Povijest matematike

Matematika u staroj Indiji i arapskom kalifatu

Franka Miriam Brückler

25. travnja 2024.

Malo indijske povijesti

- u 3. tisućljeću pr. Kr. gradske civilizacije oko rijeke Ind (Mohenđa Dara, Harappa) — decimalni sustav mjera, astronomija
- iza 1500. pr. Kr. indoarijski doseljenici
- 1200.–500.: razdoblje veda (druga datiranja: 1500.–800.), prve države, veliki brojevi
- oko 600. pr. Kr.: sanskrt (jezik brahmana)
- u to doba nastaju pravila za oltare (početak geometrije)
- oko 500. pr. Kr.: budizam, jainizam, hinduizam

Malo indijske povijesti

- u 3. tisućljeću pr. Kr. gradske civilizacije oko rijeke Ind (Mohenđa Dara, Harappa) — decimalni sustav mjera, astronomija
- iza 1500. pr. Kr. indoarijski doseljenici
- 1200.–500.: razdoblje veda (druga datiranja: 1500.–800.), prve države, veliki brojevi
- oko 600. pr. Kr.: sanskrt (jezik brahmana)
- u to doba nastaju pravila za oltare (početak geometrije)
- oko 500. pr. Kr.: budizam, jainizam, hinduizam
- 327.–325. pr. Kr.: Aleksandar Veliki na Indu

Malo indijske povijesti

- u 3. tisućljeću pr. Kr. gradske civilizacije oko rijeke Ind (Mohenđa Dara, Harappa) — decimalni sustav mjera, astronomija
- iza 1500. pr. Kr. indoarijski doseljenici
- 1200.–500.: razdoblje veda (druga datiranja: 1500.–800.), prve države, veliki brojevi
- oko 600. pr. Kr.: sanskrt (jezik brahmana)
- u to doba nastaju pravila za oltare (početak geometrije)
- oko 500. pr. Kr.: budizam, jainizam, hinduizam
- 327.–325. pr. Kr.: Aleksandar Veliki na Indu
- 320.–544. dinastija Gupta: vrhunac indijske civilizacije
- 5.–12. st.: razne dinastije u malim državama; vrhunac staroindijske matematike

Sulvasutre

- $\boxed{\text{„Pravila konopa"}}$ (ca. 8.–5. st. pr. Kr.)
- dodaci Vedama, opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara

Sulvasutre

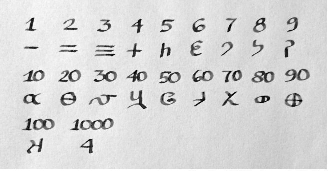
- $\boxed{\text{„Pravila konopa”}}$ (ca. 8.–5. st. pr. Kr.)
- dodaci Vedama, opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara
- elementarna geometrija: površine i volumeni, Pitagorin poučak, ...
- u Baudhayana-sulvasutri (ca. 800. pr. Kr.) *Konop rastegnut preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata.*
- sva pravila su dana bez dokaza
- egzaktne i aproksimativne konstrukcije (no nigdje se ne ističe razlika) — ravnopravnost racionalnih i iracionalnih brojeva

Sulvasutre

- $\boxed{\text{„Pravila konopa”}}$ (ca. 8.–5. st. pr. Kr.)
- dodaci Vedama, opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara
- elementarna geometrija: površine i volumeni, Pitagorin poučak, ...
- u Baudhayana-sulvasutri (ca. 800. pr. Kr.) *Konop rastegnut preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata.*
- sva pravila su dana bez dokaza
- egzaktne i aproksimativne konstrukcije (no nigdje se ne ističe razlika) — ravnopravnost racionalnih i iracionalnih brojeva
- različite procjene površine kruga (najčešće se uzima $\frac{13}{15}$ promjera kao stranica kvadrata (što odgovara ne baš dobroj aproksimaciji $\pi \approx 3{,}00444$).

Dekaski pozicijski sustav s nulom

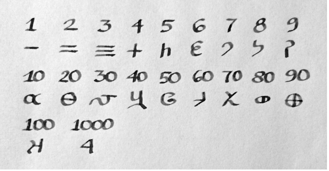
Razvio se postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr.).



[1]Iznimka u ispravnosti je dijeljenje s nulom: kod njega je $0:0=0$, a dozvoljava i razlomke oblika $m/0$.

Dekaski pozicijski sustav s nulom

Razvio se postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr.).

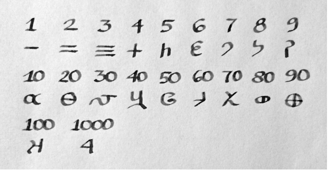


Nula kao broj: najkasnije u 7. st.: Brahmagupta (ca. 598–670) nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Brahmagupta opisuje pravila za $+$, $-$, $\cdot$, $:$ s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom.[1]

[1] Iznimka u ispravnosti je dijeljenje s nulom: kod njega je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $m/0$.

