

Povijest matematike

riješen pismeni ispit od 27. 8. 2025. ©FMB

1. (10) U svakom od sljedećih 10 pitanja 0–4 ponuđena odgovora su točna. Označite točne odgovore. Na pojedinom zadatku ostvarujete 1 bod samo ako ste označili sve točne odgovore i nijedan krivi. Ako je samo jedna (ne)oznaka kriva, ostvarujete $\frac{1}{2}$ boda, ako su točno dvije (ne)oznake krive, ostvarujete 0 bodova, a inače ostvarujete $-\frac{1}{4}$ boda.

- Koje od navedenih brojevnih sustava su imali primarnu i sekundarnu bazu?
☐ staroegipatski ☒ klasični babilonski ☒ akrofonski (atički) ☐ grčki alfabetski
- S problemom kvadrature kruga bavio se (bavili su se) ...
☒ Anaksagora iz Klazomene ☒ Antifont ☐ Arhita iz Tarenta ☐ Aristarh sa Samosa
- U kojoj knjizi Euklidovih *Elemenata* nalazimo dokaz da prostih brojeva ima beskonačno mnogo?
☐ VIII. ☒ IX. ☐ X. ☐ XI.
- Koji od sljedećih matematičara su živjeli i umrli prije 1000. godine?
☒ Brahmagupta ☐ Bhaskara II. ☒ Al-Batani ☒ Boethius
- Tko je od navedenih matematičara pokušao dokazati da je Euklidov 5. postulat zapravo teorem?
☒ Al-Hajtam ☐ Al-Hadž ☐ Al-Halali ☐ Al-Hajhaj
- Koji od sljedećih renesansnih matematičara su bili i liječnici?
☒ G. Cardano ☐ N. Chuquet ☐ A. Dürer ☒ R. Recorde
- Koji od sljedećih tekstova su Fermatovi?
☐ *Ars Conjectandi* ☐ *On tangents of curves*
☐ *Logarithmotechnia* ☐ *Disquisitiones Arithmeticae*
- Tko je prvi koristio naziv „derivacija“?
☐ J.-L. Lagrange ☐ B. Taylor ☐ L. Euler ☒ J.-R. d'Alembert
- Teorem o četiri boje ...
☐ prvi je iskazao F. Geppetto. ☐ dokazao je P. Heawood.
☐ ne može se dokazati. ☐ još nije dokazan.
- Prvi primjeri algebre s objektima koji nisu brojevi potječu iz 19. stoljeća, a dali su ih među ostalim ...
☒ A. Cayley ☐ J. J. Sylvester ☐ W. R. Hamilton ☒ G. Boole

2. (10) U sljedećim pitanjima točno jedan od dva ponuđena odgovora je ispravan. Svaka oznaka točnog odgovora nosi +1 bod, svaka kriva oznaka –1 bod, a ako za neko pitanje ne označite nijedan odgovor na tom pitanju ostvarujete 0 bodova.

- Što se nalazi na babilonskoj pločici Plimpton 322?
☒ pitagorejske trojke ☐ aproksimacija $\sqrt{2}$

- Eudoksov princip ekshaustije iskazan je i dokazan u kojoj knjizi Euklidovih *Elemenata*?
☐ V. ☒ X.
- Od koga potječe prva trigonometrijska tablica?
☐ od Hipokrata s Kosa ☒ od Hiparha iz Niceje
- Izraz *sinus* potječe od krivog prijevoda arapske riječi za polutetivu u latinskom prijevodu jednog arapskog djela koji je napisao (preveo)
☐ Adelard iz Batha. ☒ Robert iz Chestera.
- Džang Heng je za omjer kvadrata površine kvadrata i kvadrata površine tom kvadratu upisanog kruga predložio koji omjer?
☐ 4 : 3 ☒ 8 : 5
- Nicole d'Oresme je u svojim dijagramima kojima je prikazivao odnos *extensio* i *intensio* intenzitete nanosio vertikalno i zvao ih ...
☐ *longitudines* ☒ *latitudines*
- Prema Descartesovom pravilu predznaka, jednačba $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ ima koliko najviše pozitivnih rješenja?
☐ 2 ☒ 3
- Eulerov produkt je zapis kojeg reda u obliku određenog beskonačnog produkta?
☒ $\sum_n \frac{1}{n^s}$ ☐ $\sum_n \frac{1}{s^n}$
- Od koga potječe naziv „zakon velikih brojeva“?
☐ od P.-S. Laplacea ☒ od S.-D. Poissona
- Tko je prvi koristio izraz „vektor“?
☒ W. R. Hamilton ☐ H. G. Graßmann

3. (5) Spojite svaku matematičku disciplinu iz prvog stupca s razdobljem u kojem je nastala. Svaka točna spojnica nosi 1 bod, svaka kriva -1, a svaka nedostajuća 0 bodova

teorija grupa – prva polovina 19. st.
 teorija skupova – druga polovina 19. st.
 teorija grafova – prva polovina 18. st.
 infinitezimalni račun – druga polovina 17. st.
 projektivna geometrija – prva polovina 17. st.

