Ispitivanje kvantne strukture prostorvremena

Marija Čuić, Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

Mentor: dr. Anđelo Samsarov, IRB

Sadržaj

Uvod i motivacija

- Kvantizacija faznog prostora u QM: $[x,p]=i\hbar$
- Divergencije u QFT (Snyder)
- Niskoenergetski limes teorije struna
- „Bogatija” teorija polja (Wightmanovi aksiomi i Coleman-Mandula tm)
- Ispitivanje prostorvremena na Planckovim skalama

Ideja

- Namećemo nesigurnosti oblika

$$\Delta\hat{x}^{\mu}\Delta\hat{x}^{\nu} \geq l_p^2, \qquad l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33} \text{ Planckova duljina}$$

- Moyalov prostor

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \ (\theta \text{ konstantan tenzor ranga 2})$$

→**Koja je simetrija ovog prostora?**

Hopfove algebre

- **Def. 1.** Asocijativna **algebra** s jedinicom je vektorski prostor A s dva linearna preslikavanja, množenjem m: $A \otimes A \mapsto A$ i jedinicom η: $\mathbb{C} \mapsto A$ koja zadovoljavaju
  - $m(m \otimes \mathbb{1}) = m(\mathbb{1} \otimes m)$ (asocijativnost)
  - $m(\eta \otimes \mathbb{1}) = m(\mathbb{1} \otimes \eta) = id$ (postojanje identitete)

- **Def. 2. Koalgebra** je vektorski prostor A s dva linearna preslikavanja, komnoženjem (koproduktom) Δ: $A \mapsto A \otimes A$ i kojedinicom ε: $A \mapsto \mathbb{C}$ koja zadovoljavaju
  - $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$ (koasocijativnost)
  - $(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id$ (kojedinica)

- **Def. 3. Bialgebra** $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ je vektorski prostor A sa strukturnim preslikavanjima algebre i koalgebre koja zadovoljavaju prethodno definirana svojstva i koja su međusobno kompatibilna, tj.
  - $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b);$ $\Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$
  - $\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b);$ $\varepsilon(\mathbb{1}) = 1$

- **Def. 4. Hopfova algebra** je bialgebra s linearnim preslikavanjem $S\colon A \mapsto A$ kojeg nazivamo antipodom (ili koinverzom) sa svojstvom
  - $m(S \otimes id) \circ \Delta = m(id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$

$\Rightarrow S(ab)=S(b)S(a)$ (antihomomorfizam)

Univerzalna omotačka algebra

- Algebra *U(P)* razapeta polinomima generatora X_i Liejeve algebre P modulo komutacijske relacije $[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k$
- Primitivne kostrukture:
  - $\Delta(X_i) = X_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes X_i, \ \Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$
  - $\varepsilon(X_i) = 0, \ \varepsilon(\mathbb{1}) = 1$
  - $\mathrm{S}(X_i) = -X_i$, $\mathrm{S}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$
- Nedeformirana UAE kokomutativna

Zakretanje Poincaréove algebre

- Poincaréova algebra P dana generatorima translacije P_μ i generatorima rotacije $M_{\mu\nu}$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, M_{\alpha\beta}] = i(\eta_{\alpha\mu}P_\beta - \eta_{\beta\mu}P_\alpha)$$

$$[M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta}] = i(\eta_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma})$$

- $U(P)$ djeluje na $A\otimes A$ preko nedeformiranog koprodukta Δ_0, kompatibilno s množenjem m

$$P_\mu \triangleright m_0(f_1 \otimes f_2) = m_0(\Delta_0(P_\mu)(f_1 \otimes f_2))$$

- Deformaciju provodimo **zakretanjem** (*eng*. twist) $F \in U(P) \otimes U(P)$

$(F\otimes\mathbb{1})(\Delta\otimes id)F = (\mathbb{1}\otimes F)(id\otimes\Delta)F$ (kocikličnost)

$(\varepsilon\otimes id)F=(id\otimes\varepsilon)F=\mathbb{1}$ (kounitarnost)

- Deformacija kostruktura transformacija sličnosti

$\Delta_\theta(X) = F\Delta_0(X)F^{-1}$ (Δ_θ deformirani koprodukt)

- Biramo $\boldsymbol{F} = \mathbf{exp}(\frac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\theta}^{\boldsymbol{\mu\nu}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\nu}})$

$\Delta_\theta(P_\mu)=\Delta_0(P_\mu)$

$\Delta_\theta(M_{\alpha\beta})=\Delta_0(M_{\alpha\beta}) - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}[(\eta_{\alpha\mu}P_\beta - \eta_{\beta\mu}P_\alpha)\otimes P_\nu + P_\mu\otimes(\eta_{\alpha\nu}P_\beta - \eta_{\beta\nu}P_\alpha)]$

(korištena BCH lema $e^A B e^{-A} = \sum_n \frac{1}{n!}[A,[A,\ldots[A,B]]$)

- Deformirana Poincaréova algebra nije kokomutativna!

