Linearne višekoračne metode

Kod jednokoračnih metoda je za aproksimaciju y_{i+1} u točki x_{i+1} bilo potrebno poznavanje samo aproksimacije y_i u točki x_i:

$$y_{i+1} = y_i + h\,\Phi(x_i, y, h_i).$$

Dakle, ideja jednokoračnih metode je:

$$y_i \longrightarrow y_{i+1}.$$

Numerička metoda za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi generira niz aproksimacija $y_1, y_2, y_3, \ldots$ u točkama $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

Kada smo stigli do točke x_i, mi smo, uz y_i izračunali i $y_{i-1}, y_{i-2}, y_{i-3}, \ldots$

Možemo li aproksimirati y_{i+1} pomoću aproksimacija $y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1}$?

$$y_{i-k+1}, \ldots, y_{i-1}, y_i \;\longrightarrow\; y_{i+1}.$$

Jer je y rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x, y),$$

poznate su nam i aproksimacije za derivacije:

$$y_i' = f(x_i, y_i).$$

Dakle, pitanje je možemo li aproksimirati y_{i+1} pomoću aproksimacija $y_i, y_{i-1}, \ldots, y_{i-k+1}$ i $y_i', y_{i-1}', \ldots, y_{i-k+1}'$:

$$y_{i-k+1}, y_{i-k+1}', \ldots, y_{i-1}, y_{i-1}', y_i, y_i' \quad\longrightarrow\quad y_{i+1}.$$

Primjer

Odredite konstante $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ i β_2 tako da poništite što je moguće više članova u Taylorovom razvoju izraza

$$y(x+h) - \alpha_1 y(x) - \alpha_2 y(x-h) - \beta_1 h\, y'(x) - \beta_2 h\, y'(x-h).$$

Napomena. U izrazu smo pretpostavili da će se h pojaviti uz derivaciju (h').

Rješenje. Razvijamo pojedine članove u Taylorov red. Pretpostavljamo da ćemo s 4 koeficijenta poništiti prva 4 člana (uz $1, h, h^2, h^3$). Zbog kontrole ćemo koristiti još jedan član u razvoju više.

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y + hy' + \frac{1}{2}h^2y'' + \frac{1}{6}h^3y''' + \frac{1}{24}h^4y^{(4)} + \mathcal{O}(h^5),\\
y(x-h) &= y - hy' + \frac{1}{2}h^2y'' - \frac{1}{6}h^3y''' + \frac{1}{24}h^4y^{(4)} + \mathcal{O}(h^5),\\
y'(x-h) &= y' - hy'' + \frac{1}{2}h^2y''' - \frac{1}{6}h^3y^{(4)} + \mathcal{O}(h^4),
\end{aligned}
$$

Radi preglednosti je označeno $y^{(k)} := y^{(k)}(x)$.

Uvrstimo:

$$
\begin{aligned}
y(x+h) \quad - \quad & \alpha_1 y(x) - \alpha_2 y(x-h) - \beta_1 h\, y'(x) - \beta_2 h\, y'(x-h) = \\
= \quad & y + hy' + \frac{1}{2}h^2 y'' + \frac{1}{6}h^3 y''' + \frac{1}{24}h^4 y^{(4)} + \mathcal{O}(h^5) \\
& -\alpha_1 y \\
& -\alpha_2 \left[y - hy' + \frac{1}{2}h^2 y'' - \frac{1}{6}h^3 y''' + \frac{1}{24}h^4 y^{(4)} + \mathcal{O}(h^5) \right] \\
& -\beta_1 h\, y' \\
& -\beta_2 h \left[y' - hy'' + \frac{1}{2}h^2 y''' - \frac{1}{6}h^3 y^{(4)} + \mathcal{O}(h^4) \right] =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} = \quad & y\left[1-\alpha_1-\alpha_2\right]+hy'\left[1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2\right]+ \\ & +h^2y''\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha_2+\beta_2\right]+h^3y'''\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\alpha_2-\frac{1}{2}\beta_2\right]+ \\ & +h^4y^{(4)}\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{24}\alpha_2+\frac{1}{6}\beta_2\right]+\mathcal{O}(h^5) \end{aligned}$$

Da bismo poništili prva 4 člana treba vrijediti:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1+\alpha_2 \\ 1 &= -\alpha_2+\beta_1+\beta_2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\alpha_2-\beta_2 \\ \frac{1}{6} &= -\frac{1}{6}\alpha_2+\frac{1}{2}\beta_2 \end{aligned}$$

Rješenje je:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -4 \\ \alpha_2 &= 5 \\ \beta_1 &= 4 \\ \beta_2 &= 2 \end{aligned}$$

Ako ove koeficijente uvrstimo u izraz uz član h^4:

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{24}\alpha_2 + \frac{1}{6}\beta_2 = \frac{1}{6}.$$

Dakle

$$y(x+h) = -4y(x)+5y(x-h)+4h\,y'(x)+2h\,y'(x-h)+\frac{1}{6}h^4y^{(4)}(x)+\mathcal{O}(h^5).$$

Iz

$$y(x+h) = -4y(x) + 5y(x-h) + 4h\,y'(x) + 2h\,y'(x-h) + \mathcal{O}(h^4).$$

slijedi da rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = y_0.$$

možemo aproksimirati s

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + 4h\,f(x_i, y_i) + 2h\,f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

gdje je $x_i = a + i\,h,\ i = 0, \ldots, n$ i $h = (b-1)/n$.

Metoda

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + 4hf(x_i, y_i) + 2hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

za aproksimaciju y_{i+1} koristi y_i i y_{i-1} pa govorimo o dvokoračnoj metodi.

Nova aproksimacija y_{i+1} je eksplicitno zadana pa se radi o eksplicitnoj metodi.

Na analogni način smo mogli dobiti i metodu oblika

$$y_{i+1} = \alpha_1 y_i + \alpha_2 y_{i-1} + \beta_0 hf(x_i, y_{i+1}) + \beta_1 hf(x_i, y_i) + \beta_2 hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

gdje je y_{i+1} rješenje nelinearne jednadžbe. Ovo bi bila implicitna metoda.

Primjer

Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' = y, \quad y(0) = 1,$$

na intervalu $[0, 1]$ metodom

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + 4h\,f(x_i, y_i) + 2h\,f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Uz različit izbor koraka $h = 1/n$.

Rješenje. Za početak rekurzije je zadan y_0 prvi član koji možemo izračunati ovom dvokoračnom rekurzijom je

$$y_2 = -4y_1 + 5y_0 + 4h\,f(x_1, y_1) + 2h\,f(x_0, y_0).$$

y_1 nije zadan!

Možemo ga odrediti jednokoračnom metodom.

U ovom slučaju možemo koristiti Eulerovu metodu (upotreba ove metode bit će opravdana kasnije):

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0).$$

n	$y_n - y(1)$
2	0.281718
5	-6.40276
10	4729.95
20	$1.1225 \cdot 10^{10}$
40	$2.63791 \cdot 10^{23}$

Metoda očito divergira.

Da bismo objasnili ovo ponašanje, primijenimo metodu na inicijalni problem

$$y' = 0, \quad y(0) = 0,$$

na intervalu $[0, 1]$. Egzaktno rješenje je $y(x) = 0$.

Jer je $f(x, y) = 0$, rekurzija je dana s

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Iz početnog uvjeta iskoristimo $y_0 = 0$.

Pretpostavimo da je y_1 izračunat s malom pogreškom ε: $y_1 = \varepsilon$.

Što se događa s malom pogreškom kada provodimo iteracijski postupak?

Iteracije možemo zapisati kao

$$y_{i+1} + 4y_i - 5y_{i-1} = 0, \quad y_0 = 0, \; y_1 = \varepsilon.$$

Možemo li izračunati eksplicitni izraz za y_i?

Ovo je zapravo **diferencijska jednadžba** (homogena s konstantnim koeficijentima).

Princip rješavanja je sličan kao i za homogene diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Pretpostavimo da je rješenje oblika

$$y_i = \lambda^i,$$

i uvrstimo ga u diferencijsku jednadžbu:

$$\lambda^{i+1} + 4\lambda^i - 5\lambda^{i-1} = 0.$$

$$\lambda^{i+1} + 4\lambda^i - 5\lambda^{i-1} = 0.$$

Kada podijelimo s λ^{i-1}:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0.$$

(Karakteristična jednadžba.)

