

3. Starogrčka matematika u 4. st. pr. Kr.

Franka Miriam Brückler

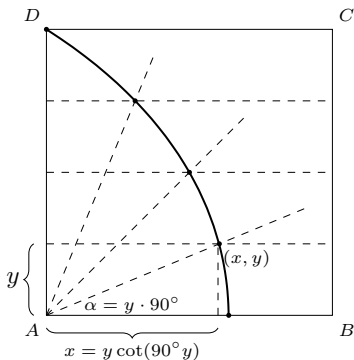


Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

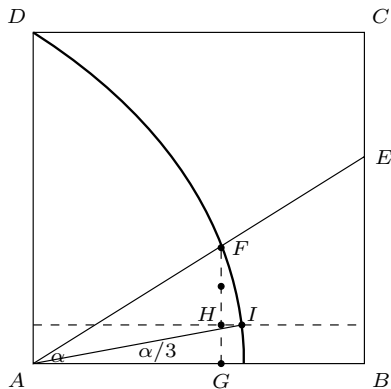
Hipija iz Elide (ca. 460.–400. pr. Kr.)

Hipija je bio političar i filozof sofist, zarađivao je putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga kasnije opisuje kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Pripisuje mu se otkriće krivulje **kvadratise/trisekriste**, koja se može iskoristiti za kvadraturu kruga i trisekciju kuta.

Aktivnost (1+1) — kako pomoću kvadratise kvadirati krug i * dokaz da se radi o dijelu grafa transformiranog (ko)tangensa



Trisekcija kuta pomoću kvadratisa



Zadan: $\alpha = \angle BAE$

Neka je F presjek kvadratisa i AE .

Ako iz F povučemo okomicu na AB , dobijemo G .

$\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela:

$$|FH| : |HG| = 2 : 1.$$

Kroz H povučemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom. Onda je $\angle IAB = \alpha/3$.

Arhita iz Tarenta (ca. 428.–350. pr. Kr.)

Pitagorejca, utjecao je na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu duplikaciji kocke na temelju Hipokratove ideje.

Arhita iz Tarenta (ca. 428.–350. pr. Kr.)

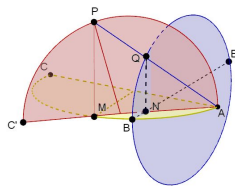
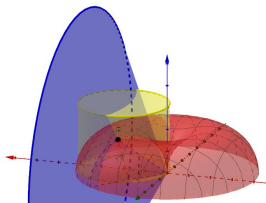
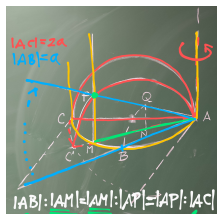
Pitagorejac, utjecao je na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu duplikaciji kocke na temelju Hipokratove ideje. Tražimo srednje geometrijske proporcionalne od $|AB| = a$ i $|AC| = 2a$. Aktivnost (1+1) — dokaz & moderno

- 1 polucilindar (žuto) promjera $\overline{AC}$;
- 2 polutorus (crveno) dobiven rotacijom polukružnice promjera $\overline{AC}$ (okomite na bazu cilindra)
- 3 konus (plavo) s vrhom A dobiven rotacijom $\triangle ACD$ oko AC (D je presjek tangente na rub baze cilindra povučene u C s pravcem AB , gdje je B na rubu te baze)

Arhita iz Tarenta (ca. 428.–350. pr. Kr.)

Pitagorejac, utjecao je na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu duplikaciji kocke na temelju Hipokratove ideje. Tražimo srednje geometrijske proporcionalne od $|AB| = a$ i $|AC| = 2a$. **Aktivnost (1+1) — dokaz & moderno**

- 1 polucilindar (žuto) promjera $\overline{AC}$;
- 2 polutorus (crveno) dobiven rotacijom polukružnice promjera $\overline{AC}$ (okomite na bazu cilindra)
- 3 konus (plavo) s vrhom A dobiven rotacijom $\triangle ACD$ oko AC (D je presjek tangente na rub baze cilindra povučene u C s pravcem AB , gdje je B na rubu te baze)

