

EEX

Koju propoziciju iz EEX smo već naveli?

Koju propoziciju iz EEX smo već naveli?

Definicija (EEX, prve 4 definicije)

Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive.

Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi.

Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

EEX2: Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

EEXI & EEXII

Definicija sfere (EEXI, def. 14): rotaciona ploha koja nastaje rotacijom polukružnice oko promjera.

- EEXI3: Presjek dvije ravnine je pravac.
- EEXI6 & EEXI14: Dva pravca okomita na istu ravninu su paralelna, a ravnine okomite na isti pravac su paralelne.
- EEXI32: Volumeni paralelepipeda iste visine odnose se kao njihove osnovice.
- EEXI6: Piramide istih visina se odnose kao njihove baze.
- EEXII7: Trostranu prizmu možemo podijeliti na tri trokutaste piramide istih volumena.
- EEXII10: Stožac je trećina valjka iste baze i visine.
- EEXII11: Valjci, odnosno stošci, istih visina odnose se kao njihove baze.
- EEXII18: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih dijametara.

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$.

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. $\Rightarrow$
 $d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, $P \neq P(K_2)$.

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2. \Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P, P \neq P(K_2).$

- $P < P(K_2)$ $\Rightarrow P(K_2) - P > 0$

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. $\Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, $P \neq P(K_2)$.

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. $\Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, $P \neq P(K_2)$.

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P$

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. $\Rightarrow$
 $d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, $P \neq P(K_2)$.

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P \Rightarrow$ odgovarajući upisani 2^n -terokut je površine $P_2 > P$.

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. $\Rightarrow$
 $d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, $P \neq P(K_2)$.

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P \Rightarrow$ odgovarajući upisani 2^n -terokut je površine $P_2 > P$.

Pravilni 2^n -terokut upišemo i u krug $K_1 \Rightarrow$ ta dva mnogokuta su slična

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2 \Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P, P \neq P(K_2).$

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P \Rightarrow$ odgovarajući upisani 2^n -terokut je površine $P_2 > P$.

Pravilni 2^n -terokut upišemo i u krug $K_1 \Rightarrow$ ta dva mnogokuta su slična pa (EEXII1) $\Rightarrow P_1 : P_2 =$ omjer kvadrata nad dijagonalama $= d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2 \Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P : P, P \neq P(K_2).$

- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P \Rightarrow$ odgovarajući upisani 2^n -terokut je površine $P_2 > P$.

Pravilni 2^n -terokut upišemo i u krug $K_1 \Rightarrow$ ta dva mnogokuta su slična pa (EEXII1) $\Rightarrow P_1 : P_2 =$ omjer kvadrata nad dijagonalama $= d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P \Rightarrow P(K_1) : P_1 = P : P_2$.
Očito $P(K_1) > P_1$

EEXII2: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

Glavne crte dokaza

K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2

Pretpostavimo suprotno: $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2 \Rightarrow$

$d_1^2 : d_2^2 = P : P, P \neq P(K_2).$

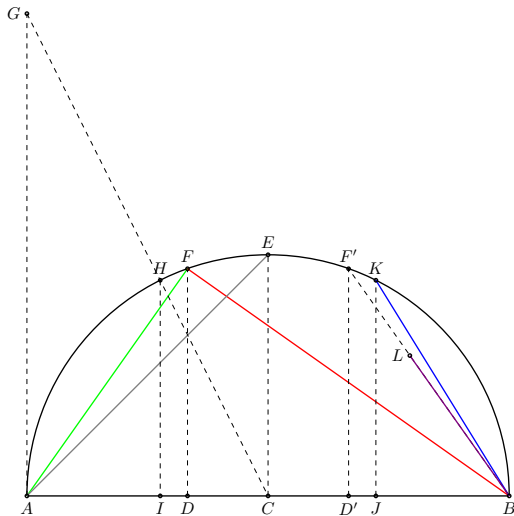
- $P < P(K_2) \Rightarrow P(K_2) - P > 0$

U K_2 upisujemo 2^n -terokute ($n = 2, 3, \dots$) i gledamo razlike površina kruga i njih.

EEX1: Nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti će $< P(K_2) - P \Rightarrow$ odgovarajući upisani 2^n -terokut je površine $P_2 > P$.

Pravilni 2^n -terokut upišemo i u krug $K_1 \Rightarrow$ ta dva mnogokuta su slična pa (EEXII1) $\Rightarrow P_1 : P_2 =$ omjer kvadrata nad dijagonalama $= d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P \Rightarrow P(K_1) : P_1 = P : P_2$.
Očito $P(K_1) > P_1 \Rightarrow P > P_2$.

- $P > P(K_2)$: Analogno.

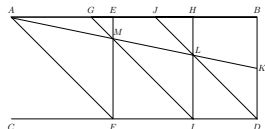


Eratosten iz Kirene (ca. 275.–195. pr. Kr.)

Eratostenovo sito; mezolabij; određivanje opsega Zemlje

Eratosten iz Kirene (ca. 275.–195. pr. Kr.)