Da bi diferencijska jednadžba bila zadovoljena, λ treba biti rješenje gornje kvadratne jednadžbe. Dva su rješenja:

$$\lambda_1 = -5 \quad \text{i} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dakle, dva rješenja diferencijske jednadžbe su

$$\lambda_1^i \quad \text{i} \quad \lambda_2^i.$$

Opće rješenje je

$$y_i = a_1\,\lambda_1^i + \,a_2\,\lambda_2^i.$$

$$y_i = a_1\,\lambda_1^i + \, a_2\,\lambda_2^i.$$

Za našu diferencijsku jednadžbu je opće rješenje

$$y_i = a_1\,(-5)^i + \, a_2\,1^i = a_1\,(-5)^i + \, a_2.$$

Konstante a_1 i a_2 odredimo tako da zadovoljimo početne uvjete

$$y_0 = 0 \quad \text{i} \quad y_1 = \varepsilon.$$

Jednadžbe su

$$\begin{aligned} 0 &= y_0 = a_1\,\lambda_1^0 + \, a_2\,\lambda_2^0 = a_1\,(-5)^0 + \, a_2 = a_1 + \, a_2, \\ \varepsilon &= y_1 = a_1\,\lambda_1^1 + \, a_2\,\lambda_2^1 = a_1\,(-5)^1 + \, a_2 = -5a_1 + \, a_2. \end{aligned}$$

Rješenje je

$$a_1 = \frac{1}{6}\varepsilon \quad \text{i} \quad a_2 = -\frac{1}{6}\varepsilon.$$

Sada je rješenje naše diferencijske jednadžbe uz zadane početne uvjete dano s

$$y_i = \frac{1}{6}\left[(-5)^i - 1\right]\varepsilon.$$

Mala početna pogreška ε se u svakoj iteraciji poveća za faktor 5!

Ovakve rekurzije se nazivaju nestabilne.

Nestabilnost je posljedica činjenice da barem jedna nultočka karakteristične jednadžbe zadovoljava

$$|\lambda_r| > 1.$$

Definicija opće višekoračne metode

Općenito, linearne višekoračne metode su metode oblika

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j \, y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j \, f_{i+1-j},$$

gdje je $f_k = f(x_k, y_k)$, $\alpha_0 \neq 0$ i $|\alpha_r| + |\beta_r| \neq 0$.

- Ovu metodu zovemo r-koračna metoda.
- Ukoliko je $\beta_0 = 0$ metoda je eksplicitna,
- a za $\beta_0 \neq 0$ metoda je implicitna.

Uočimo da prikaz višekoračne metode pomoću koeficijenata α_j i β_j nije jedinstven.

Često se koristi normalizacija $\alpha_0 = 1$ te je zapis metode oblika:

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{r} \beta_j f_{i+1-j}.$$

Na primjeru smo vidjeli da za višekoračnu metodu

$$y_{i+1} = \alpha_1 y_i + \alpha_2 y_{i-1} + h \left[\beta_1 f(x_i, y_i) + \beta_2 f(x_{i-1}, y_{i-1})\right]$$

- možemo odrediti koeficijente tako da pogreška odsjecanja bude $\mathcal{O}(h^k)$;
- problem nastaje ukoliko neki korijen λ karakteristične jednadžbe zadovoljava $|\lambda| > 1$;
- mogu li se odrediti koeficijenti tako da pogreška odsjecanja bude $\mathcal{O}(h^k)$ i svi korijeni zadovoljavaju $|\lambda| \leq 1$?

Adams-Bashforth-Moultonova metoda

Primjenom različitih integracijskih metoda možemo dobiti cijeli niz višekoračnih metoda.

Integracijom jednadžbe

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

na intervalu $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ dobijamo

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\,dx$$

Integral na desnoj strani možemo aproksimirati pomoću neke metode za numeričku integraciju.

Pravilo srednje točke

$$\int_a^b g(x)\,dx = (b-a)\,g\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} g^{(2)}(\xi)$$

$g = y'$:

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx &= (x_{i+1}-x_{i-1})\,y'(x_i) + \frac{(2h)^3}{24} y^{(3)}(\xi_i) = \\ &= 2h\,f(x_i, y(x_i)) + \frac{h^3}{3} y^{(3)}(\xi_i)\end{aligned}$$

Prethodna formula vodi na rekurzivno definiranu aproksimaciju

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h\,f(x_i, y_i).$$

Pogreška odsjecanja:

$$T_i = \frac{h^3}{3} y^{(3)}(\xi_i)$$

Simpsonovo pravilo

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{6}(b-a)\left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} g^{(4)}(\xi)$$

$g = y'$:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)\,dx &= \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6}\left[y'(x_{i-1}) + 4y'(x_i) + y'(x_{i+1})\right] - \\
&\quad - \frac{(2h)^5}{2880} y^{(5)}(\xi_i) = \\
&= \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 4f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right] - \\
&\quad - \frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_i)
\end{aligned}$$

Prethodna formula vodi na rekurzivno definiranu aproksimaciju

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right].$$

Pogreška odsjecanja:

$$T_i = -\frac{h^5}{90} y^{(5)}(\xi_i)$$

Adams-Bashforth-Moultonova metoda

Primjenom različitih integracijskih metoda možemo dobiti cijeli niz višekoračnih metoda.

Integracijom jednadžbe $y'(x) = f(x, y(x))$ na nekom zadanom intervalu $[x_{p-j}, x_{p+k}]$ dobivamo

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t))\, dt.$$

Integral aproksimiramo slično kao u Newton-Cotesovim formulama.

Podintegralnu funkciju $f(t, y(t))$ zamijenimo interpolacijskim polinomom P_q stupnja q koji interpolira $f(t, y(t))$ u točkama x_i:

$$P_q(x_i) = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad i = p, p-1, \ldots, p-q,$$

Lagrangeova forma:

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{q} f(x_{p-i}, y(x_{p-i}))L_i(x), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{q} \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}.$$

Dobivamo izraz

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx \sum_{i=0}^{q} f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(t)\, dt$$

$$= h \sum_{i=0}^{q} \beta_{qi} f(x_{p-i}, y(x_{p-i})),$$

gdje je

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h}\int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} L_i(t)\,dt = \int_{-j}^{k} \prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{q} \frac{s+l}{-i+l}\,ds, \quad i = 0,\ldots,q.$$

Zamjenom vrijednosti $y(x_i) \leftrightarrow y_i$ dobivamo višekoračnu metodu oblika

$$y_{p+k} = y_{p-j} + h\sum_{i=0}^{q} \beta_{qi} f_{p-i}.$$

Zadani j i k definiraju klasu metoda.

Metode različite složenosti i različite točnosti unutar iste klase metoda dobijemo za različite vrijednosti od q.

Najpoznatiji primjeri višekoračnih metoda ovog tipa su

- Adams–Bashforthova metoda ($k = 1$ i $j = 0$) i
- Adams–Moultonova metoda ($k = 0$ i $j = 1$).

Adams–Bashforthova metoda

Adams–Bashforthova metoda: $k = 1$ i $j = 0$.

$$y_{p+1} = y_p + h\,(\beta_{q0}\, f_p + \beta_{q1}\, f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p-q}).$$

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	3	-1			
$12\beta_{2i}$	23	-16	5		
$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Adams–Moultonova metoda

Adams–Moultonova metoda: $k = 0$ i $j = 1$ dobijamo

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p-1} + h\,(\beta_{q0}\, f_p + \beta_{q1}\, f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p-q}). \\ y_{p+1} &= y_p + h\,(\beta_{q0}\, f_{p+1} + \beta_{q1}\, f_p + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p+1-q}). \end{aligned}$$

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	1	1			
$12\beta_{2i}$	5	8	-1		
$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

Od ostalih višekoračnih metoda izvedenih iz integracijskih formula, poznatije su još

- Nyströmove ($k = 1$ i $j = 1$)

$$y_{p+1} = y_{p-1} + h\,(\beta_{q0}\, f_p + \beta_{q1}\, f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p-q}).$$

- Milneove metode ($k = 0$ i $j = 2$).

