Povijest matematike

pismeni ispit 9. 9. 2025. ©FMB

Ime i prezime

---

e-mail adresa na koju želite primiti rezultat

Napomene. Dozvoljena pomagala su pribor za pisanje i crtanje, 1–2 prazna prazna lista papira i kalkulator (bilo obični bilo grafički). Sve odgovore i rješenja izuzev zadnjeg zadatka unosite isključivo na ovaj primjerak ispita. U slučaju utvrđenog prepisivanja na nekom zadatku, ostvareni bodovi pripisuju se s negativnim predznakom.

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Na pojedinom zadatku ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda.

- Koje od sljedećih brojki starih naroda predstavljaju isti broj kao moderna brojka 11111?

  ☐ 𓂭𓆼𓍢𓎆𓏺 ☑ $\overset{\alpha}{\mathrm{M}},\alpha\rho\iota\alpha'$ ☑ —|—|— ☑ 𒐗 𒐙 𒌋𒁹

- Koji od sljedećih Platonovih dijaloga sadrže i matematičke teme?

  ☐ Hiparh ☐ Protagora ☑ Teetet ☑ Timej

- U kojoj knjizi Euklidovih *Elemenata* nalazimo dokaz da se krugovi odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima?

  ☐ III. ☐ VI. ☐ XI. ☑ XII.

- Koji od sljedećih indijskih matematičara su se bavili Pellovom jednadžbom?

  ☐ Aryabatha I. ☑ Bhaskara II. ☑ Brahmagupta ☐ Mahavira

- Čime se sve bavio al-Batani?

  ☐ algebrom ☑ astronomijom ☐ optikom ☑ trigonometrijom

- François Viète je ...

  ☑ uveo izraz koeficijent. ☐ prvi tvrdio da vrijedi osnovni teorem algebre.

  ☑ nepoznanice označavao samoglasnicima. ☑ bio stariji od Keplera.

- Koje godine je objavljena Descartesova *La Géométrie*?

  ☐ 1609. ☑ 1637. ☐ 1673. ☐ 1690.

- Koji od sljedećih matematičara su razvijali diferencijalni i infinitezimalni račun kao račun fluksija?

  ☐ I. Barrow ∞. ☑ C. MacLaurin ☑ B. Taylor ☐ J. Wallis

- Koje od sljedećih rezultata je prvi u povijesti potpuno dokazao Gauß?

  ☑ osnovni teorem algebre ☑ osnovni teorem aritmetike

  ☑ zakon kvadratnog reciprociteta ☐ centralni granični teorem

- Koji od sljedećih skupova su prebrojivi?

  ☑ $\mathbb{Z}$ ☑ skup svih algebarskih brojeva ☐ $\mathbb{C}$ ☐ jedinični kvadrat

2. (10) U sljedećim pitanjima točno jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Svaka oznaka točnog odgovora nosi +1 bod, svaka kriva oznaka −1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

- Jesu li stari Babilonci π povremeno aproksimirali s $3\,\frac{1}{8}$?

  ☐ Da. ☑ Ne.

- Prvo razmatranje problema kvadrature kruga pripisuje se ...

  ☑ Anaksagori iz Klazomena ☐ Antifonu Atenskom

- Koji je Eudoksov naziv za razmjer?

  ☑ *analogía* ☐ *proportio*

- Dijagonala jediničnog kvadrata je u Euklidovom smislu primjer ...

  ☑ racionalne duljine. ☐ iracionalne duljine.

- Tko je prvi analizirao stereografsku projekciju?

  ☐ Hipasus iz Metaponta ☑ Hiparh iz Niceje

- Što su ranije osmislili starokineski matematičari?

  ☑ Gaußovu metodu eliminacija ☐ Hornerov algoritam

- Koja je nultočka Napierovog logaritma?

  ☑ 10^7 ☐ 10^{-7}

- Tko je uveo simbol $\int$?

