

Povijest matematike

7. Matematika arapskog kalifata nakon al Hvarizmija. Srednjevjekovna europska matematika.

Franka Miriam Brückler



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Najvažnija imena srednjekovne islamske matematike

Al-Hvarizmi
Tabit ibn Kurra Abu Kamil Šuja Al-Battani



Abu al-Wafa
Al-Karadži Al-Hajtam
Omar Khayyam
Nasir ad-Din at Tusi Al-Kaši

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?
- Tko je odvojio algebru od geometrije?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?
- Tko je odvojio algebru od geometrije?
- Koji su drugi doprinosi al-Karadžija?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?
- Tko je odvojio algebru od geometrije?
- Koji su drugi doprinosi al-Karadžija?
- Tko je proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju na kubne jednačbe?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?
- Tko je odvojio algebru od geometrije?
- Koji su drugi doprinosi al-Karadžija?
- Tko je proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju na kubne jednačbe? Po čemu je još poznat Omar Khayyam?
- Objasnite Khayyamovu klasifikaciju kubnih jednačbi. Što on tvrdi o njihovim rješenjima? Što je prvi uočio vezano za kubne jednačbe?

„Arapska“ algebra

- Koji su značajni nastavljači Al-Hvarizmijevog djela?
- Zašto je važan Abu Kamil Šuja?
- Tko je odvojio algebru od geometrije?
- Koji su drugi doprinosi al-Karadžija?
- Tko je proširio Al-Hvarizmijevu klasifikaciju na kubne jednačbe? Po čemu je još poznat Omar Khayyam?
- Objasnite Khayyamovu klasifikaciju kubnih jednačbi. Što on tvrdi o njihovim rješenjima? Što je prvi uočio vezano za kubne jednačbe? Na Khayyamov način riješite jednačbu

$$x^3 + 9x = 36$$

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?
- Što znači i što sadrži, čije je djelo *Kitab al-zij*?

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?
- Što znači i što sadrži, čije je djelo *Kitab al-zij*? Kako je latinizirano ime Al-Battanija?

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?
- Što znači i što sadrži, čije je djelo *Kitab al-zij*? Kako je latinizirano ime Al-Battanija?
- Po čemu je za trigonometriju značajan Nasir ad-Din al-Tusi?

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?
- Što znači i što sadrži, čije je djelo *Kitab al-zij*? Kako je latinizirano ime Al-Battanija?
- Po čemu je za trigonometriju značajan Nasir ad-Din al-Tusi?
- Što je to al-Kašijev teorem?

„Arapska“ trigonometrija

- Koji su glavni arapski doprinosi trigonometriji?
- Što znači i što sadrži, čije je djelo *Kitab al-zij*? Kako je latinizirano ime Al-Battanija?
- Po čemu je za trigonometriju značajan Nasir ad-Din al-Tusi?
- Što je to al-Kašijev teorem? Tko je bio al-Kaši i koji su mu doprinosi?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?
- Tko je dokazao „ Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p q$ i $2^n r$ prijateljski.“? Što su prijateljski brojevi?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?
- Tko je dokazao „ Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p q$ i $2^n r$ prijateljski. “? Što su prijateljski brojevi?
- Koji je jedini matematičar arapskog kalifata u čijem djelu nalazimo negativne brojeve? Čemu je još doprinijeo?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?
- Tko je dokazao „ Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p q$ i $2^n r$ prijateljski.“? Što su prijateljski brojevi?
- Koji je jedini matematičar arapskog kalifata u čijem djelu nalazimo negativne brojeve? Čemu je još doprinijeo?
- Što je to Alhazenov problem geometrijske optike?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?
- Tko je dokazao „ Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p q$ i $2^n r$ prijateljski.“? Što su prijateljski brojevi?
- Koji je jedini matematičar arapskog kalifata u čijem djelu nalazimo negativne brojeve? Čemu je još doprinijeo?
- Što je to Alhazenov problem geometrijske optike? Što još znate o Al-Hajtamu?