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p-2} + h\,(\beta_{q0}\, f_p + \beta_{q1}\, f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p-q}). \\ y_{p+1} &= y_{p-1} + h\,(\beta_{q0}\, f_{p+1} + \beta_{q1}\, f_p + \cdots + \beta_{qq}\, f_{p+1-q}). \end{aligned}$$

BDF metode
Metode za ODJ iz formula za deriviranje

Niz metoda možemo dobiti i pomoću formula za deriviranje.
Neka je $P(x)$ polinom koji interpolira $y(x)$ u točkama x_{n-i}:

$$P(x_{n-i}) = y(x_{n-i}), \quad i = 0, \ldots, k.$$

Lagrangeova forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} L_i(x) y(x_{n-i}), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{x - x_{n-j}}{x_{n-i} - x_{n-j}}.$$

Deriviranjem u čvoru x_{n-r} dobivamo

$$P'(x_{n-r}) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} h L_i'(x_{n-r}) y(x_{n-i}).$$

Supstitucijama

$$y_{n-i} \approx y(x_{n-i}) \quad \text{i} \quad f_{n-r} = f(x_{n-r}, y_{n-r}) \approx P'(x_{n-r})$$

dobivamo metodu

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, y_{n-i} = h \, f_{n-r}.$$

Uvođenjem oznake $p = (x - x_n)/h$, vidimo da koeficijenti

$$\alpha_i = h \, L_i'(x_{n-r}) = \frac{d}{dp} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{p+j}{j-i} \bigg|_{p=-r} = \frac{1}{r-i} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i,r}}^{k} \frac{j-r}{j-i}$$

ne ovise o čvorovima x_{n-i} i koraku mreže h.

Za $r = 1$ dobivamo eksplicitnu metodu

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, y_{n-i} = h \, f_{n-1},$$

a za izbor $r = 0$ je metoda implicitna:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^* \, y_{n-i} = h \, f_n.$$

Napomena. Zbog alternativnog načina izvoda ovih metoda korištenjem podijeljenih razlika unazad, ove metode poznate su pod nazivom BDF metode (engl. *backward difference formulas*).

Koeficijenti eksplicitne BDF metode

k	η_1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	1	1						
2	2	0	1					
3	3	$-\frac{3}{2}$	3	$-\frac{1}{2}$				
4	4	$-\frac{10}{3}$	6	$-\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$			
5	5	$-\frac{65}{12}$	10	-5	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{4}$		
6	6	$-\frac{77}{10}$	15	-10	30	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{5}$	
7	7	$-\frac{203}{20}$	21	$-\frac{35}{2}$	$\frac{35}{3}$	$-\frac{21}{4}$	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{6}$

Koeficijenti implicitne BDF metode

k	η_1^*	α_1^*	α_2^*	α_3^*	α_4^*	α_5^*	α_6^*	α_7^*
1	1	1						
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$					
3	$\frac{6}{11}$	$\frac{18}{11}$	$-\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$				
4	$\frac{12}{25}$	$\frac{48}{25}$	$-\frac{36}{25}$	$\frac{16}{25}$	$-\frac{3}{25}$			
5	$\frac{60}{137}$	$\frac{300}{137}$	$-\frac{300}{137}$	$\frac{200}{137}$	$-\frac{75}{137}$	$\frac{12}{137}$		
6	$\frac{60}{147}$	$\frac{360}{147}$	$-\frac{450}{147}$	$\frac{400}{147}$	$-\frac{225}{147}$	$\frac{72}{147}$	$-\frac{10}{147}$	
7	$\frac{140}{363}$	$\frac{20}{363}$	$-\frac{1470}{363}$	$\frac{4900}{1089}$	$-\frac{1225}{363}$	$\frac{588}{363}$	$-\frac{490}{1089}$	$\frac{20}{363}$

Konzistentnost višekoračne metode

Kao i kod jednokoračnih metoda, prvo ćemo promatrati koliko dobro rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b], \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

zadovoljava rekurzivnu formulu

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}),$$

koja definira višekoračnu metodu.

U gornju ćemo rekurziju umjesto y_j uvrstiti rješenje diferencijalne jednadžbe $y(x_j)$, a zatim dobiveni izraz razviti u Taylorov red:

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y(x_{i+1-j}) - h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y(x_{i+1-j})) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j h^j.$$

Metoda će biti točnija što je više prvih članova u razvoju jednako nuli.

Općenito, ukoliko je

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0 \quad \text{i} \quad C_{p+1} \neq 0$$

kažemo da je metoda reda p. Ukoliko je $p \geq 1$ kažemo da je metoda konzistentna.

Primjer. Za metodu

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i)$$

uvrštavanje točnog rješenja i razvoj u red oko točke x_i daje

$$
\begin{aligned}
y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - 2hy'(x_i) = & \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} y^{(j)}(x_i)\frac{h^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} y^{(j)}(x_i)\frac{(-1)^j h^j}{j!} - 2hy'(x_i) = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} y^{(2j+1)}(x_i)\frac{2}{(2j+1)!}h^{2j+1} = \\
&= \frac{y^{(3)}(x_i)}{3}h^3 + \mathcal{O}(h^5) = \\
&= \mathcal{O}(h^3),
\end{aligned}
$$

te je ova metoda reda 2.

Uočimo da smo iskoristili da je y rješenje diferencijalne jednadžbe, tj. da vrijedi $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$.

Pretpostavili smo da je $y \in C^\infty(a, b)$, no očito je dovoljno zahtijevati da y ima neprekidnu treću derivaciju, tj. $y \in C^3(a, b)$.

Dakle, prethodni izraz pokazuje kvalitetu aproksimacije višekoračne metode.

U daljnjem tekstu koristit ćemo malo promijenjen izraz za pogrešku, tzv. **lokalnu pogrešku diskretizacije**:

$$\tau(x; h) = \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{r} \alpha_j y(x + (1-j)h) - \sum_{j=0}^{r} \beta_j y'(x + (1-j)h),$$

gdje je y egzaktno rješenje diferencijalne jednadžbe.

Uočimo da je lokalna pogreška diskretizacije dobivena uvrštavanjem točnog rješenja u rekurziju metode uz zamjenu $x = x_i$.

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo **konzistentnom** ako za svaki $f \in F_1(a, b)$ i $x \in [a, b]$ lokalna pogreška diskretizacije τ zadovoljava

$$\lim_{h \to 0} \tau(x; h) = 0.$$

Ukoliko je

$$\tau(x; h) = \mathcal{O}(h^p)$$

kažemo da je metoda **reda** p.

Razvoj lokalne pogreške diskretizacije

Označimo $\bar{x} = x - (r-1)\,h$. Tada je

$$
\begin{aligned}
\tau(x;h) &= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}\alpha_j y(x+(1-j)h) - \sum_{j=0}^{r}\beta_j y'(x+(1-j)h) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}\alpha_{r-j} y(\bar{x}+jh) - \sum_{j=0}^{r}\beta_{r-j} y'(\bar{x}+jh) \\
&= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}\alpha_{r-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(\bar{x})}{k!} j^k h^k - \sum_{j=0}^{r}\beta_{r-j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k+1)}(\bar{x})}{k!} j^k h^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x}) h^{k-1}\sum_{j=0}^{r}\alpha_{r-j}\frac{j^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k+1)}(\bar{x}) h^{k}\sum_{j=0}^{r}\beta_{r-j}\frac{j^k}{k!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau(x;h) &= \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x})h^{k-1}\sum_{j=0}^{r}\alpha_{r-j}\frac{j^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x})h^{k-1}\sum_{j=0}^{r}\beta_{r-j}\frac{j^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{h}y(\bar{x})\sum_{j=0}^{r}\alpha_{r-j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} y^{(k)}(\bar{x})h^{k-1}\left[\sum_{j=0}^{r}\left(\alpha_{r-j}\frac{j^k}{k!} - \beta_{r-j}\frac{j^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} C_k y^{(k)}(\bar{x})h^{k-1}
\end{aligned}
$$

Red $(r+1)$-koračne Adams–Bashforthove m.