Dekaski pozicijski sustav s nulom

Razvio se postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr.).



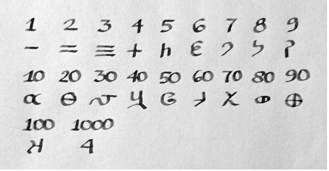
Nula kao broj: najkasnije u 7. st.: Brahmagupta (ca. 598–670) nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Brahmagupta opisuje pravila za $+$, $-$, $\cdot$, $:$ s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom.[1]

Nula kao znamenka: najkasnije 9. st. (hram u Gwaliouru ,876.).

[1] Iznimka u ispravnosti je dijeljenje s nulom: kod njega je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $m/0$.

Dekaski pozicijski sustav s nulom

Razvio se postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr.).



Nula kao broj: najkasnije u 7. st.: Brahmagupta (ca. 598–670) nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Brahmagupta opisuje pravila za $+$, $-$, $\cdot$, $:$ s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom.[1]

Nula kao znamenka: najkasnije 9. st. (hram u Gwaliouru,876.).

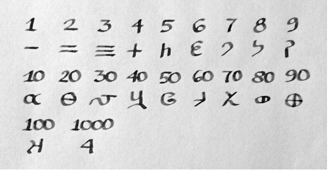
Nagari-brojke

---

[1] Iznimka u ispravnosti je dijeljenje s nulom: kod njega je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $m/0$.

Dekaski pozicijski sustav s nulom

Razvio se postepeno iz brahmanskih brojki (od ca. 3. st. pr. Kr.).



Nula kao broj: najkasnije u 7. st.: Brahmagupta (ca. 598–670) nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Brahmagupta opisuje pravila za $+$, $-$, $\cdot$, $:$ s pozitivnim i *negativnim* brojevima te nulom.[1]

Nula kao znamenka: najkasnije 9. st. (hram u Gwaliouru,876.).

Nagari-brojke

Nulu su Indijci nazvali *sunya*, praznina. U arapskom prijevodu: *sifr*. Latinski: *zephirum; cifra*.

[1] Iznimka u ispravnosti je dijeljenje s nulom: kod njega je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $m/0$.

Trigonometrija

- Prvi poimence poznat indijski matematičar: Āryabhaṭa I. (ili stariji, ca. 476–550).
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo, u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate bez dokaza
- aritmetika i algebra, sferna i ravninska trigonometrija

Trigonometrija

- Prvi poimence poznat indijski matematičar: Āryabhaṭa I. (ili stariji, ca. 476–550).
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo, u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate bez dokaza
- aritmetika i algebra, sferna i ravninska trigonometrija
- *Aryabhatiya* ili *Surya Siddhanta*: prva tablica sinusa (polutetiva: $jy(v)a = r \sin\alpha$)

Trigonometrija

- Prvi poimence poznat indijski matematičar: Āryabhaṭa I. (ili stariji, ca. 476–550).
- *Āryabhaṭīya*: astronomsko djelo, u stihovima, sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate bez dokaza
- aritmetika i algebra, sferna i ravninska trigonometrija
- *Aryabhatiya* ili *Surya Siddhanta*: prva tablica sinusa (polutetiva: $jy(v)a = r \sin \alpha$)
- Opseg kružnice: 21600', odnosno: $r\pi = 10800'$
- Aryabhata I.: *Dodaj* 4 *k* 100, *pomnoži s* 8 *i svemu dodaj* 62000*. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom* 20000 ($\pi \approx 3{,}1416$, $r = 3438'$).

Tablica polutetiva u *Surya Siddhanta* je konstruirana koristeći pravilo koje danas zapisujemo

$$r\sin(n\phi) = r\sin((n-1)\phi) + r\sin\phi - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(k\pi)}{\sin\phi}$$

($\phi = 3^\circ 45'$, $n = 1, \ldots, 24$), dok je Aryabhata samo naveo razlike između dviju uzastopnih polutetiva, $r\sin(n\phi) - r\sin((n-1)\phi)$.

Tablica polutetiva u *Surya Siddhanta* je konstruirana koristeći pravilo koje danas zapisujemo

$$r\sin(n\phi) = r\sin((n-1)\phi) + r\sin\phi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k\pi)}{\sin\phi}$$

($\phi = 3^\circ 45'$, $n = 1, \ldots, 24$), dok je Aryabhata samo naveo razlike između dviju uzastopnih polutetiva, $r\sin(n\phi) - r\sin((n-1)\phi)$. Tijekom sljedećih stoljeća otkrivena su i druga pravila ekvivalentna mnogim važnim trigonometrijskim formulama, a pojavljuju se i kosinus (*kotijya*, $r\cos\alpha$) i sinus versus ($r(1-\cos\alpha)$). U 10. st. se već sinusi i kosinusi gledaju u sva četiri kvadranta. Ipak, indijska trigonometrija nije postala sustavna disciplina, nego se radilo o rješavanju pojedinačnih problema.

