Uloga topoloških svojstava konfiguracijskog prostora u višečestičnim sustavima identičnih čestica

Grgur Šimunić
Mentor: prof. dr. sc. Hrvoje Buljan

27. siječnja 2017.

Uvod

Sve danas poznate čestice moguće je podijeliti u dvije skupine s obzirom na njihovo ponašanje u višečestičnim sustavima:

1. Fermioni: antisimetrična valna funkcija, Fermi-Diracova statistika, polucjelobrojan spin
2. Bozoni: simetrična valna funkcija, Bose-Einsteinova statistika, cjelobrojan spin

Danas su poznate i kvazičestice koje se nisu niti fermioni niti bozoni, nego ih nazivamo anyoni. Valna funkcija tih čestica dobiva fazu $e^{i\alpha}$ prilikom zamjene čestice pri čemu je $\alpha \neq 0$ i $\alpha \neq \pi$.

Klase homotopije

Put na nekoj glatkoj mnogostrukosti X od točke a do točke b je glatka funkcija $q : [0, 1] \to X$ takva da je $q(0) = a$ i $q(1) = b$.

$\mathcal{P}$ - skup svih putova u X Početna točka puta: $s : \mathcal{P} \to X$, $s(q) = q(0)$
Završna točka puta: $t : \mathcal{P} \to X$, $t(q) = q(1)$

Dva puta q i q' su homotopni ako je jedan moguće neprekidno preslikati u drugi pomoću glatke funkcije $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ takve da je $F(t, 0) = a$, $F(t, 1) = b$, $F(0, t) = q(t)$ i $F(1, t) = q'(t)$.
Homotopnost puteva pretstavlja relaciju ekvivalencija: prostor $\mathcal{P}$ dijelimo na klase ekvivalencije koje nazivamo klasama homotopije. Klasu homotopije kojoj pripada put q označavamo s $[q]$.

Klase homotopije

Za puteve $q, q' \in \mathcal{P}$ takve da je $t(q) = s(q')$ definiramo put qq':

$$qq'(t) = q(2t)\theta\left(\frac{1}{2} - t\right) + q'(2t-1)\theta\left(t - \frac{q}{2}\right) \tag{1}$$

Ovo pretstavlja operaciju u $\mathcal{P}$ koju nazivamo množenjem puteva.

Množenje puteva nije definirano za proizvoljna dva puta, niti je nužno komutativno, ali ima sljedeća svojstva:

1. Asocijativnost
2. Neutralni element: $qq^{-1}(p) = s(q)$, $q^{-1}q(p) = t(q)$

Množenje puteva možemo proširiti na množenje klasa homotopije: $[q][q'] = [qq']$ Skup svih klasa homotopije sa operacijom mnnoženja čini grupoid $\Pi(X, X)$ koji nazivamo fundamentalnim grupoidom

Klase homotopije

Fundamentalna grupa u točki a: $\Pi(X, a) = \{[q] \mid q \in \mathcal{P}, s(q) = t(q) = a\}$
Oznaka za klase puteva između točaka a i b:
$\Pi(X, a, b) = \{[q] \mid q \in \mathcal{P}, s(q) = a, t(q) = b\}$

Za $[q] \in \Pi(X, a, b)$ i $[l], [k] \in \Pi(X, a)$ vrijedi:

$$[q^{-1}lkq] = [q^{-1}lq][q^{-1}kq] \tag{2}$$

$[q]$ inducira izomorfizam između $\Pi(X, a)$ i $\Pi(X, b)$. Između izmorfizama koji induciraju različite izomorfizme između grupa $\Pi(X, a)$ i $\Pi(X, b)$ postoji unutarnji izomorfizam:

$$[p^{-1}lp] = [p^{-1}q][q^{-1}lq][q^{-1}p] \tag{3}$$

Amplituda vjerojatnosti

Amplituda propagacije sistema s konfiguracijskim prostorom X ako je X jednostavno povezan:

$$K(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) = \int \mathcal{D}\{\boldsymbol{x}(t)\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\{\boldsymbol{x}(t)\}\right) \tag{4}$$

Ako X nije jednostavno povezan:

$$K(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) = \sum_{[q] \in \Pi(X, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \tilde{\chi}([q]) \tilde{K}^{[q]}(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) \tag{5}$$

$$\tilde{K}^{[q]}(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) = \int \mathcal{D}\{\boldsymbol{x}(t) \,|\, [\boldsymbol{x}(t)] = [q]\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(\boldsymbol{x}(t))\right) \tag{6}$$

Pri tome je $[\boldsymbol{x}(t)] = [q(t)]$ gdje je $q(t) = \boldsymbol{x}\left((t_{\boldsymbol{b}} - t_{\boldsymbol{a}})t + t_{\boldsymbol{a}}\right)$.