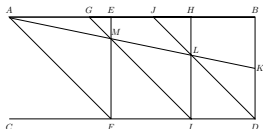
Eratostenovo sito; mezolabij; određivanje opsega Zemlje



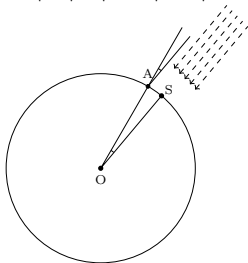
$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$

Eratosten iz Kirene (ca. 275.–195. pr. Kr.)

Eratostenovo sito; mezolabij; određivanje opsega Zemlje



$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$



$$\alpha \approx \frac{1}{50} \cdot 2\pi \approx 7,2^\circ; \quad O = 50d_{A,S} = 50 \cdot 5000 \text{ stadija} = 250000 \text{ stadija}$$

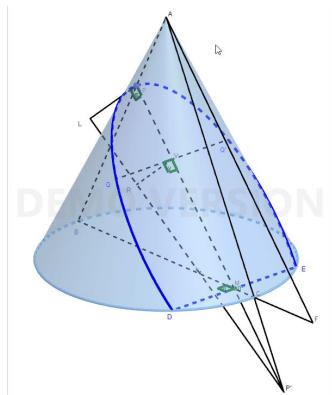
Apolonije iz Perge (ca. 262.–190. pr. Kr.)

- glavno djelo: *Konike* u 8 knjiga — potpuna teorija konika;
- jedan (može i kosi stožac) — elipsa, parabola, hiperbola;

Apolonije iz Perge (ca. 262.–190. pr. Kr.)

- glavno djelo: *Konike* u 8 knjiga — potpuna teorija konika;
- jedan (može i kosi stožac) — elipsa, parabola, hiperbola;

Apolonijeva karakterizacija tri tipa konika

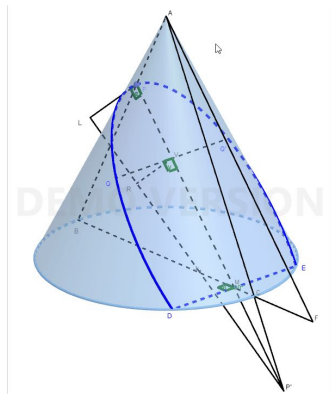


PM raspolavlja svaku tetivu paralelnu s DE ;

Apolonije iz Perge (ca. 262.–190. pr. Kr.)

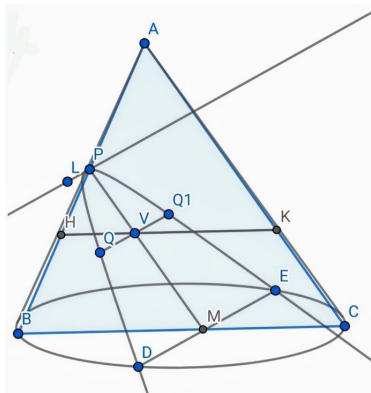
- glavno djelo: *Konike* u 8 knjiga — potpuna teorija konika;
- jedan (može i kosi stožac) — elipsa, parabola, hiperbola;

Apolonijeva karakterizacija tri tipa konika



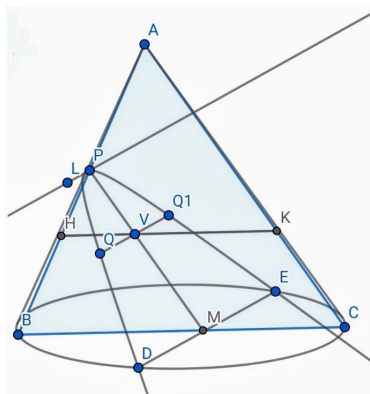
PM raspolavlja svaku tetivu paralelnu s DE ; $|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|$

Apolonijeva karakterizacija parabole



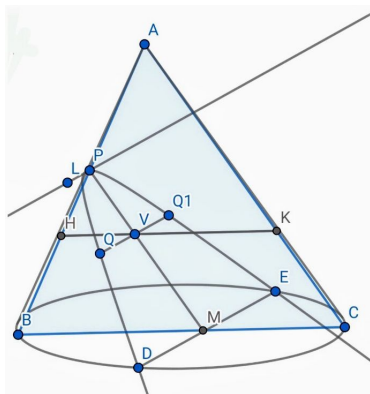
$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|);$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



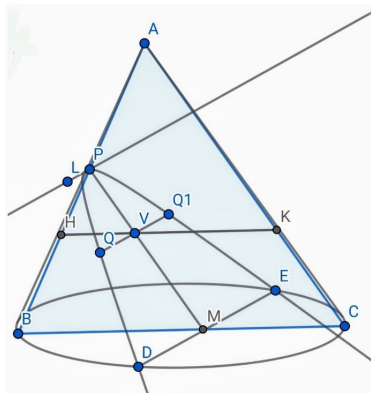
$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|); |VK| : |PA| = |BC| : |BA|;$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