Izvod je sličan kao za ocjenu pogreške Newton-Cotesovih formula.

$$\tau(x;h) = \frac{1}{h}(y(x+h)) - y(x)) - \sum_{i=0}^{r} \beta_{ri} y'(x - ih).$$

Radi jednostavnosti, označimo $x_{p+j} = x + jh$, $j = -r, \ldots, 1$.

$$\tau(x;h) = \frac{1}{h}(y(x_{p+1})) - y(x_p)) - \sum_{i=0}^{r} \beta_{ri} y'(x_{p-i}).$$

Uvrštavanjem izraza za koeficijente β_{ri}, dobivamo

$$\begin{aligned}
\tau(x;h) &= \frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} y'(t)\,dt - \sum_{i=0}^{r}\left(\frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} L_i(t)\,dt\right) y'(x_{p-i}) \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} y'(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} P_r(t)\,dt \\
&= \frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} \left[y'(t) - P_r(t)\right]\,dt,
\end{aligned}$$

gdje je P_r polinom koji interpolira y' u točkama $x_{p-r}, \ldots, x_p$.

Primjenom ocjene za pogrešku interpolacije

$$\begin{aligned}
y'(t) - P_r(t) &= \omega(t)\,\frac{y^{(r+2)}(\xi(t))}{(r+1)!}, \quad \xi(t) \in \langle x_{p-r}, x_p\rangle, \\
\omega(t) &= (t - x_{p-r})(t - x_{p-r+1})\cdots(t - x_p),
\end{aligned}$$

-

dobivamo

$$\tau(x;h) = \frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega(t)\,\frac{y^{r+2}(\xi(t))}{(r+1)!}\,dt.$$

Budući da su $x_{p-r}, \ldots, x_p$ sve nultočke polinoma ω, ω ne mijenja predznak na intervalu $[x_p, x_{p+1}]$ pa vrijedi

$$\tau(x;h) = \frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!}\,\frac{1}{h}\int_{x_p}^{x_{p+1}} \omega(t)\,dt.$$

Supstitucijom $u = (t - x_p)/h$ dobivamo

$$t - x_{p-j} = h(u+j) \quad \text{i} \quad \omega(t) = h^{r+1} u(u+1)\cdots(u+r),$$

pa gornji integral prelazi u

$$
\begin{aligned}
\tau(x;h) &= \frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!}\,\frac{1}{h}\,h^{r+1}h\int_0^1 u(u+1)\cdots(u+r)\,du \\
&= h^{r+1}\,\frac{y^{r+2}(\eta)}{(r+1)!}\int_0^1 \prod_{j=0}^{r}(u+j)\,du,
\end{aligned}
$$

te je red $(r+1)$-koračne Adams–Bashforthove metode jednak $r+1$.

Teorem

Red r-koračne Adams–Bashforthove metode je r.

Red r-koračne Adams–Moultonove metode je $r+1$.

Red r-koračne eksplicitne BDF metode je r.

Red r-koračne implicitne BDF metode je r.

Dokaz. Red Adams-Bashforthove metode smo upravo izveli.

Adams-Moultonova metoda je izvedena pomoću interpolacijskog polinoma za jedan stupanj većeg nego eksplicitna Adams-Bashforthova metoda pa je i red za jedan veći.

BDF metode su izvedene iz derivacije interpolacijskog polinoma. Interpolacijska pogreška kod $r+1$ točke je h^{r+1} pa je pogreška derivacije u točki interpolacije reda h^r i to je red BDF metode. □

Konzistentnost $\Rightarrow$ konvergencija?

Korištenjem iste ideje kao kod Runge–Kutta metoda, koeficijente u r-koračnoj metodi

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

možemo određivati tako da red metode bude što je moguće veći, tj. da poništimo što više prvih članova u Taylorovom razvoju.

- Fiksiranjem $\alpha_0 = 1$ imamo $2r$ slobodnih koeficijenata za eksplicitnu metodu.
- Koeficijenti C_j u Taylorovom razvoju zavisit će o koeficijentima α_j i β_j.

- Nije teško pokazati da je ta zavisnost linearna, te s $2r$ slobodnih koeficijenata možemo poništiti prvih $2r$ članova razvoja: $C_0 = C_1 = \cdots = C_{2r-1}$.
- Također, može se pokazati da će vrijediti $C_{2r} \neq 0$, pa na taj način možemo konstruirati metodu reda $2r - 1$.
- Slično vrijedi i za r-koračne implicitne metode.
- Ovdje imamo jedan koeficijent više (β_0), te možemo poništiti jedan član više u Taylorovom razvoju i dobiti metodu reda $2r$.

Zašto koristiti navedene metode, ako postoje metode dvostrukog reda s istim brojem koraka?!

- Za razliku od jednokoračnih metoda gdje je kozistentnost metode bio dovoljan uvjet za konvergenciju,
- kod višekoračnih metoda, da bi aproksimacija konvergirala k točnom rješenju, uz konzistentnost treba biti zadovoljen još jedan dodatni uvjet, a to je stabilnost.
- Preciznije, jednokoračne metode su uvijek stabilne.

U uvodnom primjeru smo vidjeli da metoda s maksimalnim redom konzistentnosti ne treba biti konvergentna.

Prediktor–korektor par
Implementacija implicitnih metoda

Kako izračunati y_{i+1} u implicitnoj metodi (korektor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* y_{i+1-j} = \beta_0^* h f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}.$$

Ako označimo

$$c = -\sum_{j=1}^{k} \alpha^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}, \quad \varphi(y) = \beta_0^* h f(x_{i+1}, y) + c,$$

y_{i+1} je rješenje nelinearne jednadžbe $y = \varphi(y)$.

Budući da možemo izabrati dovoljno malen korak integracije h takav da je nejednakost

$$|\varphi'(y)| = h|\beta_0^*| \left| \frac{\partial f(x_{i+1}, y)}{\partial y} \right| < 1$$

zadovoljena, slijedi da jednostavne iteracije

$$y^{[m+1]} = \varphi(y^{[m]}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergiraju prema rješenju jednadžbe.

Za odabir početne aproksimacije $y^{[0]}$ koristi se neka od eksplicitnih metoda (prediktor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j}.$$

Sada možemo zapisati cijeli algoritam:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1}^{[0]} &= -\sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j}, \\
y_{i+1}^{[m+1]} &= \beta_0^* h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{[m]}) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}, \\
y_{i+1} &= y_{i+1}^{[M]}. \qquad\qquad m = 0, \ldots, M-1
\end{aligned}
$$

Broj iteracija (M) može biti unaprijed zadan ili se iteracije provode dok se jednadžba ne riješi do na neku unaprijed zadanu točnost. U primjeni, broj iteracije nije velik, uvijek se radi o nekoliko iteracija.

Odabir prediktora i korektora

Znamo da jednostavne iteracije konvergiraju linearno prema rješenju jednadžbe. Konvergenciju možemo ubrzati primjenom Newtonove metode.
To se koristi kod krutih jednadžbi.

Još nam je ostalo za promotriti kako odabrati korektor–prediktor par.

- Točnost metode definirana je s točnošću korektora, tj. implicitne metode.
- Ako je red prediktora, eksplicitne metode kojom određujemo početnu aproksimaciju $y_{i+1}^{[0]}$, za jedan veći od reda korektora početna će aproksimacija biti pretočna.

- S druge strane, ako je red prediktora manji od reda korektora, početna aproksimacija je preslaba, te bi trebalo previše iteracija korektora da se nelinearna jednadžba riješi na zadovoljavajuću točnost.
- Stoga je uobičajeno da se za prediktor–korektor par uzimaju eksplicitna i implicitna metoda istoga reda.
  - Često korišten par je k-koračna Adams–Bashforthova metoda kao prediktor i $(k-1)$-koračna Adams–Moultonova metoda kao korektor.
  - Uz ovakav odabir prediktor-korektor para govorimo o Adams–Bashforth–Moultonovim metodama.
  - Isto tako, eksplicitna i implicitna k-koračna metoda izvedena iz formula za numeričko deriviranje koristi se kao prediktor-korektor par.

Stabilnost višekoračne metode

Definicija (*)

Linearna k-koračna metoda (za diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$) je **stabilna** (nula-stabilna) ako za svaki $f \in F_1(a, b)$ postoji konstanta K takva da za bilo koja dva niza (y_n) i (z_n) generirana istom formulom ali različitim početnim vrijednostima $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ i $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ vrijedi

$$|y_n - z_n| \leq K \max_{j=0,\ldots,k-1} |y_j - z_j|$$

za $x_n \leq b$ i dovoljno mali h.

Višekoračna metoda

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

definira dva polinoma

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j z^{r-j} \qquad \text{i} \qquad \sigma(z) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j z^{r-j}.$$

Ujedno, ova dva polinoma određuju jednu višekoračnu metodu, pa se često umjesto višekoračne metode koristi naziv (ρ, σ)-shema.

