Nejednakosti između fizikalnih parametara crnih rupa

Mate Picukarić

Pregled

- Izoperimetrijska nejednakost
- Kosa crnih rupa i kozmička cenzura
- Schwarzschildovo rješenje
- Parametri
- Kerrove crne rupe
- Geometrijske nejednakosti, Penroseov argument
- Teoremi i otvoreni problemi

Uvod

- Nejednakosti u fizici odražavaju svojstva nekih ograničenja
  - za kapacitore $Q<Q_0$
- Einsteinova jednadžba - sustav vezanih nelinearnih PDJ-a 2. reda
  - teško riješiva
  - poznato svega nekoliko rješenja
- Geometrijske nejednakosti - daju graničenja na geometriju, a granični slučaj (jednakost) točno određuje geometriju sistema

Izoperimetrijska nejednakost

Neka je S ograničen podskup od $\mathbb{R}^n$ površine $per(S)$ i volumena $vol(S)$. Tada vrijedi:

$$\operatorname{per}(S) \geq n \operatorname{vol}(S)^{\frac{n-1}{n}} \operatorname{vol}(B_1)^{\frac{1}{n}}$$

Gdje je $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ jedinična kugla. Jednakost vrijedi kada je S kugla u $\mathbb{R}^n$.

- U R^2 slučaju ova nejednakost nam kaže da ako je C neka glatka J. krivulja duljine L koja omeđuje dio površine A vrijedi: $L^2 \geq 4\pi A$ gdje je jednakost zadovoljena u slučaju kružnice

Kosa crnih rupa

- Jedna od motivacija za razmatranje nejednakosti između parametara
- Krajnje stanje gravitacijskog kolapsa (crna rupa) opisana klasičnim parametrima: masa, ang. moment, naboj
- Hipoteza
- Ako vrijedi u općenitom slučaju - nejednakosti bi povezivale jedine relevantne parametre opisa grav. kolapsa
- Dokazana za relevantne stacionarne slučajeve

Kozmička cenzura

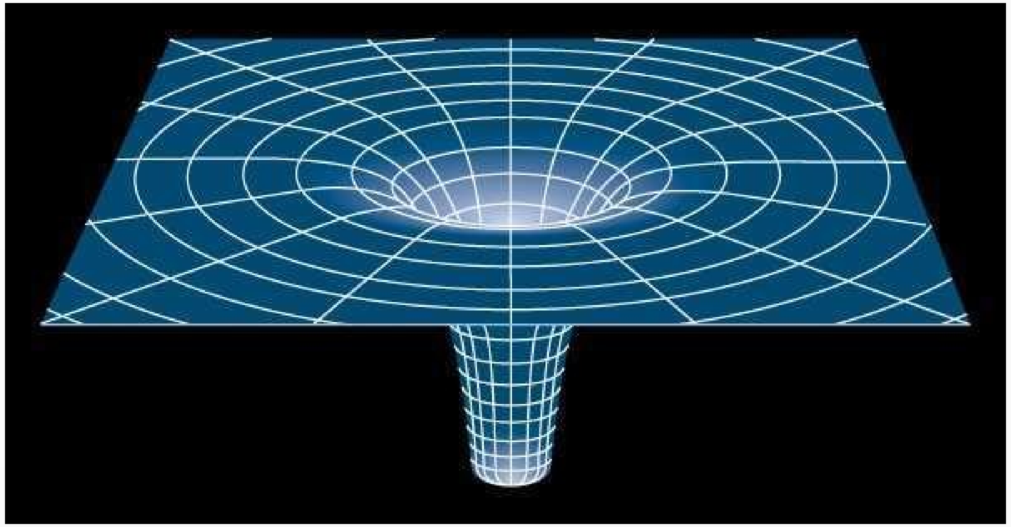
- Govori o strukturi krajnjeg produkta gravitacijskog kolapsa
- Singulariteti se nerijetko nalaze u rješenjima Einsteinove jednadžbe
  - Narušenje kauzalnosti
  - Ne poznajemo ponašanje u singularitetu
- Rješenje: Kozmička cenzura
  - singularitet nikada nije “gol” već je “cenzuriran” horizontom
  - što prijeđe horizont ne može iz njega izaći

