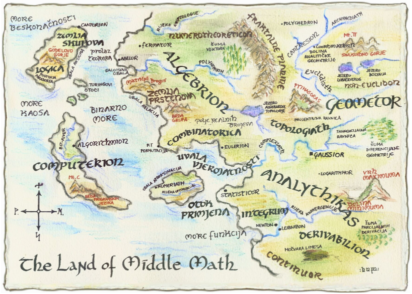
Povijest matematike

5. Arhimed. Postklasični helenizam. Starokineska matematika.

Franka Miriam Brückler



Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Tko je i kad utemeljio metodu ekshaustije?

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Tko je i kad utemeljio metodu ekshaustije? Zašto Arhimedov aksiom nazivamo po njemu?

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Tko je i kad utemeljio metodu ekshaustije? Zašto Arhimedov aksiom nazivamo po njemu? Odakle znamo da je Arhimed svoje teoreme prvo naslutio fizikalno?

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Tko je i kad utemeljio metodu ekshaustije? Zašto Arhimedov aksiom nazivamo po njemu? Odakle znamo da je Arhimed svoje teoreme prvo naslutio fizikalno? Iskažite

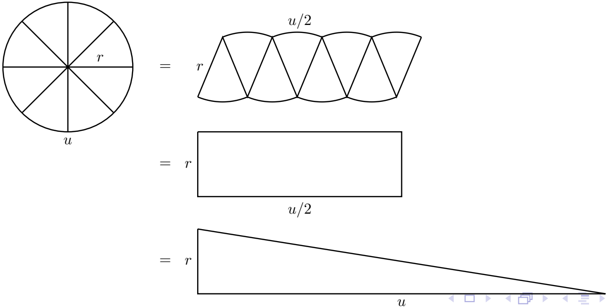
Arhimedov teorem o krugu (*O mjerenju kruga*)

Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije

Tko je i kad utemeljio metodu ekshaustije? Zašto Arhimedov aksiom nazivamo po njemu? Odakle znamo da je Arhimed svoje teoreme prvo naslutio fizikalno? Iskažite

Arhimedov teorem o krugu (*O mjerenju kruga*)

Svaki krug ima jednaku površinu kao pravokutni trokut kojemu je jedna kateta polumjer, a druga opseg tog kruga.



Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π?

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga?

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$.

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n$

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n \; \delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$.

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n$ $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.
Gledamo samo

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n\ \delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.
Gledamo samo $n = 2^k$. Po EEX1 za dovoljno velik k je

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n\ \delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.
Gledamo samo $n = 2^k$. Po EEX1 za dovoljno velik k je $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$, dakle je $P(P_{2^k}) > P(T)$.

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n\ \delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.
Gledamo samo $n = 2^k$. Po EEX1 za dovoljno velik k je $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$, dakle je $P(P_{2^k}) > P(T)$.S druge strane, za svaki n je

$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

Zašto sad stvarno možemo početi govoriti o povijesti broja π? Je li Arhimed uveo oznaku π za omjer opsega i promjera kruga? Koji su osnovni koraci Arhimedovog dokaza teorema o krugu?

1. $P(K)$ nije veća od $P(T)$.
2. $P(T)$ nije manja od $P(K)$.
3. Dakle, $P(T) = P(K)$.

Dokaz 1. tvrdnje (za 2. sami u skripti pročitati): Pretpostavimo $P(K) - P(T) > 0$. Tada u krug upisujemo pravilne n-terokute P_n. Očigledno je $\forall n\ \delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati da $\forall n$ $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$.
Gledamo samo $n = 2^k$. Po EEX1 za dovoljno velik k je $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$, dakle je $P(P_{2^k}) > P(T)$.S druge strane, za svaki n je

$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot a_n}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

$\Rightarrow \forall k\ P(P_{2^k}) - P(T) < 0$ – kontradikcija!

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ *i veći od* $\frac{10}{71}$ *promjera.*

Kako je dobio taj rezultat?

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \ldots$.

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \ldots$. Ako je o_n opseg upisanog a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta, koliko oni iznose za $n = 0$?

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \ldots$. Ako je o_n opseg upisanog a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta, koliko oni iznose za $n = 0$? Što očito vrijedi za te opsege i svaki n?

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \ldots$. Ako je o_n opseg upisanog a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta, koliko oni iznose za $n = 0$? Što očito vrijedi za te opsege i svaki n?
Arhimed je otkrio rekurzivne veze:

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \dots$. Ako je o_n opseg upisanog a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta, koliko oni iznose za $n = 0$? Što očito vrijedi za te opsege i svaki n?
Arhimed je otkrio rekurzivne veze:

$$O_{n+1} = \frac{2O_n\, o_n}{O_n + o_n},$$

Što je još Arhimed dokazao, a da se tiče broja π?

