

# Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 31. kolovoza 2021.

## Zadatak 1 (25 bodova)

a) (10 bodova) Odredite infimum i supremum skupa:

$$S = \left\{ (3 + (-1)^n) \frac{n^2}{n^2 + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

b) (10 bodova) Ispitajte je li niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dan s

$$a_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}}_{n \text{ korijena}}$$

konvergentan i, ako jest, odredite mu limes.

c) (5 bodova) Odredite skup gomilišta niza

$$a_n = \frac{8^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 11n^7 + 3^n}{3n^3 + 5^n + 10 \cdot 8^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

## Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 31. kolovoza 2021.

### Zadatak 2 (25 bodova)

- a) (7 bodova) Može li se funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s

$$f(x, y) = \frac{x^2(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

proširiti do neprekidne funkcije na  $\mathbb{R}^2$ ?

- b) (6 bodova) Može li se funkcija iz a) proširiti do diferencijabilne funkcije na  $\mathbb{R}^2$ ?
- c) (5 bodova) Zadan je skup

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 3\}.$$

Ispitajte povezanost i kompaktnost skupa  $A^c$ . Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje.

- d) (7 bodova) Neka je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dana s  $f(x, y) = (xy, 1 - xy^2)$ . Odredite sve točke  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  u kojima  $f$  ima lokalni inverz te izračunajte  $(f^{-1})'(f(x, y))$ .

## Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 31. kolovoza 2021.

### Zadatak 3 (25 bodova)

- a) (5 bodova) Neka su  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  odozdo ograničeni neprazni skupovi. Dokažite da je  $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$ .
- b) (12 bodova) Iskažite i dokažite Bolzano–Weierstrassov teorem za nizove u metričkim prostorima.
- c) (8 bodova) Je li komplement skupa cijelih brojeva otvoren/zatvoren/kompaktan u  $\mathbb{R}$ ? Svoje tvrdnje obrazložite.

## Osnove matematičke analize

Popravni kolokvij - 31. kolovoza 2021.

### Zadatak 4 (25 bodova)

- (a) (8 bodova) Neka su  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funkcije zadane s

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 z_n, \quad \varphi(t) = x + t(y - x).$$

Odredite  $(f \circ \varphi)^{(2)}(t)$ .

- (b) (10 bodova) Neka su  $(X, d)$  i  $(Y, \rho)$  metrički prostori,  $f : X \rightarrow Y$  neprekidna funkcija i  $P \subset X$  putevima povezan skup u  $X$ . Dokažite da je tada  $f(P)$  putevima povezan skup u  $Y$ .

- (c) (7 bodova) Neka je  $f : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija zadana s

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y \leq \frac{1}{2} \\ 1, & y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Je li funkcija  $f$  Riemann integrabilna na  $[-1, 1] \times [0, 1]$ ? Obrazložite odgovor koristeći definiciju Riemannovog integrala.