Zanimljivost

Arapi su sanskrtski *jya* transliterirali u *džiba*. Pri prijevodu jednog arapskog djela je Robert iz Chestera 1154. to interpretira kao *džaib* (prsa, izrez na haljini, izdignuće) pa je to preveo kao *sinus* (zaobljenost, uvala, prsa).

Računanje

Specifično indijski su razvoji računskih postupaka (*ganita* — znanost o računanju). Indijci su razvili efikasne algoritme za računanje u dekadskom pozicijskom sustavu. Čini se da je najstariji spis koji ih opisuje rukopis Bakhshali, koji se datira između 2. st. pr. Kr. i 12. st. n. e.

Računanje

Specifično indijski su razvoji računskih postupaka (*ganita* — znanost o računanju). Indijci su razvili efikasne algoritme za računanje u dekadskom pozicijskom sustavu. Čini se da je najstariji spis koji ih opisuje rukopis Bakhshali, koji se datira između 2. st. pr. Kr. i 12. st. n. e.

U svakom slučaju se opis pravila računanja s prirodnim brojevima i razlomcima može naći kod Mahāvīre (9. st.). On je bio autor prvog indijskog samo matematici posvećenog teksta.

Prvi znameniti matematičar koji korektno opisuje sva ta pravila je Bhāskara II (1114–ca. 1185). Kod njega dijeljenje s nulom kao rezultat daje beskonačno.

Brahmagupta (ca. 598.–670.)

- Najveći indijski matematičar svog doba.
- Brahmaguptin teorem: u tetivnom četverokutu s okomitim dijagonalama visine iz sjecišta dijagonala na pojedine stranice prepolavljaju njima nasuprotne.
- Brahmaguptina formula: poopćenje Heronove formule na tetivne četverokute; $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$.
- Jedna od prvih pojava kvadratne interpolacije (slična u gotovo isto vrijeme i u kineskog astronoma Liu Zhou-a):

$$f(a+xt) = f(a) + \frac{x}{2} \cdot (f(a+t) - f(a-t)) +$$

$$+\frac{x^2}{2} \cdot (f(a+t) - 2f(a) + f(a-t))$$

Iterativne metode

Kao i Kinezi, i Indijci su razvili metode računanja korijena, većinom temeljene na binomnoj formuli: ako je $x = y^2$ ($x = y^3$) i imamo prvu procjenu a za y, onda je $y = a + b$ i $x - a^2 = 2ab + b^2$ ($x - a^3 = 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$), pa se to može slično kao i u starokineskoj metodi iskoristiti za određivanje b.

Iterativne metode

Kao i Kinezi, i Indijci su razvili metode računanja korijena, većinom temeljene na binomnoj formuli: ako je $x = y^2$ ($x = y^3$) i imamo prvu procjenu a za y, onda je $y = a + b$ i $x - a^2 = 2ab + b^2$ ($x - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$), pa se to može slično kao i u starokineskoj metodi iskoristiti za određivanje b.
U rukupisu Bhakshali imamo i sljedeće pravilo za korjenovanje ,,U slučaju nekvadratnog broja, oduzmi najbliži kvadratni broj, podijeli ostatak s dvostrukim tim najbližim kvadratom; pola kvadrata od toga se podijeli sa zbrojem približnog korijena i razlomka; to je oduzeto i dati će ispravljeni korijen”:

$$x^2 = N \Rightarrow N = A^2 + b \Rightarrow x \approx \underline{A + \frac{b}{2A}} - \frac{\left(\frac{b}{2A}\right)^2}{2\left(A + \frac{b}{2A}\right)}$$

Primjer

Izračunajmo $\sqrt{11}$.
U prvom koraku uzmemo $x_0 = A = 3$. *Tada je* $11 = 3^2 + 2$,
tj. $b = 2$. *Stoga je sljedeća, bolja aproksimacija*

$$x_1 = 3 + \frac{2}{2\cdot 3} - \frac{\left(\frac{2}{2\cdot 3}\right)^2}{2\cdot\left(3 + \frac{2}{2\cdot 3}\right)} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{60} = 3{,}31667\ldots$$

Primjer

Izračunajmo $\sqrt{11}$.
U prvom koraku uzmemo $x_0 = A = 3$. *Tada je* $11 = 3^2 + 2$,
tj. $b = 2$. *Stoga je sljedeća, bolja aproksimacija*

$$x_1 = 3 + \frac{2}{2\cdot 3} - \frac{\left(\frac{2}{2\cdot 3}\right)^2}{2\cdot\left(3 + \frac{2}{2\cdot 3}\right)} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{60} = 3{,}31667\ldots$$

Još bolju dobijemo s $A = 3{,}3$ $(b = 0{,}11)$*:*

$$x_2 = 3{,}3 + \frac{0{,}11}{2\cdot 3{,}3} - \frac{\left(\frac{0{,}11}{2\cdot 3{,}3}\right)^2}{2\cdot\left(3{,}3 + \frac{0{,}11}{2\cdot 3{,}3}\right)} = 3{,}3 + \frac{1}{60} - \frac{1}{238800} = 3{,}316624790\ldots$$

Ovaj postupak je specijalni slučaj Newtonove metode tangente za aproksimativno rješavanje jednadžbi $f(x) = 0$ (uz $f(x) = x^2 - N$).