$\star$ -produkt

- Reprezentacija nedeformirane Poincaréove algebre na komutativnoj algebri glatkih funkcija A s produktom po točkama

$$\mathrm{m}\big(f(x)\otimes g(x)\big) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

- Djelovanje Hopfove algebre na tenzorski produkt A$\otimes$A dano koproduktom → u deformiranom slučaju zbog kompatibilnosti koprodukta s množenjem trebamo redefinirati množenje
- **$\star$ -produkt**: $m_\theta(f(x)\otimes g(x)) \equiv f\star\mathrm{g}=\mathrm{m}\circ F^{-1}\triangleright\big(f(x)\otimes g(x)\big)$
- Nekomutativna algebra funkcija sa $\star$-produktom A_θ

$$m_\theta\big(x_\mu\otimes x_\nu - x_\nu\otimes x_\mu\big) = [x_\mu, x_\nu]_\star = i\theta_{\mu\nu} \Rightarrow A \text{ i } A_\theta \text{ izomorfne}$$

Teorija polja i reprezentacije deformirane Poincaréove algebre

$$M_{\alpha\beta} \triangleright f_{\gamma\delta} = i\left(\eta_{\alpha\delta} f_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma} f_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma} f_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta} f_{\alpha\gamma}\right), \qquad f_{\gamma\delta} = x_\gamma x_\delta$$

$$M^\theta_{\alpha\beta} \triangleright f^\theta_{\gamma\delta} = m_\theta \circ \left(\Delta_\theta\left(M_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1}{2}\left(x_\gamma \otimes x_\delta + x_\delta \otimes x_\gamma\right)\right)\right)$$

$$= i\left(\eta_{\alpha\delta} f^\theta_{\beta\gamma} + \eta_{\beta\gamma} f^\theta_{\alpha\delta} - \eta_{\alpha\gamma} f^\theta_{\beta\delta} - \eta_{\beta\delta} f^\theta_{\alpha\gamma}\right), \qquad f^\theta_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(x_\gamma \star x_\delta + x_\delta \star x_\gamma\right)$$

$$M^\theta_{\alpha\beta} \triangleright \theta_{\mu\nu} = 0$$

- Invarijantnost teorije polja na deformiranu *U(P)* ako obični produkt polja zamijenimo $\star$-produktom
- Unitarne ireducibilne reprezentacije deformirane i nedeformirane algebre iste!

  →Casimirovi operatori P^2 i $W^2, W_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\beta\gamma} P^\delta$ se ne mijenjaju

Deformirane čestične statistike
Kvantna mehanika

- Dvočestični sustav – valna funkcija $\in A \otimes A$
- Bozoni: $\phi \otimes_S \chi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \chi + \chi \otimes \phi), \quad \phi \otimes_S \chi = +\chi \otimes_S \phi$
- Fermioni: $\phi \otimes_A \chi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \chi - \chi \otimes \phi), \quad \phi \otimes_A \chi = -\chi \otimes_A \phi$
- U Lorentz invarijantnoj teoriji statistike invarijante na promjenu inercijalnog sustava → komutacija Lorentzove transformacije i (anti)simetrizacije
- U deformiranom slučaju to ne vrijedi jer koprodukt nije kokomutativan → treba redefinirati (anti)simetrizaciju

- **Operator zamjene**: $\tau_0(\phi \otimes \chi) = \chi \otimes \phi$
  - Na ravnom prostoru komutira sa svim ostalim opservablama → nijedan operator ne mijenja statistiku
- Hilbertov prostor gradimo od elemenata

$$\left(\frac{1 \pm \tau_0}{2}\right)(\phi \otimes \chi)$$

- $\tau_0 \Delta_\theta \neq \Delta_\theta \tau_0$
- Deformiramo operator zamjene → $\tau_\theta = F \tau_0 F^{-1}$
- Deformirane statistike: $\phi \otimes_{S_\theta} \chi = \left(\frac{1+\tau_\theta}{2}\right)(\phi \otimes \chi),$

$$\phi \otimes_{A_\theta} \chi = \left(\frac{1-\tau_\theta}{2}\right)(\phi \otimes \chi)$$

- Primjer: ravni val $e_p = e^{-ip \cdot x}$

$$(e_p \otimes_{S_\theta, A_\theta} e_q) = \pm e^{-i\theta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} (e_q \otimes_{S_\theta, A_\theta} e_p)$$

Statistika kvantnih polja

$$\left\langle 0 \middle| \Phi^-(x) a_p^\dagger \middle| 0 \right\rangle = e_p,$$

$$\frac{1}{2}\left\langle 0 \middle| \Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2) a_q^\dagger a_p^\dagger \middle| 0 \right\rangle = \left(\frac{1 \pm \tau_\theta}{2}\right)\left(e_p \otimes e_q\right)(x_1, x_2) = \left(e_q \otimes_{S_\theta, A_\theta} e_p\right)$$

$$|p, q\rangle_{S_\theta, A_\theta} = \pm e^{-i\theta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} |q, p\rangle_{S_\theta, A_\theta} \Rightarrow a_p^\dagger a_q^\dagger = \pm e^{i\theta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} a_q^\dagger a_p^\dagger$$

$$a_p a_q = \pm e^{i\theta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} a_q a_p$$

$$\Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2) = = \pm e^{i\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}} \Phi^-(x_2)\Phi^-(x_1)$$