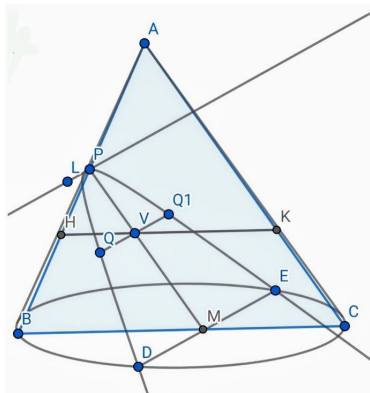
$$\begin{aligned} |PL| : |PA| &= |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|); |VK| : |PA| = |BC| : |BA|; \\ |HV| : |PV| &= |BC| : |AC| \end{aligned}$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



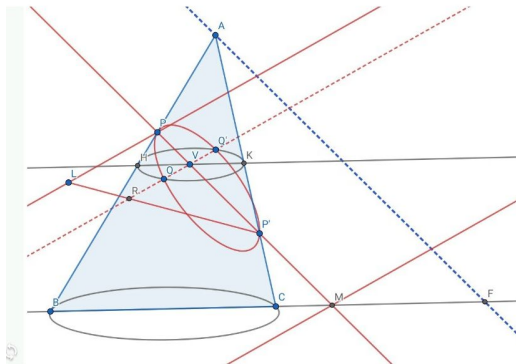
$$\begin{aligned} &|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|); |VK| : |PA| = |BC| : |BA|; \\ &|HV| : |PV| = |BC| : |AC| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = (|PL| \cdot |PV|) : \\ &(|PA| \cdot |PV|) \end{aligned}$$

Apolonijeva karakterizacija parabole



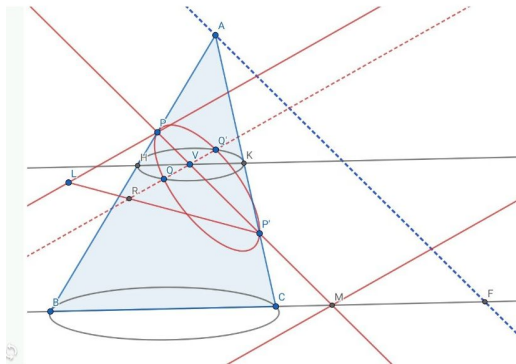
$$\begin{aligned}
 |PL| : |PA| &= |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|); |VK| : |PA| = |BC| : |BA|; \\
 |HV| : |PV| &= |BC| : |AC| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) = (|PL| \cdot |PV|) : \\
 (|PA| \cdot |PV|) &\Rightarrow |QV|^2 = |PL| \cdot |PV|.
 \end{aligned}$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



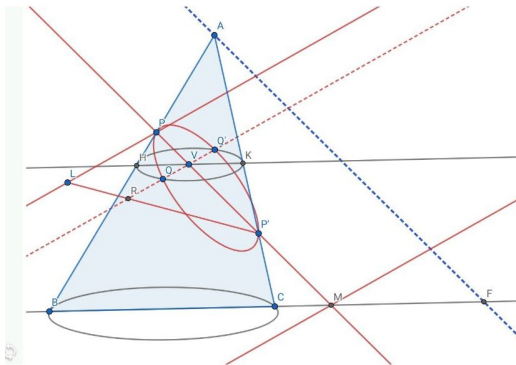
$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2;$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



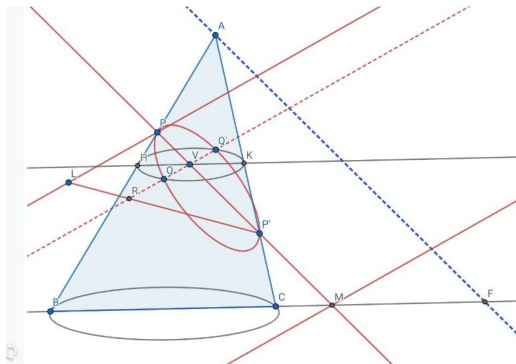
$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|;$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



$$\begin{aligned} |PL| : |PP'| &= (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|; \\ |HV| : |PV| &= |BF| : |AF| \end{aligned}$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole

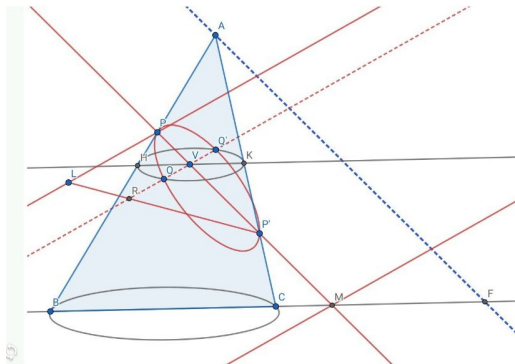


$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|;$$

$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) =$$

$$(|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|)$$

Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole



$$\begin{aligned}
 |PL| : |PP'| &= (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2; |VK| : |P'V| = |FC| : |FA|; \\
 |HV| : |PV| &= |BF| : |AF| \Rightarrow |QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) = \\
 (|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|) &\Rightarrow |QV|^2 = |RV| \cdot |PV|.
 \end{aligned}$$

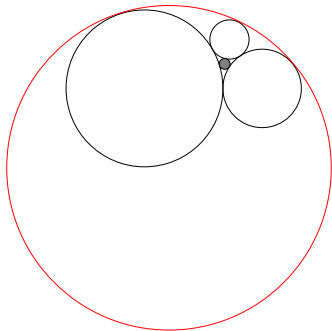
Apolonijev problem

Za dane tri kružnice u ravnini (dozvoljeni su polumjeri 0 i ∞ !) treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju.