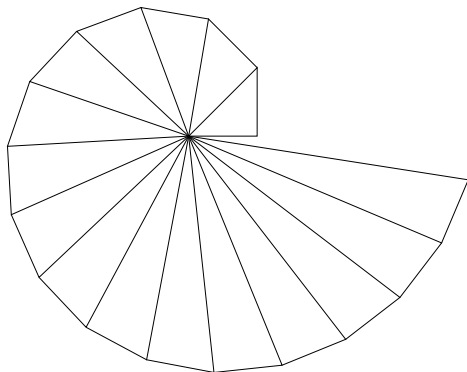


Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.

Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.



Teetet Atenski (ca. 415.–369. pr. Kr.)

Vjerojatno prvi koji je konstruirao svih pet pravilnih poliedara.



Platon (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao Akademiju. Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Platon (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao Akademiju. Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Dijalozi *Timej* i *Teetet* su važni izvori za povijest starogrčke matematike.

Platon (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao Akademiju. Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Dijalozi *Timej* i *Teetet* su važni izvori za povijest starogrčke matematike.

Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike te i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. Aktivnost (1): matematički platonizam

Platon (ca. 427.–347. pr. Kr.)

Filozof, oko 387. pr. Kr. osnovao Akademiju. Na ulazu je navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Dijalozi *Timej* i *Teetet* su važni izvori za povijest starogrčke matematike.

Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike te i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. **Aktivnost (1): matematički platonizam**

Geometrija se treba koristiti sa što manje fizičkih pomagala.

Dozvoljeni su samo **šestar i neoznačeno ravnalo**.

Platon je istaknuo i važnost jasnih definicija i dokaza.

Aristotel (384.–322. pr. Kr.)

- temelji opće i stoga i matematičke logike
- indukcija vs. dedukcija

Aristotel (384.–322. pr. Kr.)

- temelji opće i stoga i matematičke logike
- indukcija vs. dedukcija
- Aristotelova dedukcija: **silogizam**

Aristotel (384.–322. pr. Kr.)

- temelji opće i stoga i matematičke logike
- indukcija vs. dedukcija
- Aristotelova dedukcija: **silogizam**
- premise i konkluzija su **kategorički sudovi**: „Svaki S je P” (univerzalno afirmativni), „Nikoji S nije P” (univerzalno negativni), „Neki S su P” (partikularno afirmativni) i „Neki S nisu P” (partikularno negativni).
- **tautologija** vs. **kontradikcija**
- tri logičke figure silogizma:
 - 1 (A B), (B C), (A C);
 - 2 (A C), (B C), (A B);
 - 3 (A B), (A C), (B C).
- Aristotelovi **zakoni klasične logike**:
 - Svaki S je S (princip identiteta).
 - Svaki sud je istinit ili lažan (princip isključenja trećega).
 - Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan (princip isključenja proturječja).

Eudoks s Knida (oko 400.–350. pr. Kr.)

- matematičar, filozof, medicinar i astronom, Arhitin učenik, sva izvorna djela su izgubljena
- dva velika doprinosa matematici: teorija omjera i razmjera i metoda ekshaustije

Eudoks s Knida (oko 400.–350. pr. Kr.)

- matematičar, filozof, medicinar i astronom, Arhitin učenik, sva izvorna djela su izgubljena
- dva velika doprinosa matematici: teorija omjera i razmjera i metoda ekshaustije
- Eudoksova **teorija omjera i razmjera** (EEV) je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u precizne analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine

Eudoks s Knida (oko 400.–350. pr. Kr.)

- matematičar, filozof, medicinar i astronom, Arhitin učenik, sva izvorna djela su izgubljena
- dva velika doprinosa matematici: teorija omjera i razmjera i metoda ekshauštije
- Eudoksova **teorija omjera i razmjera** (EEV) je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u precizne analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine
- **Omjer** (*lógos*) je odnos među iznosima dviju *istovrsnih* veličina: Za dvije veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge, tj. $a, b > 0$ imaju omjer $a : b$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nb > a$. **Aktivnost (1):**
Eudoksova definicija i Arhimedov aksiom

- Za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.
- Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (razmjer: *analogía*, a ne *proportio*).