Pomoću polinoma ρ i σ može opisati red i konzistentnost metode.

Razvijmo lokalnu pogrešku diskretizacije u red (samo prva dva člana) oko $\bar{x} = x - r\,h$:

$$
\begin{aligned}
h\,\tau(x;h) &= \sum_{j=0}^{r} \alpha_j\, y(x - j\,h) - h \sum_{j=0}^{r} \beta_j\, y'(x - j\,h) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \alpha_j\, y(\bar{x} + (r-j)\,h) - h \sum_{j=0}^{r} \beta_j\, y'(\bar{x} + (r-j)\,h) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} C_j y^{(j)(\bar{x})} h^j.
\end{aligned}
$$

$$
(h^0 y(\bar{x})) \qquad C_0 = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j = \rho(1)
$$

$$
(h^1 y'(\bar{x})) \qquad C_1 = \sum_{j=0}^{r} (r-j)\alpha_j - \sum_{j=0}^{r} \beta_j = \rho'(1) - \sigma(1)
$$

Time smo dokazali

Lema

Linearna višekoračna metoda je konzistentna ako i samo ako je $\rho(1) = 0$ i $\rho'(1) = \sigma(1)$.

Ovaj rezultat se može i poopćiti.

Teorem

Linearna višekoračna metoda je reda p ako i samo ako je $z = 1$ p-struka nultočka funkcije

$$\varphi(z) = \frac{\rho(z)}{\ln z} - \sigma(z).$$

Dokaz. Primijenimo metodu na diferencijalnu jednadžbu $y' = y$ ($y(x) = e^x$).
Lokalna pogreška diskretizacije je

$$\begin{aligned}
\tau(x,h) &= \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}\alpha_j e^{x-jh} - \sum_{j=0}^{r}\beta e^{x-jh} \\
&= e^{x-rh}\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r}\alpha_j e^{(r-j)h} - e^{x-rh}\sum_{j=0}^{r}\beta e^{(r-j)h}
\end{aligned}$$

Sada je, uz $z = e^h$

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(h^p) = e^{-x+rh}\tau(x,h) &= \frac{1}{\ln z}\sum_{j=0}^{r}\alpha_j z^{(r-j)} - \sum_{j=0}^{r}\beta z^{(r-j)} \\
&= \frac{\rho(z)}{\ln z} - \sigma(z) = \varphi(z).
\end{aligned}$$

Dakle, $h = 0$ je p-struka nultočka funkcije

$$\frac{\rho(e^h)}{h} - \sigma(e^h) = \varphi(e^h)$$

ako i samo ako je $z = e^0 = 1$ p-struka nultočka funkcij $\varphi(z)$. $\square$

Napomena. Iz teorema slijedi i prethodna lema, da je metoda konzistentna ako i samo ako je 1 nultočka funkcije $\rho(z)/\ln z - \sigma(z)$.
Zbog $\ln 1 = 0$ treba vrijediti i $\rho(1) = 0$.
Jednako tako, zbog

$$\left.\frac{\rho(z)}{\ln z}\right|_{z=1} = \lim_{z\to 1}\frac{\rho(z)}{\ln z} = \lim_{z\to 1}\frac{\rho'(z)}{\frac{1}{z}} = \rho'(1)$$

treba vrijediti i $\rho'(1) - \sigma(1) = 0$. $\square$

Vratimo se na problem stabilnosti.

Višekoračnu metodu

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

možemo ptomatrati i kao (linearnu) diferencijsku jednadžbu

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = c_{i+1}.$$

(Zanemarimo za sada da i c_i ovisi o y_i.)

Osnovno pitanje (stabilnosti): ako o i-tom koraku napravimo pogrešku τ_i kako ta pogreška utječe na konačno rješenje? Da li se pogreška povećava ili ostaje ograničena?

Kao i kod linearnih diferencijalnih jednadžbi, rješenje se može prikazati kao zbroj partikularnog rješenja i rješenja homogene jednadžbe

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = 0.$$

Očito je da je za svaki skup početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$ jednoznačno određen niz brojeva u_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ koji rješava ovu jednadžbu.

Uz gornju diferencijsku jednadžbu vežemo karakteristični polinom

$$\rho(z) = \alpha_0 z^r + \alpha_1 z^{r-1} + \cdots + \alpha_{r-1} z + \alpha_r.$$

Rješenje diferencijske jednadžbe dobivamo pomoću nultočaka polinoma ρ.

Teorem

Neka polinom $\rho(z)$ ima k različitih nultočaka λ_i višestrukosti σ_i, $i = 1, \ldots, k$. Tada za proizvoljne polinome $P_i(t)$ stupnja strogo manjeg od σ_i, $i = 1, \ldots, k$, niz

$$u_j = P_1(j)\lambda_1^j + P_2(j)\lambda_2^j + \cdots + P_k(j)\lambda_k^j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

je rješenje diferencijske jednadžbe. Obratno, svako rješenje diferencijske jednadžbe može se jedinstveno prikazati u ovom obliku.

Polinomi, odnosno njihovi koeficijenti se određuju iz r početnih uvjeta.

Asimptotski, u_j se ponaša kao po apsolutnoj vrijednosti najveć svojstvena vrijednost (recimo λ_1).

Recimo da je $\tau_i^{(0)} = \tau_i$ pogreška nastala u i-tom koraku.
Nakon n koraka

$$\tau_i^{(n)} \propto n^{\sigma_1 - 1} \lambda_1^n.$$

Ukoliko je $|\lambda_1| > 1$ ili $|\lambda_1| = 1$ i $\sigma_1 > 1$ tada

$$\lim_{n \to \infty} \left| \tau_i^{(n)} \right| = \infty.$$

Znači, da bi širenje pogreške bilo ograničeno, treba vrijediti $|\lambda_i| \leq 1$ i ako je $|\lambda_i| = 1$ tada to treba biti jednostruka nultočka.

Ako linearna višekoračna metoda zadovoljava ovo svojstvo, kažemo da zadovoljava uvjet korjena.

Definicija (** Uvjet korjena)

Za višekoračnu metodu kažemo da je **stabilna** ako nultočke z_j polinoma $\rho(z)$ zadovoljavaju

1. Sve nultočke su po apsolutnoj vrijednosti manje od 1 ($|z_j| \leq 1$).
2. Ako je $|z_j| = 1$ tada je z_j jednostruka nultočka ($\rho'(z_j) \neq 0$).

Zajedno uvjete 1 i 2 zovemo uvjet stabilnosti.

Za metodu iz uvodnog primjera je

$$\rho(z) = z^2 + 4z - 5.$$

Nultočke su mu $z_1 = 1$ i $z_2 = -5$.

Budući da je $|z_2| > 1$, ρ ne zadovoljava uvjet stabilnosti, tj. metoda nije stabilna.

Teorem

Definicije (*) i (**) su ekvivalentne.

Provjerabvanje stabilnosti višekoračne metode je jednostavnije preko definicije (**) (uvjeta korjena).

Za r-koračnu Adams-Bashfortovu metodu a i za Adams-Moultonovu je

$$\rho(z) = z^r - z^{r-1}.$$

Jedna jednostruka nultočka je 1 a 0 je $(r-1)$-struka nultočka.

Obje metode su stabilne.

Stabilnost BDF metoda je složeniji problem.

r koračna BDF metoda je stabilna za $r = 1, 2, \ldots, 6$.

Vidjeli smo da r-koračna metoda može postići red konzistetnosti $2r$.

Na primjeru smo vidjeli da za $r = 2$ takva metoda nije stabilna.

Koliki red može postići stabilna metoda?

Djelomičan odgovor nam može dati teorem o funkciji $\rho(z)/\ln z - \sigma(z)$.

Neka je polinom $\rho(z)$ zadan (tj. zadani su koeficijenti α_j).

Razvijmo $\rho(z)/\ln z$ u red oko $z = 0$:

$$\frac{\rho(z)}{\ln z} = c_0 + c_1(z-1) + \cdots + c_r(z-1)^r + \cdots$$

Ako izaberemo

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= c_0 + c_1(z-1) + \cdots + c_r(z-1)^r = \\ &= \beta_r + \beta_{r-1}z + \cdots + \beta_0 z^r \end{aligned}$$

dobit ćemo implicitnu metodu reda barem $r + 1$.