  ☑ Gottfried Wilhelm Leibniz ☐ Johann Bernoulli

- Tko je derivaciju definirao kao koeficijent uz prvi član Taylorovog reda funkcije?

  ☐ Jean le Rond d'Alembert ☑ Joseph-Louis Lagrange

- Tko je bio poznat po gubljenju radova drugih matematičara i prisvajanju njihovih rezultata?

  ☑ Augustin Louis Cauchy ☐ Pierre-Simon Laplace

3. (5) Spojite znamenite povijesne tekstove iz vjerojatnosti s autorima. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva −1, a svaka nedostajuća 0 bodova

Ars conjectandi – Jacob Bernoulli
De ratiociniis in ludo aleae – Christiaan Huygens
Liber de Ludo Aleae – Girolamo Cardano
The Doctrine of Chances –Abraham de Moivre
Théorie Analytique des Probabilités – Pierre-Simon Laplace

4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice (ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena):

- Pitagorejska teorijska aritmetika je ono što danas nazivamo *teorijom brojeva*.
- Hipokratovi mjeseci su *likovi omeđeni dvjema kružnicama različitih središta i polumjera koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom*.
- Eratostenov mezolabij je mehanizam za *duplikaciju kocke*.
- Definicija broja nula potječe od *Brahmagupte*.
- Autor *Propositiones ad acuendos iuvenes* je, najverojatnije, bio *Alkuin iz Yorka*.
- Keplerova hipoteza tiče se *gustog pakiranja jednakih kugli*.
- Utemeljiteljem teorije redova potencija smatra se *Nicolaus Mercator*.
- Tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti uveo je *Daniel Bernoulli*.
- Niels Henrik Abel je prvi dokazao nepostojanje *rješenja u radikalima za opću jednadžbu* 5. *stupnja*.
- Cantorov osnovni teorem teorije skupova glasi: *Svaki skup ima manje elemenata od svog partitivnog skupa*.

5. (10) Iskažite i dokažite Fibonaccijev teorem o egipatskim razlomcima i zapišite $\frac{10}{17}$ na egipatski način.
Teorem. Svaki pozitivan razlomak posjeduje egipatski zapis.
Dokaz. Ako je promatrani razlomak veći od 1*, očito se može zapisati u obliku* $m + r$*, gdje je* $m \in \mathbb{N}$ *i* $0 < r < 1$*, dakle je tvrdnju dovoljno dokazati za razlomke između* 0 *i* 1*. Neka je dakle* $r_0 \in \langle 0, 1\rangle \cap \mathbb{Q}$ *i* $n_0 \in \mathbb{N}$ *najmanji prirodan broj takav da je* $\frac{1}{n_0} < r_0$*. Tada je po Sylvesterovoj lemi* $r_1 = r_0 - \frac{1}{n_0}$ *razlomak koji ima manji brojnik od* r_0*. Ako je brojnik od* r_1 *jednak* 1*, onda je* $r_0 = \frac{1}{n_0} + r_1$ *traženi egipatski zapis. U suprotnom nastavljamo induktivno:* $r_{i+1} = r_i - \frac{1}{n_i}$ *gdje je* n_i *najmanji prirodan broj takav da je* $\frac{1}{n_i} < r_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$*. U svakom koraku se tako po Sylvesterovoj lemi smanjuje brojnik, a budući da je skup* $\mathbb{N}$ *dobro uređen, niz brojnika koje tako dobivamo mora biti konačan, dakle i postupak staje u konačno mnogo koraka.*

$$\frac{10}{17} - \frac{1}{2} = \frac{3}{34}; \quad \frac{3}{34} - \frac{1}{12} = \frac{1}{204} \Rightarrow \frac{10}{17} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{204}$$

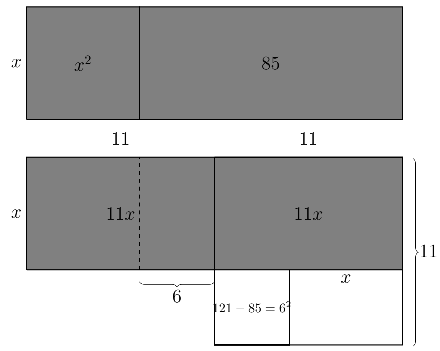
6. (10) Na Al-Hvarizmijev način riješite i dokažite ispravnost rješenja jednadžbe ,,Dva *mala* i 170 dirhama čine 44 *šaja*".