Teorija brojeva

- pojavljuje se „razbacano” u različitim djelima
- u Sulvasutrama: pitagorejske trojke $(5, 12, 13)$, $(12, 16, 20)$, $(8, 15, 17)$, $(15, 20, 25)$, $(12, 35, 37)$, $(15, 36, 39)$, $(2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2})$
- u klasično doba: diofantske jednadžbe
- posebno: Pellova jednadžba $x^2 - Ny^2 = 1$ (ime nosi po engleskom matematičaru iz 17. st. John-u Pell-u
- u 7. st. je Brahmagupta otkrio Brahmaguptin identitet

$$(a^2 - Nb^2)(c^2 - Nd^2) = (ac + Nbd)^2 - N(ad + bc)^2$$

i koristio ga za zaključivanje o rješenjima Pellove jednadžbe (ako je $a^2 - Nb^2 = k$ i $c^2 - Nd^2 = l$, onda se dobije rješenje od $x^2 - Ny^2 = kl$), dobio je npr. rješenje $(1151, 120)$ jednadžbe $x^2 - 92y^2 = 1$

Bhāskara II (1114-1185)

- Najveći matematičar klasičnog indijskog razdoblja.
- *Siddhānta-śiromaṇi* (1150.) — dva čisto matematička dijela *Līlāvatī* (? utjeha kćeri ?) i *Bijaganita*
- Znao je da primjerice jednadžba $x^2 = 9$ ima dva rješenja.
- Opisao račun u decimalnom pozicijskom sistemu.
- Poznavao je adicijski teorem za sinus.
- Dalje razvio Brahmaguptine metode za Pellovu jednadžbu te je otkrio jedan algoritam za računanje njenih rješenja („ciklička metoda")
- rješenje $(x, y) = (1.766.319.049, 226.153.980)$ jednadžbe $x^2 - 61y^2 = 1$
- U *Līlāvatī* se vidi da su mu bila poznata pravila za računanje kombinacija i permutacija.

Počeci kombinatorike

U *Līlāvatī*:

Primjer

Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 *vrata?*
Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 *atributa u njegovih* 10 *ruku?*

Općenito, stari Indijci su od najranijih vremena imali interes za velike brojeve. Najkasnije u 6. st. pr. Kr. bave se i prebrajanjem različitih rasporeda. Tada je Sushruta u jednom tekstu nabrojio moguće okuse koji nastaju iz 6 osnovnih (slatko, kiselo, slano, ljuto, gorko, trpko).
Tekst *Brhatsamhita* iz 6. st.: kako dobiti mirise miješanjem 4 od 16 sastojaka u različitim omjerima? Navodi se 1820 mogućnosti odabira 4 od 16 sastojaka.

„Arapska“matematika

- 622.: Muhamedov odlazak iz Meke u Medinu
- Nakon Muhamedove smrti (632.): $\boxed{\text{osvajanja}}$

„Arapska“matematika

- 622.: Muhamedov odlazak iz Meke u Medinu
- Nakon Muhamedove smrti (632.): osvajanja
- Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski: Harun al-Rašid; njegov sin, kalif al-Ma’mun (vladao 813.–833.) je osnovao Kuću mudrosti (*Bajt al-Ḥikmah*)

„Arapska“matematika

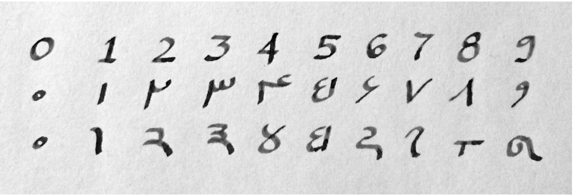
- 622.: Muhamedov odlazak iz Meke u Medinu
- Nakon Muhamedove smrti (632.): osvajanja
- Prvi poticatelj znanosti i prevođenja grčkih znanstvenih tekstova na arapski: Harun al-Rašid; njegov sin, kalif al-Ma'mun (vladao 813.–833.) je osnovao Kuću mudrosti (*Bajt al-Ḥikmah*)
- Do 10. st. su prevedeni *Elementi* i još neka Euklidova djela, *O sferi i valjku* te *O mjerenju kruga* od Arhimeda, gotovo sva Apolonijeva djela, Diofantova *Aritmetika*, Menelajeva *Sphaerica*, Ptolemejev *Almagest*, . . .