Ako pak izaberemo

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= c_0 + c_1(z-1) + \cdots + c_{r-1}(z-1)^{r-1} = \\ &= \beta_{r-1} + \beta r - 2z + \beta_0 z^{r-1} + 0 \cdot z^r\end{aligned}$$

dobit ćemo eksplicitnu metodu reda barem r.

Točna granica na red stabilne metode je:

Teorem (Prva Dahlquistova barijera)

Red p stabilne linearne r-koračne metode zadovoljava

- $p \leq r + 2$ *ako je* k *paran;*
- $p \leq r + 1$ *ako je* k *neparan;*
- $p \leq r$ *ako je* $\beta_0/\alpha_0 \leq 0$ *(ovo uključuje eksplicitne metode -* $\beta_0 = 0$ *)*

Konvergencija višekoračnih metoda

Kao i kod jednokoračnih metoda, kada govorimo o konvergenciji metode mislimo na ponašanje globalne pogreške diskretizacije:

$$e(x; h) = y_n - y(x),$$

gdje je $x \in \langle a, b \rangle$, $h = h_n = (x - a)/n$.

Jasno je da globalna pogreška diskretizacije ovisi o lokalnoj pogrešci diskretizacije.

Međutim, to nije jedini izvor pogreške.

- Da bismo startali r-koračnu metodu, prvo je potrebno izračunati r početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$.
- Dok y_0 možemo odrediti iz početnog uvjeta diferencijalne jednadžbe, ostale vrijednosti moramo odrediti nekom drugom, najčešće jednokoračnom, metodom.

- U svakom slučaju, pri njihovom određivanju javit će se određena pogreška ε_i.

$$y(x_i) = y_i + \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

- Ova pogreška ne ovisi o promatranoj višekoračnoj metodi, već o načinu na koji određujemo početne vrijednosti.
- Očito je, da ako želimo da globalna pogreška diskretizacije teži nuli kada $n \to \infty$, pogreške početnih vrijednosti trebaju zadovoljavati

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Sada možemo izreći definiciju konvergencije višekoračne metode.

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo konvergentnom ako je

$$\lim_{n\to\infty} e(x;h_n) = 0, \quad h_n = \frac{x-a}{n}, \quad n = 1,2,\ldots$$

za sve $x \in [a,b]$, sve $f \in F_1(a,b)$ i sve y_i, $i = 0,\ldots,r-1$ za koje je

$$\lim_{n\to\infty} (y(x_i) - y_i) = 0, \quad i = 0,\ldots,r-1.$$

Pokažimo sada vezu između stabilnosti i konzistentnosti te konvergencije linearne višekoračne metode.

Glavni teorem koji povezuje konzistenciju, stabilnost i konvergenciju linearnih višekoračnih metoda je:

Teorem

Linearna višekoračna metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna i stabilna.

Teorem se često iskazuje i kao

$$\text{konvergencija} = \text{konzistencija} + \text{stabilnost}$$

Isti teorem zapravo vrijedi i za jednokoračne metode. Kod njih stabilnost nije naglašena jer proizlazi iz konzistencije.

Teorem se dokazuje preko tri zasebna teorema.

Teorem

Stabilne i konzistentne linearne višekoračne metode su konvergentne.

Dokaz. Neka je y egzaktno rješenje jednadžbe

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad f \in F_1(a,b).$$

Fiksirajmo $x \in [a,b]$ i za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $h = h_n = (x - x_0)/n$.

y_i - aproksimacija dobivena linearnom višekoračnom metodom:

$$y_i + \alpha_1 y_{i-1} + \cdots + \alpha_r y_{i-r} \quad = \quad h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \cdots + \beta_r f_{i-r}),$$

$i = r, r+1, \ldots,$ uz

$$y_i = y(x_i) + \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, r-1,$$

gdje je $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_i = 0$.

Uvjet $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_i = 0$ znači da postoji funkcija $\varepsilon(h)$ takva da je $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon(h)$ za $i = 0, \ldots, r-1$ i $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Zbog konzistentnosti metode, lokalna pogreška diskretizacije kada računamo točku x_i

$$\tau(x_i; h) = \tau_i = \frac{1}{h}\left[y(x_i) + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y(x_{i-j})\right] - \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i-j}, y(x_{i-j}))$$

zadovoljava

$$\lim_{h\to 0} \tau_i = 0,$$

tj. τ_i možemo omeđiti nekom funkcijom $t(h)$, $|\tau_i| \leq t(h)$, koja zadovoljava $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 0$.

Oduzimanjem jednakosti za lokalnu pogrešku diskretizacije pomnožene s h od rekurzije metode dobivamo rekurziju za pogreške $e_i = y_i - y(x_i)$:

$$e_i + \alpha_1 e_{i-1} + \cdots + \alpha_r e_{i-r} = c_i, \quad i = r, r+1, \ldots$$

uz

$$e_i = \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, r-1$$

$$c_i = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j [f(x_{i-j}, y_{i-j}) - f(x_{i-j}, y(x_{i-j}))] - h\tau_i.$$

Budući da je $f \in F_1(a, b)$, postoji konstanta $m > 0$ takva da je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq m \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{i} \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

te vrijedi

$$|f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, \eta)(y_k - y(x_k))\right| \leq m|e_k|.$$

Iskoristivši ovu nejednakost, dobivamo da c_i zadovoljava

$$|c_i| \leq hM \sum_{j=0}^{r} |e_{i-j}| + |h|t(h),$$

gdje je

$$M = m \max_{j=0,\ldots,r} |\beta_j|.$$

Pomoću vektora

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} e_{i-r+1} \\ e_{i-r+2} \\ \vdots \\ e_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r,$$

i matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_r & \dots & \dots & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

rekurziju za pogreške možemo zapisati u ekvivalentnom vektorskom zapisu

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_{i-1} + c_i\mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \varepsilon_{r-1} \end{bmatrix}.$$

- Uočimo da polinom ρ, definiran višekoračnom metodom, je ujedno i svojstveni polinom matrice $\mathbf{A}$ (matrica pratilac polinoma ρ).
- Stabilnost metode povlači da su sve nultočke od ρ, tj. svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A}$, po apsolutnoj vrijednosti manje od 1, a ako su jednake 1 tada su jednostruke.
- To znači da postoji vektorska norma $\| \ \|$ na $\mathbb{C}^r$ takva da za induciranu matričnu normu vrijedi $\|\mathbf{A}\| \leq 1$.

- Budući da su sve norme na $\mathbb{C}^r$ ekvivalentne, postoji konstanta $k > 0$ takva da je

$$\frac{1}{k}\|\mathbf{e}_i\| \leq \sum_{j=0}^{r-1} |e_{i-j}| = \|\mathbf{e}_i\|_1 \leq k\|\mathbf{e}_i\|.$$

Podsjetnik. Za sve A i sve $\varepsilon > 0$ postoji operatorska norma $\| \ \|_*$ takva da je

$$\|A\|_* \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Norma $\| \ \|_*$ ovisi i o A, i o ε.

Ako svaka svojstvena vrijednost λ od A takva da je $|\lambda| = \rho(A)$ ima geometrijsku kratnost 1, tada postoji takva norma za koju je

$$\|A\|_* = \rho(A).$$

Uočivši da je

$$|e_{i-r}| \leq \sum_{i=1}^{r} |e_{i-j}| \leq k\|\mathbf{e}_{i-1}\|$$

iz nejednakosti za $|c_i|$ slijedi

$$|c_i| \leq |h|Mk(\|\mathbf{e}_i\| + \|\mathbf{e}_{i-1}\|) + |h|t(h).$$

Iskoristivši vektorski zapis rekurzije za pogrešku i činjenice da je

$$\|\mathbf{b}\| \leq k\|\mathbf{b}\|_1 = k,$$

slijedi da je

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq |h|Mk^2\|\mathbf{e}_i\| + (1 + |h|Mk^2)\|\mathbf{e}_{i-1}\| + k|h|t(h), \quad j = 0, 1, \ldots$$

odnosno

$$(1 - |h|Mk^2)\|\mathbf{e}_i\| \leq (1 + |h|Mk^2)\|\mathbf{e}_{i-1}\| + k|h|t(h), \quad j = 0, 1, \ldots$$

i

$$\|\mathbf{e}_0\| \leq k\|\mathbf{e}_0\|_1 \leq kr\varepsilon(h).$$

Za

$$|h| \leq \frac{1}{2Mk^2}$$

je

$$1 - |h|Mk^2 \geq \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{1 + |h|Mk^2}{1 - |h|Mk^2} \leq 1 + 4|h|Mk^2.$$