Amplituda propagacije

Neka su $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_0 \in X$ i $C : X \to \mathcal{P}$ takva da je $C(\boldsymbol{a})(0) = \boldsymbol{x}_0$ i $C(\boldsymbol{a})(1) = \boldsymbol{a}$. Definiramo funkcije:

$$f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha) = [C(\boldsymbol{a})^{-1}]\alpha[C(\boldsymbol{b})], \ \forall \alpha \in \Pi(X, \boldsymbol{x}_0). \tag{7}$$

$$\chi(\alpha) = \tilde{\chi}(f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)) \tag{8}$$

$$K^{\alpha}(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) = \tilde{K}^{f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)}(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}), \tag{9}$$

Amplituda vjerojatnosti:

$$K(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) = \sum_{\alpha \in \Pi(X, \boldsymbol{x}_0)} \chi(\alpha) K^{\alpha}(\boldsymbol{b}, t_{\boldsymbol{b}}; \boldsymbol{a}, t_{\boldsymbol{a}}) \tag{10}$$

Amplituda vjerojatnosti

Funkcija f čuva grupnu operaciju fundamentalnog grupoida:

$$f_{\boldsymbol{ab}}(\alpha)f_{\boldsymbol{bc}}(\beta) = f_{\boldsymbol{ac}}(\alpha\beta) \tag{11}$$

te stoga ona pretstavlja lokalni inverz homomorfizma
$g : \Pi(X, X) \to \Pi(X, \boldsymbol{x}_0)$ za koji je:

$$g([q]) = [C(s([q]))][q][C^{-1}(t([q]))] \tag{12}$$

te je stoga:

$$g(f_{\boldsymbol{ab}})(\alpha) = \alpha \tag{13}$$

$$f_{s([q])t([q])}(g([q])) = [q]. \tag{14}$$

Amplituda vjerojatnosti

Klasična putanja sistema $\boldsymbol{x}_c(t)$ određena je principom minimalne akcije $\delta S\{\boldsymbol{x}_c(t)\} = 0$ gdje je:

$$S\{\boldsymbol{x}(t)\} = \int_{t_a}^{t_b} L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t) \, \mathrm{d}t \tag{15}$$

Klasična putanja je invarijantna na transformaciju $S\{\boldsymbol{x}(t)\} \to S\{\boldsymbol{x}(t)\} + \zeta([\boldsymbol{x}(t)])$ iz čega slijedi:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S\{\boldsymbol{x}(t)\} + \zeta([\boldsymbol{x}(t)])\right)\right) = \tilde{\chi}([\boldsymbol{x}(t)]) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\{\boldsymbol{x}(t)\}\right) \tag{16}$$

$$\tilde{\chi}([q][p]) = \tilde{\chi}([q])\tilde{\chi}([p]) \tag{17}$$

$\tilde{\chi}$ je reprezentacija fundamentalnog grupoida, a χ reprezentacija fundamentalne grupe.

Amplituda vjerojatnosti

Ako je fundamentalna grupa Abelova, onda sve klase homotopije induciraju isti izomorfizam, tj. za $q, p \in \Pi(X, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ i $l \in \Pi(X, \boldsymbol{a})$:

$$[p^{-1} l p] = [q^{-1} l q] \tag{18}$$

Ako je χ jednodimenzionalna reprezentacija fundamentalne grupe, onda je:

$$\chi([p^{-1} l p]) = \chi([q^{-1} l q]) = \chi([l]) \tag{19}$$

Za svaki par točaka $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ biramo neku klasu homotopije $[p_0] \in \Pi(X, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. Tada je za sve $[q] \in \Pi(X, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$\tilde{\chi}([q]) = \chi([q p_0^{-1}])\tilde{\chi}([p_0]) \tag{20}$$

Amplituda vjeorjatnosti

Biramo proizvoljnu točku $\boldsymbol{x}_0 \in X$ i funkciju $C : X \to \mathcal{P}$ takvu da je $C(\boldsymbol{x})(0) = \boldsymbol{x}_0$ i $C(\boldsymbol{x})(1) = \boldsymbol{x}$. Tada je:

$$\tilde{\chi}([q]) = \tilde{\chi}([C(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})qC(\boldsymbol{b})^{-1}])\tilde{\chi}([C(\boldsymbol{b})]) \tag{21}$$

Dovoljno je izabrati $\tilde{\chi}([C(\boldsymbol{x})])$.