Apolonijev problem

Za dane tri kružnice u ravnini (dovoljeni su polumjeri 0 i ∞ !) treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju.

Imamo 10 mogućih slučajeva.



Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB .

Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB .

Familija svih kružnica određenih raznim omjerima za fiksne A i B i familija svih kružnica koje prolaze kroz A i B su međusobno ortogonalne.

Apolonijeve kružnice

Teorem (Apolonijeva definicija kružnice)

Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $|AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB .

Familija svih kružnica određenih raznim omjerima za fiksne A i B i familija svih kružnica koje prolaze kroz A i B su međusobno ortogonalne.

Također, Apolonijeva kružnica je naziv i za kružnicu koja izvana dodiruje sve tri pripisane kružnice trokuta.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*?

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov Palimpsest? *Metoda mehaničkih teorema*, Stomahion.

U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov Palimpsest? *Metoda mehaničkih teorema*, Stomahion.

U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješćanik: 10^4 = mirijada;

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov Palimpsest? *Metoda mehaničkih teorema*, Stomahion.

U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješćanik: 10^4 = mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda;

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov Palimpsest? *Metoda mehaničkih teorema*, Stomahion.

U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješćanik: 10^4 = mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda; mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d.; do $P = (10^8)^{(10^8)}$ su brojevi prve periode, a P je jedinica druge periode;

Arhimed iz Sirakuze (287.–212. pr. Kr.)

- Heureka!
- Ne dirajte moje krugove!
- Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!

Jeste li čuli za Arhimedov Palimpsest? *Metoda mehaničkih teorema*, Stomahion.

U *O ravnoteži ravninskih likova*: princip poluge; težište paralelograma i trokuta.

Pješčanik: 10^4 = mirijada; do mirijade mirijada (10^8) brojevi prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda; mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d.; do $P = (10^8)^{(10^8)}$ su brojevi prve periode, a P je jedinica druge periode; analogno dalje do

$$\left((10^8)^{(10^8)} \right)^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{64}}.$$

Problema bovinum: Odredi broj goveda, koja su raspodijeljena u 4 stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava:

- Bijelih bikova je bilo koliko $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ crnih i žutih zajedno.
- Crnih bikova je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno.
- Šarenih bikova je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno.
- Bijelih krava je bilo koliko $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cijelog crnog stada.
- Crnih krava je bilo koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada.
- Šarenih krava je bilo koliko $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ cijelog žutog stada.
- Žutih krava je bilo koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada.

Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj.

Ovaj se problem svodi na Pellovu jednadžbu $x^2 - 4729494y^2 = 1$, s najmanjim rješenjem reda veličine 10^{206544} .

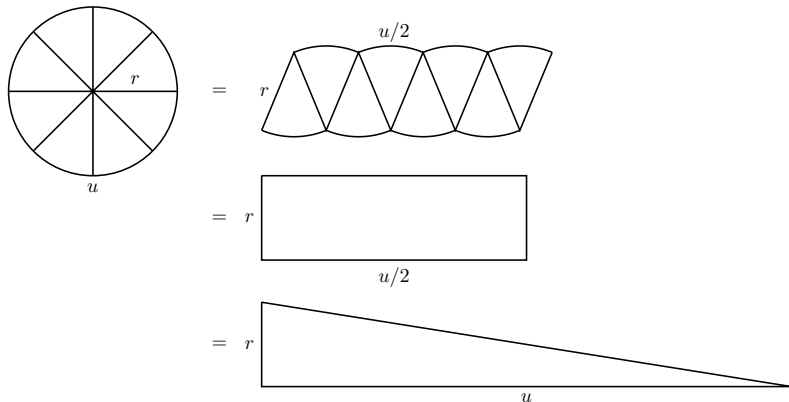
Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Arhimed se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom.

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Arhimed se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom.

Arhimedov teorem o krugu



Dokaz (skica).

- 1 $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
- 2 $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
- 3 Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz (skica).

- 1 $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
- 2 $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
- 3 Dakle, $P(T) = P(K)$.

Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. U krug *upisujemo* pravilne n -terokute P_n ($n = 2^k$). Očigledno $\forall n$

$$\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0.$$

Dokaz (skica).

- 1 $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
- 2 $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
- 3 Dakle, $P(T) = P(K)$.

Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. U krug *upisujemo* pravilne n -terokute P_n ($n = 2^k$). Očigledno $\forall n$

$$\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0.$$

Može se dokazati da $\forall n$

$$\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$$

Dokaz (skica).

- 1 $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
- 2 $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
- 3 Dakle, $P(T) = P(K)$.

