Matematika 1 za kemičare

Orijentacijski kolokvij, ak.g. 2014./15.

Ime i prezime:____

Napomene i upute. Predaja orijentacijskog kolokvija nije obvezna. Rješenja zadataka obavezno napišite u predviđena polja. Predviđeno vrijeme rješavanja iznosi 40 minuta. Bodovi koje nose zadaci navedeni su u zagradama ispred svakog zadatka. Bodovi stečeni na orijentacijskom kolokviju mogu se koristiti u slučaju nedostatka bodova za prolaz pismenog dijela ispita putem kolokvija, uz uvjet da je stečeno bar 70 bodova na kolokvijima i bar 10 bodova na zadaćama. Studentu za koga se utvrdi sudjelovanje u prepisivanju svi bodovi ispravljenog testa pripisuju se s negativnim predznakom.

1. (15) Gdje su greške u sljedećim „izračunima" (napomena: u svim slučajevima početni korak, odnosno formula po kojoj se nešto izračunava je točna!)?

(a) Iznos glavnice od 10000 kuna uložene na 15 godina uz mjesečno obračunavanje kamate od 6,5 % je $10000\cdot(1+0{,}065/12)^{12\cdot 15} = 10000\cdot(1+0{,}0054)^{180} = 10000\cdot 1{,}0054^{180} = 10000\cdot 2{,}6363 =$ 26363 kuna (a točan iznos bio bi malo iznad 26442 kune).

(b) Veza između Kartezijevih (x, y) i polarnih (r, ϕ) koordinata dana je formulama $r^2 = x^2 + y^2$ i $\operatorname{tg}\phi = y/x$. Stoga točka koja u Kartezijevom koordinatnom sustavu ima koordinate $(-4, 3)$ ima polarne koordinate $r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ i $\phi = \operatorname{arctg}(-4/3) = -\operatorname{arctg}(4/3) \approx -53{,}13°$ (a točno bi bilo $r = 5$ i $126{,}87°$).

(c) Iz $\theta = 20(1 - e^{-kt}) + 100e^{kt}$ logaritmiranjem po bazi e slijedi

$$\ln\theta = \ln 20 + \ln(1 - e^{-kt}) + \ln 100 + \ln e^{kt} = \ln 2000 + \ln(e^{kt} - 1)$$

pa je za $t = 0$ iznos $\ln\theta = \ln 2000 + \ln(1 - 1) = \ln 2000$, odnosno $\theta = 2000$ (a točna vrijednost je 120).

(d) Iz $2 < 3$ i $\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{2}$ slijedi da je $2\log\frac{1}{2} < 3\log\frac{1}{2}$. To je pak isto što i $\log\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log\left(\frac{1}{2}\right)^3$ te je $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$ odnosno $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$, dakle $8 < 4$.

(e) $a = b \,/\cdot a \quad \Rightarrow \quad a^2 = ab \,/ - b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad \Rightarrow (a-b)(a+b) = b(a-b) \,/ : (a-b) \quad \Rightarrow$ $a + b = b$ /iz početne tvrdnje $\Rightarrow$ $b + b = b$ $\Rightarrow 2b = b$ $/ : b$ $\Rightarrow$ $2 = 1$.

2. (5) Veliki francuski matematičari Jeani D'Alembert (18. st.) zaključio je ovako: Ako bacamo pošteni novčić, vjerojatnost da u dva bacanja padne bar jedna glava je 2/3 jer imamo sljedeće slučajeve: već u prvom bacanju padne glava; u prvom padne pismo, a u drugom glava; u oba bacanja padne pismo. Gdje je d'Alembert-ova greška?

3. (5) Gdje je greška u argumentu da beskonačna suma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ iznosi $1/2$: Označimo li $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ imamo:

$S - 1 = (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots) - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = -(1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = -S$,

dakle je $2S - 1 = 0$, odnosno $S = 1/2$.

4. (5) Neka je a masa slona (u kg), x masa komarca (u kg) i y njihova ukupna masa. Imamo redom: $a + x = y$, dakle $a = y - x$ odnosno $a - y = -x$. Pomnožimo li zadnje dvije jednakosti dobijemo $a^2 - ay = x^2 - xy$. Pribrojimo li $\left(\frac{y}{2}\right)^2$ objema stranama dobivamo

$$a^2 - ay + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 - xy + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

što se može zapisati kao

$$\left(a - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2,$$

odakle slijedi $a - \frac{y}{2} = x - \frac{y}{2}$ i konačno $a = x$, dakle slon i komarac imaju jednaku masu. Gdje je greška?

5. (5) Dan je zadatak: „Ako prodaješ jednu bocu nekog vina za 20 florina, na 100 prodanih boca zaradit ćeš 30 Fl. Koliko ćeš dakle zaraditi prodavši ih 600 po 24 Fl. svaku?”

   Vladek ga je riješio ovako: 100 boca po 20 florina je prodano za 2000 florina. Zarada je 30 florina, odnosno $30/2000 = 1{,}5\ \%$. Ako se proda 600 boca po 24 florina, dobije se 14400 florina, pa je zarada $1{,}5\% \cdot 14400 = 216$ florina.

   Zašto Vladeku rješenje zadatka nije priznato?

6. (5) Mirek je došao na sljedeću ideju izračunavanja vrijednosti broja π: Uzmemo dužinu duljine 2 i nad njom redom crtamo valovite linije sastavljene od polukružnica. U prvom koraku dužinu podijelimo na dva jednaka dijela nad kojima nacrtamo polukružnice. Dalje su u svakom koraku promjeri polukružnica upola manji nego u prethodnom. Sad je Mirek zaključio ovako: Ukupna duljina svakog vala jednaka π, a očigledno se svakim korakom val sve više približava dužini koja je duljine 2, dakle je $\pi = 2$. Gdje je Mirekova greška?