Ne-Paulijevi prijelazi

- Mijenja li se teorem o spinu i statistici?
- Tražimo prijelaze inače zabranjene Paulijevim principom
- Tipično se uzima prostor koji ima sfernu simetriju
$$\left[\hat{x}_0, \hat{x}_j\right] = \mathrm{i}\chi\varepsilon_{ijk} n_j \hat{x}_k, \qquad \left[\hat{x}_i, \hat{x}_j\right] = 0 \; (\chi \in \mathbb{R}, \vec{n} \in \mathbb{R}^3)$$
- $G_{\chi\vec{n}} = e^{\frac{i}{2}\chi(P_0 \otimes \vec{n}\cdot\vec{J} - \vec{n}\cdot\vec{J} \otimes P_0)}$ (P_0 operator translacije u vremenu, J_i operatori rotacije)
- Ovisnost zakrenutih svojstvenih stanja Hamiltonijana o $\chi\vec{n}$
- Korekcije od nekomutativnosti u vremenima reda χ^{-2}, χ reda Planckove konstante

- Atomski (nuklearni) prijelazi odvijaju se na Zemlji → rotacija Zemlje trenutni proces u odnosu na nekomutativne korekcije
- Mijenja se os rotacije $\vec{m}(t) = R(t)\vec{n}$ → mijenja se operator zamjene $\tau_{\vec{m}}$
- Svojstvena stanja operatora $\tau_{\vec{n}}$ u jednom trenutku nisu svojstvena stanja u idućem → razvoj starih stanja po novima uvodi doprinos i simetričnih i antisimetričnih stanja
- Primjer: Berilij ima 2 elektrona u osnovnom stanju, 2 u pobuđenom → pobuđeni elektron nije više u stanju koje je okomito na osnovno stanje
- Vjerojatnost prijelaza $B_\chi = \frac{1}{3}[5 + \cos(\chi E_1)]\sin^2(\frac{\chi}{4}\Delta E)$ (E_1 energija osnovnog stanja, ΔE razlika energija osnovnog i pobuđenog stanja)

Granice na nekomutativni parametar χ. Preuzeto iz [7].

Energije veće od Planckove energije, vremena dulja od starosti svemira → omjer grananja nedozvoljenih i dozvoljenih prijelaza reda $10^{-58} - 10^{-55}$

Experiment	Type	Bound on χ (Length scales)	Bound on χ (Energy scales)
Borexino	Nuclear	$\lesssim 10^{-43}$ m	$\gtrsim 10^{24}$ TeV
Kamiokande	Nuclear	10^{-42} m	10^{23} TeV
NEMO	Atomic	10^{-12} m	10^{5} eV
NEMO-2	Nuclear	10^{-41} m	10^{22} TeV
Maryland	Atomic	10^{-20} m	10 TeV
VIP	Atomic	10^{-21} m	100 TeV

Zaključak

- Pomoću pojma Hopfove algebre deformirali Poincaréovu algebru → simetrija Moyalovog prostora
- Nepromijenjene ireducibilne reprezentacije
- Mijenjaju se valne funkcije fermiona i bozona i komutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja
- Konačna vjerojatnost za nedozvoljene atomske/nuklearne prijelaze

Literatura

[1] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. 172 (1995) 187 [hep-th/0303037].

[2] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 977 [hep-th/0106048].

[3] R. J. Szabo, Phys. Rept. 378 (2003) 207 [hep-th/0109162].

[4] P. Aschieri, hep-th/0703013 [HEP-TH].

[5] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, Phys. Lett. B 604 (2004) 98 [hep-th/0408069].

[6] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, G. Mangano, A. Pinzul, B. A. Qureshi and S. Vaidya, Phys. Rev. D 75 (2007) 045009 [hep-th/0608179].

[7] A. P. Balachandran and P. Padmanabhan, JHEP 1012 (2010) 001 [arXiv:1006.1185 [hep-th]].

[8] A. P. Balachandran, A. Joseph and P. Padmanabhan, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 051601 [arXiv:1003.2250 [hep-th]].

[9] M. Chaichian and A. P. Demichev, Singapore, Singapore: World Scientic (1996) 343 p

[10] H. Grosse and R. Wulkenhaar, Commun. Math. Phys. 329 (2014) 1069 [arXiv:1205.0465 [math-ph]].

[11] A. Ballesteros and F. Mercati, Eur. Phys. J. C 78 (2018) no.8, 615 [arXiv:1805.07099 [hep-th]].