Schwarzschildovo rješenje

- Einsteinova jednadžba $$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$
- Sfernosimetrično vakuumsko rješenje je jedinstveno (Birkhoffov teorem, “no-hair”)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$



Schwarzschildovo rješenje

- u r=0 i r=2GM komponente metrike divergiraju
  - komponente su koordinatno ovisne - divergencija može biti koordinaatno ovisna
- 2-sfera r=2GM je horizont događaja (otklonjivi singularitet), a r=0 je topološki singularitet - kozmička cenzura

Parametri

- Ideja:
  - kvazilokalni prametri
  - globalno očuvani
  - poklapaju se s paramerima koji opisuju rješenja (“no-hair”)

$$Q = -\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma}\, n_\mu J_e^\mu \longleftarrow \nabla_\nu F^{\mu\nu} = J_e^\mu$$

$$Q = -\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma}\, n_\mu \nabla_\nu F^{\mu\nu} \longrightarrow Q = -\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_\mu \sigma_\nu F^{\mu\nu}$$

Parametri

$$J^{\mu}_{R} = K_{\nu} R^{\mu\nu} \longrightarrow J^{\mu}_{R} = \nabla_{\nu}(\nabla^{\mu} K^{\nu})$$

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma}\, n_{\mu} J^{\mu}_{R} \longrightarrow E_R = \frac{1}{4\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_{\mu}\sigma_{\nu}\nabla^{\mu} K^{\nu}$$

$$J^{\mu}_{\phi} = R_{\nu} R^{\mu\nu} \longrightarrow J = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma^{(2)}}\, n_{\mu}\sigma_{\nu}\nabla^{\mu} R^{\nu}$$

$$A = \int_{H} \sqrt{\gamma^{(2)}}\, d^2x$$

Kerrove crne rupe

- Nenabijena rotirajuća crna rupa
- Jedinstveno rješenje za aksijalnosimetrično stacionarno vakuumsko prostorvrijeme

$$s^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{\rho}\right) dt^2 - \frac{2GMar\sin^2\theta}{\rho^2}(dt d\theta + d\theta dt)$$
$$+\frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho}\left[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right] d\phi^2$$

$$\Delta(r) = r^2 - 2GMr + a^2$$
$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$a = J/M$$

Kerrove crne rupe

- Kako bismo našli horizonte tražimo $\Delta(r)=r^2-2MGr+a^2=0$
- Broj rješenja ovisi o diskriminanti $D=G^2M^2-a^2$
  - $D>0$ - dva horizonta
  - $D=0$ - jedan horizont
  - $D<0$ - nula horizonata - kozmička cenzura
- $\longrightarrow D\geq 0 \longrightarrow G^2M^2\geq J^2/M^2 \longrightarrow M \geq \sqrt{\frac{|J|}{G}}$ (=Ekstremna Kerrova c.r.)

Geometrijske nejednakosti

- Koristimo definiciju površine za Kerra $A = 8\pi\left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^4}\right)$
- Možemo zaključiti: $\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m \; (=\text{Swarzschild})$
- Koristeći još $M \geq \sqrt{\frac{|J|}{G}}$ uz G=1 imamo:

$$8\pi|J| \; \leq \; 8\pi m^2 \; = \; A - 8\pi\sqrt{m^4 - J^2} \leq A$$

Geometrijske nejednakosti

- Uz pretpostavku kozmičke cenzure došli smo do skupa nejednakosti:

$$\sqrt{|J|} \leq M \; (=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \quad *$$

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \leq m \; (=\text{Swarzschild})$$

$$8\pi|J| \leq A \; (=\text{Ekstremna Kerrova c.r.}) \quad **$$

- Ove nejednakosti vrijede i za općenitije slučajeve gravitacijskog raspada

Penroseov argument

- Penrose je pokazao da vrijedi nejednakost (*) bez zahtjeva na simetriju
- Pojednostavljena verzija zahtjeva nešto pretpostavki:
  - osna simetrija
  - vrijedi (**) - nužno da bi povećanje površine povlačilo povećanje mase
- Hawkingov teorem: *Uz slabu energijsku pretpostavku i kozmičku cenzuru,površina horizonta događaja budućnosti u asimptotski ravnom prostorvremenu je nepadajuća*
- $A = 8\pi\left(m^2 + \sqrt{m^4 - J^4}\right) \longrightarrow m_{bh} = \sqrt{\frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}}$