Arapske brojke

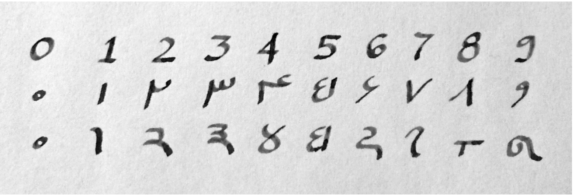
Do 10. st. u arapskom su se kalifatu koristila tri tipa aritmetike:

- račun na prste: brojevi se pišu riječima; ovaj način računa su koristili trgovci i računovođe; od 7. st. korišten je i arapski alfabetski sustav (*abdžad*).
- seksagesimalni sustav: brojevi označeni arapskim slovima, a koristio se najčešće za astronomiju;
- indijski dekadski sustav: znamenke su negdje tijekom 8. i 9. st. preuzete iz Indije, ali bez standardnog skupa simbola, tako da se u raznim krajevima koristilo donekle različite oblike znamenki.

Rane arapske znamenke vs. nagari-znamenke iz istog doba:



Rane arapske znamenke vs. nagari-znamenke iz istog doba:



Moderne zapadne i istočnoarapske znamenke, zapadnoarapske gobar-znamenke iz 10. st. i europske znamenke u 13. st.:

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind*

$\boxed{\text{Al-Hvārizmī}}$, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris*

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!

Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!
- *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah* — *dirham* (jedinica), *šaj* (stvar: nepoznanica), *mal* (bogato: kvadrat nepoznanice)
- šest tipova (normiranih) linearnih i kvadratnih jednadžbi: $x^2 = bx$, $x^2 = c$, $bx = c$, $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$

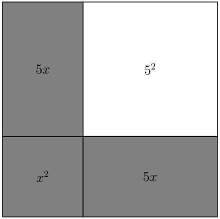
Al-Hvārizmī, ca. 780.–850.

- *Kitāb al-džam wa'l-tafrīk bi-hisāb al-Hind* — *Dixit Algorizmi* (dva rukopisa), *Liber Ysagogarum Alchorismi*, *Liber Alchorismi* te *Liber Pulueris* — algoritam!
- *Al-kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-džabr wa'l-mukābalah* — *dirham* (jedinica), *šaj* (stvar: nepoznanica), *mal* (bogato: kvadrat nepoznanice)
- šest tipova (normiranih) linearnih i kvadratnih jednadžbi: $x^2 = bx$, $x^2 = c$, $bx = c$, $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$
- za prva tri tipa samo je dao kratke primjere — očito da je od čitatelja očekivao da sam shvati postupak
- za ostala tri tipa detaljni primjeri — postupak je računski, ali se opravdava geometrijski

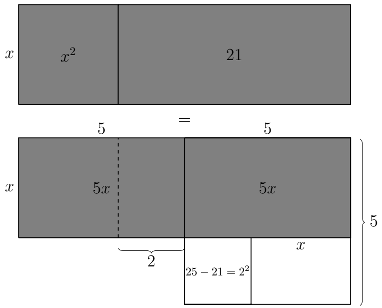
$x^2 + 10x = 39$

„Kvadrat i deset korijena čine 39 jedinica.”

1. uzmi pola broja korijena: $= 5$
2. kvadriraj to: 25
3. pribroji to broju jedinica: $39 + 25 = 64$
4. korjenuj: 8
5. od toga oduzmi pola broja korijena: $8 - 5 = 3$. To je rješenje.
6. postupak opravdava geometrijski (EEII4):



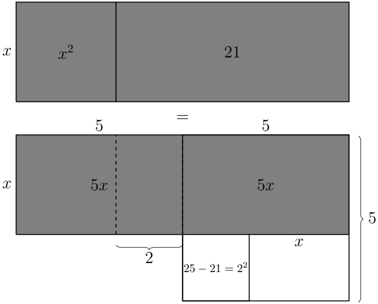
$x^2 + 21 = 10x$



EEII5

„Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj korijena. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja korijena sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih kvadratu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je korijen jednak polovici broja korijena."

$x^2 + 21 = 10x$



EEII5

Prvi put primjer s dva rješenja!

„Kad naiđeš na zadatak koji vodi na ovaj slučaj, pokušaj ga riješiti zbrajanjem, a ako to ne uspije, uspjet će s oduzimanjem. U ovom slučaju funkcionira i zbrajanje i oduzimanje, za razliku od ostala tri slučaja u kojima se treba prepoloviti broj korijena. Znaj i da u zadatku koji vodi na ovaj slučaj pomnožiš pola broja korijena sa sobom, ako je umnožak manji od broja dirhama pribrojenih kvadratu, slučaj je nemoguć. Ako je pak jednak broju dirhama, onda je korijen jednak polovici broja korijena.”