Sada prethodna nejednakost za $\|\mathbf{e}_i\|$ prelazi u

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq (1 + 4|h|Mk^2)\|\mathbf{e}_{i-1}\| + 2k|h|t(h), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Iz leme koja prethodi teoremu o konvergenciji jednokoračne metode slijedi

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq e^{4n|h|Mk^2} kr\varepsilon(h) + t(h)\frac{e^{4n|h|Mk^2} - 1}{2Mk},$$

tj. za $x \neq x_0$, $h = h_n = (x - x_0)/n$, $|h_n| \leq 1/(2Mk^2)$ vrijedi

$$\|\mathbf{e}_n\| \leq e^{4Mk^2|x-x_0|} kr\varepsilon(h_n) + t(h_n)\frac{e^{4Mk^2|x-x_0|} - 1}{2Mk}.$$

Dakle, postoje konstante C_1 i C_2, nezavisne o h, takve da je

$$|e(x;h)| = |e_n| = |y_n - y(x_n)| \leq C_1\varepsilon(h_n) + C_2 t(h_n)$$

za dovoljno veliki n.

Konvergencija metode sada slijedi iz činjenice da je

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(h_n) = \lim_{n\to\infty} \tau(h_n) = 0.$$

Iz zadnje ocjene u dokazu prethodnog torema dobivamo sljedeći korolar.

Korolar

Neka je linearna višekoračna metoda stabilna i konzistentna reda p, te $f \in F_p(a, b)$. Tada globalna pogreška diskretizacije zadovoljava

$$e(x; h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$$

za sve $h_n = (x - x_0)/n$ čim pogreške ε_i zadovoljavaju

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon(h_n), \quad i = 0, \ldots, r - 1$$

uz $\varepsilon(h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$ za $n \to \infty$.

Ovaj korolar ujedno kazuje koju metodu moramo izabrati za određivanje početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$.

- Da bismo postigli da se pogreška ponaša kao $\mathcal{O}(h^p)$, tako se mora ponašati i pogreška početnih vrijednosti.
- Ukoliko za njihovo određivanje koristimo jednokoračnu metodu reda $\tilde{p}$, iz teorema o konvergenciji jednokoračnih metoda slijedi da je pogreška u jednom koraki

$$|e(x_i; h)| \leq C\,|h|^{\tilde{p}+1}$$

- To znači da za početne vrijednosti možemo odrediti metodom reda $\tilde{p} = p - 1$ da bi se pogreška višekoračne metode ponašala kao $\mathcal{O}(h^p)$.

Sljedeća dva teorema govore o svojstvima konvergentnih višekoračnih metoda.

Teorem

Konvergentne linearne višekoračne metode su stabilne.

Dokaz. Promatrajmo diferencijalnu jednadžbu

$$y' = 0, \quad y(a) = 0$$

s egzaktnim rješenjem $y = 0$.

Za fiksirani $x \in [a, b]$ neka je y_n aproksimacija za $y(x)$ uz $h = (x - a)/n$, $n = 1, 2, \ldots$, te neka su zadane početne vrijednosti

$$y_i = \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, r - 1.$$

Budući da je metoda konvergentna, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

ako je zadovoljeno

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_i = 0 \quad i = 0, \ldots, r-1. \tag{1}$$

Izaberimo sada

$$\varepsilon_i = hu_i \quad i = 0, \ldots, r-1,$$

za neke fiksne konstante $u_0, \ldots, u_{r-1}$.

Uz ovakav izbor ε_i zadovoljili smo uvjet (1).

Sada definirajmo niz y_i rekurzivnom formulom

$$y_{j+r} + \alpha_1 y_{j+r-1} + \cdots + \alpha_r y_j = 0$$

uz početne vrijednosti

$$y_i = \varepsilon_i \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Sada vrijedi $y_i = hu_i$, gdje je niz u_i dobiven rekurzijom

$$u_{j+r} + \alpha_1 u_{j+r-1} + \cdots + \alpha_r u_j = 0.$$

Budući da je metoda konvergentna, vrijedi

$$0 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (hu_n) = (x-a) \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n}.$$

Uočimo da je izbor početnih vrijednosti $u_0, \ldots, u_{r-1}$ proizvoljan.

Ukoliko postoji nultočka λ polinoma ρ takva da je $|\lambda| > 1$, izaberemo $u_0, \ldots, u_{r-1}$ tako da vrijedi $u_j = \lambda^j$, $j = 0, \ldots, r'1$.

Lako se vidi da vrijedi $u_n = \lambda^n$ i za svaki $n \geq r$.

No, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\lambda^n|}{n} = +\infty,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

Dakle, vrijedi $|\lambda| \leq 1$.

Ukoliko postoji **višestruka** nultočka λ polinoma ρ takva da je $|\lambda| = 1$, izaberemo $u_0, \ldots, u_{r-1}$ tako da vrijedi $u_j = j \cdot \lambda^j$, $j = 0, \ldots, r'1$.

Lako se vidi da vrijedi $u_n = n \cdot \lambda^n$ i za svaki $n \geq r$. No, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n \cdot \lambda^n|}{n} = 1$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$$

$\Rightarrow \lambda$ je jednostruka nultočka.

$\square$

Teorem

Konvergentne linearne višekoračne metode su konzistentne.

Dokaz. Promatrajmo inicijalni problem

$$y' = 0, \quad y(0) = 1$$

s egzaktnim rješenjem $y(x) = 1$.

Za početne vrijednosti $y_i = 1$, $i = 0, \ldots, r-1$, metoda daje vrijednosti y_{j+r}, $j = 0, 1, \ldots$ gdje je

$$y_{j+r} + \alpha_{r-1} y_{j+r-1} + \cdots + \alpha_0 y_j = 0. \tag{2}$$

Stavivši $h = x/n$, zbog konvergencije metode vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y(x) = 1.$$

Sada direktno iz (2) za $j \to \infty$ slijedi

$$C_0 = 1 + \alpha_{r-1} + \ldots + \alpha_0 = 0.$$

Da bismo dokazali da je i $C_1 = 0$, iskoristit ćemo činjenicu da je metoda konvergentna i za inicijalni problem

$$y' = 1, \quad y(0) = 0,$$

s egzaktnim rješenjem $y(x) = x$.

Već smo vidjeli da je $C_0 = \rho(1) = 0$.

Zbog konvergentnosti metode, iz prethodnog teorema slijedi i njena stabilnost, pa je $\lambda = 1$ jednostruka nultočka od ρ, tj. $\rho'(1) \neq 0$.

Dakle, konstanta

$$K = \frac{\sigma(1)}{\rho'(1)}$$

je dobro definirana.

Uz početne uvjete

$$y_j = jhK \quad j = 0, \ldots, r-1,$$

za inicijalni problem $y' = 1$, $y(0) = 0$, uzevši u obzir da je $y(x_j) = x_j = jh$, imamo

$$y_j = y(x_j) + \varepsilon_j \quad \text{uz} \quad \varepsilon_j = jh(K-1), \quad j = 0, \ldots, r-1.$$

Očito je zadovoljeno

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_j = 0 \quad \text{za} \quad j = 0, \ldots, r-1.$$

Metoda, uz ove početne vrijednosti, daje niz y_j koji zadovoljava

$$y_{j+r} + \alpha_{r-1} y_{j+r-1} + \cdots + \alpha_0 y_j = h(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_r) = h\sigma(1).$$

Uvrštavanjem u gornju jednadžbu, uzevši u obzir da je $\rho(1) = 0$, lagano se može provjeriti da je

$$y_j = jhk \quad \text{za sve } j.$$

Fiksirajmo sada x i stavimo $h = x/n$.

Zbog konvergencije metode je

$$x = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (nhK) = \lim_{n\to\infty} (xK) = Kx.$$

Dakle, $K = 1$, odnosno $\rho'(1) = \sigma(1)$, te je $C_1 = \rho'(1) - \sigma(1) = 0$, što znači da je metoda konzistentna. □

Apsolutna stabilnost višekoračnih metoda

Apsolutnu stabilnost definiramo u istom smislu kao i za jednokoračne metode.