Teorem

Opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer tog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera.

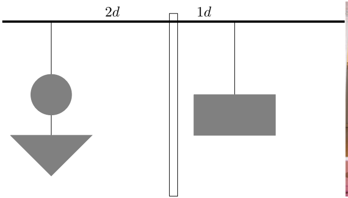
Kako je dobio taj rezultat? Kružnici (polumjera 1) upisujemo i opisujemo pravilne $6 \cdot 2^n$-erokuta, $n = 0, 1, \ldots$. Ako je o_n opseg upisanog a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$-erokuta, koliko oni iznose za $n = 0$? Što očito vrijedi za te opsege i svaki n?
Arhimed je otkrio rekurzivne veze:

$$O_{n+1} = \frac{2O_n\, o_n}{O_n + o_n},\, o_{n+1} = \sqrt{o_n\, O_{n+1}}.$$

$\boxed{\text{Arhimedov teorem o kugli}}$ (*O kugli i valjku*)

Arhimedov teorem o kugli (*O kugli i valjku*)

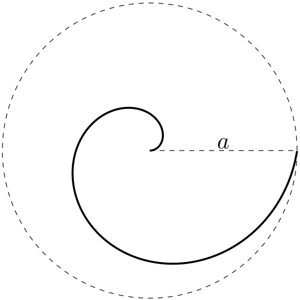
Volumen kugle je $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru). Oplošje kugle je 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle je $\frac{2}{3}$ oplošja opisanog joj valjka.

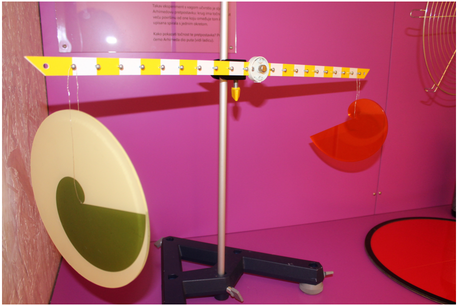


Desne slike su snimljene tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

Što je Arhimedova spirala i zašto se naziva po Arhimedu?

Što je Arhimedova spirala i zašto se naziva po Arhimedu?

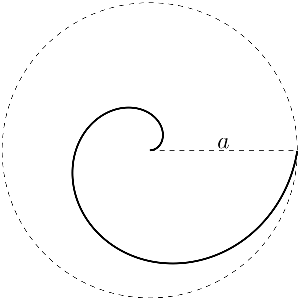


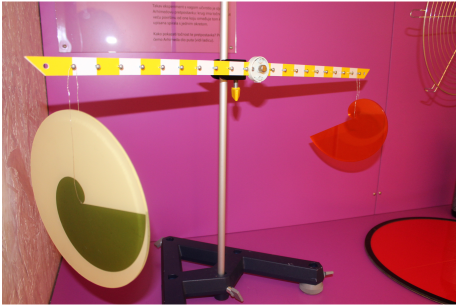


Slika desno je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

Što ilustrira desna slika gore?

Što je Arhimedova spirala i zašto se naziva po Arhimedu?





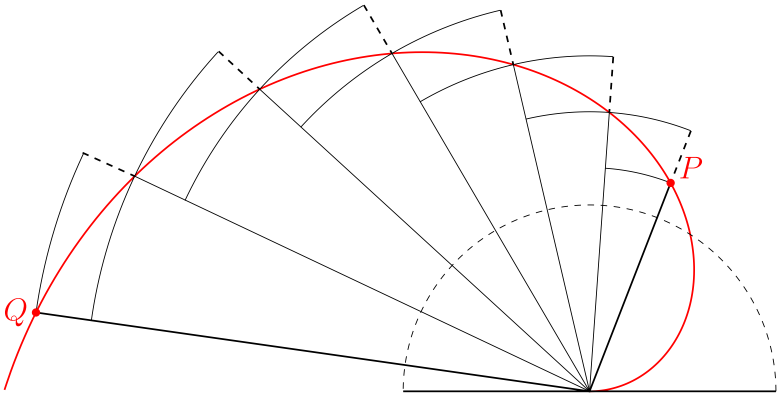
Slika desno je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.

Što ilustrira desna slika gore?

Teorem

Isječak Arhimedove spirale između dva radij-vektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa 6a. Posebno, površina jednog okreta je trećina površine opisanog kruga.

Objasnite vezu ove ilustracije s dokazom prethodnog teorema!



Koji zaobljeni likovi se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom?

Koji zaobljeni likovi se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom? Kako kvadriramo segment parabole?