Ako umjesto C izaberemo funkciju C', onda je:

$$\chi([C'(\boldsymbol{a})qC'(\boldsymbol{b})^{-1}]) = \chi([C'(\boldsymbol{a})C(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})C'(\boldsymbol{a})^{-1}])\chi([C(\boldsymbol{a})qC(\boldsymbol{b})^{-1}]) \tag{22}$$

pa je:

$$\tilde{\chi}'([q]) = \mathrm{e}^{i\delta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\tilde{\chi}([q]). \tag{23}$$

Izbor funkcije C odgovara izboru globalne faze u amplitudi vjerojatnosti.

Sustav neraspoznatljivih čestica

Promatramo sustav dviju čestica u ravnini. Konfiguracijski prostor X paremetriziramo pomoću položaja centra mase $\boldsymbol{R}$ i relativnog položaja čestica $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ pa je $X = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\})$.

Amplituda vjerojatnosti za propagaciju relativnog položaja je tada jednaka:

$$\mathcal{A}\{\boldsymbol{r}(t)\} = \tilde{\chi}([\boldsymbol{r}(t)]) \int \mathcal{D}\boldsymbol{r}(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\{\boldsymbol{r}(t)\}\right) \tag{24}$$

Fundamentalne grupa je izomorfna grupi $(\mathbb{Z}, +)$ pa biramo:

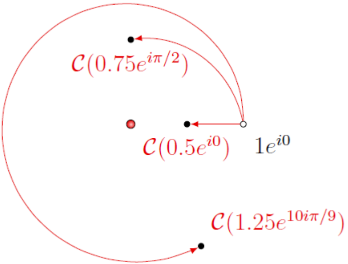
$$\chi([q]) = \mathrm{e}^{in([q])\phi} \tag{25}$$

Biramo reprezentaciju fundamentalnog grupoida:

$$C(r\mathrm{e}^{i\theta})(t) = r^t \mathrm{e}^{it\theta} \tag{26}$$

$$\tilde{\chi}([C(r\mathrm{e}^{i\theta})]) = \mathrm{e}^{i\phi\theta/(2\pi)}. \tag{27}$$

Sustav neraspoznatljivih čestica

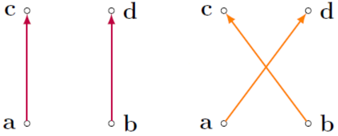


Neka je q put u X takav da je $s(q) = r\mathrm{e}^{i\omega}$ i $t(q) = -r\mathrm{e}^{i\omega}$. Tada je:

$$\tilde{\chi}([q]) = \tilde{\chi}^{-1}([C(r\mathrm{e}^{i\omega})])\tilde{\chi}([C(-r\mathrm{e}^{i\omega})])\chi([C(r\mathrm{e}^{i\omega})qC(-r\mathrm{e}^{i\omega})]) = \mathrm{e}^{i\phi/2} \tag{28}$$

Sustav neraspoznatljivih čestica

Promatramo isti sistem kao i prije, ali pretpostavljamo da čestice više nisu raspoznatljive. Za istu propagaciju kao i prije imamo dvije mogućnosti:



Amplituda propagacije je jednaka:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \pm \mathcal{A}_2 \tag{29}$$

Literatura

M. G. G. Laidlaw and C. DeWitt-Morette. Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles. Phys. Rev. D, 3(6):1375-1378, 1971. doi: 10.1103/PhysRevD.3.1375.

M. G. G. Laidlaw. Quantum Mechanics in Multiply Connected Spaces. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1971.

E. H. Spanier. Algebraic Topology. Springer-Verlag, 1981.

P. J. Higgins. Notes on Categories and Groupoids. Van Nostrand Reinhold Company, 1971.

L. S. Schulman. A path integral for spin. Phys. Rev., 176(5):1558-1569, 1968. doi: 10.1103/PhysRev.176.1558.

Hvala na pažnji!