Definicija

Linearna višekoračna metoda je **A-stabilna** ukoliko primjenom na jednadžbu

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad \mathrm{Re}\lambda < 0.$$

dobiveni niz aproksimacija (y_i) zadovoljava

$$\lim_{i \to \infty} y_i = 0, \qquad \forall y_0.$$

Metoda mora rješavati (asimptotski) stabilne diferencijalne jednadžbe.

Ako višekoračnu metodu

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j}).$$

primjenimo na test problem

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \qquad \lambda < 0.$$

dobivamo da aproksimacije y_i generirane višekoračnom metodom zadovoljavaju linearnu homogenu diferencijsku jednadžbu

$$(1 - \beta_0 h\lambda) y_{i+1} + \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j - \beta_j h\lambda) y_{i+1-j} = 0.$$

Karakteristični polinom metode je u tom slučaju dan sa

$$\pi(z; h\lambda) = (1 - \beta_0 h\lambda) z^r + \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j - \beta_j h\lambda) z^{r-j} = \rho(z) - h\,\lambda\sigma(z).$$

Uvedimo oznaku $\mu = h\,\lambda$:

$$\pi(z; \mu) = (1 - \beta_0 \mu) z^r + \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j - \beta_j \mu) z^{r-j} = \rho(z) - \mu\sigma(z).$$

A-stabilnost je ekvivalentna s zahtjevom da nultočke karakterističnog polinoma $z_i = z_i(\mu)$ zadovoljavaju

$$|z_i(\mu)| < 1, \qquad i = 1, \ldots, r, \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, q\mathrm{Re}\mu < 0.$$

Vidjeli smo da postoje A-stabilne implicitne RK metode.

Višekoračne su problematičnije.

Teorem (Druga Dahlquistova barijera)

1. *Ne postoji A-stabilna eksplicitna višekoračna metoda.*
2. *A-stabilna višekoračna metoda je najviše reda 2.*
3. *A-stabilna višekoračna metoda reda 2 s najmanjom konstantom pogreške je implicitna trapezna metoda.*

Iskaz teorema je obeshrabrujući.

Jer metode nisu A-stabilne, potrebno je pogledati područje A-stabilnosti.

Područje apsolutne stabilnosti:

$$\{\mu \mid |z_i(\mu)| < 1,\ i = 1, \ldots, r\}.$$

Za određivanje područja apsolutne stabilnosti, okrenut ćemo problem.

Za koji μ je

$$\pi(z, \mu) = \rho(z) - \mu\sigma(z) = 0.$$

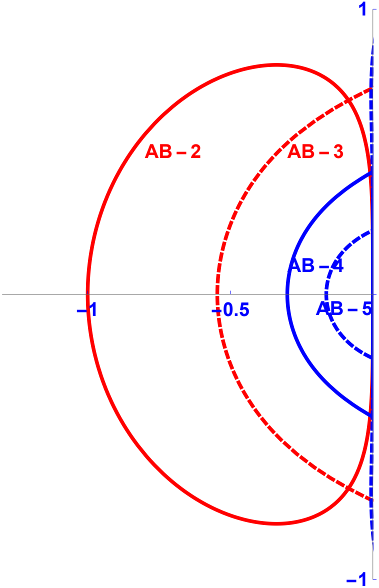
$$\mu = \frac{\rho(z)}{\sigma(z)}$$

Granica područja apsolutne stabilnosti je dana s $|z| = 1$.

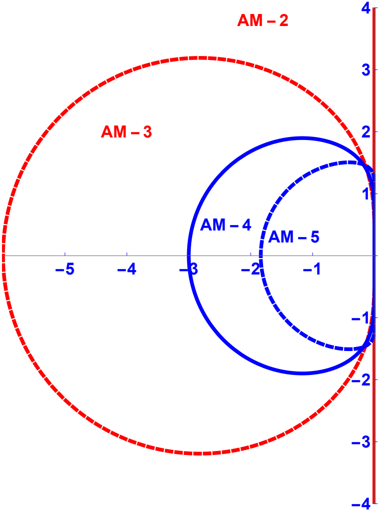
Parametrizacijom $z = e^{i\theta}$, ($i = \sqrt{-1}$), dobijemo parametrizaciju ruba područja apsolutne stabilnosti

$$\mu = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Područje apsolutne stabilnosti za Adams-Bashforthove metode

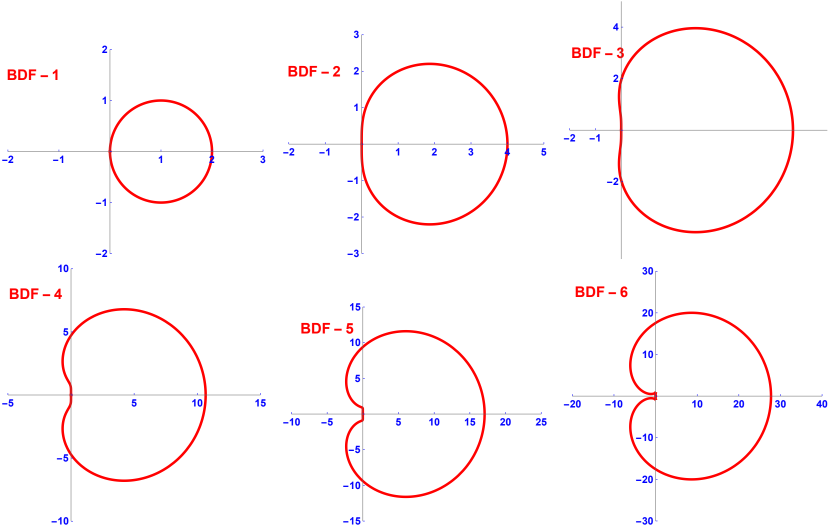


Područje apsolutne stabilnosti za Adams-Moultonove metode

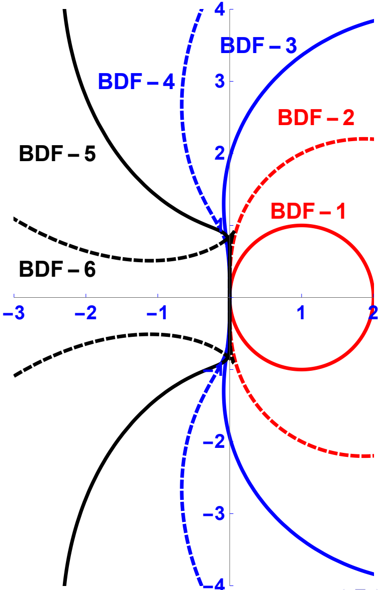


AM-2 je implicitna trapezna metoda (apsolutno stabilna).

Područje apsolutne stabilnosti za eksplicitne BDF metode



Područje apsolutne stabilnosti za eksplicitne BDF metode



Vidimo da BDF metode reda 3 do 6 iako nisu apsolutno stabilne, područje apsolutne stabilnosti sadrži negativni dio realne osi.

To je dobro svojstvo te se ove metode koriste za krute jednadžbe.

A-stabilnost je prejako svojstvo za linearne višekoračne metode pa se za njih koristi svojstvo A(α)-stabilnosti.

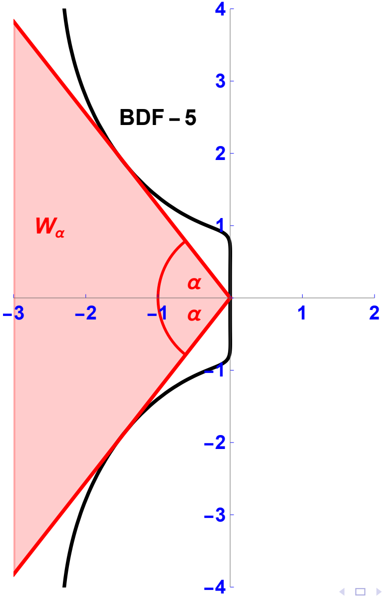
Definicija

Linearna višekoračna metoda je A(α)-stabilna, $0 < \alpha \leq \pi/2$ ukoliko je skup

$$W_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Arg}(-z)| < \alpha,\ z \neq 0\}, \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

sadržan u području apsolutne stabilnosti.

A(α)-stabilnost



α za implicitne BDF metode

k	1	2	3	4	5	6
α	90^o	90^o	86.03^o	73.35^o	51.84^o	17.84^o