Koji zaobljeni likovi se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom? Kako kvadriramo segment parabole?

Teorem

Površina segmenta parabole jednaka je $\frac{4}{3}$ *površine trokuta kojemu je jedna stranic tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom.*

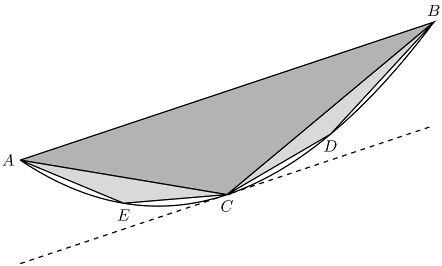
Dokažite taj teorem!

Koji zaobljeni likovi se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom? Kako kvadriramo segment parabole?

Teorem

Površina segmenta parabole jednaka je $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranic tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom.

Dokažite taj teorem!



Po Arhimedu se zovu i

Po Arhimedu se zovu i $\boxed{\text{Arhimedova tijela}}$. Tko mu ih je pripisao?

Po Arhimedu se zovu i $\boxed{\text{Arhimedova tijela}}$. Tko mu ih je pripisao? Čiji je najastariji sačuvan opis tih tijela?

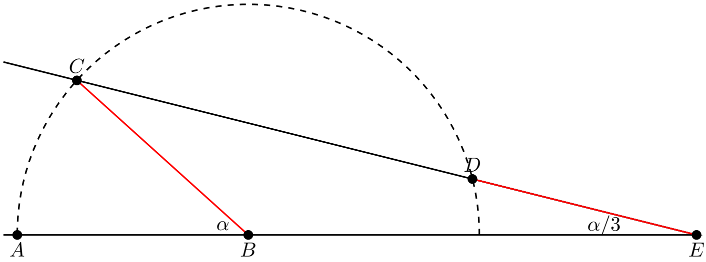
Po Arhimedu se zovu i Arhimedova tijela. Tko mu ih je pripisao? Čiji je najastariji sačuvan opis tih tijela? Što su to pravilne antiprizme?

Po Arhimedu se zovu i $\boxed{\text{Arhimedova tijela}}$. Tko mu ih je pripisao? Čiji je najastariji sačuvan opis tih tijela? Što su to pravilne $\boxed{\text{antiprizme}}$?

Opišite i dokažite Arhimedovu „mehaničku" trisekciju kuta

Po Arhimedu se zovu i Arhimedova tijela. Tko mu ih je pripisao? Čiji je najastariji sačuvan opis tih tijela? Što su to pravilne antiprizme?

Opišite i dokažite Arhimedovu „mehaničku” trisekciju kuta



Postklasični helenizam

Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku?

Postklasični helenizam

Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku? Glavne matematičke novosti u ovom razdoblju su

Postklasični helenizam

Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku? Glavne matematičke novosti u ovom razdoblju su trigonometrija i sferna geometrija.

Postklasični helenizam

Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku? Glavne matematičke novosti u ovom razdoblju su trigonometrija i sferna geometrija.
Prethodnik utemeljenja trigonometrije bio je Aristarh sa Samosa (oko 310.–230. pr. Kr.), a ocem trigonometrija smatra se

Postklasični helenizam

Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku? Glavne matematičke novosti u ovom razdoblju su trigonometrija i sferna geometrija.

Prethodnik utemeljenja trigonometrije bio je Aristarh sa Samosa (oko 310.–230. pr. Kr.), a ocem trigonometrija smatra se Hiparh iz Niceje (oko 190.–120. pr. Kr.). Što znate o njemu?

Postklasični helenizam

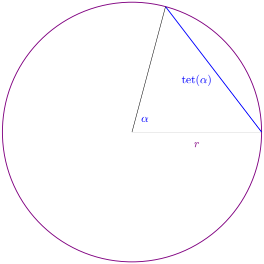
Koje je to razdoblje, koje su mu glavne karakteristike za matematiku? Glavne matematičke novosti u ovom razdoblju su trigonometrija i sferna geometrija.
Prethodnik utemeljenja trigonometrije bio je Aristarh sa Samosa (oko 310.–230. pr. Kr.), a ocem trigonometrija smatra se Hiparh iz Niceje (oko 190.–120. pr. Kr.). Što znate o njemu? Na što mislimo kad kažemo da je utemeljio trigonometriju?

Račun tetiva

Koja je veza starogrčke tetive s modernom trigonometrijom?

Račun tetiva

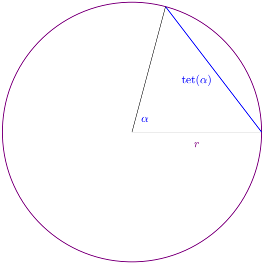
Koja je veza starogrčke tetive s modernom trigonometrijom?



$$\mathrm{tet}(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Račun tetiva

Koja je veza starogrčke tetive s modernom trigonometrijom?

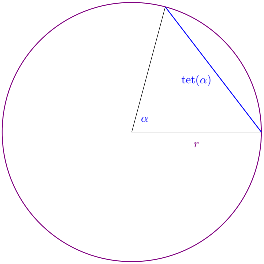


$$\text{tet}(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

Koji brojevni sustav se koristio u ovo doba?

Račun tetiva

Koja je veza starogrčke tetive s modernom trigonometrijom?



$$\mathrm{tet}(\alpha) = 2r \sin\frac{\alpha}{2}$$

Koji brojevni sustav se koristio u ovo doba? Ako znate da je za krug opsega $\overline{\tau\xi}$ i središnji kut $\overline{\xi}$ Hiparh naveo da je tetiva $\overline{\nu\zeta}$ $\overline{\iota\eta}$, kojoj aproksimaciji broja π to odgovara?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\overline{\xi}$?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\overline{\xi}$? Od $\overline{ϙ}$?
- Ako je $\mathrm{tet}\, 36^\circ = 37^p 4\ 55$, koliko je $\mathrm{tet}\, 72^\circ$?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\overline{\xi}$? Od $\overline{\text{ϙ}}$?
- Ako je $\mathrm{tet}\, 36^\circ = 37^p 4\ 55$, koliko je $\mathrm{tet}\, 72^\circ$?
- Kojoj modernoj formuli odgovara $(\mathrm{tet}\,\alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$? Dokažite ju!

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\bar{\xi}$? Od $\overline{ϙ}$?
- Ako je $\mathrm{tet}\, 36^\circ = 37^p 4\ 55$, koliko je $\mathrm{tet}\, 72^\circ$?
- Kojoj modernoj formuli odgovara $(\mathrm{tet}\, \alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$? Dokažite ju! Koliko iznose tetive od 120° i 144°?

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\overline{\xi}$? Od $\overline{\text{ϙ}}$?
- Ako je $\mathrm{tet}\,36^\circ = 37^p 4\;55$, koliko je $\mathrm{tet}\,72^\circ$?
- Kojoj modernoj formuli odgovara $(\mathrm{tet}\,\alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$? Dokažite ju! Koliko iznose tetive od 120° i 144°?
- Iskažite Ptolemejev teorem. Objasnite kako iz njega slijedi adicijski teorem za tetive $\mathrm{tet}(\alpha + \beta) \cdot d = \mathrm{tet}(\alpha)\mathrm{tet}(180^\circ - \beta) + \mathrm{tet}(\beta)\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha)$.

Koji znanstvenik je u postklasičnom helenizmu najviše razvio račun tetiva? Koji su matematički doprinosi Klaudije Ptolemej (2. st.) izvan trigonometrije? Koje mu je glavno djelo? Koja je tema *Almagesta*? Koje su glavne karakteristike Ptolemejeve tablice tetiva?

$$\text{opseg } 360^\circ = \overline{\tau\xi}, \text{ promjer } 120^p = \overline{\rho\kappa}$$

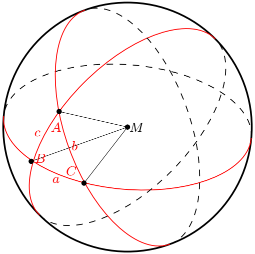
- Koliko iznosi Ptolemejeva tetiva od $\overline{\xi}$? Od $\overline{\text{ϙ}}$?
- Ako je $\mathrm{tet}\, 36^\circ = 37^p 4\ 55$, koliko je $\mathrm{tet}\, 72^\circ$?
- Kojoj modernoj formuli odgovara $(\mathrm{tet}\,\alpha)^2 + (\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$? Dokažite ju! Koliko iznose tetive od 120° i 144°?
- Iskažite Ptolemejev teorem. Objasnite kako iz njega slijedi adicijski teorem za tetive $\mathrm{tet}(\alpha + \beta) \cdot d = \mathrm{tet}(\alpha)\mathrm{tet}(180^\circ - \beta) + \mathrm{tet}(\beta)\mathrm{tet}(180^\circ - \alpha)$. Izračunajte $\mathrm{tet}\, 132^\circ$.

Sferna geometrija

Koje su glavne karakteristike sferne geometrije?

Sferna geometrija

Koje su glavne karakteristike sferne geometrije?

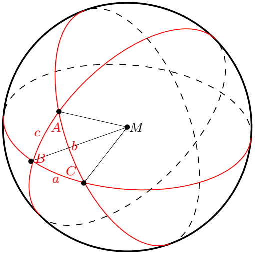


$$180^\circ \leq A + B + C \leq 540^\circ$$

Zašto ona nije u kontradikciji s izvornim Euklidovim postulatom o paralelama?

Sferna geometrija

Koje su glavne karakteristike sferne geometrije?

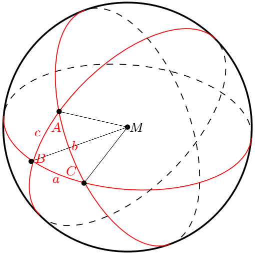


$$180^\circ \leq A + B + C \leq 540^\circ$$

Zašto ona nije u kontradikciji s izvornim Euklidovim postulatom o paralelama? Čiji i koji su najznačajniji doprinosi sfernog geometriji u postklasičnom helenizmu?

Sferna geometrija

Koje su glavne karakteristike sferne geometrije?



$$180^\circ \leq A + B + C \leq 540^\circ$$

Zašto ona nije u kontradikciji s izvornim Euklidovim postulatom o paralelama? Čiji i koji su najznačajniji doprinosi sfernog geometriji u postklasičnom helenizmu?

Menelaj iz Aleksandrije (ca. 70.–130.) — *Spaherica*

Iskažite Menelajev teorem!

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije?

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu?

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu? Koje su najbitnije karakteristike Diofantove *Aritmetike*?

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu? Koje su najbitnije karakteristike Diofantove *Aritmetike*? Koristeći Diofantovu simboliku zapišite dva polinoma, jedan stupnja 2 i jedan stupnja 4!

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu? Koje su najbitnije karakteristike Diofantove *Aritmetike*? Koristeći Diofantovu simboliku zapišite dva polinoma, jedan stupnja 2 i jedan stupnja 4!
- Zašto je značajan Papus iz Aleksandrije?

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu? Koje su najbitnije karakteristike Diofantove *Aritmetike*? Koristeći Diofantovu simboliku zapišite dva polinoma, jedan stupnja 2 i jedan stupnja 4!
- Zašto je značajan Papus iz Aleksandrije? Iskažite Papusov teorem!

- Po čemu je Heron iz Aleksandrije bitno drugačiji od ostalih starogrčkih matematičara? Koja su mu tri glavna djela? Koji su mu najpoznatiji rezultati?
- Što znate o Diofantu iz Aleksandrije? Zašto se diofantske jednadžbe zovu po njemu? Koje su najbitnije karakteristike Diofantove *Aritmetike*? Koristeći Diofantovu simboliku zapišite dva polinoma, jedan stupnja 2 i jedan stupnja 4!
- Zašto je značajan Papus iz Aleksandrije? Iskažite Papusov teorem! Koji su Papusovi doprinosi teoriji konika?

Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike?

Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama?

Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama? Što je rimski abakus?

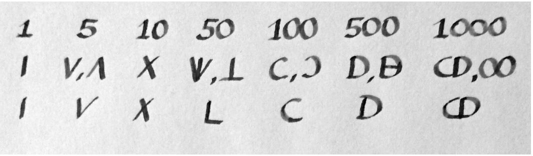
Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama? Što je $\boxed{\text{rimski abakus}}$?
Je li MMXXV pravilno rimskim brojkama zapisana ova godina?

Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama? Što je rimski abakus?

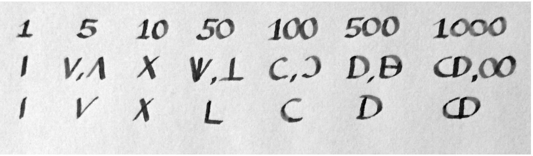
Je li MMXXV pravilno rimskim brojkama zapisana ova godina?



Koje su karakteristike rimskog brojevnog sustava?

Matematika u rimskoj državi

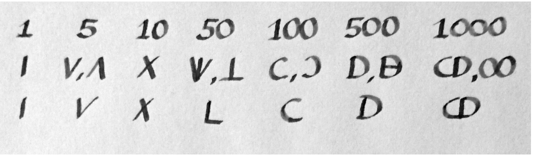
Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama? Što je rimski abakus?
Je li MMXXV pravilno rimskim brojkama zapisana ova godina?



Koje su karakteristike rimskog brojevnog sustava? Kako su Rimljani izražavali razlomke?

Matematika u rimskoj državi

Koje su glavne karatkeristike? Kako se računalo u rimskim školama? Što je $\boxed{\text{rimski abakus}}$?
Je li MMXXV pravilno rimskim brojkama zapisana ova godina?



Koje su karakteristike rimskog brojevnog sustava? Kako su Rimljani izražavali razlomke? Zapišite broj kojeg danas zapisujemo kao $256\,\frac{3}{4}$ rimskim brojkama iz doba carstva!

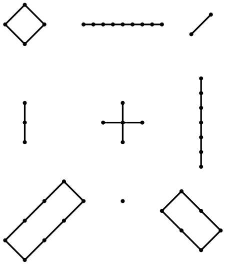
Malo ranokineske povijesti

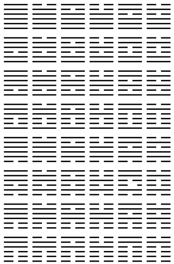
- Čega se vi iz škole sjećate o kineskoj povijesti?

Malo ranokineske povijesti

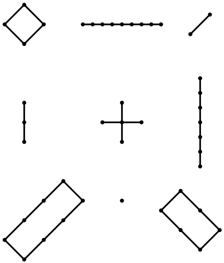
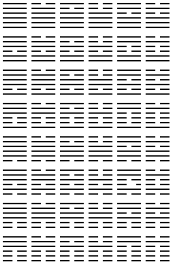
- Čega se vi iz škole sjećate o kineskoj povijesti?
- najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce: 3000.–1500. pr. Kr. (iza 2000.: kinesko pismo; iza 1500.: dekadski brojevni sustav i starokineske brojke)
- prvi pouzdaniji podaci: iz doba dinastije Zhou (Chou) (11.–5. st. pr. Kr.): Halleyev komet, kalendari, Konfucije i Lao Ce
- U doba dinastije Han (206. pr. Kr. – 220. AD): procvat matematike, znanosti i tehnike, pridaje se važnost matematičkom obrazovanju; najstariji sačuvani matematički tekstovi; proizvodnja papira; Sunčeve pjege, seizmograf, . . . U 1. st. prodire budizam iz Indije; u 3. st. carstvo se raspalo.

Što je prikazano na slikama dolje?



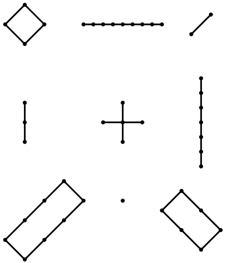
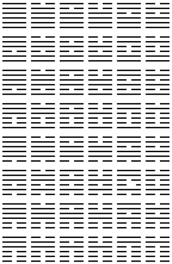


Što je prikazano na slikama dolje?

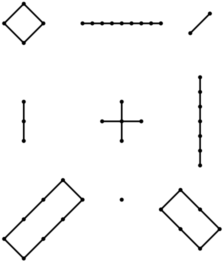
Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje?

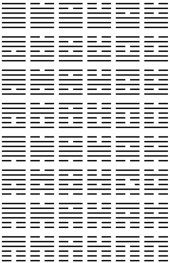
Što je prikazano na slikama dolje?

Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje? Zapišite današnji datum koristeći $\boxed{\text{štapičaste brojke}}$ (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)!

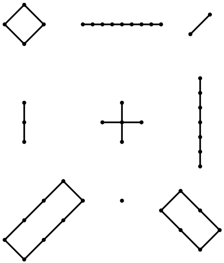
Što je prikazano na slikama dolje?

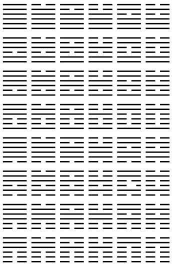




Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje? Zapišite današnji datum koristeći štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)!
Što je vezano za brojeve glavna novost koju su donijeli Kinezi? Kada?

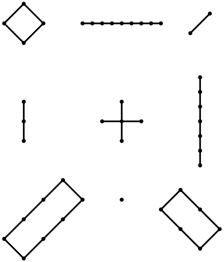
Što je prikazano na slikama dolje?

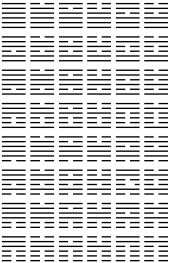




Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje? Zapišite današnji datum koristeći $\boxed{\text{štapičaste brojke}}$ (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)!
Što je vezano za brojeve glavna novost koju su donijeli Kinezi? Kada? Kakav efekt je uvođenje negativnih brojeva imalo na štapiće i štapišaste brojke?

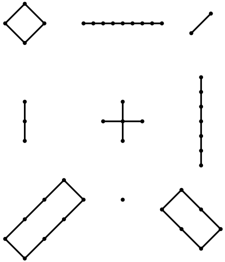
Što je prikazano na slikama dolje?

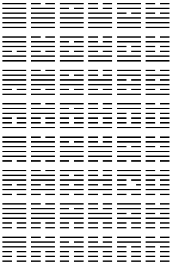




Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje? Zapišite današnji datum koristeći štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)!
Što je vezano za brojeve glavna novost koju su donijeli Kinezi? Kada? Kakav efekt je uvođenje negativnih brojeva imalo na štapiće i štapišaste brojke? Što je s nulom?

Što je prikazano na slikama dolje?

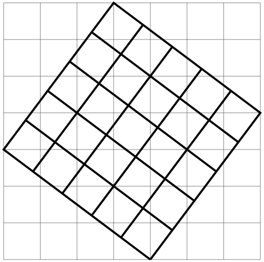




Otkad sigurno u upotrebi dekadski pozicijski sustav bez nule? Što je korišteno za prikaz brojeva i računanje? Zapišite današnji datum koristeći štapičaste brojke (vertikalno: neparne potencije, horizontalno: parne potencije)!
Što je vezano za brojeve glavna novost koju su donijeli Kinezi? Kada? Kakav efekt je uvođenje negativnih brojeva imalo na štapiće i štapišaste brojke? Što je s nulom? Zapišite 41205 i -803 štapićastim brojkama!
Napomena: Pozitivni brojevi dženg (zheng), negativni fu

Kako se zove i kad se datira najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst?

Kako se zove i kad se datira najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst? Uz zadatke vezane za astronomske i kalendarske izraćune, najzanimljiviji dio sadržaja u Džoubi suanđing (*Aritmetika Džouovog gnomona*) je vezano uz pravilo gou gu — što je to?



U to doba se u Kini počeo koristiti i abakus — kako se zove kineski abakus ?

Điudžang šuanšu

Kako hrvatski prevodimo naziv ovog najpoznatijeg starokineskog matematičkog teksta? Što se zna o njegovom nastanku? Kako je strukturiran?

Điudžang šuanšu

Kako hrvatski prevodimo naziv ovog najpoznatijeg starokineskog matematičkog teksta? Što se zna o njegovom nastanku? Kako je strukturiran? Koja od $\boxed{\text{Devet poglavlja umijeća računanja}}$ su matematički najzanimljivija? Što su od matematike znali tadapšnji Kinezi?

1. „Mjerenje polja"
2. „Proso i riža"
3. „Raspodjela po proporciji"
4. „Koja širina?"
5. „Konstrukcijski savjeti"
6. „Pošteni nameti"
7. „Višak i manjak"
8. „Pravokutne tablice"
9. „Pravokutni trokuti"

4. Koja širina? (Numeričko računanje drugih i trećih korijena)

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

4. Koja širina? (Numeričko računanje drugih i trećih korijena)

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

4. Koja širina? (Numeričko računanje drugih i trećih korijena)

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

4. Koja širina? (Numeričko računanje drugih i trećih korijena)

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + \ldots \Rightarrow b = 3$$

4. Koja širina? (Numeričko računanje drugih i trećih korijena)

12. zadatak (metoda kai fang)

$$\sqrt{55225} = ?$$

$$\lfloor\sqrt{55225}\rfloor = (abc) \Leftrightarrow 55225 = (100a + 10b + c)^2$$

$$55225 = 10000a^2 + \ldots \Rightarrow a = 2$$

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + \ldots \Rightarrow b = 3$$

$$2325 = (460 + c)\,c \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \lfloor\sqrt{55225}\rfloor = 235.$$

8. Pravokutne tablice (Rješavanje linearnih sustava)

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što?

8. Pravokutne tablice (Rješavanje linearnih sustava)

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što? Postavite i riješite odgovarajući sustav na moderan način! Zatim komentirajte izvorno rješenje:

8. Pravokutne tablice (Rješavanje linearnih sustava)

1. zadatak (metoda fang čeng)

Iz 3 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou. Iz 2 snopa dobrog žita, 3 snopa srednjeg i 1 snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz 1 snopa dobrog žita, 2 snopa srednjeg i 3 snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?

Očito je dou mjera za što? Postavite i riješite odgovarajući sustav na moderan način! Zatim komentirajte izvorno rješenje:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

Rješenje je $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ dou za loše, $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou za srednje i $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou za dobro žito.

- Po čemu je poznat Džang Heng, kad je živio?

- Po čemu je poznat Džang Heng, kad je živio? U prvom od *Devet poglavlja* dano je empirijsko pravilo

  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od tri puta kvadrat promjera.

  Usporedite s modernom formulom! Kako je Džang Heng modificirao to pravilo? Kojoj aproksimaciji od π to odgovara?

- Po čemu je poznat Džang Heng, kad je živio? U prvom od *Devet poglavlja* dano je empirijsko pravilo

  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od tri puta kvadrat promjera.