- Za veličine kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu.
- Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (razmjer: *analogía*, a ne *proportio*).
- Eudoksova **metoda ekshaustije** generalizira teoriju omjera i razmjera

Teorem (Eudoksov princip ekshaustije EEX1)

Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.

aktivnost (5) — konkretni dokazi metodom ekshaustije iz EEXII

Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — konike

Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — **konike**

dva rješenja: parabola i hiperbola; parabola i parabola;

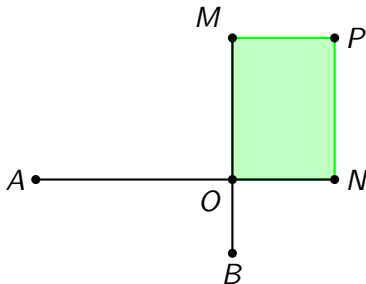
Menehmo (ca. 380.–320. pr. Kr.)

pokušaj udvostručenja kocke — **konike**

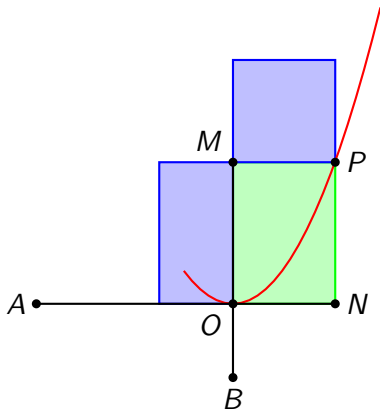
dva rješenja: parabola i hiperbola; parabola i parabola;

dvije međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge, pretpostavimo da je problem riješen:

$$|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$$

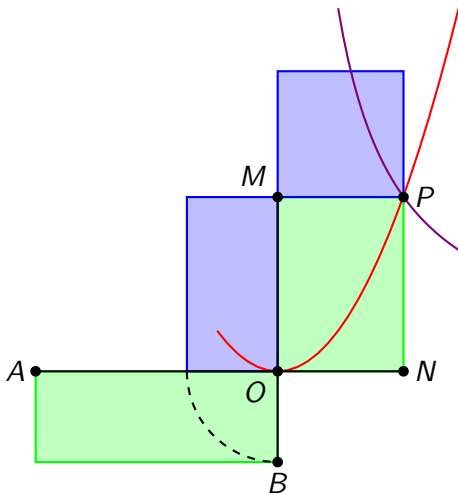


Teorija omjera i razmjera $\Rightarrow |OM| \cdot |OB| = |ON|^2 = |PM|^2 \Rightarrow P$
je točka parabole kojoj je O tjeme, os joj je MB , a $|OB|$ joj je ono
što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*



Teorija omjera i razmjera $\Rightarrow$

$$|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| : |PN|$$



Klasični helenizam

- Aleksandar Makedonski (356.–323. pr. Kr., vladao i osvajao 336.–323.)
- 331 pr. Kr.: **Aleksandrija**
- *μουσειον*
- Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *mouseionu* bio je **Euklid Aleksandrijski** (ca. 330. - 275.).
- *Data* (određivanje elemenata geometrijskih likova iz zadanih), *O dijeljenju figura* (u zadanom omjeru), *Optika* (perspektiva), *Phaenomena* (uvod u matematičku astronomiju), ...
- No, ***Elementi*** (*Στοιχεῖα*, u nastavku EE) su djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku ...

- Cilj: sinteza tad poznate matematike u 13 knjiga veličine poglavlja
- EE su značajni zbog stila pisanja: teoremi (propozicije) su logički poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno
- ideja je izvesti svu matematiku (geometriju) iz malog broja početnih pretpostavki: aksioma i postulata (aksiomi su više općematematičke, a postulati geometrijske pretpostavke)
- do 20. st. EE su bili apsolutni uzor matematičkog djela
- većina knjiga u EE započinju definicijama, a tako i prva ...