Pretpostavimo suprotno 1.: $P(K) - P(T) > 0$. U krug *upisujemo* pravilne n -terokute P_n ($n = 2^k$). Očigledno $\forall n$

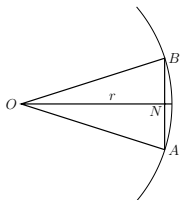
$$\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0.$$

Može se dokazati da $\forall n$

$$\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$$

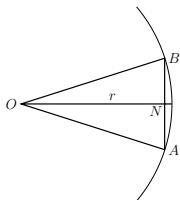
EEX1 $\Rightarrow$ za dovoljno velik k je

$$0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T) \Rightarrow P(P_{2^k}) > P(T).$$



$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

$\Rightarrow \forall k \ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

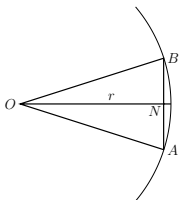


$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

$\Rightarrow \forall k \ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

Pretpostavimo suprotno 2.: $P(T) - P(K) > 0$. Krugu *opisujemo* pravilne $n = 2^k$ -terokute $\bar{P}_n$. Očito $\forall n$

$$\Delta_n = P(\bar{P}_n) - P(K) > 0.$$



$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

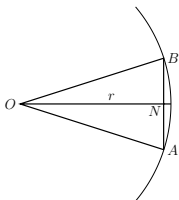
$\Rightarrow \forall k \ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

Pretpostavimo suprotno 2.: $P(T) - P(K) > 0$. Krugu *opisujemo* pravilne $n = 2^k$ -terokute $\bar{P}_n$. Očito $\forall n$

$$\Delta_n = P(\bar{P}_n) - P(K) > 0.$$

Opet se može pokazati da je $\forall n$

$$\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}.$$



$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

$\Rightarrow \forall k \ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

Pretpostavimo suprotno 2.: $P(T) - P(K) > 0$. Krugu *opisujemo* pravilne $n = 2^k$ -terokute $\bar{P}_n$. Očito $\forall n$

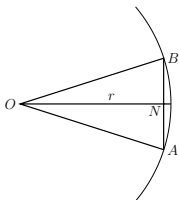
$$\Delta_n = P(\bar{P}_n) - P(K) > 0.$$

Opet se može pokazati da je $\forall n$

$$\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}.$$

Slično kao u prvom slučaju, za dovoljno velik k je

$$0 < \Delta_{2^k} = P(\bar{P}_{2^k}) - P(K) < P(T) - P(K).$$



$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

$\Rightarrow \forall k \ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

Pretpostavimo suprotno 2.: $P(T) - P(K) > 0$. Krugu *opisujemo* pravilne $n = 2^k$ -terokute $\bar{P}_n$. Očito $\forall n$

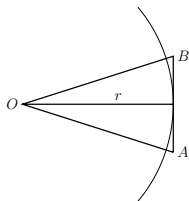
$$\Delta_n = P(\bar{P}_n) - P(K) > 0.$$

Opet se može pokazati da je $\forall n$

$$\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}.$$

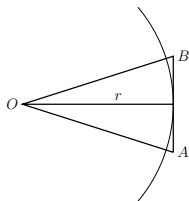
Slično kao u prvom slučaju, za dovoljno velik k je

$$0 < \Delta_{2^k} = P(\bar{P}_{2^k}) - P(K) < P(T) - P(K).$$



$$P(\overline{P}_n) = n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} o(\overline{P}_n) > \frac{r}{2} o = P(T),$$

pa za $n = 2^k$ opet imamo dvije kontradiktorne nejednakosti.

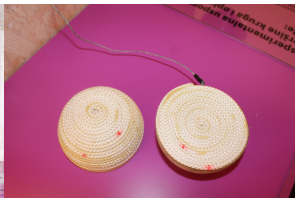
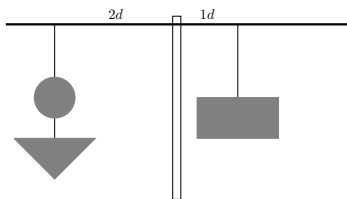


$$P(\overline{P}_n) = n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} o(\overline{P}_n) > \frac{r}{2} o = P(T),$$

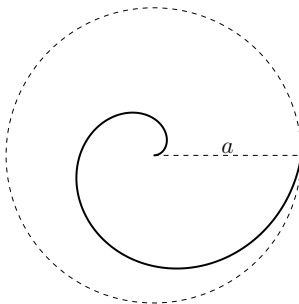
pa za $n = 2^k$ opet imamo dvije kontradiktorne nejednakosti.

Teorem (Volumen i oplošje kugle (*O kugli i valjku*))

Volumen kugle je $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru). Oplošje kugle je 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle je $\frac{2}{3}$ oplošja opisanog joj valjka.



Desne slike su snimljene tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.
Arhimedova spirala je putanja točke koja se jednoliko giba po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazne točke.

