NUMERIČKE METODE I MATEMATIČKO MODELIRANJE

9. PREDAVANJE

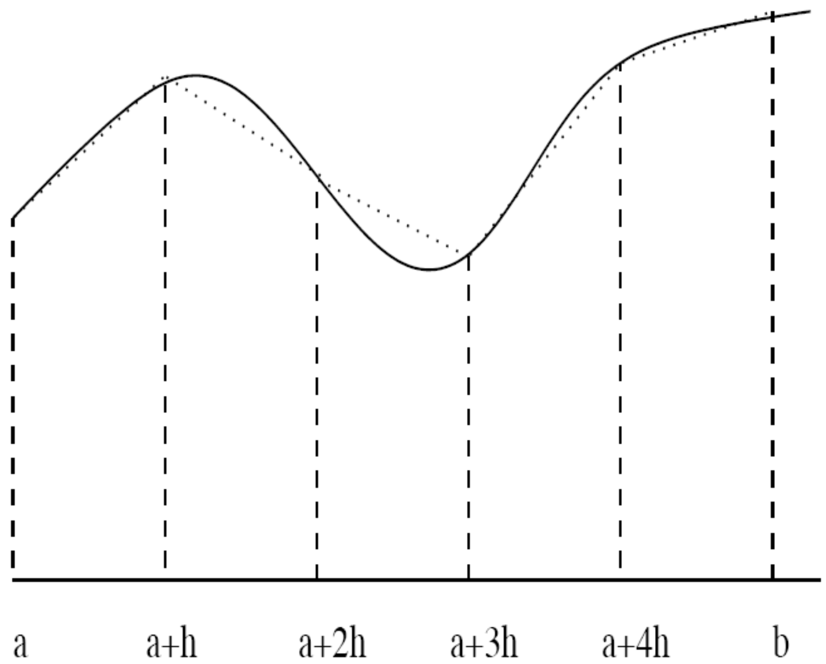
METODE NUMERIČKE INTEGRACIJE

NUMERIČKA INTEGRACIJA

- pregled osnovnih metoda numeričke integracije
- treba izračunati integral neke funkcije na zadanom intervalu

(funkcija često nije zadana u analitičkom obliku ili se ne može analitički integrirati !)

$$I = \int_a^b f(x)dx$$



Integral I odgovara površini ispod zadane funkcije f(x) u intervalu koji počinje na x=a i završava na x=b

NUMERIČKA INTEGRACIJA

- metode numeričke integracije dijele se na

1) metode zasnovane na konstantnom koraku integracije
2) metode sa prilagodljivim korakom integracije, tzv. metoda Gaussove kvadrature

Newton – Cotes metoda integracije

- Konstantni korak, metoda zasnovana na Taylorovom razvoju funkcije f(x) oko niza okolnih točaka oko x

- Prvo treba zadati korak integracije,

$$h = \frac{b-a}{N}$$

- gdje je N broj koraka, b i a su granice integracije

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- zatim treba izabrati koliko se članova Taylorovog razvoja želi uzeti u obzir (tj. do koje derivacije funkcije f(x) se želi ići)

- treba odrediti koliko točaka oko x se želi uzeti u proračunu derivacije

- traženi integral se razbije po intervalima:

