Čestična statistika

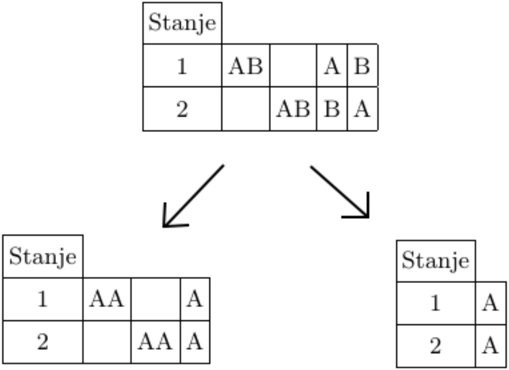
Nikola Herceg, mentor dr. sc. Tajron Jurić

PMF Zagreb, fizički odsjek

28. siječnja 2021.

Sadržaj

Prijelaz klasično → kvantno



Slika: Usporedba klasične i kvantne statistike.

- UV katastrofa
- Gibbsov paradoks

Naivni izvod

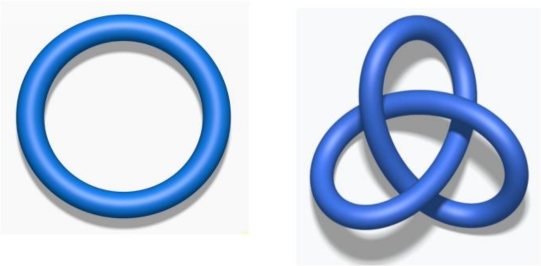
Valna funkcija: $\psi(\vec{x_1}, \vec{x_2})$

$$\psi(\vec{x_2}, \vec{x_1}) = e^{i\theta}\psi(\vec{x_1}, \vec{x_2})$$

$$e^{i\theta}\psi(\vec{x_2}, \vec{x_1}) = e^{2i\theta}\psi(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \equiv \psi(\vec{x_1}, \vec{x_2})$$

Zaključujemo $e^{i\theta} = \pm 1$.

Homotopija



Slika: Ne možemo otpetljati trostruki čvor.

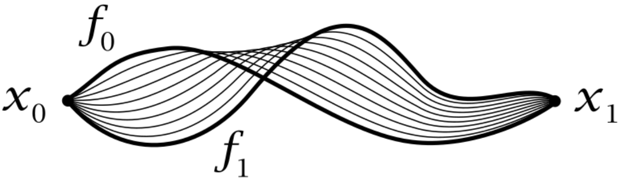
Homotopija je neprekidna deformacija između dva objekta.

Putevi

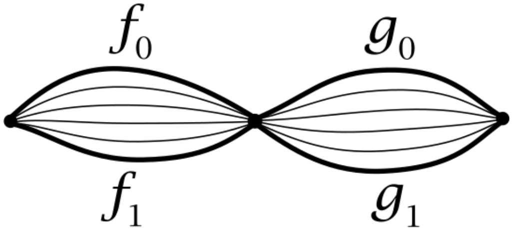
Put u topološkom prostoru X definiramo kao

$$f : [0, 1] \to X.$$

Homotopija je familija puteva f_t, $t \in [0, 1]$.



Grupira puteve f u klase homotopije $[f]$.

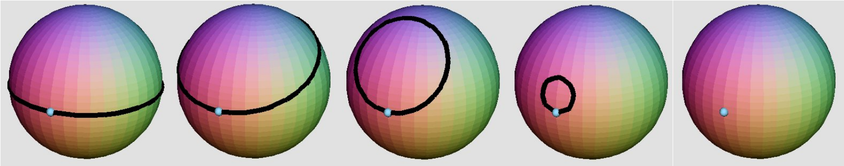


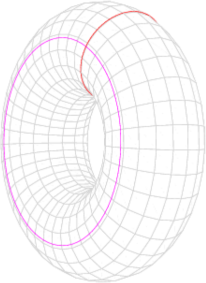
$$[f_0] \sim [f_1], \quad [g_0] \sim [g_1]$$
$$\Downarrow$$
$$[f_0 \cdot g_0] \sim [f_1 \cdot g_1]$$

Fundamentalna grupa

- Produkt puteva uvijek je definiran za petlje iz iste točke.
- Grupno množenje definiramo kao $[f][g] \equiv [f \cdot g]$.
- Klase dobivaju strukturu grupe $\pi_1(X)$.