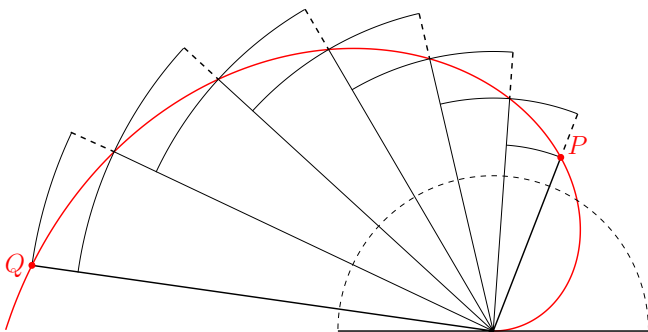


Teorem

Isječak Arhimedove spirale između dva radij-vektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa $6a$. Posebno, površina jednog okreta je trećina površine opisanog kruga.



Slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

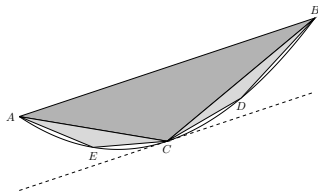


Dokaz je proveo metodom ekshautije, dijeleći isječak u isječke s jednakim središnjim kutovima. Primijetio je da tako dobiveni r -ovi čine aritmetički niz. Zatim je gledao tim isječcima upisane i opisane kružne isječke i dobio figuru manje i figuru veće površine. Zatim ekshautijom, mi bismo rekli uzimanjem limesa, dokazuje tvrdnju teorema.

Arhimedova kvadratura segmenta parabole

Teorem

Površina segmenta parabole jednaka je $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranic tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom.



Arhimed dokazuje da je $T = P(\triangle ABC)$ točno 4 put veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka smanjuje 4 puta. Eudoksov princip ekshauštije daje:

$$P = T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \dots = T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}T.$$

Arhimed i odnos opsega i promjera kruga

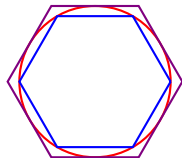
Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Arhimed i odnos opsega i promjera kruga

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.



Kreće od upisanog i opisanog pravilnog 6-terokuta i u svakom koraku udvostručuje broj stranica do 96. Pritom je koristio

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Donju ogradu je koristio pri računanju opsega O_n opisanih, a gornju pri računanju opsega o_n upisanih pravilnih $n = 6 \cdot 2^k$ -terokuta za $k = 0, 1, 2, 3, 4$ jer očito za svaki n vrijedi $o_n < o < O_n$.

Arhimed je zapravo računao:

- omjere polumjera kružnice prema polovicama duljina stranica opisanih mnogokuta i
- omjere promjera kružnice prema duljinama stranica upisanih mnogokuta.

Arhimed je zapravo računao:

- omjere polumjera kružnice prema polovicama duljina stranica opisanih mnogokuta i
- omjere promjera kružnice prema duljinama stranica upisanih mnogokuta.

Za opisane mnogokute gleda pravokutne trokute koje čine središte O , jedna točka A na kružnici (u kojoj po jedna stranica svakog od opisanih mnogokuta dodiruje kružnicu) i susjedni joj vrh B_n pojedinog mnogokuta. Za $\triangle OAB_0$ vrijedi

$$|OA| : |AB_0| = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153, |OB_0| : |AB_0| = 2 : 1 = 306 : 153.$$

Arhimed je zapravo računao:

- omjere polumjera kružnice prema polovicama duljina stranica opisanih mnogokuta i
- omjere promjera kružnice prema duljinama stranica upisanih mnogokuta.

Za opisane mnogokute gleda pravokutne trokute koje čine središte O , jedna točka A na kružnici (u kojoj po jedna stranica svakog od opisanih mnogokuta dodiruje kružnicu) i susjedni joj vrh B_n pojedinog mnogokuta. Za $\triangle OAB_0$ vrijedi

$$|OA| : |AB_0| = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153, |OB_0| : |AB_0| = 2 : 1 = 306 : 153.$$

$\angle AOB_n$ se prepolavlja u svakom koraku $\Rightarrow$

$$\frac{|OA|}{|AB_{n+1}|} = \frac{|OA| + |OB_n|}{|AB_n|}, \quad \frac{|OB_{n+1}|^2}{|AB_{n+1}|^2} = \frac{|OA|^2 + |AB_{n+1}|^2}{|AB_{n+1}|^2}.$$

Arhimed je zapravo računao:

- omjere polumjera kružnice prema polovicama duljina stranica opisanih mnogokuta i
- omjere promjera kružnice prema duljinama stranica upisanih mnogokuta.

Za opisane mnogokute gleda pravokutne trokute koje čine središte O , jedna točka A na kružnici (u kojoj po jedna stranica svakog od opisanih mnogokuta dodiruje kružnicu) i susjedni joj vrh B_n pojedinog mnogokuta. Za $\triangle OAB_0$ vrijedi

$$|OA| : |AB_0| = \sqrt{3} : 1 > 265 : 153, |OB_0| : |AB_0| = 2 : 1 = 306 : 153.$$

$\angle AOB_n$ se prepolavlja u svakom koraku $\Rightarrow$

$$\frac{|OA|}{|AB_{n+1}|} = \frac{|OA| + |OB_n|}{|AB_n|}, \quad \frac{|OB_{n+1}|^2}{|AB_{n+1}|^2} = \frac{|OA|^2 + |AB_{n+1}|^2}{|AB_{n+1}|^2}.$$

Konačni omjer je $4673 \frac{1}{2} : 153 = |OA| : |AB_4|$, tj. omjer $2r$ i stranice opisanog 96-terokuta $\Rightarrow \pi < \frac{96 \cdot 153}{4673 \frac{1}{2}} = 3 \frac{1335}{9347} < 3 \frac{1}{7}$.