Ostali doprinosi

- Kod koga nalazimo rani oblik matematičke indukcije?
- Kod koga nalazimo varijantu zadatka 100 ptica?
- Tko je dokazao „ Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n p q$ i $2^n r$ prijateljski.“? Što su prijateljski brojevi?
- Koji je jedini matematičar arapskog kalifata u čijem djelu nalazimo negativne brojeve? Čemu je još doprinijeo?
- Što je to Alhazenov problem geometrijske optike? Što još znate o Al-Hajtamu?
- Tko je uveo decimalne razlomke?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj? **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.), *De institutione arithmetica*. Za što je još zaslužan Boethius?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj? **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.), *De institutione arithmetica*. Za što je još zaslužan Boethius? **trivium + quadrivium = septem artes liberales**

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj? **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.), *De institutione arithmetica*. Za što je još zaslužan Boethius? **trivium + quadrivium = septem artes liberales**

Kad započinje ponovno organiziranje obrazovanje? Tko je potaknuo tu reformu, a tko je bio glavni u njenom provođenju?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj? **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.), *De institutione arithmetica*. Za što je još zaslužan Boethius? **trivium + quadrivium = septem artes liberales**

Kad započinje ponovno organiziranje obrazovanje? Tko je potaknuo tu reformu, a tko je bio glavni u njenom provođenju? Po čemu je poznat **Alkuinov** (oko 735.–804.)

Propositiones ad acuendos iuvenes?

Europski srednji vijek

O kojem razdoblju govorimo? Zašto su pogotovo prije 10. st. uvjeti za znanstvenu i obrazovnu aktivnost bili loši?

Tko je autor dugo najpopularnijeg matematičkog obrazovnog teksta? Kako se taj teks zvao? Kakav mu je sadržaj? **Anicius Manlius Severinus Boethius** (ca. 480.–525.), *De institutione arithmetica*. Za što je još zaslužan Boethius? **trivium + quadrivium = septem artes liberales**

Kad započinje ponovno organiziranje obrazovanje? Tko je potaknuo tu reformu, a tko je bio glavni u njenom provođenju? Po čemu je poznat **Alkuinov** (oko 735.–804.)

Propositiones ad acuendos iuvenes?

Dva zadatka iz „Prijedloga za inspiriranje omladine“

Primjer

Jedan svinjogojac je rekao: „Želim kupiti 100 svinja za 100 libri. Prasac ko v sta deset libri, krmača košta pet libri, a dva praščića se mogu kupiti za jednu libru.“ Koliko prasaca, krmača i praščića taj svinjogojac može kupiti ako potroši sav novac?

Primjer

Tri muškarca, svaki s po jednom sestrom, žele prijeći rijeku. Našli su samo mali čamac s kojim samo dvije osobe odjenom mogu prijeći rijeku. Kako su prešli rijeku, tako da nijedna od djevojaka ni u kojem trenu nije sama s muškarcem koji joj nije brat ni u čamcu ni na obali?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba? Tko su bili **abacisti i algoristi**?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba? Tko su bili **abacisti i algoristi**? Koje su karakteristike **skolastike**?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba? Tko su bili **abacisti i algoristi**? Koje su karakteristike **skolastike**?

Tko je bio **Gerbert iz Aurillaca** (oko 946.–1003.)? Po čemu je značajan?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba? Tko su bili **abacisti i algoristi**? Koje su karakteristike **skolastike**?

Tko je bio **Gerbert iz Aurillaca** (oko 946.–1003.)? Po čemu je značajan?

Gerbertov abakus

Koji su najznačajniji prevodioci arapskih matematičkih tekstova u visokom srednjem vijeku? Je li prevođenje doslovno?

Kontakt s Arapima

Kako/gdje su Europljani došli u kontakt sa znanjima arapskog svijeta? U koje doba? Koji je glavni centar arapske kulture i znanosti u to doba?

Al-Andalus

Koje su karakteristike visokog srednjeg vijeka? Glavni povijesni događaji tog doba? Tko su bili **abacisti i algoristi**? Koje su karakteristike **skolastike**?

Tko je bio **Gerbert iz Aurillaca** (oko 946.–1003.)? Po čemu je značajan?