Penroseov argument

- Gravitacijski kolaps:
  - Gravitacijski kolaps rezultira crnom rupom (slaba kozmička cenzura)
  - Konačno stanje prostorvremena je stacionarno. Također, pretpostavit ćemo da je nakon nekog konačnog vremena sva materija upala u crnu rupu (prešla horizont događaja).
- Iz jedinstvenosti znamo da je Kerrovo jedino rješenje za osnosim. stac. prostorvrijeme
- m_0, J_0, A_0 su parametri konačne crne rupe
- Za prostorvrijeme u kojem se kolaps desio s ang. mom J i masom m znamo:
  - $J=J_0$ jer je kod osne simetrije očuvan angularni moment
  - $m \geq m_0$ jer gravitacijski valovi nose pozitivnu energiju $\longrightarrow$ $m_{bh} \leq m$
  - $A_0 \geq A$ po Hawkingovom teoremu

Penroseov argument

- Koristeći definiciju za masu crne rupe imamo:

$$\sqrt{\frac{A}{16\pi}+\frac{4\pi J^2}{A}} = m_{bh} \leq m \longrightarrow \sqrt{\frac{A}{16\pi}+\frac{4\pi J^2}{A}} \geq \sqrt{\frac{\cancel{8\pi}|J|}{\cancel{16\pi}_2}+\frac{\cancel{4\pi} J^{\cancel{2}}}{\cancel{8\pi}_2 \cancel{|J|}}} = \sqrt{|J|} \leq m$$

$$8\pi|J| \leq A$$

- Ovaj rezultat govori da se za skup nejednakosti koji vrijedi za Kerrovu crnu rupu očekuje da vrijedi i za osnosimetričnu dinamičku crnu rupu

Teoremi i otvoreni problemi

- Dokazani bez pretpostavke o kozmičkoj cenzuri
- *Neka je zadan osnosimetričan, asimptotski ravan i **maksimalan** početni skup podataka s **dva** asimptotska kraja. Neka su m i J ukupna masa i angularni moment na jednom od krajeva. Tada vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\sqrt{|J|} \leq m \ (=Ekstremna\ Kerrova\ c.r.)$$

- *Neka je zadana **osnonosimetrična**, zatvorena, marginalno zatočena i stabilna površina Σ u prostorvremenu s nenegativnom kozmološkom konstantom koje zadovoljava dominantni uvjet na energiju. Tada vrijedi sljedeća nejednakost*

$$8\pi|J| \leq A \ (=Ekstremni\ Kerrov\ horizont)$$

gdje su A i J površina i angularni moment površine Σ

- Pretpostavlja se da nejednakost slična prethodnoj **vrijedi za obična tijela**

Hvala na pažnji

Mate Picukarić

Literatura

[1] R. Penrose: *Naked singularities*, Ann. New York Acad. Sci.,224:125-134, 1973.

[2] Blaschke, Wilhelm: *Die Grundlehren der Mathematischen* Wissenschaften. Berlin: Springer Verlag, 1950. Print.

[3] Suzana Bedić: *Kosa crnih rupa*, PMF 2016.

[4] Sean M. Carroll: *Spacetime and Geometry*, Pearson Education 2018.

[5] Robert M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago. 1984.

[6] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for black holes*

[7] Sergio Dain: *Geomeric inequalities for axially symmetric black holes*

[8] G.Huisken,T. Ilmanen: *The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality*, J. Differential geometry, 59:352-437, 2001.

[9] H. L. Bray: *Proof of the Riemannia Penrose conjecture using the positive mass theorem*, J. Differential Geometry, 59:177-267, 2001.

[10] S. Dain: *Proof of the angular momentum-mass inequality for axially symmetric black holes*, J. Differential Geometry, 79(1):33-67, 2008, gr-qc/0606105

[11] S. Dain: *Inequality between size and angular momentum for bodies*, Phys. Rev. Lett., 112:041101, Jan 2014, 1305.6645

[12] S. Dain, O.E. Ortiz: *Numerical evidences for the angular momentum mass inequality for multiple axially symmetric black holes*, Phys. Rev., D80:024045, 2009, 0905.0708

[13] X. Zhou: *Mass angular momentum inequality for axisymmetric vacuum data with small trace*, ArXiv e-prints, Sept. 2012,1209.1609