Aktivnost (2): Arhimed i $\sqrt{3}$

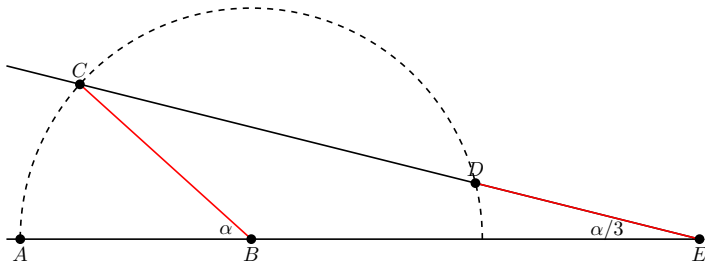
Poliedri i trisekcija

Po Arhimedu se zovu i **Arhimedova tijela**. Prema Papusu, Arhimed je napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojavo sve i primijetio da definiciju zadovoljavaju i pravilne prizme i **antiprizme**.

Poliedri i trisekcija

Po Arhimedu se zovu i **Arhimedova tijela**. Prema Papsu, Arhimed je napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojavo sve i primijetio da definiciju zadovoljavaju i pravilne prizme i **antiprizme**.

Arhimedova „mehanička” trisekcija kuta $\alpha = \angle ABC$



Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: **matematička astronomija**
- u ovom razdoblju nastaje **trigonometrija** (ravninska i sferna) i **sferna geometrija**

Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: **matematička astronomija**
- u ovom razdoblju nastaje **trigonometrija** (ravninska i sferna) i **sferna geometrija**

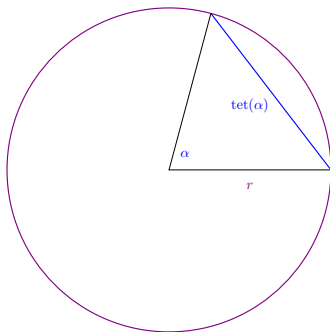
Prethodnik trigonometrije: Aristarh sa Samosa (ca. 310.–230.).

Postklasični helenizam

- smanjena znanstvena aktivnost
- novi rezultati su gotovo isključivo rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara
- iznimka: **matematička astronomija**
- u ovom razdoblju nastaje **trigonometrija** (ravninska i sferna) i **sferna geometrija**

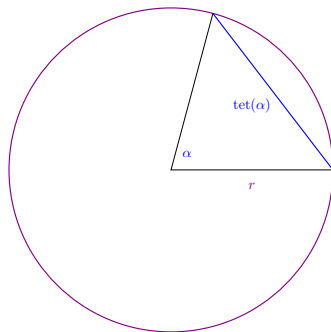
Prethodnik trigonometrije: Aristarh sa Samosa (ca. 310.–230.).
Ocem trigonometrija smatra se **Hiparh iz Niceje** (ca. 190.–120. pr. Kr.). Bavio se i sfernom geometrijom i analizirao stereografsku projekciju.

Tablica tetiva



$$\text{tet}\alpha = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Tablica tetiva

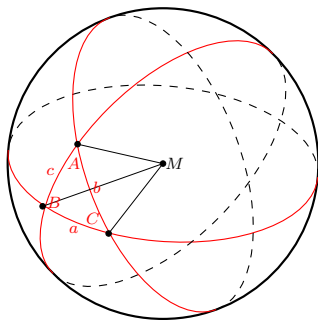


$$\text{tet}\alpha = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Za kut $\bar{\xi} = 60^\circ$ je tetiva $\overline{\nu\zeta} \overline{\iota\eta} = 57^\circ 18'$ — ali, opseg je bio 360°

Menelaj iz Aleksandrije (ca. 70.–130.)

Sphaerica



$$180^\circ \leq A + B + C \leq 540^\circ$$

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklo).

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklo).

Najznačajnije djelo: *Matematike sintaksis/Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklo).

Najznačajnije djelo: *Matematike sintaksis/Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360° , a promjer na 120^P ;

Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklo).

Najznačajnije djelo: *Matematike sintaksis/Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360° , a promjer na 120^P ;
- $\text{tet } 60^\circ = 60^P$;
- $\text{tet } 90^\circ$, $\text{tet } 120^\circ$ isto jednostavno;

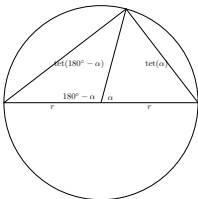
Klaudije Ptolemej (2. st.)

Jedinio čisto matematičko djelo sadrži pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (Proklo).

Najznačajnije djelo: *Matematike sintaksis/Almagest* u kojem daje matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela.