Definicije u EEI

Prva definicija glasi:

Točka je ono što nema dijela.

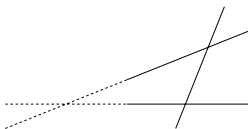
Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposljetku

Definicija (Paralelni pravci)

Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji, koji se, ako ih u oba smjera produljimo u beskonačnost, nikad ne susreću.

Pet Euklidovih postulata

- 1 Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
- 2 Proizvoljno produljiti dužinu.
- 3 Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
- 4 Svi pravi kutovi¹ su jednaki.
- 5 Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) na toj strani sijeku.



¹Euklid pravi kut definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

Pet Euklidovih aksioma

- 1 Dvije stvari koje su *jednake* trećoj su i međusobno jednake.
- 2 Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.
- 3 Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
- 4 Ono što se podudara je jednako.
- 5 Cjelina je veća od dijela.

Sadržaj EE

- 1 EEI: elementarna planimetrija (23+48);
- 2 EEII: geometrijska algebra (2+14);
- 3 EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);
- 4 EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
- 5 EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
- 6 EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
- 7 EEVII: djeljivost u $\mathbb{N}$ (22+39);
- 8 EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
- 9 EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
- 10 EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
- 11 EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
- 12 EEXII: primjena ekshaustije u geometriji (0+18)
- 13 EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

EEI & EEII

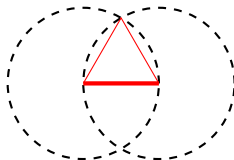
- Koje propozicije iz ove knjige smo već susreli?

EEI & EEII

- Koje propozicije iz ove knjige smo već susreli?
- EEI29: propozicija o kutovima uz transversalu dvaju paralelnih pravaca

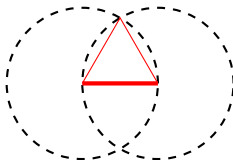
EEI & EEII

- Koje propozicije iz ove knjige smo već susreli?
- EEI29: propozicija o kutovima uz transversalu dvaju paralelnih pravaca
- EEI1

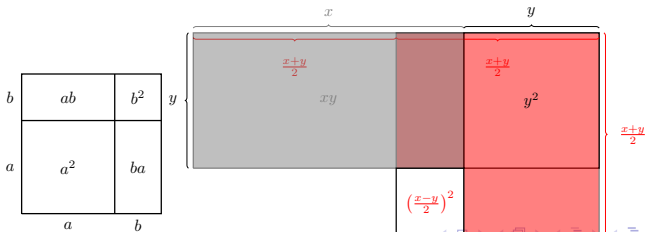


EEI & EEII

- Koje propozicije iz ove knjige smo već susreli?
- EEI29: propozicija o kutovima uz transversalu dvaju paralelnih pravaca
- EEI1

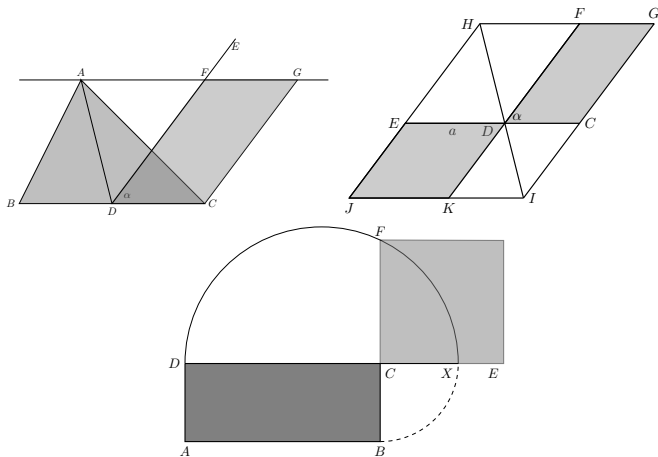


- EEII4 & EEII5



Svaki mnogokut se može kvadrirati ravnalom i šestarom!