  Usporedite s modernom formulom! Kako je Džang Heng modificirao to pravilo? Kojoj aproksimaciji od π to odgovara?
- Po čemu je poznat i kad je živio Liu Hui?

- Po čemu je poznat Džang Heng, kad je živio? U prvom od *Devet poglavlja* dano je empirijsko pravilo

  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od tri puta kvadrat promjera.

  Usporedite s modernom formulom! Kako je Džang Heng modificirao to pravilo? Kojoj aproksimaciji od π to odgovara?
- Po čemu je poznat i kad je živio Liu Hui? Koja je tema *Matematičkog priručnika o jednom otoku u moru*?

- Po čemu je poznat Džang Heng, kad je živio? U prvom od *Devet poglavlja* dano je empirijsko pravilo

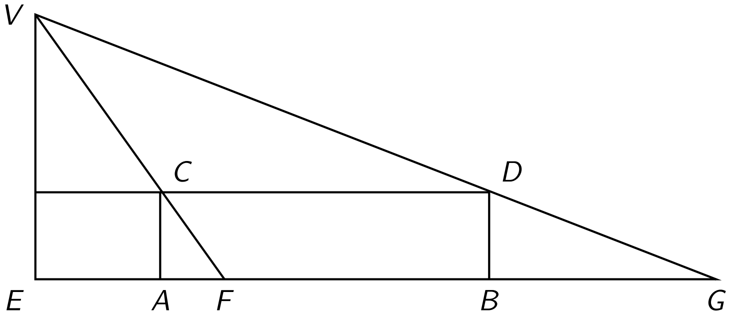
  (Površina kruga je) četvrtina umnoška od tri puta kvadrat promjera.

  Usporedite s modernom formulom! Kako je Džang Heng modificirao to pravilo? Kojoj aproksimaciji od π to odgovara?
- Po čemu je poznat i kad je živio Liu Hui? Koja je tema *Matematičkog priručnika o jednom otoku u moru*? Riješite (180 džang $=$ 300 bu):

Zadatak

Dva štapa visine 3 *džang zabijeni su u zemlju i razmaknuti* 1000 bu. *Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji* 123 bu *iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji* 127 bu *iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?*

Komentirajte izvorno rješenje: ,,Ši (djeljenik) je umnožak razmaka (štapova) i visine štapa. Uzevši razliku udaljenosti točaka iz kojih se promatra kao fa (djelitelj) i pribrajajući što se tako dobije (količnik) visini štapa dobije se visina otoka. Da bite našli udaljenost otoka do prednjeg štapa, pomnožite (udaljenost) pomak unatrag od prednjeg štapa s razmakom štapova da biste dobili ši. Uzevši razliku udaljenosti točaka promatranja (do štapova) kao fa da biste podijelili (ši), dobit ćete udaljenost štapa do otoka."



7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Koje su matematičke novosti u tom razdoblju kineske povijesti?

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Koje su matematičke novosti u tom razdoblju kineske povijesti?

- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjenjuan*

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Koje su matematičke novosti u tom razdoblju kineske povijesti?

- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjenjuan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Koje su matematičke novosti u tom razdoblju kineske povijesti?

- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjenjuan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i
- opći slučaj kineskog teorema o ostacima (kod koga se prvi put pojavljuje?)

7.–13. stoljeće

- 618.–906. dinastija Tang: novi procvat
- 960.–1278. sjeverna pa južna dinastija Sung: tisak s pomičnim slovima, državni ispiti za službenike, konfucijanizam obvezan
- u 13. st. Mongoli (Marko Polo 1275. u Pekingu)

Koje su matematičke novosti u tom razdoblju kineske povijesti?

- Poopćenje metoda korjenovanja na iterativne metode rješavanja polinomijalnih jednadžbi. Vrhunac: metoda *tjenjuan* (de facto Hornerov algoritam) Ćin Điušao, *Devet knjiga o matematici* (*Šušu điudžang*, 1247.), gdje je i
- opći slučaj kineskog teorema o ostacima (kod koga se prvi put pojavljuje?)
- Riješite Zadatak 100 ptica (5. st.): *Ako jedan pijevac košta* 5 *novčića, jedna kokoš* 3, *a tri pilića zajeno* 1, *koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za* 100 *novčića ako treba kupiti ukupno* 100 *ptica?*

Za sljedeće predavanje . . .

Pročitajte i pripremite se za diskusiju o

- staroindijskoj matematici, posebno o povijesti nule i indoarapskog dekadskog sustava te indijskim doprinosima trigonometriji
- arapskoj matematici do 1000. godine (do al-Karadžija), posebno o al-Kvarizmiju