Gerbertov abakus

Koji su najznačajniji prevodioci arapskih matematičkih tekstova u visokom srednjem vijeku? Je li prevođenje doslovno?

Tko je bio jedini veliki matematičar europskog srednjeg vijeka?

Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

Što znate o njegovom životu?

Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

Što znate o njegovom životu? Koji su mu matematički tekstovi i koje su im teme? Koji su mu najvažniji matematički doprinosi?

Fibonacci (Leonardo iz Pise), ca. 1170.–1250.

Što znate o njegovom životu? Koji su mu matematički tekstovi i koje su im teme? Koji su mu najvažniji matematički doprinosi?

Liber Abaci iliti Knjiga o računanju

- rimske brojke i brojanje prstima
- **indoarapski pozicijski sustav s nulom!!!**
- računanje u dekadskom sustavu (indoarapske brojke)
- razlomci i računanje s njima (uveo je razlomačku crtu)
- trgovačka računica (tu je i problem sto ptica :-))
- zadaci zabavne matematike (Fibonaccijevi brojevi)
- neki od tih zadataka vode na jednadžbe i sustave (uključivo neodređene)
- nepoznanicu naziva *res* ili *radix*; druge potencije nepoznanice: *quadratus* ili *census*, *cubus*, *census de censu*, *cubus cubi*; konstanta: *numerus*, *denarius*, *dragma*
- očit utjecaj arapske matematike (npr. klasifikacija i rješavanje kvadratnih jednadžbi)

Zadatak o pronađenom novčaniku

Nađen je novčanik s nepoznatim iznosom b novca u njemu. Četvorica nalaznika imaju po x_i , $i = 1, 2, 3, 4$ novca. Uvjeti vode na sustav

$$x_1 + b = 2(x_2 + x_3)$$

$$x_2 + b = 3(x_3 + x_4)$$

$$x_3 + b = 4(x_4 + x_1)$$

$$x_4 + b = 5(x_1 + x_2)$$

Kaže Leonardo:

„Pokazat ću da ovaj problem nije rješiv ako se ne dozvoli da je prvi partner u dugu.” — **razumije negativne brojeve!!!**

Kao jedno rješenje daje $-1, 4, 1, 4$ i $b = 11$.

Zadaci s natjecanja

Car Friedrich II je 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

Zadaci s natjecanja

Car Friedrich II je 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

- 1 Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo? (126, 282/2, 282/3, 282/6)

Zadaci s natjecanja

Car Friedrich II je 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

- 1 Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo? (126, 282/2, 282/3, 282/6)
- 2 naći razlomak x takav da su $x^2 \pm 5$ kvadrati razlomaka (41/12);

Zadaci s natjecanja

Car Friedrich II je 1225. s dvorom došao u Rim te odgodio odlazak u križarski rat kako bi organizirao natjecanje iz matematike. Na tom je natjecanju Friedrichov dvorski filozof Ivan iz Palerma zadao sljedeće zadatke:

- 1 Tri čovjeka posjeduju hrpicu novca, a udjeli su im $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{6}$. S vremenom, svaki je uzimao ponešto novca, sve dok ništa nije preostalo. Prvi je vratio $\frac{1}{2}$ od koliko je uzeo, drugi $\frac{1}{3}$ od onog što je uzeo i treći $\frac{1}{6}$ iznosa kojeg je uzeo. Ako se tako skupljen novac podijeli na tri jednaka dijela i svakom da po jedan, ispada da svaki posjeduje koliko mu po pravu i pripada. Koliko je novca bilo u početnoj hrpi i koliko je tko uzeo? (126, 282/2, 282/3, 282/6)
- 2 naći razlomak x takav da su $x^2 \pm 5$ kvadrati razlomaka (41/12);
- 3 riješiti jednadžbu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

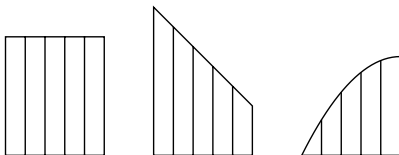
(1; 22, 07, 42, 33, 04, 40)

Koji su i po čemu značajni srednjevjekovni matematičari nakon Fibonaccija?

