti su čvorovi $y_i = f(x_i)$ koji su zadani kao polja $x[0,..,n-1]$ i $y[0,..,n-1]$, osim njih treba zadati i prve derivacije f(x) na x_0 i x_{n-1}

- n odgovara broju čvorova

- funkcija vraća polje $y2[0,..,n-1]$ koje sadrži druge derivacije $f(x_i)$ u svakoj točki x_i

KUBIČNA "SPLINE" INTERPOLACIJA

- za računanje interpolirane vrijednosti funkcije za proizvoljni argument x, koristi se funkcija:

```
splint(double x[], double y[], double y2a[], int n, double x, double *y)
```

- ovdje se kao ulazne vrijednosti koriste polja

$$x[0, .., n-1] \qquad y[0, .., n-1]$$

- i polje drugih derivacija koje je dobiveno funkcijom "spline"

y2a[0,..,n - 1]

- funkcija vraća interpoliranu vrijednost y za odgovarajući x

ZADATAK 8

- Napišite program koji izvodi kubičnu "spline" interpolaciju za proizvoljni (netrivijalni) skup podataka od 30 čvorova. Dozvoljeno je korištenje funkcija iz Numerical Recipes. Grafički prikažite odabrani skup podataka i interpolacijsku krivulju koja ih povezuje.