Al-džabr

U nastavku je opisao množenje binoma s binomima i monomima te množenje i dijeljenje algebarskih izraza koji sadrže korijene.

Slijedi 18 primjera kojima ilustrira da se sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu svesti na jedan od šest osnovnih tipova koristeći dvije operacije: *al-džabr* (nadopunjavanje)[2] i *al-mukabalah* (izjednačavanje).[3]

[2] Prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti.

[3] Oduzimanje pozitivnog člana jedne strane od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani.

Al-džabr

U nastavku je opisao množenje binoma s binomima i monomima te množenje i dijeljenje algebarskih izraza koji sadrže korijene.
Slijedi 18 primjera kojima ilustrira da se sve linearne i kvadratne jednadžbe mogu svesti na jedan od šest osnovnih tipova koristeći dvije operacije: *al-džabr* (nadopunjavanje)[2] i *al-mukabalah* (izjednačavanje).[3]

Primjer

Dana je jednadžba $(10-x)^2 + x^2 = 58$. *Prvo se kvadrira binom koristeći ranije opisane tehnike:* $100 + x^2 - 20x + x^2 = 58$.
Operacija al-džabr daje $100 + 2x^2 = 58 + 20x$.
To se svodi na „jedan kvadrat” dijeljenjem s 2: $50 + x^2 = 29 + 10x$.
Naposlijetku, al-mukabalah svodi jednadžbu na peti tip:
$21 + x^2 = 10x$.

[2] Prebacivanje negativnih članova na drugu stranu jednakosti.

[3] Oduzimanje pozitivnog člana jedne strane od člana s istom potencijom nepoznanice na drugoj strani.

Abū Kāmil Šujā (9./10. st.)

- vjerojatno iz Egipta
- bavio se algebrom, teorijom brojeva i geometrijom
- „Knjiga o algebri”: jedna od osnova za Fibonaccijeva djela
- $x^m x^n = x^{m+n}$

Abū Kāmil Šujā (9./10. st.)

- vjerojatno iz Egipta
- bavio se algebrom, teorijom brojeva i geometrijom
- „Knjiga o algebri": jedna od osnova za Fibonaccijeva djela
- $x^m x^n = x^{m+n}$
- matematička indukcija: dokazuje da je $(2n+1)\sum_1^n i = 3\sum_1^n i^2$ za $n = 1, \ldots, 10$ i kaže da se tako može dalje koliko god želimo

Abū Kāmil Šujā (9./10. st.)

- vjerojatno iz Egipta
- bavio se algebrom, teorijom brojeva i geometrijom
- „Knjiga o algebri”: jedna od osnova za Fibonaccijeva djela
- $x^m x^n = x^{m+n}$
- matematička indukcija: dokazuje da je $(2n+1)\sum_1^n i = 3\sum_1^n i^2$ za $n = 1, \ldots, 10$ i kaže da se tako može dalje koliko god želimo
- diofantske jednadžbe — zadatak 100 ptica

Tābit ibn Qurra (ca. 836.–901.)

Rođen u Harranu, gdje je postojalo prvo sveučilište na svijetu (717.–12. st.), djelovao u Kući mudrosti i osim matematikom se bavio i medicinom, filozofijom i astronomijom. Dao je tri nova dokaza Pitagorinog teorema, opisao je magične kvadrate, a najpoznatiji je po iskazu i dokazu:

Teorem (Ṯābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ *brojevi* $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n} - 1$ *i* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *prosti, onda su brojevi* $2^n\, p\, q$ *i* $2^n\, r$ *prijateljski.*

Teorem (T̲ābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\, p\, q$ i $2^n\, r$ prijateljski.

Nije naveo kako je otkrio to pravilo, ali poziva se na starogrčke rezultate o savršenim brojevima (EEIX36). Pripisao je otkriće prijateljskih brojeva Pitagori, a navodi da ih ni Euklid ni Nikomah nisu spominjali te navodi da želi ,,popuniti tu rupu,, nalazeći opće pravilo za njih.

Teorem (Ṯābitov teorem o prijateljskim brojevima)

Ako su za prirodan broj $n > 1$ brojevi $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ prosti, onda su brojevi $2^n\,p\,q$ i $2^n\,r$ prijateljski.

Nije naveo kako je otkrio to pravilo, ali poziva se na starogrčke rezultate o savršenim brojevima (EEIX36). Pripisao je otkriće prijateljskih brojeva Pitagori, a navodi da ih ni Euklid ni Nikomah nisu spominjali te navodi da želi ,,popuniti tu rupu,, nalazeći opće pravilo za njih.
Za $n = 2$ se dobije par 220 i 284, a za $n = 4$ je navodno Ṯābit dobio par 17296 i 18416, kojeg je kasnije otkrio de Fermat. Osim ta dva para do danas je poznat samo još jedan koji se dobije za $n = 7$ (Descartes). Brojevi oblika $3 \cdot 2^n - 1 = (1011\ldots1)_2$ danas se zovu Tābitovim brojevima.

al-Battānī (Albategnius, 9./10. st.)