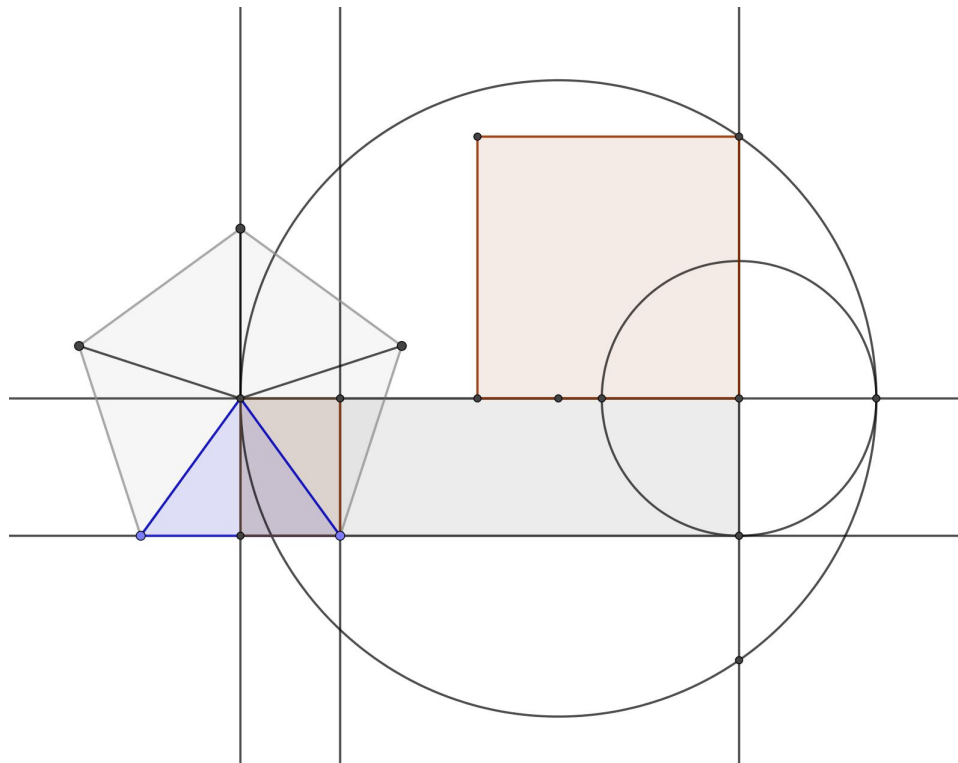
4. (20) Nadopunite sljedeće rečenice (ako se traži ime europskog matematičara nakon antike, za puna 2 boda trebate navesti bar inicijal prvog imena i pravilno napisati prezime; za matematičare iz jezičnih područja koja ne koriste latinicu priznaju se hrvatske i engleske transkripcije imena):

- Rhindov papirus napisao je Ahmes .
- Srednje geometrijske proporcionalne od 8 cm i 27 cm su 12 cm i 18 cm.

- Apolonije kružnicu definira kao geometrijsko mjesto točaka koje imaju konstantan omjer udaljenosti do dvije fiksne točke.
- Pravilo *gou gu* je kineski naziv za Pitagorin poučak.
- Matematičko natjecanje na kojem je sudjelovao Fibonacci organizirao je car Friedrich II.
- Mersenneovi brojevi su prosti brojevi oblika $2^n - 1$.
- Gregory-Madhavin red je naziv za Maclaurinov red funkcije arkus-tangens.
- P. de Fermat je svoj veliki teorem zapisao na margini svojeg primjerka Diofantove „Aritmetike“.
- Izraz topologija prvi je koristio Johann Benedict Listing.
- Prvu apstraktnu definiciju grupe dao je Arthur Cayley 1854. godine.

5. (10) Na Euklidov način kvadrirajte pravilni peterokut.

Budući da pravilni peterokut možemo rastaviti na pet sukladnih jednakokračnih trokuta s kutovima 72° , 54° i 54° , prvo jedan od njih pretvorimo u pravokutnik koristeći EEI42, zatim mu nadostavimo još četiri sukladna pravokutnika i tako dobiveni pravokutnik kvadriramo koristeći EEII14.

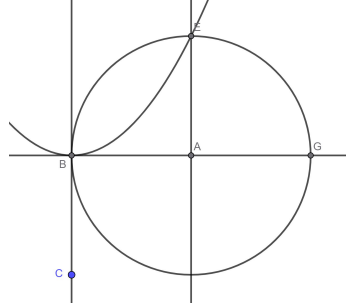


6. (10) Omar Hajjamovom i Tartaglia-Cardanovom metodom nađite pozitivno rješenje jednadžbe $x^3 + 4x = 16$.