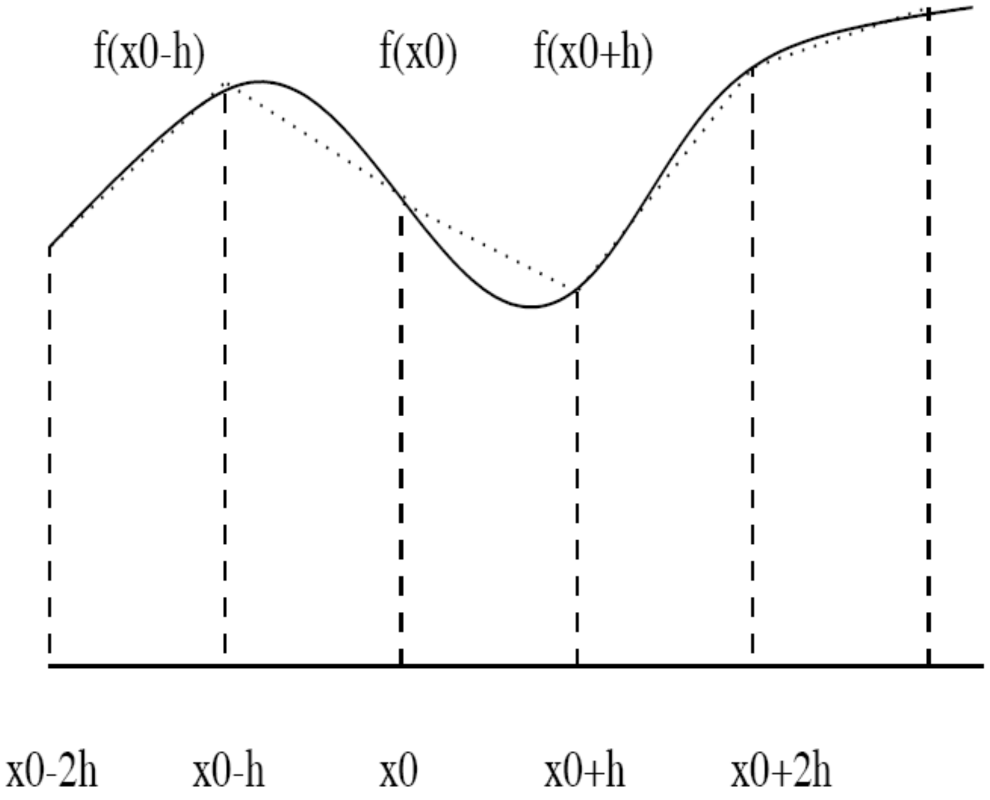
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+2h} f(x)dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x)dx + \ldots \int_{b-2h}^{b} f(x)dx$$

- treba naći pouzdani Taylorov razvoj u svakom podintervalu,

- općenito podintegral možemo zapisati kao $\displaystyle\int_{-h}^{+h} f(x)dx$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- Treba napraviti Taylorov razvoj funkcije f(x) oko točke x_0



$$f(x = x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf' + \frac{h^2 f''}{2} \pm \frac{h^3 f'''}{6} + O(h^4)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- pretp. dalje da integral $\int_{-h}^{+h} f(x)dx$ razbijemo na dva dijela,

  jedan od -h do x_0, a drugi od x_0 do h
- pretp. da možemo koristiti formulu dvije točke za derivaciju (tj. aproksimiramo f(x) ravnim linijama na podintervalima)
- Dakle, svaki mali element ispod f(x) odgovara trapezu, funkcija f(x) je aproksimirana polinomom prvog reda

$$f(x) = a + bx$$

- gdje je b (nagib pravca) određen prvom derivacijom

$$f'(x_0 \pm h) = \frac{\mp f(x_0 \pm h) \pm f(x_0)}{h} + O(h)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- ako prekinemo Taylorov razvoj iza derivacije prvog reda,

$$f(x) = f_0 + \frac{f_h - f_0}{h} x + O(x^2)$$ za $x = x_0$ do $x = x_0 + h$

$$f(x) = f_0 + \frac{f_0 - f_{-h}}{h} x + O(x^2)$$ za $x = x_0 - h$ do $x = x_0$

- uvrstimo u izraz za integral, dobije se trapezno pravilo:

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_h + 2f_0 + f_{-h}) + O(h^3)$$

- greška $O(h^3)$ je lokalna, ukupna greška se dobiva sumiranjem po svim intervalima i ide kao $O(h^2)$

ALGORITAM TRAPEZNE METODE INTEGRACIJE

- izabrati broj točaka i odrediti korak za integraciju
- izračunati $f(a)$ i $f(b)$, zatim pomnožiti sa $h/2$
- napraviti petlju od $n=1$ do $n-1$ i sumirati članove

$$f(a+h)+f(a+2h)+f(a+3h)+\cdots+f(b-h)$$

- Pomnožiti ukupni rezultat sa h i dodati $hf(a)/2$ i $hf(b)/2$

ALGORITAM TRAPEZNE METODE INTEGRACIJE

```
double trapezoidal_rule(double a, double b, int n, double (*func)(double))
{
      double trapez_sum;
      double fa, fb, x, step;
      int    j;
      step=(b-a)/((double) n);
      fa=(*func)(a)/2. ;
      fb=(*func)(b)/2. ;
      trapez_sum=0.;
      for (j=1; j <= n-1; j++){
         x=j*step+a;
         trapez_sum+=(*func)(x);
      }
      trapez_sum=(trapez_sum+fb+fa)*step;
      return trapez_sum;
}  // end trapezoidal_rule
```

```
integral = trapezoidal_rule(a, b, n, &myfunction )
```