Kitāb al-zīj
katalogizirao 489 zvijezda, izračunao trajanje godina na 365 dana 5 h 46 min 24 s (samo 2 min 22 s od točne vrijednosti), precesiju ekvinocija i nagib ekliptike
bitno unaprijedio trigonometriju, izveo razna trigonometrijska pravila („formule”) za pravokutne trokute, npr.
$b \sin \alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$, $b \sin \alpha = a \sin(90^\circ - \alpha)$.
koristio je i vlastitim metodama tabelirao vrijednosti svih 6 standardnih trigonometrijskih omjera: sinus, kosinus, tangens, te njihove recipročne vrijednosti kosekans, sekans i kotangens.

$\boxed{\text{Abū al-Wafā}}$, 10. st.

komentari

trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kru?nici polumjera 1)

Abū al-Wafā, 10. st.

komentari
trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kru?nici polumjera 1)
„Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima”: negativni brojevi

Abū al-Wafā, 10. st.

komentari
trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kru?nici polumjera 1)
„Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima”: negativni brojevi
glqq „Knjiga o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku” — konstrukcije okomica, parabola, pravilnih mnogokuta (do 10 stranica) opisanih i upisanih kru?nicama ili drugim mnogokutima, približne trisekcije kutova, konstrukcije s fiksiranim šestarom, rastave raznih likova na manje, . . .

Abū al-Wafā, 10. st.

komentari
trigonometrijske tablice (nisu sačuvane, ali čini se da je on prvi trigonometrijske omjere gledao u kru?nici polumjera 1)
„Knjiga o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima”: negativni brojevi
glqq „Knjiga o geometrijskim konstrukcijama potrebnim obrtniku” — konstrukcije okomica, parabola, pravilnih mnogokuta (do 10 stranica) opisanih i upisanih kru?nicama ili drugim mnogokutima, približne trisekcije kutova, konstrukcije s fiksiranim šestarom, rastave raznih likova na manje, . . .
izračun udaljenosti Bagdada do Meke

$\boxed{\text{Al-Karadžī}}$, 10./11. st.

Al-Fakhri: monomi, polinomi,

[4] U isto doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

$\boxed{\text{Al-Karadžī}}$, 10./11. st.

Al-Fakhri: monomi, polinomi, rani oblik matematičke indukcije (ima i indukciju unatrag, npr. za

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2)$$

[4] U isto doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

Al-Karadžī, 10./11. st.

Al-Fakhri: monomi, polinomi, rani oblik matematičke indukcije (ima i indukciju unatrag, npr. za

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \;)$$

binomni teorem i veza s Pascalovim trokutom (do eksponenta 5).[4]

[4] U isto doba Pascalov trokut je bio poznat i u Kini.

Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

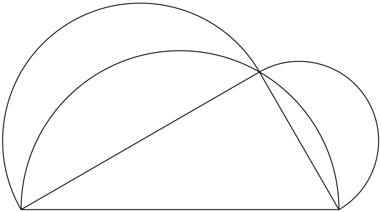
Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.

Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.

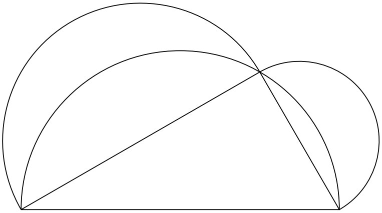


Al-Hayṭam (Alhazen), oko 965.–1040.

U srednjevjekovnoj Europi bio je poznati i kao *Ptolomaeus Secundus*, a danas se smatra ocem moderne optike.

Alhazenov problem geometrijske optike

Za dvije točke A i B u ravnini i zrcalnu kružnicu traže se točke T na kružnici, takve da se u njima zraka svjetla iz A lomi točno prema B.



$\boxed{\text{Omar Khayyam}}$ (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i $\boxed{\text{pjesnik}}$, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.
Bavio se postulatom o paralelam, koristio je metodu slično starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelam, koristio je metodu slično starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelam, koristio je metodu slično starijim indijskim metodama za računanje *n*-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe

Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja.

Omar Khayyam (Umar al-Hayyām), 1048.–1131.

Perzijski matematičar, astronom, filozof i pjesnik, djelovao je doba seldžučkih osvajanja i prvog križarskog rata.

Bavio se postulatom o paralelam, koristio je metodu slično starijim indijskim metodama za računanje n-tih korijena, Pascalov trokut binomnih koeficijenata

Risālah fil-barāhin 'alā masā'il al-ğabr wa'l-Muqābalah — proširenje Al-Hwārizmījeve klasifikaciju i na kubne jednadžbe

Tvrdio je da se njihova rješenja općenito ne mogu dobiti ravnalom i šestarom. Prvi je primijetio da postoje kubne jednadžbe s više od jednog rješenja.

Tako je dobio ukupno 19 tipova jednadžbi, od kojih su 5 bez konstantnog člana pa se svode na kvadratne, a ostale su:

Khayyamove kubne jednadžbe

1. $x^3 = c$;
2. $x^3 + bx = c$;
3. $x^3 + c = bx$;
4. $x^3 = bx + c$;
5. $x^3 + ax^2 = c$;
6. $x^3 + c = ax^2$;
7. $x^3 = ax^2 + c$;
8. $x^3 + ax^2 + bx = c$;
9. $x^3 + ax^2 + c = bx$;
10. $x^3 + bx + c = ax^2$;
11. $x^3 = ax^2 + bx + c$;
12. $x^3 + ax^2 = bx + c$;
13. $x^3 + bx = ax^2 + c$;
14. $x^3 + c = ax^2 + cx$.

Primjer Khayyamovog rješavanja kubne jednadžbe

$$x^3 + bx = c$$

$$b > 0 \Rightarrow b = B^2,\; c > 0 \Rightarrow c : b = C (c = B^2 C)$$

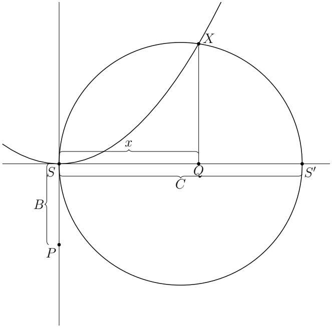
$$x^3 + B^2 x = B^2 c$$

Uzmimo kružnicu promjera C i parabolu s tjemenom S na toj kružnici, takvom da joj je os tangenta na kružnicu i da je razmak fokusa i ravnalice $B/2$. Neka je X sjecište kružnice i parabole, Q projekcija X na promjer kružnice $\overline{SS'}$ te P točka na osi parabole sa svojstvom $|SP| = B$.

Budući da je X na paraboli: $|SQ|^2 = |SP| \cdot |XQ|$, tj. $|SQ| : |XQ| = B : |SQ|$.
No, X je i na kružnici pa je $\triangle SS'X$ pravokutan pa je $\triangle SQX \sim \triangle XQS'$. Slijedi $|SQ| : |XQ| = |XQ| : |QS'|$.
Stoga je

$$B : |SQ| = \frac{|SQ|^2}{B} : (C - |SQ|),$$

dakle je $x = |SQ|$ je rješenje!



Dva matematičara mongolskog razdoblja

Nasīr ad-Dīn al-Tūsī, 13. st., je živio u u sjevernom Iranu u doba mongolskih osvajanja. Nakon što je Hulegu-Han osvojio tvrđavu Alamut (u kojoj se dotad al-Tusi nalazio), al-Tusi je ostao u njegovoj službi kao znanstveni savjetnik; osnovao je opservatorij u Azerbejdžanu (Maragha), a sudjelovao je i u osvajanju Bagdada. Napisao je važna djela o logici, etici, filozofiji, matematici i astronomiji,te mnoge komentare grčkih tekstova. Kao i neki drugi arapski matematičari prije njega, koristio je metode za približno računanje 2. i 3. korijena slične indijskim i kineskim.
U komentaru Ptolemejeva *Almagesta* (1247.) uveo je razne trigonometrijske tehnike za izračunavanje tablica sinusa. Najvažniji doprinos mu je odvajanje trigonometrije kao matematičke discipline. U svom *Traktatu o četverokutu* je dao prvi potpun prikaz ravninske i sferne trigonometrije (1260.).

Al-Kāšī, oko 1380.–1429.

Djelovao je u doba Ulug Bega (1394.–1449.). Bio je predstojnik opservatorija i glavni tamošnji astronom i matematičar. Glavno djelo mu je *Ključ aritmetike*, koje sadrži binomnu formulu, računanje n-tih korijena, numeričko rješavanje jednadžbi iterativnim postupcima, konstrukcije kupola, ...
U jednoj raspravi posvećenoj Ulug Begu bavi se indijskim brojevnim sustavom i računanjem (čak i s iracionalnostima), a tu je i kasnija Newtonova metoda i teorija decimalnih razlomaka i računa s njima (u zapadnu Europu će ih uvesti tek Stevin 135 godina kasnije).
Osmislio je originalni iterativni numerički postupak za izračunavanje trigonometrijskih tablica. Tako je (znamenku po znamenku iz kubne jednadžbe) odredio $\sin 1^\circ$ na 9 seksagezimalnih, tj. 18 decimalnih mjesta.
Dvije zanimljivosti: U Francuskoj se poučak o kosinusima i dan danas naziva al-Kašijevim teoremom; 2π je izračunao na 16 decimala ($n = 3 \cdot 2^{28}$; tek 200 godina kasnije će van Ceulen dobiti