Omar Hajjamov stil rješenja Jednadžba je $x^3 + 4x = 4 \cdot 4$ pa ju rješavamo presjekom kružnice promjera 4 i parabole kojoj je tjeme B u jednoj točki kružnice, os parabole je tangenta na kružnicu u toj točki, a parametar parabole je 2. Ako je E sjecište te kružnice i parabole, rješenje x je $|BA|$, gdje je A

ortogonalna projekcija E na promjer kružnice kojem je jedan kraj B . U ovom konkretnom slučaju A je središte kružnice pa je $x = 2$:

$$2 : |AB| = (P) = |AB| : |AE| = (K) = |AE| : (4 - |AB|) = (P) = \frac{|AB|^2}{2} : (4 - |AB|).$$



Tartaglia-Cardanov stil rješenja $x = u + v \Rightarrow$

$$(u + v)^3 + 4(u + v) = 16 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + 4) = 16;$$

$$3uv = -4, u^3 + v^3 = 16 \Leftrightarrow v^3 = -\frac{64}{27u^3}, u^3 + v^3 = 16 \Leftrightarrow$$

$$(u^3)^2 - 16u^3 - \frac{64}{27} = 0 \Leftrightarrow u^3, v^3 = 8 \pm 8\sqrt{\frac{28}{27}} \Rightarrow x = u + v = 2\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + 2\sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 2$$

7. (10) Newtonovom metodom odredite jednadžbu tangente na Nikomedovu konhoidu

$$(x - b)^2(x^2 + y^2) = a^2x^2$$

u njenoj točki $(2, y_0)$ s $y_0 > 0$, ako je $a = 2$ i $b = 1$.

Uvrstimo li $a = 2$, $b = 1$ i $x = 2$ u jednadžbu konhoide dobijemo $y = \pm\sqrt{12}$, dakle je $y_0 = \sqrt{12}$ te jednadžba konhoide ima oblik $y - \sqrt{12} = k(x - 2)$. Da bismo dobili k , zamijenimo x i y s $x + o\dot{x}$ i $y + o\dot{y}$:

$$\begin{aligned} (x + o\dot{x} - 1)^2(x^2 + 2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + y^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) &= 4x^2 + 8ox\dot{x} + 4o^2\dot{x}^2 \Leftrightarrow \\ ((x - 1)^2 + (2o\dot{x}(x - 1) + o^2\dot{x}^2))((x^2 + y^2) + (2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2)) &= 4x^2 + 8ox\dot{x} + 4o^2\dot{x}^2 \Leftrightarrow \\ (x - 1)^2(x^2 + y^2) + (x - 1)^2(2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) + (2o\dot{x}(x - 1) + o^2\dot{x}^2)(x^2 + y^2) + \\ + (2o\dot{x}(x - 1) + o^2\dot{x}^2)(2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) &= 4x^2 + 8ox\dot{x} + 4o^2\dot{x}^2. \end{aligned}$$

Budući da je točka na krivulji, preostaje

$$\begin{aligned} (x - 1)^2(2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) + (2o\dot{x}(x - 1) + o^2\dot{x}^2)(x^2 + y^2) + \\ + (2o\dot{x}(x - 1) + o^2\dot{x}^2)(2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) &= 8ox\dot{x} + 4o^2\dot{x}^2. \end{aligned}$$

Podijelimo s $o \neq 0$:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2(2x\dot{x} + o\dot{x}^2 + 2y\dot{y} + o\dot{y}^2) + (2\dot{x}(x - 1) + o\dot{x}^2)(x^2 + y^2) + \\ + (2\dot{x}(x - 1) + o\dot{x}^2)(2ox\dot{x} + o^2\dot{x}^2 + 2oy\dot{y} + o^2\dot{y}^2) &= 8x\dot{x} + 4o\dot{x}^2. \end{aligned}$$

Sad zanemarimo sve članove s o jer je $o \approx 0$:

$$(x-1)^2(2x\dot{x} + 2y\dot{y}) + 2\dot{x}(x-1)(x^2 + y^2) = 8x\dot{x} \Rightarrow$$

$$2y\dot{y}(x-1)^2 = -2x\dot{x}(x-1)^2 - 2\dot{x}(x-1)(x^2 + y^2) + 8x\dot{x} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2x(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 + y^2) + 8x}{2y(x-1)^2}.$$

Uvrstimo $x = 2$ i $y = \sqrt{12}$ i dobijemo $k = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$, dakle je jednačba tražene tangente

$$y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}x + \frac{10\sqrt{3}}{3} + \sqrt{12}.$$

8. (25) Na vlastitom papiru napišite kratki sastavak (1–2 stranice) na temu: „Kako je nastala teorija skupova“.

Glavne natuknice:

- Rane ideje o beskonačnosti (Zenon, Eudoks, Arhimed, T. Bradwardine);
- Galileo, Bošković, Bolzano;
- Cantor — što ga je ponukalo da se bavi razmatranjem i preciziranjem beskonačnih skupova, prebrojivost $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$, neprebrojivost $\mathbb{R}$, hipoteza kontinuuma, ekvipotentnost segmenta i kvadrata, osnovni Cantorov teorem teorije skupova i Cantorov dijagonalni postupak;
- paradoksi teorije skupova i aksiomatizacija.