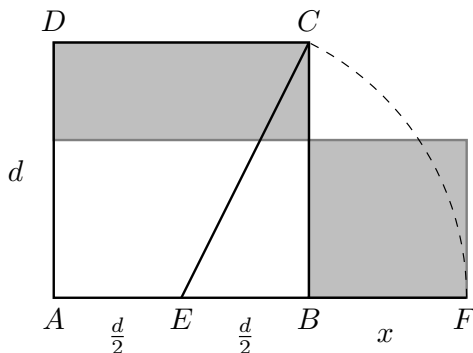
EEI42 & EEI44 & EEI45 & EEI114



aktivnost (3) — kvadratura pravilnih 5-, 6- i 8-erokuta

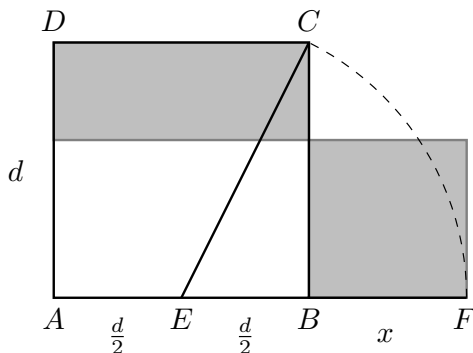
Podjela dužine u omjeru zlatnog reza

EEII11



Podjela dužine u omjeru zlatnog reza

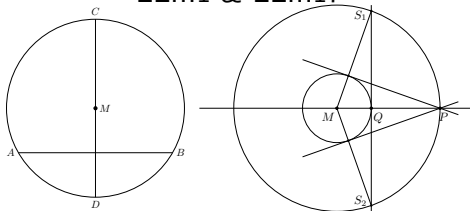
EEII11



EEII12 & EEII13

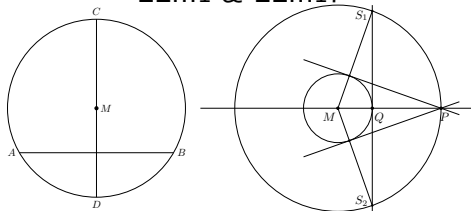
EEIII & EEIV

EEIII1 & EEIII17

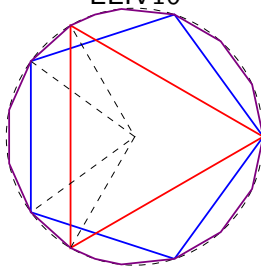


EEIII & EEIV

EEIII1 & EEIII17



EEIV16



EEV & EEVI

EEVI, def. 1

Dva uglata lika zovemo sličnima ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne.

EEVI, def. 1

Dva uglati liki zovemo sličnima ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne.

- EEVI2: Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta.
- EEVI9: Kako podijeliti dužinu na određeni broj jednakih dijelova?
- EEVI12, EEVI13: Kako za zadane duljine a , b i c konstruirati x sa svojstvom $a : b = c : x$ odnosno $a : x = x : b$.

R. Descartes, 17. st.: Ravnalom i šestarom konstruktibilne *duljine* $a \pm b$, $a b$, a/b , $\sqrt{a}$.

EEVII, EEVIII & EEIX

- EEVII: prosti i složeni brojevi, NZD i nzv, *ανθυφαρσεις* (Euklidov algoritam) i relativno prosti brojevi
- EEVIII: geometrijski nizovi, omjeri i razmjeri prirodnih brojeva, kvadratni i kubni brojevi
- EEIX: primjene EEVII i EEVIII na dodatne rezultate

EEVII, EEVIII & EEIX

- EEVII: prosti i složeni brojevi, NZD i nzv, *ανθυφαρσεις* (Euklidov algoritam) i relativno prosti brojevi
- EEVIII: geometrijski nizovi, omjeri i razmjeri prirodnih brojeva, kvadratni i kubni brojevi
- EEIX: primjene EEVII i EEVIII na dodatne rezultate
- EEVII2: Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj.
- EEIX14 (parcijalni osnovni teorem aritmetike): Ako je neki broj najmanji takav da ga mjere neki prosti brojevi, onda ga ne mjeri nikoji drugi prost broj osim njih.
- EEIX20 (Euklidov teorem): Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva.