Renormalizacijske grupne jednadžbe za QED i QCD

MARIJA MAĐOR-BOŽINOVIĆ, F-3851
FIZIČKI ODSJEK, PMF, BIJENIČKA C. 32, 10 000 ZAGREB

SAMOSTALNI SEMINAR IZ ISTRAŽIVANJA U FIZICI
2.2.2016.
MENTOR: PROF.DR.SC. AMON ILAKOVAC

Uvod

Renormalizacijska grupa podrazumijeva metode koje opisuju ponašanje parametara teorije na različitim skalama energije.

Motivacija za uvođenje renormalizacijskih grupnih jednadžbi (RGEs)

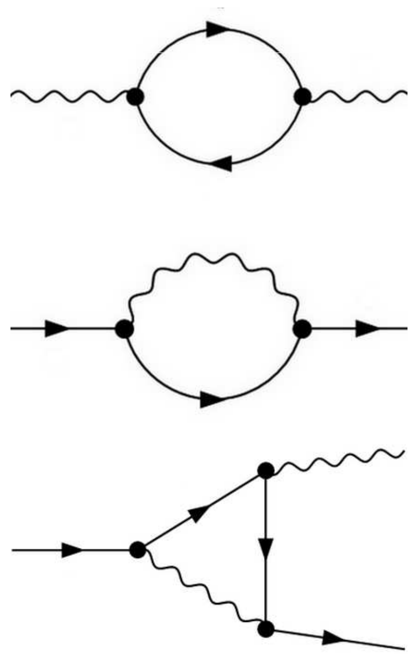
- teorijsko proučavanje modela na visokim energijama (ne nužno dostupnih eksperimentu)
- procjene raspona u kojima je dopušteno koristiti perturbativni račun
- mogućnost ujedinjenja konstanti vezanja

Renormalizirana perturbacijska teorija (RPT)

U računima amplituda za čestične procese javljaju se 2 tipa divergencija:

- infracrvene (IR) divergencije – emisija niskoenergetskih (mekih) fotona koji su ispod praga detektora
- ultraljubičaste (UV) divergencije – pojava beskonačnih impulsa u petljama

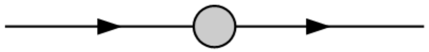
Ideja (koju ćemo detaljno razmotriti na primjeru QED-a) jest neobservabilni, divergentni dio teorije odvojiti od fizikalnog dijela. Potrebno je reformulirati perturbativni razvoj tako da se neopservabilne veličine ne pojavljuju eksplicitno u Feynmanovim pravilima.



Renormalizirana perturbacijska teorija

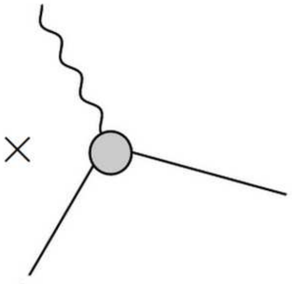
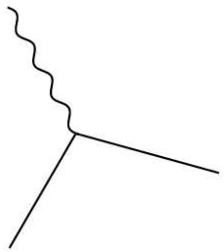
- neopservabilni QED Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_B)\psi - e_B\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$



$$= \frac{iZ_2}{\not{p} - m} + \ldots$$

$$= \frac{-iZ_3 g_{\mu\nu}}{q^2} + \ldots$$

$Z_1 \times$  $=$ 

- polja renormaliziramo tako da eliminiramo beskonačnosti

$$\psi = Z_2^{1/2}\psi_r \qquad A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu$$

Renormalizirana perturbacijska teorija

- Lagrangian postaje

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}Z_3(F_r^{\mu\nu})^2 + Z_2\bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m_B)\psi_r - e_B Z_2 Z_3^{1/2}\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu$$

- uvodimo definicije fizikalnih parametara – mase i naboja

$$\sum(p\!\!\!/ = m) = 0 \qquad e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \qquad q^\mu = 0$$

- Lagrangian razdvajamo u dva dijela – opservabilni i dio s kontračlanovima

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_r^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_r(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_r - e\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu + \\ + (-\frac{1}{4}\delta_3(F_r^{\mu\nu})^2 + +\bar{\psi}_r(i\delta_2\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma_\mu\psi_r A_r^\mu)\end{aligned}}$$

$$\delta_1 = Z_1 - 1$$
$$\delta_2 = Z_2 - 1$$
$$\delta_3 = Z_3 - 1$$
$$\delta_m = Z_2 m_B - m$$

Renormalizirana perturbacijska teorija

Generalni postupak:

- početni Lagrangian zadan je golim parametrima, a propagatori i vrhovi nalaze se u interakcijskom vakuumu i u sebi sadrže divergencije
- renormalizacijske konstante apsorbiramo u renormalizirana polja, čime eliminiramo divergencije iz vrhova i propagatora
- definiramo fizikalne parametre teorije
- odvojimo Lagrangian na renormalizirani dio i dio s kontračlanovima
- iz novog Lagrangiana izvedemo Feynmanova pravila
- pomoću renormalizacijskih uvjeta fiksiramo kontračlanove (uvodimo normiranje jakosti polja i točke u kojima se definiraju parametri)
- renormalizacijske konstante određujemo iterativno, za svaki red računa smetnje posebno

RGEs nalazimo korištenjem skaliranja parametara iz RPT-a.

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B$$

Renormalizacijska grupa

- uvedena zbog sloma perturbacijske teorije na visokim energijama

$$\Pi_{\mu\nu}(q) \supseteq \left(\alpha ln \frac{q^2}{m_e^2}\right)^n$$

$$g_\mu \to \mathcal{A}(\mu + d\mu) \to g_{\mu+d\mu} \to \dots \to g_E$$

- definiramo renormaliziranu konstantu vezanja na skali μ koja ne ovisi o fizikalnim masama teorije –parametri teorije postaju:

$$\Gamma(E, x, g_\mu, m, \mu) = E^D \Gamma\left(1, x, g_\mu, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}\right) \stackrel{\mu=E}{\to} E^D \Gamma\left(1, x, g_E, \frac{m}{E}, 1\right)$$

- preostaje izračunati g_E , što činimo u diskretnim koracima – krenimo od klizne konstante kao funkcije oblika

$$g_{\mu'} = G\left(g_\mu, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right)$$

Renormalizacijska grupa

- promatramo konstantu vezanja od neke renormalizirane vrijednosti do energije E u diskretnim koracima – korake pustimo u nulu, odnosno deriviramo kliznu konstantu po skali i množimo skalom

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \frac{\partial}{\partial z} G\left(g_\mu, z, \frac{m}{\mu}\right)\bigg|_{z=1} \equiv \beta\left(g_\mu, \frac{m}{\mu}\right)$$

- u limesu visokih energija jednadžba se pojednostavljuje i postaje Callan-Symanzikova jednadžba s rješenjem

$$\boxed{\mu \frac{d}{d\mu} g_\mu = \beta(g_\mu, 0) \equiv \beta(g_\mu)} \Rightarrow \boxed{ln \frac{E}{M} = \int_{g_M}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)}}$$

Minimalna suptrakcija

- preostaje pitanje kako pronaći beta funkciju neke teorije
- gole i fizikalne konstante vezanja moraju biti iste dimenzije – pod uvjetom da su fizikalne konstante vezanja bezdimenzionalne veličine, a gole konstante to nisu nužno, uz RPT skaliranje potrebno je uvesti dodatno skaliranje koje osigurava bezdimenzionalnost golih konstanti

$$g_B^l(D) \to g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)}$$

- kako se u fizikalnim amplitudama javljaju divergencije u obliku polova, ideja je apsorbirati ih u gole konstante vezanja koje tada možemo prikazati u obliku sume fizikalne konstante vezanja i polova do beskonačnog reda

$$g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g(\mu, D))$$

Minimalna suptrakcija

- deriviranjem po skali dobije se RGE

$$g_B^l(D)\mu^{-\Delta_l(D)} = g^l(\mu, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g(\mu, D)) \Big/_{\mu \frac{d}{d\mu}} \qquad b_{n,m}^l(g) = \frac{\partial b_n^l(g)}{\partial g^m}$$

$$-\Delta^l(D)\left(g^l + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n} b_n^l(g)\right) = \beta_l(g, D) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m \frac{1}{(D-4)^n} b_{n,m}^l(g)\beta^m(g, D)$$

- koristimo činjenicu da je dimenzija skale linearna u D

$$\Delta_l(D) = \Delta_l + \rho_l(D-4)$$

- time je na lijevoj strani najviša potencija D prvog reda, pa i za beta funkciju mora vrijediti

$$\beta^l(g, D) = \beta_l(g) + (D-4)\alpha^l(g)$$

Minimalna suptrakcija

- usporedbom lijeve i desne strane jednadžbe identificiramo članove uz iste potencije

$$LHS = -\left[\Delta_l g^l + b_1^l(g)\rho^l\right] - \rho_l g^l (D-4) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D-4)^n}\left[\rho_l b_{n+1}^l + \Delta_l b_n^l(g)\right]$$

$$RHS = \beta_l(g) + (D-4)\alpha^l(g) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_m \frac{1}{(D-4)^n} b_{n,m}^l(g)\beta^m(g,D)$$

- kao rezultat imamo

$$\alpha^l(g) = -\rho_l g^l \qquad \rho_l b_{n+1}^l(g) - \sum_m \rho_m g^m b_{n+1,m}^l(g) = -\Delta_l b_n^l(g) - \sum_m b_{n,m}^l(g)\beta^m(g)$$

$$\boxed{\beta_l(g) = -\Delta_l g^l - b_1^l(g)\rho^l + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_m b_{1,m}^l(g)\rho_m g^m}$$

RGEs: QED

- beta funkcija jednoznačno je određena koeficijentima koji stoje uz pol prvog reda
- provođenjem dimenzionalne analize u $D = 4 - 2\epsilon$ u prvom redu računa smetnje pronaći ćemo renormalizacijske faktore i izvrijedniti beta funkciju
- integriranje inverza beta funkcije odredit će ponašanje konstante vezanja ovisno o energiji

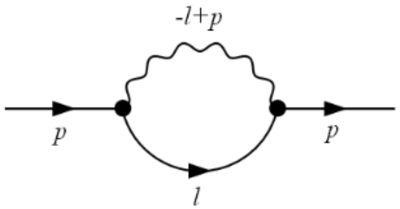
$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2}$$

$$[\psi] = \frac{D-1}{2}$$

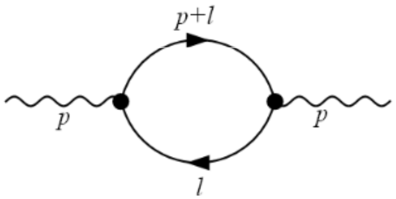
$$[e_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2}$$

$$\boxed{e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon}}$$

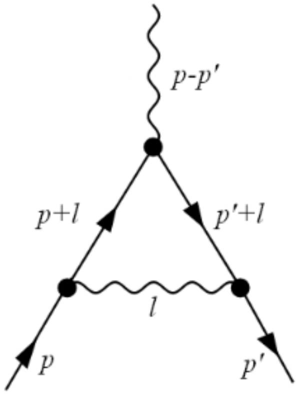
RGEs: QED



$$= -e^2 \int_0^\infty \frac{d^D l\, \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\mu(\not{l}+m)\gamma^\mu}{(l^2-m^2)((l-p)^2-m_\gamma^2)} \quad \boxed{\supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{ie^2}{(4\pi)^2}\not{p}}$$



$$= -e^2 \int_0^\infty \frac{d^D l\, \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{Tr[\gamma_\mu(\not{p}+\not{l}+m)\gamma_\nu(\not{l}+m)]}{(l^2-m^2)((p+l)^2-m^2)} \quad \boxed{\supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{-ie^2}{12\pi^2} g_{\mu\nu}}$$



$$= -e^3 \int_0^\infty \frac{d^D l\, \mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{\gamma_\nu(\not{l}+\not{p}'+m)\gamma^\mu(\not{l}+\not{p}+m)\gamma^\nu}{(l^2-m_\gamma^2)((l+p)^2-m^2)((l+p')^2-m^2)} \quad \boxed{\supseteq \frac{1}{\epsilon}\frac{-ie^3}{(4\pi)^2}\gamma\mu}$$

RGEs: QED

- izračunavanje dijagrama daje rezultate za renormalizacijske faktore u 1.r.r.s.

$$\boxed{Z_1^{-1} = \left(1 + \frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\right)} \qquad \boxed{Z_2 = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}} \qquad \boxed{Z_3 = 1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}}$$

$$Z_1^{-1} Z_2 = 1$$

- renormalizirani naboj postaje

$$e = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e_B \mu^{-\epsilon} \Longrightarrow \boxed{e_B \mu^{-\epsilon} = e\left(1 - \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}\right)^{-1/2} \approx e + \frac{e^3}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}}$$

RGEs: QED

- provodimo standardnu proceduru: izraz za renormalizirani naboj deriviramo po skali i množimo skalom, prepoznamo beta funkciju i izjednjačavanjem LHS i RHS dobije se beta funkcija za QED s rješenjem za konstantu fine strukture

$$\boxed{\beta_{QED} = \frac{e^3}{12\pi^2}}$$

$$\boxed{\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} ln(\frac{\mu^2}{E_0^2})}}$$

- konstanta fine strukture raste sa skalom – radi se o strogo perturbativnoj teoriji
- Landauov pol na energiji

$$\mu_{Landau} = E_0 \sqrt{e^{3\pi/\alpha_0}}$$

RGEs: QCD

Struktura teorije

- Teorija je zadana SU(3) algebrom s Lagrangianom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \bar{q}(i\not{D} - m_q)q \qquad D_\mu = \partial_\mu + igA^a_\mu T^a$$

$$\Delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \bar{c}^a(gf^{abc}\partial^\mu A^b_\mu - \partial^2\delta^{ab})c^c$$

Verteksi teorije

$$i\mathcal{L}_{3g} = igf^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b}A^{\nu c}$$

$$i\mathcal{L}_{4g} = -\frac{ig^2}{4}f^{abc}f^{ab'c'}A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu b'}A^{\nu c'}$$

$$i\mathcal{L}_{\bar{q}qg} = -ig\bar{q}\gamma^\mu T^a q A^a_\mu$$

$$i\mathcal{L}_{\bar{c}cg} = ig\bar{c}^a f^{abc}\partial^\mu(A^b_\mu c^c)$$

Komutacijske relacije

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

$$[D_\mu, D_\nu] = igF^a_{\mu\nu}T^a$$

RGEs: QCD

- rezultati dimenzionalne analize i RPT-a za QCD daju:

$$[A_\mu] = \frac{D-2}{2}$$
$$[q] = \frac{D-1}{2}$$
$$[c] = \frac{D-2}{2}$$
$$[g_B] = [\Delta] = \frac{4-D}{2}$$

$$\begin{aligned}
&(Z_3-1)(-\frac{1}{4}\Big(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A^a_\mu)^2\Big)+ \\
&(Z_2-1)i\bar{q}\partial\!\!\!/ q - \delta_{m_q}\bar{q}q+ \\
&(Z_1^{3g}-1)(g\mu^\epsilon f^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b}A^{\nu c})+ \\
&(Z_1^{4g}-1)(g^2\mu^{2\epsilon} f^{abc} f^{ab'c'} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu b'} A^{\nu c'})- \\
&(Z_1-1)(g\mu^\epsilon \bar{q} A\!\!\!/^a T^a q)+ \\
&(Z_2^c-1)\bar{c}^a(-\partial^2\delta^{ac})c^c+ \\
&(Z_1^c-1)g\mu^\epsilon \bar{c}^a f^{abc}\partial^\mu(A^b_\mu c^c)
\end{aligned}$$

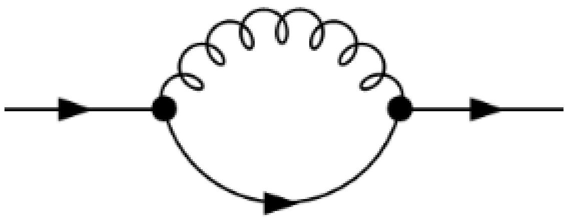
- veze među renormalizacijskim faktorima

$$\boxed{\begin{aligned} g_B\mu^{-\epsilon} &= Z_1^{3g} Z_3^{-3/2} g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} g \\ &= Z_1^c (Z_2^c)^{-1} Z_3^{-1/2} g = (Z_1^{4g})^{1/2} Z_3^{-1} g \end{aligned}}$$

RGEs: QCD

- Renormalizacijski faktor Z_2 računamo iz dijagrama self-energije kvarka potpuno analogno QED-u do na umnožak 2 genereatora SU(3) grupe (zbog strukture obojenog vrha) za koje vrijedi

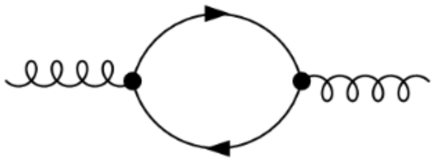
$$T^a T^a = C_2(f) = \frac{N^2-1}{2N}$$



$$\boxed{Z_2 = 1 - C_2(f)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}}$$

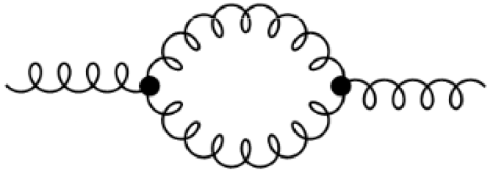
RGEs: QCD

- renormalizacijski faktor Z_3 računamo iz dijagrama self-energije gluona koji ima 4 doprinosa



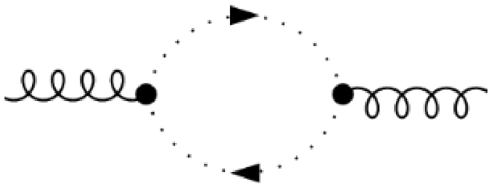
$$\boxed{Z_{3,q} = 1 - C(f) N_f \frac{g^2}{12\pi^2}\frac{1}{\epsilon}}$$

$$Tr[T^a T^b] = C(f)\delta^{ab} \equiv \frac{1}{2}$$

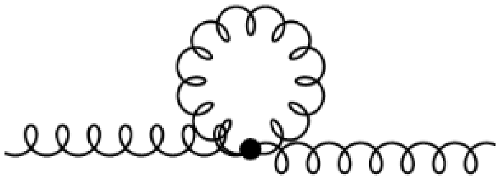


$$\boxed{C_2(G)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{19}{12}g^{\mu\nu}q^2 - \frac{11}{6}q^\mu q^\nu\Big)}$$

$$f^{abc}f^{ebc} = C_2(G)\delta^{ae} \equiv N$$



$$\boxed{C_2(G)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(\frac{1}{12}g^{\mu\nu}q^2 + \frac{1}{6}q^\mu q^\nu\Big)}$$

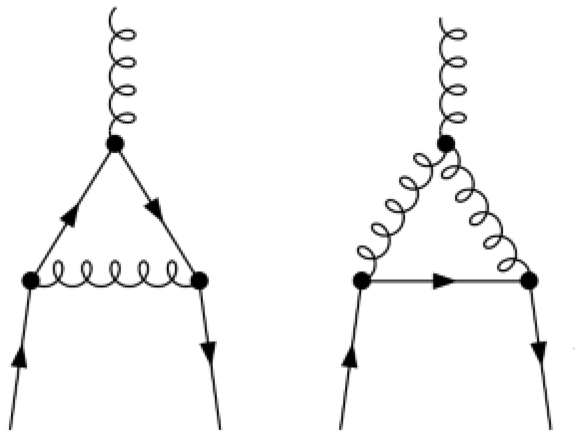


$$\boxed{0}$$

$$\boxed{Z_3 = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(-\frac{4}{3}N_f C(f) + \frac{5}{3}C_2(G)\Big)}$$

RGEs: QCD

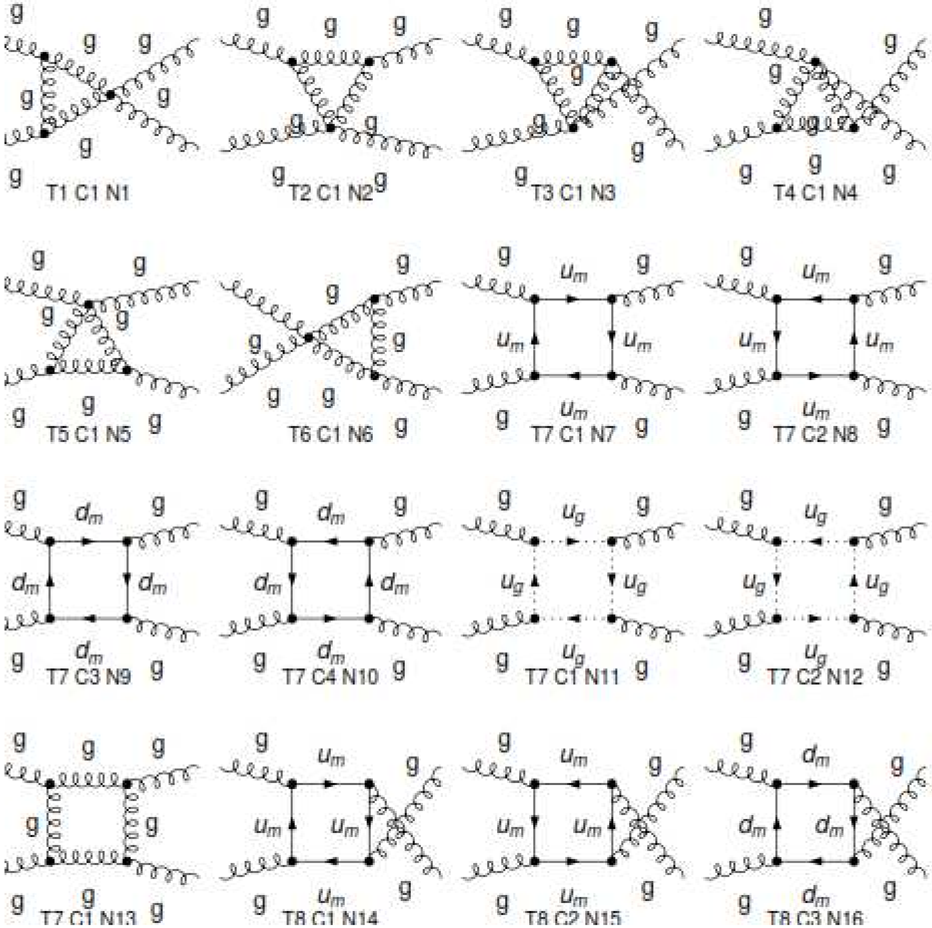
- renormalizacijski faktor Z_1^{-1} računamo iz dijagrama qqg vrha koji ima 2 doprinosa



$$T^a T^b T^a = \left(C_2(f) - \frac{1}{2}C_2(G)\right)T^b$$

$$\boxed{Z_1^{-1} = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(C_2(f) + C_2(G))}$$

RGEs: QCD



Provjera odnosa među renormalizacijskim faktorima:

$$\boxed{Z_{1,4g}^{-1} = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{3}C_2(G) + \frac{4}{3}N_f\right)}$$

RGEs: QCD

- poznavanjem svih renormalizacijskih faktora konačno možemo izračunati beta funkciju

$$\begin{aligned} g_B \mu^{-\epsilon} &= Z_1^{3g} Z_3^{-3/2} g = Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} g \\ &= Z_1^c (Z_2^c)^{-1} Z_3^{-1/2} g = (Z_1^{4g})^{1/2} Z_3^{-1} g \end{aligned}$$

$$Z_1^{-1} = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}(C_2(f) + C_2(G))$$

$$Z_2 = 1 - C_2(f)\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\epsilon}\Big(-\frac{4}{3}N_f C(f) + \frac{5}{3}C_2(G)\Big)$$

$$\beta_{QCD} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\Big(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}N_f C(f)\Big)$$

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}$$

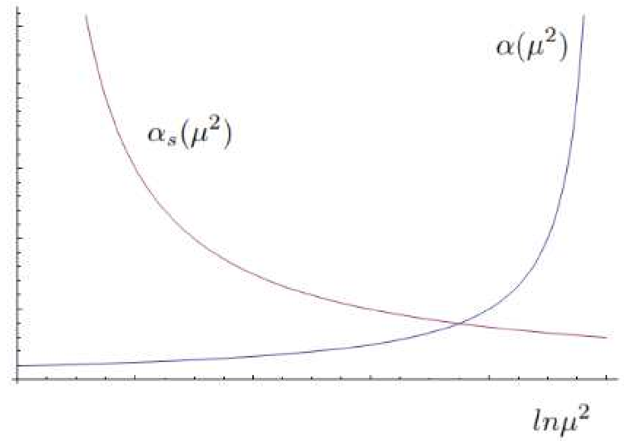
- konstanta fine strukture za QCD opada s energijom i na visokim energijama ulazi u režim asimptotske slobode

Zaključak

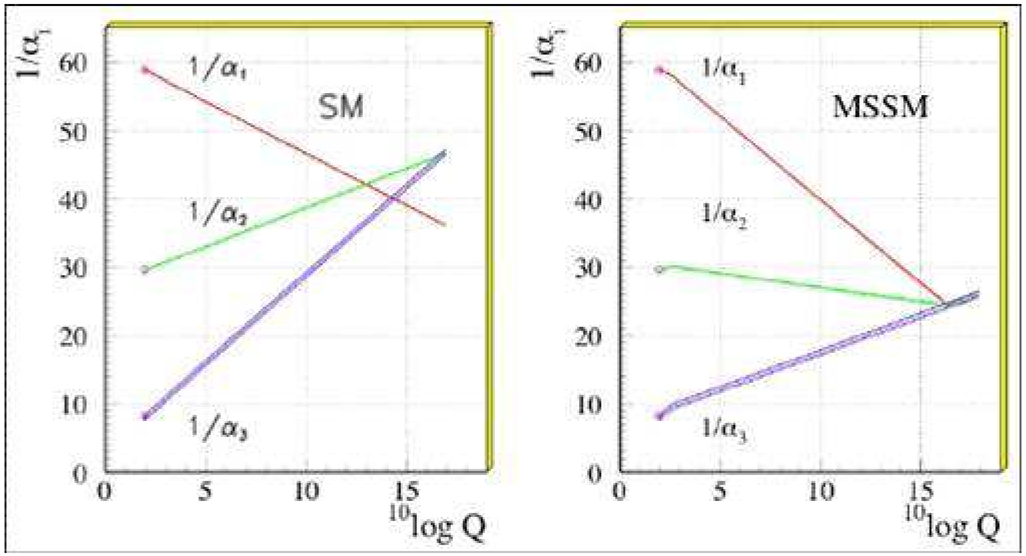
- konstante vezanja QED-a i QCD-a pokazuju drastično različito ponašanje s porastom energije – nemogućnost fotonske samointerakcije
- QED pokazuje strogo perturbativnu prirodu, a QCD odlazi u režim asimptotske slobode

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} ln(\frac{\mu^2}{E_0^2})}$$

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}$$



- renormalizacijske grupne jednadžbe danas su standardna procedura za ispitivanje modela u elementarnim česticama
- daju uvid u ponašanje modela u režimima koji nisu nužno dostupni eksperimentu, ocjenjuju matematičku konzistentnost teorije, omogućuju procjene u kojim je rasponima moguće koristiti perturbacijsku teoriju i pokazuju je li u nekom modelu moguće ujedinjenje i, ako jest, na kojim ga energijama možemo očekivati
- suvremeni modeli pokazuju izuzetno složene ovisnosti i RGEs se računaju numeričkim metodama



Slika preuzeta s http://www.pha.jhu.edu/~gbruhn/IntroSUSY.html

Zahvaljujem svom mentoru, prof.dr.sc. Amonu Ilakovcu, dr.sc. Luki Popovu i dr.sc. Jiangyang Youu na pomoći oko izrade seminara.

HVALA NA POZORNOSTI