Koji su i po čemu značajni srednjevjekovni matematičari nakon Fibonaccija?

- **Jordanus Nemorarius** (ca. 1225.–1260.): *De numeris datis* — prvi u povijesti koristi slova kao oznake nepoznanica
- **Thomas Bradwardine** (ca. 1295.–1349.): zvjezdasti mnogokuti; razlikovao je dva tipa beskonačnosti (katetičnu = transfinitnu i sinkatetičnu = infinitnu)
- **Nicole d'Oresme** (ca. 1330.–1382.): razlomci kao eksponenti, rana ideja funkcije i grafa, Mertonski teorem, redovi

Extensio vs. intensio — longitudo vs. latitudo

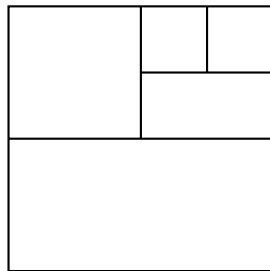
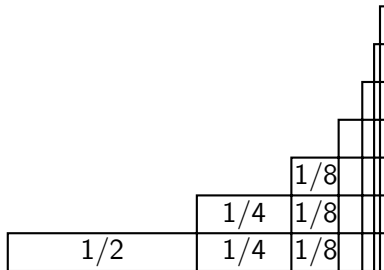


Crtu koja povezuje gornje krajeve naziva *Linea intensionis* (ili *Linea summitatis*). Ovisno o obliku tako dobivene figure Oresme razlikuje uniformne kvalitete (*Qualitas uniformis*, konstantnog intenziteta, uniformno diformne (*Uniformiter difformis*, kod kojih je *Linea intensionis* kosi pravac, te diformno diformne (*Difformiter difformis*, sve ostale).

Kako za uniformno diformnu brzinu iz toga vidimo da vrijedi Mertonski teorem (ako se tijelo giba jednoliko ubrzano prijeći će istu udaljenost kao da se giba jednoliko uz brzinu jednaku brzini u srednjem trenutku)?

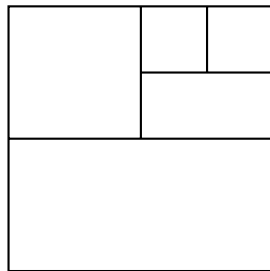
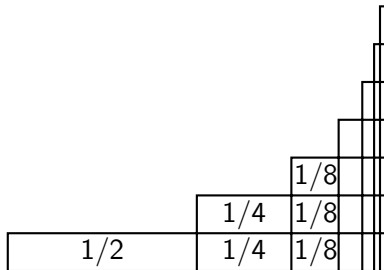
Oresme i redovi

Što se dokazuje pomoću sljedeće dvije ilustracije?



Oresme i redovi

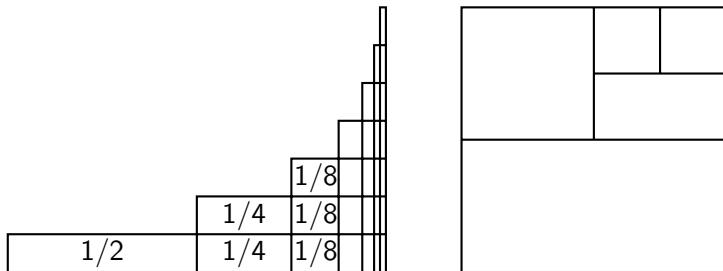
Što se dokazuje pomoću sljedeće dvije ilustracije?



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

Oresme i redovi

Što se dokazuje pomoću sljedeće dvije ilustracije?



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$$

Kako je Oresme dokazao divergenciju harmonijskog reda?

Za sljedeće predavanje ...

Pročitajte osmo poglavlje u skripti i pripremite se za diskusiju o matematici u doba renesanse. Posebno, pripremite diskusijska pitanja o:

- razvoju matematičke notacije
- algebarskom rješenju kubnih jednažbi
- prvoj pojavi kompleksnih brojeva
- uvođenju logaritama
- F. Vièteu
- J. Kepleru+