Primjeri





$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$$
$$\pi_1(S^2) = 1$$
$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$
$$\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Integrali po putevima

Amplituda je

$$(x_b t_b \mid x_a t_a) = \langle x_b | \hat{U}(t_b, t_a) | x_a \rangle \,.$$

Zapišemo ju preko ekvidistantnih vremenskih intervala, $t_n - t_{n-1} = \epsilon$:

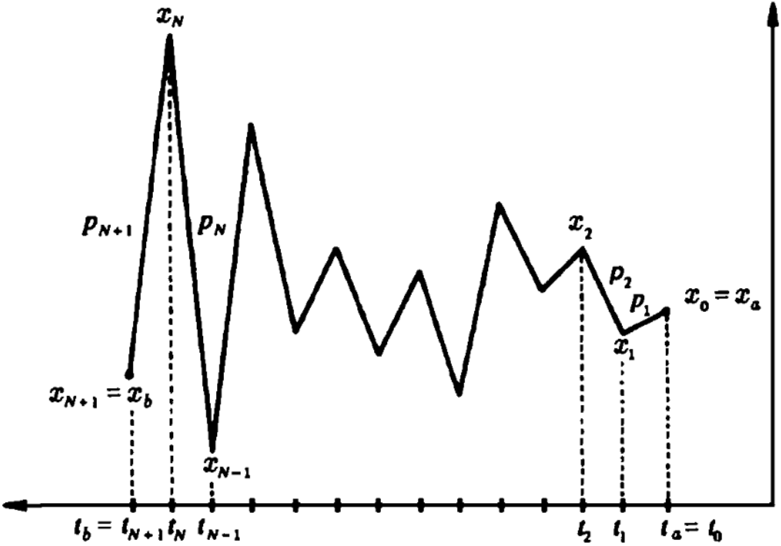
$$(x_b t_b \mid x_a t_a) = \left\langle x_b \middle| \hat{U}(t_b, t_N) \hat{U}(t_N, t_{N-1}) \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \hat{U}(t_n, t_{n-1}) \cdots \hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_a) \middle| x_a \right\rangle .$$

Nakon ubacivanja potpunog skupa stanja $\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, |x_n\rangle \langle x_n| = 1$ između svaka dva $\hat{U}$, dobivamo

$$
\begin{aligned}
&(x_b t_b \mid x_a t_a) \approx \\
&\approx \frac{1}{2\pi\hbar i\epsilon/M} \prod_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{A}^N\right),
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
\mathcal{A}^N = \epsilon \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{M}{2} \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{\epsilon} \right)^2 - V\left(x_n, t_n\right) \right].
$$


x_N
p_{N+1}
p_N
x_2
p_2
p_1
$x_0 = x_a$
x_1
$x_{N+1} = x_b$
x_{N-1}
$t_b = t_{N+1}$ t_N t_{N-1}
t_2 t_1 $t_a = t_0$

U limesu $N \to \infty \implies \epsilon \to 0$ dobivamo

$$(x_b t_b \mid x_a t_a) \equiv \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}x e^{i\mathcal{A}[x]/\hbar},$$

gdje je

$$\mathcal{A}[x] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{M}{2}\dot{x}^2 - V(x,t)\right] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(x,\dot{x})$$

klasična akcija.

Parcijalne amplitude

$$K(b, t_b; a, t_a) = \sum_{\alpha \in \pi_1(X)} \chi(\alpha) K^{\alpha}(b, t_b; a, t_a)$$

Sigurno vrijedi $\chi(\alpha) = 1$, no postoje li još neki konzistentni odabiri $\chi(\alpha)$?

Općenito koeficijenti $\chi(\alpha)$ moraju tvoriti skalarnu unitarnu reprezentaciju fundamentalne grupe.

Sustav identičnih čestica

Pravi konfiguracijski prostor je

$$X = (Y - \Delta)/S_n,$$
$$Y = \mathbb{R}^{3n}.$$

Fundamentalna grupa $\pi_1(X)$ je simetrična grupa S_n.

S_n ima $n!$ elemenata i dvije skalarne unitarne reprezentacije:

$$D^1(\alpha) = +1 \text{ za sve } \alpha,$$
$$D^2(\alpha) = \pm 1.$$

Ovo vodi na dvije vrste amplituda u 3D:

$$K^{\text{Bose}} = \sum_\alpha D^1(\alpha) K^\alpha,$$
$$K^{\text{Fermi}} = \sum_\alpha D^2(\alpha) K^\alpha.$$

Anioni

Konfiguracijski prostor za dvije čestice u dvije dimenzije je poput ravnine bez točke.

Fundamentalna grupa je $\mathbb{Z}$.

Sve reprezentacije su oblika $D^{\theta}(n) = e^{i\theta n}$.

Amplitude su oblika

$$K^{\text{anyon}} = \sum_{\alpha} D^{\theta}(\alpha) K^{\alpha}.$$

Zaključak

- Fermion ili bozon nije samo svojstvo čestice već i prostora unutar kojeg se nalazi.
- U tri dimenzije imamo dva tipa čestica.
- U dvije dimenzije u teoriji ih je beskonačno.
- Anioni su direktno eksperimentalno opservirani 2020.