NEWTON-COTES INTEGRACIJA – TRI TOČKE

- umjesto f(x) u aproksimaciji sa dvije točke, može se primjeniti aproksimacija tri točke u izračunu derivacije f(x)
- funkcija se aproksimira polinomom drugog stupnja

$$f(x) = a + bx + cx^2$$

- prva i druga derivacija funkcije su dane sa

$$\frac{f_h - f_{-h}}{2h} = f_0' + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_0^{(2j+1)}}{(2j+1)!} h^{2j}$$

$$\frac{f_h - 2f_0 + f_{-h}}{h^2} = f_0'' + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_0^{(2j+2)}}{(2j+2)!} h^{2j}$$

- funkcija je aproksimirana kao

$$f(x) = f_0 + \frac{f_h - f_{-h}}{2h} x + \frac{f_h - 2f_0 + f_{-h}}{2h^2} x^2 + O(x^3)$$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA - TRI TOČKE

- uvrštavanjem aproksimiranog izraza za f(x) u integral,

$$\int_{-h}^{+h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_h + 4f_0 + f_{-h}) + O(h^5)$$

- ovo je Simpsonova metoda integracije, greška je manja nego kod trapezne formule
- primjenom na cijeli interval $[a, b]$ slijedi:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(b-h) + f_b)$$

- globalna greška Simpsonove integracije:

$$\int_a^b f(x)dx - S_h(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a, b]$$

ALGORITAM SIMPSONOVE METODE INTEGRACIJE

- izabrati broj točaka i veličinu intervala za integraciju

- izračunati $f(a)$ i $f(b)$

- napraviti petlju od $n = 1$ do $n - 1$ u kojoj se zbrajaju članovi

$$4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \cdots + 4f(b-h)$$

- (za neparne vrijednosti n članovi dolaze sa faktorom 4, za parne vrijednosti sa faktorom 2)

- konačni rezultat treba pomnožiti sa faktorom $\frac{h}{3}$

NEWTON-COTES INTEGRACIJA

- općenito se dana funkcija f(x) aproksimira polinomom nekog stupnja

- za $n+1$ različitih točaka $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ i $n+1$ vrijednosti $y_0, \ldots, y_n$ postoji jedinstveni polinom $P_n(x)$ koji ispunjava uvjet (interpolacijski polinom)

$$p_n(x_j) = y_j \quad j = 0, \ldots, n$$

- u Lagrangeovoj reprezentaciji interpolacijski polinom se može zapisati kao

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} l_k y_k$$

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \qquad k = 0, \ldots, n$$

NEWTON COTES INTEGRACIJA

- npr. u slučaju $n = 1$ dobiva se linearna funkcija

$$P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x - \frac{y_1 x_0 + y_0 x_1}{x_1 - x_0}$$

- Općenito se integracija zasnovana na intepolacijskom polinomu stupnja zadanom na ekvidistantnim točkama $x_k = a + kh$ sa korakom $h = (b - a)/n$ naziva Newton-Cotes formulom za integraciju (kvadratura)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} w_k f(x_k)$$

$$w_k = h \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (z - j)dz \qquad k = 0, \dots, n$$

ZADATAK 9

- Napišite program koji računa ukupnu potrošenu električnu energiju u 1000 dana, ako je ovisnost snage električne struje u vremenu modelirana funkcijom

$$P(t) = \left(4 + \frac{t}{365} + \frac{1}{2} sin \frac{\pi t}{91}\right)\left(2 + e^{-sin(2\pi t)}\right)$$

gdje je snaga dana u GW, a vrijeme t u danima.

Primijeniti trapeznu i Simpsonovu metodu integracije i prikazati na grafu ovisnost izračunate ukupne potrošene električne energije o koraku integracije. Program treba ispisati konačno rješenje zadatka za obje metode integracije.