Ptolemejeva tablica tetiva

- Kružnica podijeljena na 360° , a promjer na 120^P ;
- $\text{tet } 60^\circ = 60^P$;
- $\text{tet } 90^\circ$, $\text{tet } 120^\circ$ isto jednostavno;
- $\text{tet } 36^\circ = 37^P 4' 55''$, pa iz toga $\text{tet } 72^\circ$, a iz toga $\text{tet } 144^\circ$ koristeći $(\text{tet } \alpha)^2 + (\text{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$



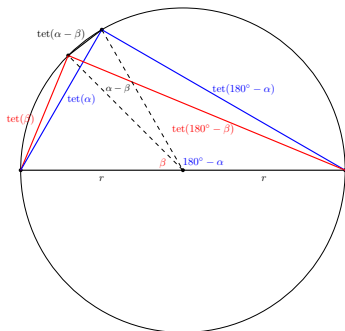
Teorem (Ptolemejev teorem)

U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.

Teorem (Ptolemejev teorem)

U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.

$$\text{tet}(\alpha + \beta) \cdot d = \text{tet}(\alpha)\text{tet}(180^\circ - \beta) + \text{tet}(\beta)\text{tet}(180^\circ - \alpha)$$



Heron iz Aleksandrije, vj. 1. st.

- *Metrica* (o mjeranju, tu je npr. **Heronova formula za površinu trokuta** i **Heronovu metodu za vađenje korijena** na primjeru $\sqrt{720}$, očito je da je znao da se povećanjem broja iteracija povećava točnost),
- *Geometrica* (o površinama)
- *Stereometrica* (o volumenima).

Heronov problem najkraćeg puta

Za zadane točke A i B s iste strane nekog pravca traži se točka C na tom pravcu za koju je $|AC| + |CB|$ najmanja moguća.

Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st.)

Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jedno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.

Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st.)

Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jedno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.

Aritmetika: 150 algebarskih zadataka (teorija brojeva) u 13 „knjiga”

Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st.)

Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jedno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.

Aritmetika: 150 algebarskih zadataka (teorija brojeva) u 13 „knjiga”

Mnogi zadaci u *Aritmetici* su neodređene jednadžbe, tj. jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima, a Diofant razmatra samo rješenja koja se mogu zapisati kao pozitivni razlomci. Diofant je osmislio i posebnu algebarsku notaciju.

Papus iz Aleksandrije, 4. st.

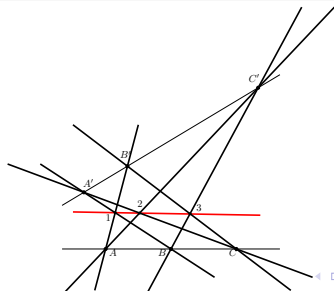
Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija* (jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici).

Papus iz Aleksandrije, 4. st.

Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija* (jedan od glavnih izvora današnjih znanja o antičkoj matematici).

Teorem (Papusov teorem)

Dana su dva pravca i na njima po tri točke: A, B, C odnosno A', B', C' . Neka je točka 1 sjecište AB' i $A'B$, točka 2 sjecište AC' i $A'C$ te točka 3 sjecište BC' i $B'C$. Tada su točke 1, 2 i 3 kolinearne.



Papus je uveo pojam fokusa i direktrise konike. Iskazao je i dokazao

Teorem (Boškovićeva definicija konika)

Neka je dan pravac AB i točka C u ravnini. Neka je iz točke D u istoj ravnini povučen pravac CD i okomica DE na AB i neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je D na konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1, na hiperboli ako je veći od 1 odnosno na elipsi ako je manji od 1.

Matematika u rimskoj državi

Rimljani nisu cijenili matematiku, samo su koristili njezine praktične rezultate u građevini, mjeriteljstvu, računanju kamata i udjela u nasljedstvima.

Samostalnih matematičkih doprinosa nije bilo, a mnogi grčki izvori preneseni su, odnosno prevedeni iskrivljeno i bez razumijevanja.

U školama se učilo računanje na prste, u glavi i pomoću

(rimskog) abakusa.

1	5	10	50	100	500	1000
I	V, A	X	L, C	C, D	D, B	CD, M
I	V	X	L	C	D	M

Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: $IV = IIII$.

¹Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, *palaca*, ili na 16 *digiti*, prstiju.

1	5	10	50	100	500	1000
I	V, Λ	X	L, ⊥	C, ∩	D, Θ	CD, ∞
I	V	X	L	C	D	CD

Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: $IV = IIII$.

Rimljani su kod podjele jedinica mase i novca koristili duodecimalne razlomke. Jedan *as*¹ se dijelio na 12 unci (*uncia*). Znak za uncu bila je točka, a za $\frac{1}{2}$ slovo S (*semis*). Ostali razlomci između $\frac{1}{12}$ i 1 zapisivali su se aditivno korištenjem navedenih, a svaki je imao i svoj poseban naziv, npr. $\frac{2}{3}$ je *bes*, zapisan kao S... Kao i kod Grka ranije, korišteni su i egipatski razlomci.

¹Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.