Prvo se jednadžba normira:

$$2x^2 + 170 = 44x \Rightarrow x^2 + 85 = 22x$$

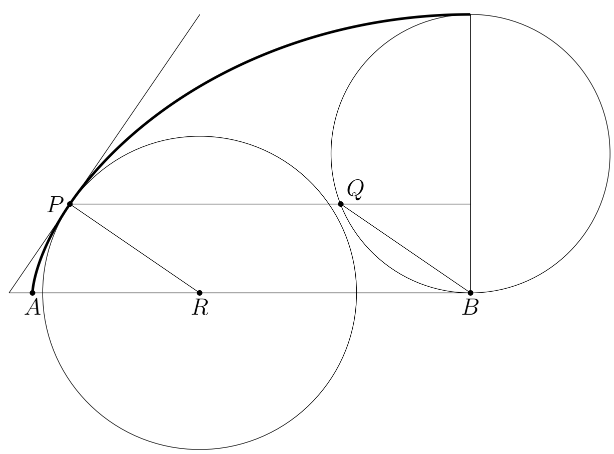
Sad se računa redom: $\frac{22}{2} = 11$, $11^2 = 121$, $121 - 85 = 36$, $\sqrt{36} = 6$, pa su rješenja $11 - 6 = 5$ i $11 + 6 = 178$.

Dokaz točnosti rješenja 5 (analogno i rješenja 17) slijedi iz EEII5, prema kojoj je $x \cdot (11 + 6) = (11 - 6) \cdot (11 + 6) = 11^2 - 6^2 = 85$:



7. (10) Na slici se nalazi jedna cikloida s istaknutom točkom T. Definirajte cikloidu i na Descartesov način konstruirajte njezinu tangentu u točci T.

Cikloida je ravninska krivulja koja nastaje kao trajektorija točke na kružnici, ako se ta kružnica kotrlja po pravcu.



Neka kružnica koja generira cikloiduu točki B dodiruje pravac po kojem se kotrlja kad se nalazi u položaju $(*)$ u kojem bi označena točka bila na najvišem položaju (a A je polazna pozicija točke na toj kružnici, dakle je AB pravac po kojem se kotrlja kružnica). Kroz P povučemo paralelu s AB i odredimo njezino sjecište Q s kružnicom u položaju $(*)$. Tada je paralela s QB povučena u P normala na cikloidu u točki P, njeno sjecište R s AB je središte oskulacijske kružnice, a okomica na PR u P je naravno tražena tangenta.

8. (25) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu: ,,Otkriće neeuklidskih geometrija“.

Glavne natuknice:

- problem Euklidovog petog postulata
- sferna geometrija u staroj Grčkoj i njena nekontradiktornost s izvornim postulatom
- pokušaji dokaza do sredine 18. st. i njihova zajednička greška pretpostavljanja tom postulatu ekvivalentne tvrdnje kao očite te primjeri takvih ekvivalentnih tvrdnji

- Saccheri, Lambert: prva pojava hiperboličkih geometrija u sklopu pokušaja dokaza svođenjem na kontradikciju, ali opet ista greška
- Klügel, Bošković: prve izjave da se možda stvarno radi o aksiomu
- Gauß, J. Bolyai, Lobačevski: prvi dopustili i opisali geometriju u kojoj vrijedi negacija Euklidovog petog postulata, ali nisu dokazali da postoji
- Beltrami: modelom na pseudosferi izjednačio konzistentnost euklidske i neeuklidske geometrije
- Riemann, Klein, Hilbert: aprtraktizacija i klasifikacija geometrija, nova aksiomatizacija